Ασκήσεις Τοπολογίας Μετρικών Χώρων

1 Φυλλάδιο

Παράδοση Τετάρτη 21 Οκτωβρίου

1. Βρείτε ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις ορίζουν μετρικές στο σύνολο $\mathbb{R}$. $d_1(x,y)=|x-y|^2$, $d_2(x,y)=|x^2-y^2|$, $d_3(x,y)=|x-y|^3$, $d_4(x,y)=|x^3-y^3|$.

2. Θεωρούμε τους πραγματικούς $1<p,q<+\infty$ που ικανοποιούν την σχέση $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ ορισμένη ως $f(x)=x^{p-1}$ είναι $1-1$ και επί. Δείξτε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ ορισμένη ως $g(x)=x^{q-1}$.

3. Ορίζουμε $E_1=\int_0^a x^{p-1}dx$ και $E_2=\int_0^b x^{q-1}dx$. Υπολογίστε τα E_1,E_2. Αποδείξτε ότι $E_1+E_2\geq ab$ κάνοντας χρήση της γραφικής παράστασης της f. Δείξτε ότι
$$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

4. Δείξτε την ανισότητα Hölder: Αν p,q είναι όπως στην άσκηση 1 και $x_1,\ldots,x_k$, $y_1,\ldots,y_k$ είναι πραγματικοί αριθμοί τότε ισχύει
$$\sum_{i=1}^k|x_iy_i|\leq\left(\sum_{i=1}^k|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^k|y_i|^q\right)^{1/q}.$$

5. Δείξτε ότι ο χώρος $\mathbb{R}^k$ εφοδιασμένος με την συνάρτηση
$$r(x,y)=\left(\sum_{i=1}^k|x_i-y_i|^p\right)^{1/p}$$
για κάθε $1<p<+\infty$ είναι μετρικός χώρος.

6. Θεωρούμε το σύνολο $C[0,2]$ εφοδιασμένο με την ρ_1 μετρική. Ποιά είναι η σχέση του υποσυνόλου $C[0,1]$ εφοδιασμένου με την ρ_1 μετρική και του περιορισμού της μετρικής του $C[0,2]$ στον $C[0,1]$ (σχετική μετρική).

7. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών. Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Δείξτε ότι κάθε ρητός αριθμός x μπορεί να γραφεί ως $x=p^k\frac{a}{b}$, όπου $k\in\mathbb{Z}$ και $a,b\in\mathbb{Z}$, τα a,b δεν διαιρούνται με p. Ορίζουμε $v(x)=k$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\rho(x,y)=\frac{1}{p^{v(x-y)}}$ είναι μία μετρική στο $\mathbb{Q}$.