

Ασκήσεις Αλγεβρικής Γεωμετρίας

2 Φυλλάδιο

Παράδοση 23 Απριλίου 2012

1. Δίνονται οι καμπύλες

$$\begin{array}{lll} \alpha) y^2 = x^3 + 1 & \beta) y^3 + x^3 + 1 & \varsigma) x^2 y^2 + x^2 + y^2 = 0 \\ \delta) y^2 = x^6 - 1 & \epsilon) y^2 = x^5 - 1 & \phi) y^3 = x^5 - 1 \\ \gamma) y^3 = (x^2 + 1)^2 & \eta) y^7 = x^2(x - 1) & \iota) y + x^3 + xy^3 = 0 \end{array}$$

Ορισμένες πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα χαρακτηριστικής 0. Να βρεθούν τα ιδιόμορφα σημεία τους. Να βρεθούν οι προβολικές τους κλειστότητες. Πόσα περισσότερα σημεία στην επ άπειρο ευθεία έχει η προβολική κλειστότητα από την αρχική καμπύλη;

2. Για ένα σημείο P σε μία αλγεβρική πολλαπλότητα Q θεωρούμε το αντίστοιχο μέγιστο ιδεώδες m και τον τοπικό δακτύλιο $\mathcal{O}_P$. Ορίζουμε τον εφαπτόμενο χώρο Zariski $T_P(X)$ να είναι ο δυϊκός χώρος του m/m^2 . (Δείξτε ότι το m/m^2 έχει φυσιολογική δομή k -διανυσματικού χώρου χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό $k[X]/m \cong k$).

Αποδείξτε ότι

- (α') Για κάθε $P \in X$ $\dim T_P(X) \geq \dim X$ με ισότητα μόνο αν το P είναι μη ιδιόμορφο.
- (β') Για ένα μορφισμό $\phi: X \rightarrow Y$ υπάρχει φυσιολογική επαγόμενη k -γραμμική συνάρτηση $T_P(\phi): T_P(X) \rightarrow T_{\phi(P)}(Y)$.
- (γ') Αν ϕ είναι η κάθετη προβολή της παραβολής $x = y^2$ στον x -άξονα, δείξτε ότι η επαγόμενη συνάρτηση $T_0(\phi)$ των εφαπτόμενων χώρων στην αρχή των αξόνων είναι η μηδενική συνάρτηση.