Ασκήσεις Τοπολογίας Μετρικών Χώρων

4 Φυλλάδιο

Παράδοση Τετάρτη 9 Δεκεμβρίου

1. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στο X, $x \in X$ και $x_n \to x$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X.

2. Αν A, B είναι συμπαγή υποσύνολα ενός μετρικού χώρου X αποδείξτε ότι το σύνολο $A \cap B$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X.

3. Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $Y \subset X$ εφοδιασμένο με την σχετική μετρική. Αν το Y είναι πλήρης μετρικός χώρος τότε το Y είναι κλειστό.

4. Έστω X μετρικός χώρος. Ο X είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε οικογένεια κλειστών $(K_i)_{i \in I}$ υποσυνόλων του X για τα οποία για κάθε πεπερασμένη επιλογή $\{i_1, \ldots, i_n\}$ ισχύει $\cap_{k=1}^{n} F_{i_k} \neq \emptyset$ ισχύει επιπλέον $\cap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

5. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Αν $x \in X$ και A συμπαγές υποσύνολο του X, τότε υπάρχει $y \in A$ ώστε $\rho(x, y) = \rho(x, A)$.