Η εσωτερική δομή των μελανών οπών και η εικασία της *ισχυρής κοσμικής λογοκρισίας* στη γενική σχετικότητα

Μιχαλης Δαφερμος

Πανεπιστήμιο Princeton / Πανεπιστήμιο του Cambridge

Γενικό Σεμινάριο, Μαθηματικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Αθηνών

8 Ιανουαρίου 2015

Περίληψη

1. Η γενική σχετικότητα για μαθηματικούς
2. Οι λύσεις Schwarzschild και Kerr και η εικασία της «ισχυρής κοσμικής λογοκρισίας»
3. Ένα πλήρως μη γραμμικό πρόβλημα-μοντέλο στη σφαιρική συμμετρία
4. Φωτοειδείς ιδιομορφίες για τις εξισώσεις Einstein <u>χωρίς συμμετρία</u>
5. Τι απόμεινε να αποδειχθεί;

1. Η γενική σχετικότητα για μαθηματικούς

Η «γενική σχετικότητα» δεν είναι τίποτε άλλο από τη μελέτη τών 4-διάστατων **Lorentzian*** πολλαπλοτήτων $(\mathcal{M}, g)$ που ικανοποιούν τις περίφημες εξισώσεις Einstein, που στην περίπτωση του κενού έχουν την εξής απλή μορφή

$$\mathrm{Ric}(g) = 0.$$

*Η Lorentzian γεωμετρία είναι ακριβώς όπως η Riemannian γεωμετρία, μόνο που τα διανύσματα $v \neq 0$ μπορούν νά έχουν (1) αρνητικό, (2) θετικό, ή και (3) μηδενικό «μήκος στο τετράγωνο» $g(v, v)$. Αυτό ξεχωρίζει τις κατευθύνσεις του (1) χρόνου, του (2) χώρου και του (3) φωτός. Οι γεωδαισιακές $\gamma(s)$ με διανυσματικό πεδίο $v(s) = \dot{\gamma}(s)$ παντού χρονοειδές (δηλαδή $g(v, v) < 0$) αντιστοιχούν στα «σώματα σε ελεύθερη πτώση στο βαρυτικό πεδίο». Οι *φωτοειδείς γεωδαισιακές* (γ όπου $v = \dot{\gamma}$ ικανοποιεί $g(v, v) = 0$) αντιστοιχούν στις «τροχές του φωτές».

Δύο βασικές ιδιότητες των εξισώσεων $\mathrm{Ric}(g) = 0$ στην περίπτωση της Lorentzian γεωμετρίας είναι ότι

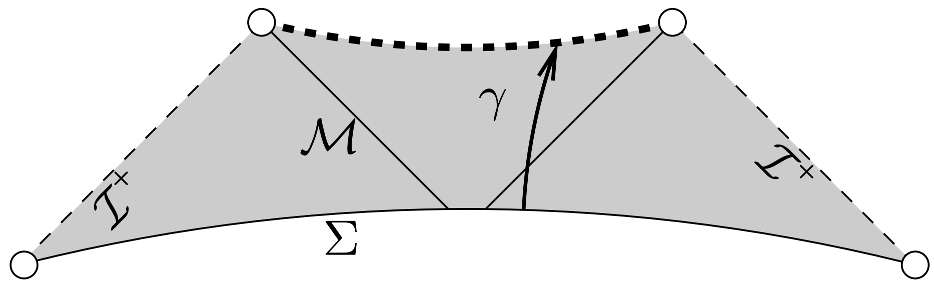
1. Αποτελούν σύστημα μη γραμμικών υπερβολικών* μερικών διαφορικών εξισώσεων και

2. Έχουν ένα καλώς ορισμένο **πρόβλημα αρχικών τιμών**: Οι αρχικές τιμές προσδιορίζονται από τη γεωμετρία μιας 3-διάστατης πολλαπλότητας Σ που αντιστοιχεί στην «αρχική κατάσταση του χώρου». Για κάθε τέτοια αρχική κατάσταση $(\Sigma, \bar{g}, K)$, υπάρχει ένας μοναδικός χωρόχρονος-λύση $(\mathcal{M}, g)$ που αντιστοιχεί σ′ αυτή (θεμελιώδες θέωρημα των Y. Choquet-Bruhat και R. Geroch). Το Σ ονομάζεται *επιφάνεια Cauchy*.

*Αντιθέτως, στην περίπτωση της Riemannian γεωμετρίας, οι ίδιες εξισώσεις είναι ελλειπτικές.)

2. Οι λύσεις Schwarzschild και Kerr και η εικασία της «ισχυρής κοσμικής λογοκρισίας»

Η λύση Schwarzschild

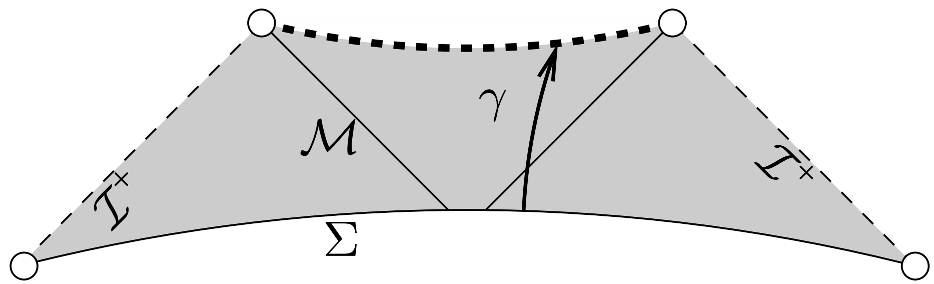


Ο χωρόχρονος Schwarzschild $(\mathcal{M}, g)$ είναι μια γεωδαισιακά μη-πλήρης λύση των εξισώσεων Einstein στο κενό

$$\mathrm{Ric}(g) = 0,$$

η οποία προκύπτει σαν λύση του προβλήματος αρχικών τιμών από μια «ασυμπτωτικά επίπεδη» επιφάνεια Cauchy Σ με δύο άκρες. (Είναι σφαιρικά συμμετρική και μπορεί να γραφεί σε κλειστή μορφή.) *Όσοι παρατηρητές γ μπαίνουν στη περιοχή της* **μαύρης τρύπας** *στη συνέχεια επιβιώνουν μόνο για πεπερασμένο ιδιόχρονο.*

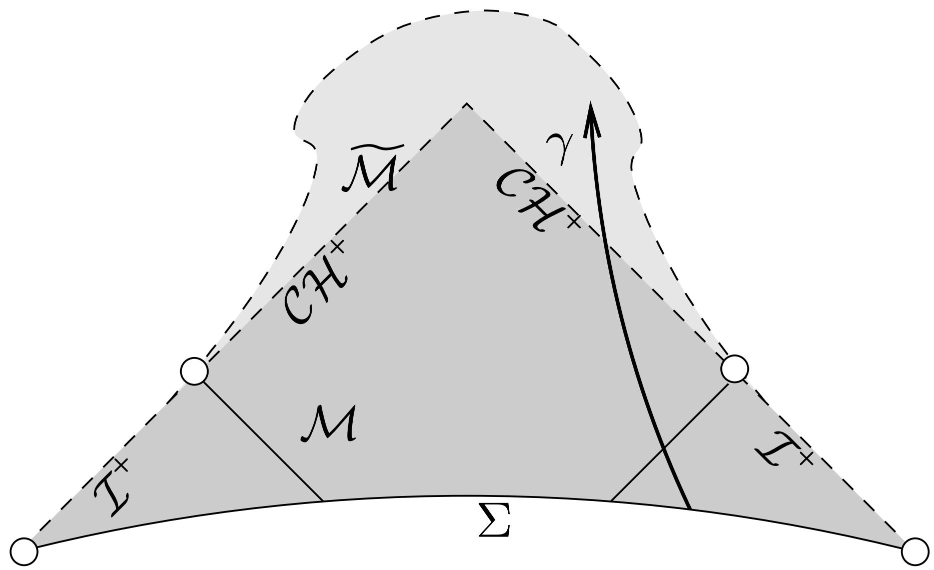
Η λύση Schwarzschild συνέχεια...



Μάλιστα, οι παρατηρητές γ που μπαίνουν στη μαύρη τρύπα τελικά καταστρέφονται από τις αποκλίνουσες παλιρροϊκές δυνάμεις. Ο χωρόχρονος «σταματάει» σε μια **χωροειδή ιδιομορφία** πέραν της οποίας είναι *μη επεκτάσιμος* ως πολλαπλότητα με συνεχή μετρική.

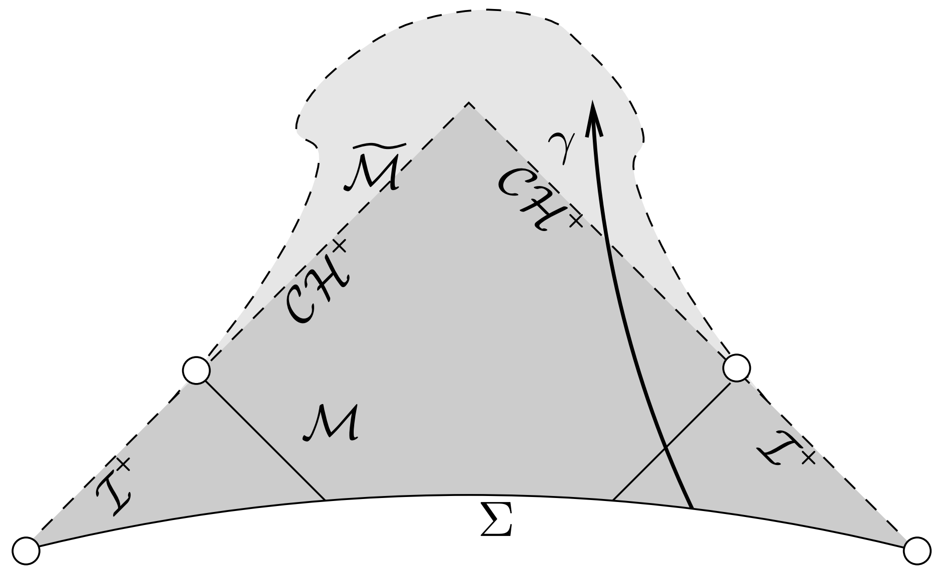
Η λύση Kerr $0 < |a| < M$

Η Schwarzschild είναι υποπερίπτωση μιας μεγαλύτερης οικογένειας λύσεων Kerr (μη σφαιρικά συμμετρική!) όπου η κατάσταση αλλάζει άρδην:



Ο χωρόχρονος $(\mathcal{M}, g)$ που προσδιορίζεται μονοσήμαντα από αρχικά δεδομένα **επεκτείνεται λεία** σ΄ έναν μεγαλύτερο χωρόχρονο στον οποίο ο γ μπαίνει σε πεπερασμένο ιδιόχρονο.

Λύση Kerr συνέχεια...



Αυτές οι επεκτάσεις είναι όμως <u>μη μοναδικές</u>.

Οπότε, ποιό είναι τό μέλλον των παρατηρητών τύπου γ*;*

Εικασία της «ισχυρής κοσμικής λογοκρισίας»

Εικασία (Ισχυρή κοσμική λογοκρισία, PENROSE 1972). *Για γενικά (generic) ασυμπτωτικά επίπεδα αρχικά δεδομένα* $(\Sigma, \bar{g}, K)$ *για τις εξισώσεις Einstein στο κενό*

$$\mathrm{Ric}(g) = 0,$$

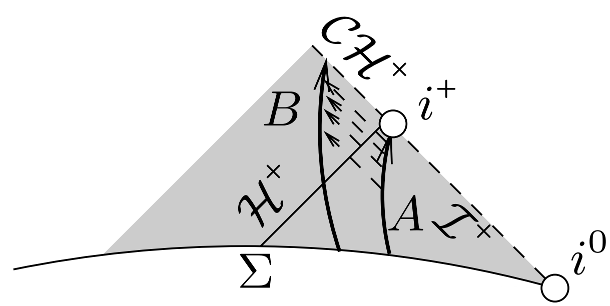
ο χωρόχρονος-λύση $(\mathcal{M}, g)$ *που προσδιορίζεται από αρχικά δεδομένα* ***δεν επεκτείνεται ως «ομαλή» Λορέντζια πολλαπλότητα.***

Η εικασία αυτή είναι βασικά μια πρόταση *καθολικής μοναδικότητας*, ή πιό λαϊκά

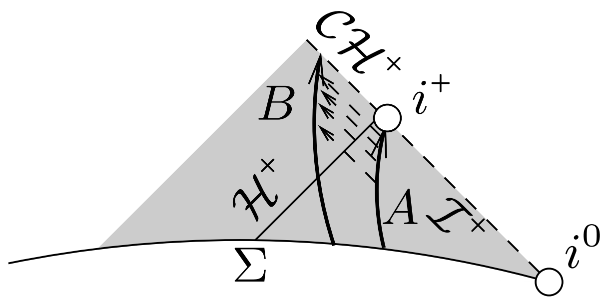
'Γενικά, το μέλλον προσδιορίζεται μονοσήμαντα από το παρόν'.

Η αστάθεια της «μετατόπισης προς το κυανό» (Penrose, 1968)

Ένας μηχανισμός αστάθειας του ορίζοντα Cauchy (και συνεπώς πιθανή ένδειξη για την αλήθεια της εικασίας) απότελει το φημισμένο φαινόμενο της «μετατόπισης προς το κυανό» που πρωτοσυζητήθηκε από τον Penrose:



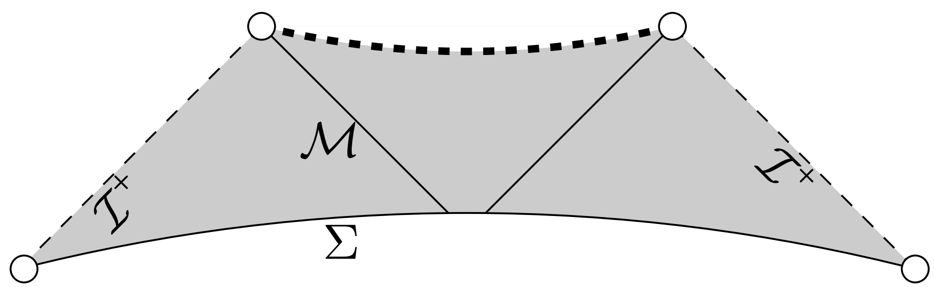
Ο Penrose επιχειρηματολόγησε ότι αυτό θα έκανε λύσεις της κυματοεξίσωσης $\Box_g \psi = 0$ (εδώ θεωρούμενης σαν μοντέλο για τις *γραμμικοποιημένες* εξισώσεις Einstein) να απειρίζονται σ′ ένα δεδομένο χωρόχρονο Kerr.



Αυτό ίσως να σημαίνει ότι η δημιουργία τέτοιων οριζόντων Cauchy είναι ασταθές φαινόμενο για τις λύσεις των εξισώσεων Einstein $\mathrm{Ric}(g) = 0$.

Βέβαια, το χειρότερο που μπορεί να συμβεί για τις λύσεις μιας γραμμικής εξίσωσης είναι να απειρίζονται *ακριβώς στον ορίζοντα* Cauchy $\mathcal{CH}^+$.

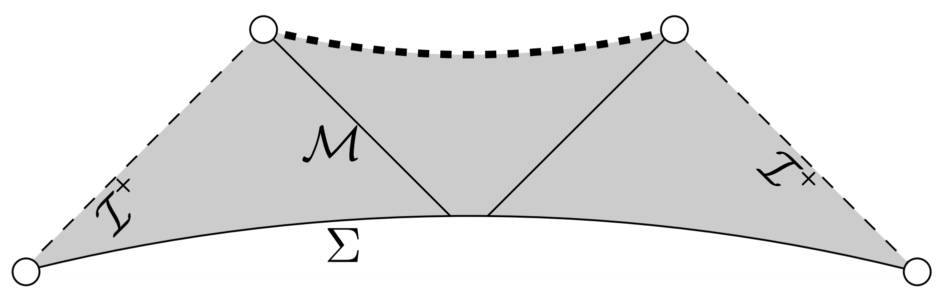
Στη πλήρη μη γραμμική θεωρία των $\mathrm{Ric}(g) = 0$, ίσως περιμένει κανείς ότι η επίδραση των μη γραμμικοτήτων είναι τέτοια ώστε να καταστρέφεται η λύση *πριν προλάβει να δημιουργηθεί μια φωτοειδής περιφέρεια τύπου ορίζοντα Cauchy*.



Ακριβώς, δηλαδή, όπως και στη Schwarzschild.

Απ᾽ αυτή τη σκέψη προέκυψε η εξής πιο ισχυρή εκδοχή της ισχυρής κοσμικής λογοκρισίας

Εικασία (**Πολύ** ισχυρή κοσμική λογοκρισία). *Για γενικά ασυμπτωτικά επιπεδά αρχικά δεδομένα* $(\Sigma, \bar{g}, K)$*, ο χωρόχρονος-λύση* $(\mathcal{M}, g)$ *των* $\mathrm{Ric}(g) = 0$ *είναι μη επεκτάσιμη σαν Λορέντζια πολλαπλότητα με συνεχή μετρική και επιπλέον η ιδιομορφία της μπορεί να θεωρηθεί «χωροειδής».*



3. Ένα πλήρως μη γραμμικό πρόβλημα-μοντέλο στη σφαιρική συμμετρία

Οι εξισώσεις *Einstein–Maxwell*–βαθμωτό πεδίο στη σφαιρική συμμετρία

Το πιο απλό πρόβλημα-μοντέλο που επιτρέπει την μελέτη του φαινομένου **στη σφαιρική συμμετρία** αποτελείται από το εξής σύστημα

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi (T^{\phi}_{\mu\nu} + T^{F}_{\mu\nu})$$

$$T^{\phi}_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi$$

$$T^{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (g^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta})$$

$$\Box_g \psi = 0, \qquad \nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0, \qquad dF = 0$$

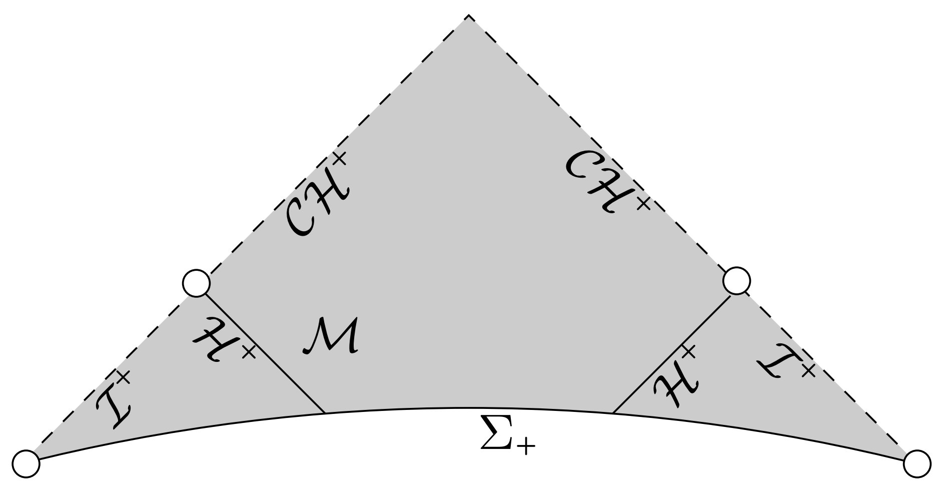
(Όταν το $\phi = 0$, τότε υπάρχει μια γνώστη λύση σφαιρικά συμμετρική λύση (με παραμέτρους $Q < M$) που ονόμαζεται Reissner-Nordström κι έχει παρόμοιες ιδιότητες με την Kerr.)

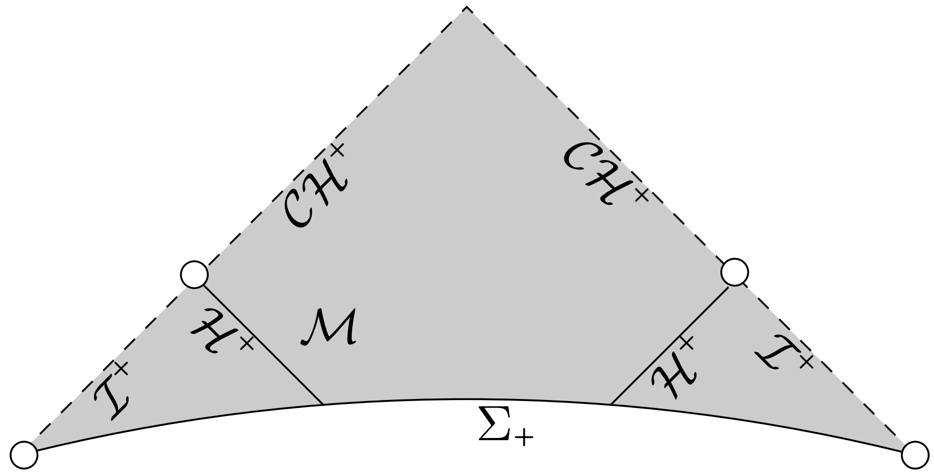
Το σύστημα μελετήθηκε «ευριστικά» από τους Poisson–Israel και Ori κι ύστερα αριθμητικά από τους Gnedin–Gnedin 1993, Gundlach–Price–Pulin 1994, Bonano–Droz–Israel–Morsink 1995, Brady–Smith 1995, Burko 1997 στην αρχή με κάπως αντικρουόμενα αποτελέσματα.

Τελικά όμως για αυτό το σφαιρικά συμμετρικό πρόβλημα-μοντέλο μπορούν τα πάντα να αποδειχθούν μαθηματικά!

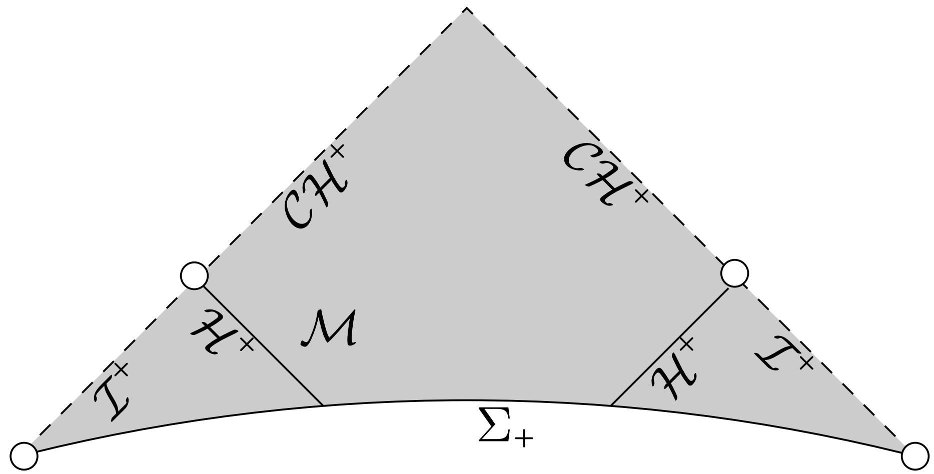
Θεώρημα 1 (Μ.Δ. 2001, 2003, 2011). *Έστω* $(\mathcal{M}, g, \phi, F)$ *η μοναδική λύση του συστήματος Einstein–Maxwell–βαθμωτό πεδίο που προκύπτει από* ***σφαιρικά συμμετρικά*** *ασυμπτωτικά επίπεδα δεδομένα που είναι επαρκώς κοντά σε δεδομένα Reissner–Nordström με παραμέτρους* $0 < Q_{RN} < M_{RN}$.

1. Τότε, στο μέλλον μιας επιφάνειας Cauchy Σ_+, *το διάγραμμα Penrose του* $(\mathcal{M}, g)$ *και πάλι δίνεται από:*





2. Επιπλέον, **η μετρική επεκτείνεται συνεχώς** *πέραν της* $\mathcal{CH}^+$ *σε μια μεγαλύτερη Λορέντζια πολλαπλότητα* $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{g})$*, έτσι ώστε το* $\mathcal{CH}^+$ *να αποτελεί φωτοειδής επιφάνεια στον χωρόχρονο* $\widetilde{\mathcal{M}}$*. Όλες οι μη πλήρεις αιτιώδεις γεωδαισιακές του* $\mathcal{M}$ *επεκτείνονται έτσι ώστε να συνεχίζουν στον* $\widetilde{\mathcal{M}}$*. Το ίδιο το βαθμωτό πεδίο* ϕ *επεκτείνεται σαν συνεχής συνάρτηση στον* $\widetilde{\mathcal{M}}$*.*



3. Τέλος, <u>αν</u> το ϕ ικανοποιεί ένα <u>κάτω</u> φράγμα στις δύο συνιστώσες του ορίζοντα $\mathcal{H}^+$ τότε **απειρίζεται η μάζα Hawking** *σε όλο τον $\mathcal{CH}^+$. Συνεπώς, ο $(\mathcal{M}, g)$ είναι* **μη επεκτάσιμος** *ως χωρόχρονος με τοπικά L^2 σύμβολα Christoffel.*

Το θεώρημα μας λέει ότι στο πλαίσιο του <u>σφαιρικά-συμμετρικού προβλήματος-μοντέλο</u>, η «μετατόπιση προς το κυανό» **δέν επαρκεί** να καταστρέψει τον χωρόχρονο δημιουργόντας μια χωροειδή ιδιομορφία *πρίν* τον ορίζοντα Cauchy. Δημιουργεί πάντως μια *φωτοειδή ιδομορφία* ακριβώς στον ορίζοντα Cauchy, πέραν του οποίου η μετρική επεκτείνεται όμως συνεχώς.

Συνεπώς, στον «σφαιρικά συμμετρικό κόσμο», η **πολύ** ισχυρή κοσμική λογοκρισία **δέν ισχύει**, αλλά μια *πιό ασθενής* διατύπωση, που απαιτεί την μη επεκτασιμότητα στην πιο περιοριστική τάξη των μετρικών με τοπικά L^2 σύμβολα Christoffel (μια διατύπωση που αποδίδεται στον Χριστοδουλου) ίσως να ισχύει.

Μήπως όμως όλα αυτά όμως είναι απλά προιόντα της σφαιρικής συμμετρίας;;;

4. Φωτοειδείς ιδιομορφίες για τις εξισώσεις **Einstein** <u>χωρίς συμμετρία</u>

Η πρώτη ερώτηση είναι αν μπορεί κανείς να κατασκευάσει έστω κι ένα παράδειγμα τέτοιων φωτοειδών ιδιομορφών όπου τα σύμβολα Christoffel δεν είναι τοπικά L^2.

Αυτό το πρόβλημα λύθηκε σε μια καταπληκτική εργασία του J. Luk.

Ο Luk απέδειξε ότι αν ξεκινήσεις από έναν αρχικό κώνο με affine παράμετερο $\underline{u} \in [\underline{u}^*, 0)$ και με διάτμηση $\hat{\chi}$ που ικανοποιεί

$$|\hat{\chi}| \sim |\log(-\underline{u})|^{-p} |\underline{u}|^{-1}, \qquad p > 1$$

τότε, λύνεται το χαρακτηριστικό πρόβλημα αρχικών τιμών για τις εξισώσεις του κενού $\mathrm{Ric}(g) = 0$ σε μια επαρκώς μεγάλη περιοχή έτσι ώστε η άνω συμπεριφορά της διάτμησης να διατηρηθεί δημιουργώντας ένα φωτοειδές ιδιόμορφο σύνορο του χωρόχρονου.

Δεν απαιτείται καμία συμμετρία στα αρχικά δεδομένα!

Μια πιο ακριβής διατύπωση έχει ως εξής

Θεώρημα 2 (Luk)**.** *Έστω χαρακτηριστικά αρχικά δεδομένα για τις εξισώσεις Einstein στο κενό* $\mathrm{Ric}(g) = 0$ *ορισμένα σε μια φωτοειδή επιφάνεια* $\mathcal{N}^{\mathrm{out}} \cup \mathcal{N}^{\mathrm{in}}$*, όπου* $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}$ *παραμετρίζεται από affine παράμετρο* $\underline{u} \in [\underline{u}^*, 0)$*, και τα δεδομένα είναι ομαλά στην* $\mathcal{N}^{\mathrm{in}}$ *αλλά ιδιόμορφα στην* $\mathcal{N}^{\mathrm{out}}$*, κατά τον τύπο*

$$|\hat{\chi}| \sim |\log(-\underline{u})|^{-p} |\underline{u}|^{-1}, \tag{1}$$

για $p > 1$*.*

Τότε η λύση υπάρχει σε μια περιοχή που καλύπτεται από φωτοειδείς επιφάνειες που ορίζονται από σταθερό u *ή* $\bar{u}$ *και που καλύπτουν συγκεκριμένα την περιοχή* $u^* \leq u < 0$*,* $\underline{u}^* \leq \underline{u} < 0$ *με* $\underline{u}^*$ *ως άνω και* u^* *επαρκώς μικρό. Επιπλέον, η συμπεριφορά* (1) *διατηρείται. Ο χωρόχρονος επεκτείνεται συνεχώς πέραν του* $\underline{u} = 0$*, αλλά τα σύμβολα Christoffel παύουν να είναι τοπικά* L^2*.*

Το άνω θεώρημα δεν μας λέει όμως ότι τέτοια σύνορα δημιουργούνται μέσα στις γενικές μαύρες τρύπες.

Συνδυάζοντας όμως τις τεχνικές του Luk με τις μεθόδους του σφαιρικά συμμετρικού προβλήματος, σε συνεργασία με τον Luk έχουμε αποδείξει το εξής αποτέλεσμα:

Πρώτα η ακριβής διατύπωση:

Θεώρημα 3 (Μ.Δ.–Luk, 2015)**.** *Έστω μας δίνονται χαρακτηριστικά αρχικά δεδομένα για τις εξισώσεις Einstein στο κενό* ***χωρίς συμμετρία****, ορισμένα σε δύο τέμνουσες πλήρεις-προς-το-μέλλον φωτοειδείς κώνους $\mathcal{H}_A^+ \cup \mathcal{H}_B^+$, έτσι ώστε, τα δεδομένα να είναι κοντά σε (και μάλιστα ασυμπτωτικά να τείνουν προς) τα δεδομένα που αντιστοιχούν στον ορίζοντα γεγονότων μιας λύσης Kerr με $a \neq 0$.*

Τότε η λύση που προκύπτει ορίζεται σε μια περιοχή που φτάνει μέχρι ενός ***ορίζοντα Cauchy*** *(ακριβώς όπως και στην Kerr!) πέραν του οποίου η μετρική επεκτείνεται μέν συνεχώς, αλλά στο οποίο είναι ανοιχτό το ενδεχόμενο τα σύμβολα Christoffel να απειρίζονται έτσι ώστε να μην είναι καν L^2.*

Σε απλούστερη γλώσσα, αυτό που αποδεικνύεται είναι το εξής:

Αν η <u>εξωτερική</u> περιοχή του χωρόχρονου Kerr είναι δυναμικά ευσταθής (κάτι που το αποδέχονται όλοι οι φυσικοί–αλλά δεν έχει ακόμα αποδειχθεί!), τότε **και το εσωτερικό είναι ευσταθές μέχρι και τον ορίζοντα Cauchy** *τουλάχιστον ως προς το θέμα της συνεχούς επεκτασιμότητας της μετρικής πέραν απ΄ αυτού.*

Το αποτέλεσμα επιτρέπει όμως τα σύμβολα Christoffel να απειρίζονται μη όντας κάν L^2 στον ορίζοντα, έτσι ώστε ο ορίζοντας Cauchy να αποτελεί φωτοειδής ιδιομορφία.

Πιο γενικά, το άνω θεώρημα μας δίνει και το εξής

Οποιοσδήποτε δυναμικός χωρόχρονος που τείνει στην Kerr ασυμπτωτικά σε μια εξωτερική περιοχή σε επαρκώς γρήγορα ρυθμό αναγκαστικά θα έχει κι έναν ορίζοντα Cauchy, πιθανόν ιδιόμορφη, αλλά πέραν του οποίου η μετρική επεκτείνεται συνεχώς.

5. Τι απόμεινε να αποδειχθεί;

Εικασία 1 (Ευστάθεια του εξωτερικού της Kerr). *Οι χωρόχρονοι που προκύπτουν από αρχικά δεδομένα* $(\Sigma, \bar{g}, K)$ *επαρκώς κοντά στην Kerr (με δύο άκρες) πράγματι ικανοποιούν την υπόθεση του άνω θεωρήματος, δηλαδή δημιουργούν ορίζοντα γεγονότων όπου η λύση τείνει ασυμπτωτικά σε μια κοντινή Kerr και μάλιστα σε επαρκώς γρήγορα ρυθμό.*

Αν ή άνω εικασία αποδειχθεί τότε θα ξέρουμε ότι όχι μόνο η ίδια η Kerr αλλά και <u>όλες οι λύσεις</u> του $\mathrm{Ric}(g) = 0$ που προκύπτουν απο αρχικά δεδομένα <u>κοντά στην Kerr</u> έχουν κι αυτές ορίζοντα Cauchy πέραν του οποίου η μετρική επεκτείνεται συνεχώς. Συνεπώς, ένα πόρισμα του θεωρήματός μας και της άνω εικασίας θα ήταν

Πόρισμα. *Η **πολύ** ισχυρή κοσμική λογοκρισία δεν ισχύει.*

Εικασία 2. *Για <u>γενικά</u> (generic) αρχικά δεδομένα επαρκώς κοντά στην Kerr, ο ορίζοντας Cauchy που δημιουργείται πράγματι είναι (καθολικά) ιδιόμορφο κατά το ότι οποιαδήποτε C^0 επέκταση $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{g})$ της μετρικής έχει σύμβολα Christoffel με άπειρη τοπική L^2 νόρμα στη γειτονιά οποιουδήποτε σημείου του $\partial\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$.*

Είναι ακριβώς το αντίστοιχο του τι αποδείχθηκε στην σφαιρική συμμετρία.

Αυτού του είδους συμπεριφορά είναι επαρκώς ιδιόμορφη έτσι ώστε οι τυχόν επεκτάσεις $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{g})$ να μην μπορούν ποτέ να θεωρηθούν έστω και *ασθενείς* λύσεις των εξισώσεων Einstein.

Ένα πόρισμα της άνω εικασίας θα ήταν

Πόρισμα. *Η διατύπωση του* ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΟΥ *της κοσμικής λογοκρισίας ισχύει* ***κοντά τουλάχιστον στην οικογένεια των λύσεων Kerr****.*

Ποιά είναι η καθολική (global) εικόνα όταν δεν ξεκινάμε από αρχικά δεδομένα επαρκώς κοντά στην Kerr;

Υπάρχει τότε γενικά και χωροειδές κομμάτι της ιδιομορφίας;

Ή μήπως προλαβαίνει πάλι μια αμιγώς φωτοειδής ιδιομορφία να «κλείσει» τον χωρόχρονο πριν προλάβει να δημιουργηθεί ένα τέτοιο χωροειδές κομμάτι;