Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ
Εξετάσεις 21 Ιουλίου 2014

Θεμα 1.

(1) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

του οποίου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο δίνεται ότι είναι το $\chi_A = -(1-x)x(3-x)$.

(α΄) Να βρεθεί μια βάση για κάθε ιδιόχωρο του A.

(β΄) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{3\times 1}$, αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του A.

(γ΄) Να βρεθεί πίνακας $\Gamma \in \mathbb{R}^{3\times 3} \neq 0$ ώστε $\Gamma A = A\Gamma = 0$.

(2) Να αποδειχτεί ότι κάθε κανονικός πίνακας με πραγματικές ιδιοτιμές είναι ερμητιανός.

(3) Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ο οποίος έχει τάξη 1 και ίχνος 2. είναι σωστό ότι ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος;

Δικαιολογήστε τις απάντησεις σας.

Λύση:

(1) (α΄) Προφανώς οι ιδιοτιμές είναι οι $1, 0, 3$. Για κάθε ιδιοτιμή υπολογίζουμε ένα ιδιοδιάνυσμα. Για την ιδιοτιμή 1 ο ιδιόχωρος είναι μονοδιάστατος και ένα ιδιοδιάνυσμα που τον παράγει είναι το $(0,-1,1)^t$, για την ιδιοτιμή 0 ο ιδιόχωρος είναι επίσης μονοδιάστατος και ένα ιδιοδιάνυσμα που τον παράγει είναι το $(1,1,1)^t$ ενώ για την ιδιοτιμή 3 ο υπόχωρος είναι επίσης μονοδιάστατος και ένα ιδιοδιάνυσμα που τον παράγει είναι το $(-2,1,1)^t$.

(β΄) Παρατηρούμε ότι ο πίνακας μας είναι συμμετρικός (πραγματικός ερμητιανός) και συνεπώς οι ι-διόχωροι είναι ανά δύο κάθετοι. Άρα για να βρούμε μια ορθοκανονική βάση αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα αρκεί να διαιρέσουμε τα διανύσματα που βρήκαμε παραπάνω με τα μέτρα τους. Οπότε μια ορθοκανονική βάση αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα είναι η

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Προσοχή: Αν εφαρμόσετε την μέθοδο Gram-Schmidt θα πρέπει με κάποιο τρόπο να δικαιολογήσετε ότι τα διανύσματα που προκύπτουν είναι ιδιοδιανύσματα.

(γ΄) Παρατηρούμε ότι το ιδιοδιάνυσμα $(1,1,1)^t$ ανήκει στον πυρήνα του πίνακα, άρα

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Αφού και οι δύο πίνακες είναι συμμετρικοί αν θεωρήσετε τον πολλαπλασιασμό με αντίθετη σειρά θα πάρετε πάλι 0.

Εναλλακτικά θα μπορούσατε να επιχειρηματολογήσετε και ως εξής: Ο πίνακας A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο ίσο με το ελάχιστο $m_A(x)$, άρα αφού $m_A(A) = 0$ έχουμε ότι $A\Gamma = 0$ αν θέσουμε $\Gamma = (A - I_3)(A - 3I_3)$. Ο πίνακας Γ είναι μη μηδενικός γιατί διαφορετικά θα ικανοποιούσε ένα πολυώνυμο βαθμού μικρότερου από το ελάχιστο. Τέλος παρατηρήστε ότι ο πίνακας Γ αντιμετατίθεται με τον πίνακα A, αφού ο πίνακας Γ είναι πολυωνυμική έκφραση του A.

Επίσης θα μπορούσατε να γράψετε τον πίνακα $A = P\mathrm{diag}(0,1,3)P^{-1}$ και να θέσετε

$$\Gamma = P\mathrm{diag}(1,0,0)P^{-1}.$$

Τέλος θα μπορούσατε να θεωρήσετε τον χώρο που παράγουν οι γραμμές οι ή στήλες (είναι ο ίδιος αφού ο A είναι συμμετρικός) να υπολογίσετε τον κάθετο υπόχωρο και να πάρετε έναν συμμετρικό πίνακα που να έχει γραμμές διανύσματα από τον κάθετο υπόχωρο.

(2) Κάθε κανονικός πίνακας είναι διαγωνίσιμος μέσω μοναδιαίου πίνακα U, δηλαδή

$$U^*AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

άρα
$$A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)U^*$$
Εφαρμόζοντας στην παραπάνω σχέση τον $*$ έχουμε ότι
$$A^* = U\mathrm{diag}(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n)U^* = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)U^* = A$$
αφού $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

(3) Ο πίνακας A έχει τάξη 1 άρα η διάσταση του πυρήνα του θα είναι ίση με $n-1$. Ο πυρήνας ταυτίζεται με τον ιδιόχωρο της ιδιοτιμής 0. Επιπλέον ο πίνακας έχει άλλη μια ιδιοτιμή ίση με 2 η οποία θα έχει ιδιόχωρο διάστασης ≥ 1. Αφού όμως συνολικά οι διαστάσεις δεν μπορεί να ξεπερνάνε το n καταλήγουμε ότι
$$\dim V_A(0) + \dim V_A(1) = n$$
και ο πίνακας είναι διαγωνίσιμος.

Θέμα 2

(1) Θεωρούμε τον χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{R}_2[x]$ βαθμού το πολύ ίσου με δύο και την γραμμική απεικόνιση:
$$f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$$
που ορίζεται ως:
$$\begin{aligned} f(x^2+x+1) &= x^2+x+1 \\ f(x) &= ax^2+bx \\ f(1) &= 0 \end{aligned}$$
με $a \neq b$.
  (α΄) Δείξτε ότι η f είναι τριγωνίσιμη για όλες τις τιμές $a, b \in \mathbb{R}$.
  (β΄) Εξετάστε για ποιες τιμές των a, b, είναι η f διαγωνίσιμη.

(2) Έστω A κανονικός πίνακας. Δείξτε ότι το μέτρο της i-στήλης του A είναι ίσο με το μέτρο της i-γραμμής του A.

(3) Είναι σωστό ότι κάθε άνω τριγωνικός μη μηδενικός $n \times n$ πίνακας, με μηδενικές ιδιοτιμές δεν είναι διαγωνίσιμος;

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

Λύση:

(1) (α΄) Θεωρούμε την βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ αποτελούμενη από τα πολυώνυμα $1, x^2+x+1, x$.
Παρατηρούμε ότι
$$f(x) = ax^2 + bx = a(x^2+x+1) + (b-a)x - a.$$
Άρα ο πίνακας της γραμμικής συνάρτησης ως προς την παραπάνω διατεταγμένη βάση είναι ο
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}$$
ο οποίος είναι άνω τριγωνικός. Άρα η απεικόνιση είναι τριγωνίσιμη.
Εναλακτικά μπορούσατε να διαλέξατε μια άλλη βάση του χώρου, να γράψετε τον πίνακα και να υπολογίσετε ότι οι ιδιοτιμές είναι $\{1, 0, b-a\}$ που όλες είναι πραγματικές άρα ο πίνακας είναι τριγωνίσιμος.

(β΄) Αφού το $a \neq b$ το $b-a \neq 0$. Άρα αν $b-a \neq 1$ τότε ο πίνακας έχει 3 διαφορετικές ιδιοτιμές και είναι είναι διαγωνίσιμος. Στην περίπτωση $b-a=1$ τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το $-x(x-1)^2$. Το ελάχιστο πολυώνυμο λοιπόν είναι ή το $x(x-1)$ και ο πίνακας είναι διαγωνίσιμος ή το $x(x-1)^2$ και ο πίνακας δεν είναι διαγωνίσιμός.
Υπολογίζουμε ότι
$$A(A-I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

από όπου προκύπτει ότι ο πίνακας είναι διαγωνίσιμος σε αυτή την περίπτωση ($b - a = 1$) αν και μόνο αν $a = 0$.

(2) Για ένα κανονικό πίνακα ισχύει $|Ax| = |A^*x|$. Πράγματι

$$\langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle = \langle AA^*x, x \rangle = \langle A^*x, A^*x \rangle.$$

Παρατηρήστε τώρα ότι αν e_i είναι το στοιχείο του $\mathbb{C}^{n\times 1}$ που είναι παντού 0 εκτός από την γραμμή i, τότε το Ae_i είναι η i στήλη του πίνακα A. Ενώ το στοιχείο A^*e_i είναι i γραμμή του πίνακα A έχοντας εφαρμόσει συζυγία σε κάθε στοιχείο. Το αποτέλεσμα είναι τώρα σαφές.

(3) Ο πίνακας έχει μόνο την μηδενική ιδιοτιμή και χαρακτηριστικό πολυώνυμο $(-1)^n x^n$. Ο πίνακας θα ήταν διαγωνσίσιμος μόνο στην περίπτωση που το ελάχιστο πολυώνυμό του είναι ήταν το x. Στην περίπτωση αυτή όμως θα ήταν μηδενικός.

Εναλλακτικά θα μπορούσατε να πείτε ότι ο πίνακας θα ήταν διαγωνίσιμος αν και μόνο αν ο ιδιόχωρος της μοναδικής, μηδενικής ιδιοτιμής είχε διάσταση ίση με n. Αυτό όμως θα ήταν ισοδύναμο με το ότι ο πυρήνας έχει διάσταση n και ο πίνακας είναι μηδενικός.

Θέμα 3.

(1) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Να βρεθεί ορθογώνιος (δηλαδή πραγματικός μοναδιαίος) $U \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ώστε ο πίνακας $U^{-1}AU$ να είναι άνω τριγωνικός.

(2) Δίνεται ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ώστε ο πίνακας $Q^{-1}BQ$ να είναι άνω τριγωνικός.

(3) Να βρεθούν οι ιδιόχωροι και οι ιδιοτιμές του πίνακα $A^{15} - 3A^9 + 15I_2$.

(4) Να βρεθεί πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $\psi(x) \in \mathbb{R}[x]$ ώστε $B^{-1} = \psi(B)$.

(5) Δίνεται πίνακας $\Gamma \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Είναι σωστό ότι ο πίνακας $\Gamma + \Gamma^* + iI_n$ είναι αντιστρέψιμος;

Δικαιολογήστε τις απάντησεις σας.

Λύση:

(1) Υπολογίζουμε ότι ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές $1, 4$. Ένα ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής 4 είναι το $(1,1)^t$. Συμπληρώνουμε σε βάση του $\mathbb{R}^2$ με το $\{(1,1)^t, (1,0)^t\}$. Στην συνέχεια ορθοκανονικοποιούμε στην ορθοκανονική βάση

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

και σχηματίζουμε τον μοναδιαίο πίνακα:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

Παρατηρούμε ότι

$$U^*AU = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Προσοχή: Ο πίνακας είναι διαγωνίσιμος αφού έχει δύο διαφορετικές ιδιοτιμές. Όμως δεν είναι δυνατόν να έρθει σε διαγώνια μορφή μέσω μοναδιαίου πίνακα, αφού δεν είναι κανονικός. Αν απαιτήσουμε να κάνουμε αλλαγή βάσης μέσω μοναδιαίου πίνακα μπορούμε να τον φέρουμε μόνο σε άνω τριγωνική μορφή.

Εναλλακτικά θα μπορούσατε να δουλέψετε με την ιδιοτιμή 1 και να συμπληρώσετε ένα ιδιοδιάνυσμά της σε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.

(2) Από θεωρία γνωρίζουμε ότι ο πίνακας Q θα είναι της μορφής:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Πράγματι (και μόνο για την επαλήθευση, δεν θέλαμε να το υπολογίσετε) παρατηρούμε ότι

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Κάνοντας χρήση του φασματικού θεωρήματος για το πολυώνυμο $f(x) = x^{15} - 3x^9 + 15$, βλέπουμε ότι ο ζητούμενος πίνακας έχει ιδιοτιμές $f(1), f(4)$ και τα ίδια ιδιοδιανύσματα.

(4) Παρατηρούμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B είναι το $-x^3 + 6x^2 - 9x + 4$ το οποίο από το θεώρημα Caley-Hamilton θα πρέπει να μηδενίζεται από τον B, δηλαδή

$$-B^3 + 6B^2 - 9B + 4I_3 = 0,$$

οπότε πολαπλασιάζοντας με B^{-1} καταλήγουμε στο

$$B^{-1} = \frac{1}{4}\left(B^2 - 6B + 9I_3\right).$$

(5) Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $\Gamma + \Gamma^*$ είναι ερμητιανός άρα έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Αν ο ζητούμενος πίνακας δεν ήταν αντιστρέψιμος αυτό θα σήμαινε ότι

$$\det\left(\Gamma + \Gamma^* + iI_n\right) = 0$$

το οποίο θα σήμαινε ότι το $-i$ θα ήταν μια ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, άτοπο.