Ασκήσεις Γενικών Μαθηματικών

4 Φυλλάδιο

Παράδοση 9 Ιανουαρίου

1. Δίνεται ότι

$$F(x, y, z) = x^2 + 3xy - 2y^2 + 3xz + z^2 = 0.$$

   Να υπολογιστούν τα $\partial z/\partial x$ και $\partial z/\partial y$.

2. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ονομάζεται ομογενής τάξης n αν $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. Να αποδειχτεί ότι $(x, y) \cdot \nabla f = nf$.

3. Να υπολογιστούν όλες οι πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους του z αν $x^2 + 2yz + 2zx = 1$.

4. Δίνεται η καμπύλη που προκύπτει ως λύση του συστήματος

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 5, 3x - 2y - z = 0.$$

   Να βρεθούν οι εξισώσεις της εφαπτομένης και του κάθετου επιπέδου.

5. Να αποδειχτεί ότι για μία καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ που έχει σταθερό μέτρο ταχύτητας, η $\gamma''(t)$ είναι κάθετη στην εφαπτομένη της καμπύλης.

6. Να αποδειχτεί ότι μία καμπύλη $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ που βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας έχει ταχύτητα κάθετη στην ακτίνα της σφαίρας.

7. Να υπολογιστούν οι εξισώσεις του εφαπτόμενου επιπέδου και της κάθετης ευθείας της $x^2 + 2z^3 = 5y^2$ στο σημείο $(2, 2, 2)$.

8. Αν η συνάρτηση $f = f(x, y, z)$ έχει μερικές παραγώγους τουλάχιστον δευτέρας τάξης αποδείξτε ότι

$$\nabla \times \nabla f = 0,$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times f) = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f.$$