

Ασκήσεις Αλγεβρικής Γεωμετρίας

1 Φυλλάδιο

Παράδοση 27 Μαρτίου 2012

1. Δίνεται η επίπεδη καμπύλη που ορίζεται από την εξίσωση $y = x^2$. Ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος συντεταγμένων είναι ισόμορφος με πολυωνυμικό δακτύλιο μίας μεταβλητής. Ναδειχθεί ότι ο δακτύλιος συντεταγμένων της καμπύλης $xy = 1$ δεν είναι ισόμορφος με πολυωνυμικό δακτύλιο μίας μεταβλητής.
2. Να βρεθούν τα μέγιστα και τα πρώτα ιδεώδη του δακτυλίου $\mathbb{Q}[x]$. Ίδια ερώτηση για τον $\mathbb{Z}[x]$.
3. Θεωρούμε το αλγεβρικό σύνολο στο $\mathbb{A}_k^3$ το οποίο ορίζεται από τις εξισώσεις $x^2 - yz$ και $xz - x$. Ναδειχθεί ότι είναι ένωση τριών αναγώγων συνιστωσών.
4. Να υπολογιστεί η πολλαπλότητα τομής στο $(0, 0)$ των παρακάτω πολυωνύμων
(α') $f = y - 2x, g = y^2 - x^2(x + 1)$,
(β') $f = y^2 - x^3, g = y^2 - x^2(x + 1)$,
(γ') $f = y^2 - x^3, g = y - ax, a \in k$.
5. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα της συνάρτησης

$$\phi : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^3$$

$$t \mapsto (t^2, t^3, t^6)$$

δίνεται από το $V(x^3 - y^2, y^2 - z)$. Ναδειχθεί ότι είναι ισομορφισμός συνόλων αλλά όχι ισομορφισμός αλγεβρικών πολλαπλοτήτων.

Να αποδειχθεί ότι η εικόνα της συνάρτησης

$$\phi : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^3$$

$$t \mapsto (t^3, t^4, t^5)$$

είναι $V(x^4 - y^3, x^5 - z^3, y^5 - z^4)$. Ναδειχθεί ότι είναι ισομορφισμός συνόλων αλλά όχι ισομορφισμός αλγεβρικών πολλαπλοτήτων.