

Ασκήσεις Τοπολογίας Μετρικών Χώρων

5 Φυλλάδιο

Παράδοση Τετάρτη 13 Ιανουαρίου

1. Δείξτε ότι αν μια ακολουθία (x_n) σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ) ικανοποιεί $\rho(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$ τότε η ακολουθία είναι Cauchy.
2. Αν ο χώρος X είναι συμπαγής και f_n, f συνεχείς συναρτήσεις $X \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ και $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ για κάθε $x \in X$ δείξτε ότι $f_n \rightarrow f$ με την sup μετρική.
3. Δείξτε ότι ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^n είναι ολικά φραγμένο αν και μόνο αν είναι φραγμένο.
4. Δείξτε ότι ο (X, ρ) είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι φραγμένη.
5. Θα λέμε ότι μία συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τοπικά σταθερή αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U με $x \in U$ ώστε η περιορισμένη στο U να είναι σταθερή. Δείξτε ότι ο X είναι συνεκτικός αν και μόνο αν κάθε τοπικά σταθερή συνάρτηση είναι σταθερή.