

## Ασκήσεις Τοπολογίας Μετρικών Χώρων

2 Φυλλάδιο

Παράδοση Παρασκευή 30 Οκτωβρίου

1. Αποδείξτε ότι σε κάθε μετρικό χώρο τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα.
2. Δίνεται ότι ο  $(X, \rho)$  είναι μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι η  $\rho'$  που ορίζεται από την

$$\rho'(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$$

είναι άλλη μία μετρική του  $X$ .

3. Θεωρούμε την συνάρτηση  $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ορισμένη από

$$d((x_1, y_2), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2| & \text{αν } x_1 = x_2 \\ |y_1| + |x_1 - x_2| + |y_2| & \text{αν } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η  $d$  είναι μία μετρική στο  $\mathbb{R}^2$ . Ζωγραφίστε τις σφαίρες  $S((2, 0), 1)$ ,  $S((1, 2), 1)$  και  $S((1, 2), 2)$ .

4. Δώστε ένα παράδειγμα άπειρης ένωσης κλειστών συνόλων που να μην είναι κλειστό.
5. Έστω  $Y$  ένα πεπερασμένο σύνολο του  $\mathbb{R}$  εφοδιασμένο με την σχετική μετρική. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο του  $Y$  είναι ανοιχτό και κλειστό.
6. Αποδείξτε ότι κάθε ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , ως προς την συνηθισμένη μετρική, είναι ένωση αριθμήσιμης οικογένειας, ξένων ανά δύο ανοιχτών διαστημάτων.