

Ασκήσεις Τοπολογίας Μετρικών Χώρων

3 Φυλλάδιο

Παράδοση Παρασκευή 13 Οκτωβρίου

1. Έστω X, ρ μετρικός χώρος. Δείξτε ότι η

$$\rho_2 : (X \times X) \times (X \times X) \rightarrow \mathbb{R}$$

με $\rho_2(a, b) = (\rho(x_a, x_b)^2 + \rho(y_a, y_b)^2)^{1/2}$ είναι μία μετρική στο $X \times X$.
Αποδείξτε ότι το σύνολο $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$, με την μετρική ρ_2 .

2. Αποδείξτε ότι στον \mathbb{R}^2 η ακολουθία $x_n \rightarrow x$ με την μετρική ρ_2 αν και μόνο αν $x_n \rightarrow x$ με τις μετρικές ρ_1, ρ_∞ .
3. Έστω X μετρικός χώρος και A, B υποσύνολα του X . Αποδείξτε ότι

(α') αν $A \subset B$ τότε $A^\circ \subset B^\circ$ και ότι $\bar{A} \subset \bar{B}$.

(β') $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

(γ') $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Ισχύει κατ' ανάγκη $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ και $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

4. Αποδείξτε ότι ο χώρος \mathbb{R} δεν έχει μεμονωμένα σημεία.