
ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ
 ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
 ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
 ΤΜΗΜΑ ΜΟΥΣΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ - ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
 ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
 ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ Τ.Κ. 157 84
 Email: hspyridis@music.uoa.gr
 ☎ 01 - 72.77.832 FAX: 01 - 72.48.979

«Μουσικό διάστημα: Μήκος ή λόγος μηκών;»

Η έννοια «διάστημα» ως σχέσεως δύο αριθμών προς αλλήλους.

Η σχέση μεταξύ δύο αριθμών στη Πυθαγόρειο θεωρία της Μουσικής και σ' αυτήν ακόμη την *Κατατομή Κανόνος* του Ευκλείδου εκκαλείτο «διάστημα». Κάπως αργότερα η σχέση μεταξύ δύο αριθμών στην Αριθμητική και τη Γεωμετρία πήρε το όνομα «λόγος». Κατά την Πυθαγόρειο άποψη το κάθε μουσικό διάστημα ορίζεται από δύο αριθμούς. Δύο σχόλια του Πορφυρίου στην περί της αρμονίας διδασκαλία του Πτολεμαίου αναφέρουν

«καὶ τῶν κανονικῶν δὲ καὶ πυθαγορείων οἱ πλείους τὰ διαστήματα ἀντὶ τῶν ἡόγων ἡέγουσιν»

και

«τὸν ἡόγον καὶ τὴν σχέσιν τῶν πρὸς ἀλλήλους ὄρων τὸ διάστημα καλοῦσι»

γεγονός που σημαίνει ότι στην Πυθαγόρειο μουσική θεωρία οι έννοιες «διάστημα» και «λόγος (αριθμητική σχέση ή αναλογία)» είναι ταυτόσημες.

Αιωρείται η απορία για το πώς κατέληξαν οι Πυθαγόρειοι να εκφράζουν τα διαστήματα με αριθμητικές σχέσεις και μάλιστα με αριθμητικές σχέσεις μηκών. Υπάρχει ένας ισχυρισμός του Θέωνα του Σμυρναίου ότι άλλοι Πυθαγόρειοι θέλουν να υπολογίζουν τις αριθμητικές σχέσεις των συμφωνιών με βάρη, άλλοι με μεγέθη, άλλοι με την κίνηση και άλλοι με τα δοχεία. Σχετικά πειράματα παρουσιάζονται στην εικόνα 1. Δηλαδή καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μουσική θεωρία των αρχαίων Ελλήνων δημιουργήθηκε βάσει εμπειριών και πειραμάτων, που πραγματοποιήθηκαν επάνω σε έγχορδα όργανα, μονόχορδα ή πολύχορδα. Λογικόν είναι, λοιπόν, τα μουσικά διαστήματα να τα εκφράζουν με σχέσεις μηκών ηχούντων τμημάτων χορδής.



Εικόνα 1. Από το εξώφυλλο του βιβλίου του F. Gafurio «Theorica Musicae» (1492). Ξυλογραφία που παριστάνει πειράματα του Πυθαγόρα (το πείραμα στο Χαλκοτυπείο με τα σφουριά, πείραμα με καμπάνες, πείραμα με ηχητικούς σωλήνες, πείραμα με χορδές και αυλούς)

Η έννοια «διάστημα» ως αποστάσεως δύο σημείων ή «ευθυγράμμου τμήματος».

Ο Αριστόξενος τον 4^ο αιώνα π.Χ. σε αντίθεση προς τον Πυθαγόρα ονομάζει μουσικό διάστημα την **απόσταση** ανάμεσα σε δύο φθόγγους διαφορετικού μουσικού ύψους. Με άλλα λόγια το διάστημα παρουσιάζεται ως μια διαφορά μουσικού ύψους. Όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά του μουσικού ύψους, τόσο μεγαλύτερο είναι το διάστημα.

Κατά τον Κλεονίδη¹ μουσικό διάστημα είναι η απόσταση που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε δύο φθόγγους διαφορετικούς στο ύψος και στο βάθος. Τον ίδιο ορισμό δίνει και ο Βακχείος. Ο Ανώνυμος του Bellermann² λέει ότι διάστημα είναι εκείνο που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε δύο φθόγγους (ή περικλείεται από δύο φθόγγους) διαφορετικούς στο ύψος, από τους οποίους ο ένας είναι υψηλότερος και ο άλλος χαμηλότερος. Σ' ένα απόσπασμα χειρογράφου³ βρίσκουμε τον εξής ορισμό για το διάστημα: Διάστημα είναι η έκταση της φωνής, που περιέχεται ανάμεσα σε δύο φθόγγους. Ο Νικόμαχος γράφει

«διάστημα δ' ἐστὶ δυοῖν φθόγγων μεταξύτης»,

όπου με τον όρο μεταξύτης εννοεί «ό,τι περιέχεται ή ό,τι βρίσκεται ανάμεσα».

Ο W. Burkert⁴ αναφέρει κάτι απλό μεν, αλλά πολύ σημαντικό, όπως θα φανεί στην πορεία «Για μας (τους μουσικούς της Ευρωπαϊκής μουσικής) και λόγω της μουσικής σημειογραφίας και λόγω του ηλεκτρολογίου του πιάνου καθίσταται ιδιαίτερα καταληπτή η έννοια του μουσικού διαστήματος ως αποστάσεως, ως ευθυγράμμου τμήματος. Αλλά το ίδιο συνέβαινε προηγουμένως και με τους αρχαίους Έλληνες, όπως προκύπτει από τον όρο 'διάστημα'»

Άρα, λοιπόν, η λέξη «διάστημα» στη μουσική θεωρία είχε διττή δημασία, διότι εσήμαινε «απόσταση μεταξύ δύο σημείων ή μεταξύ δύο φθόγγων», αλλά και «λόγο δύο αριθμών (αριθμητική σχέση ή αναλογία)». Η έννοια του ευθυγράμμου τμήματος είναι συνδεδεμένη με το όνομα του Αριστόξενου, η δε διδασκαλία σχετικά με την αναλογία είναι συνδεδεμένη με το όνομα του Πυθαγόρα και εν γένει των Πυθαγορείων.

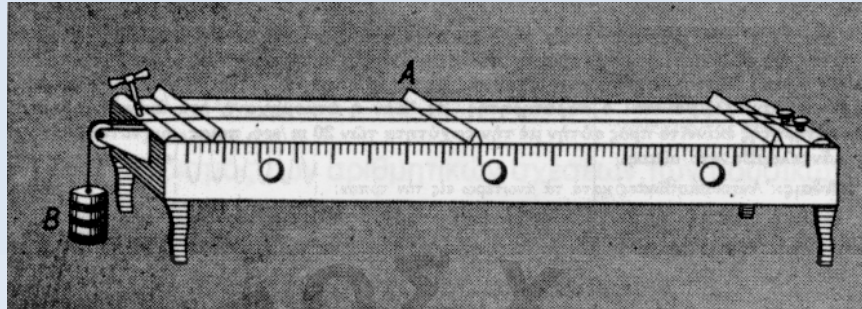
¹ (Εισαγ. 1, C.v.J. 179, Mb 1)

² (Bell. 30, 22)

³ (Vincent Notices 234)

⁴ Στο βιβλίο του *Weisheit und Wissenschaft*, σελ. 348.

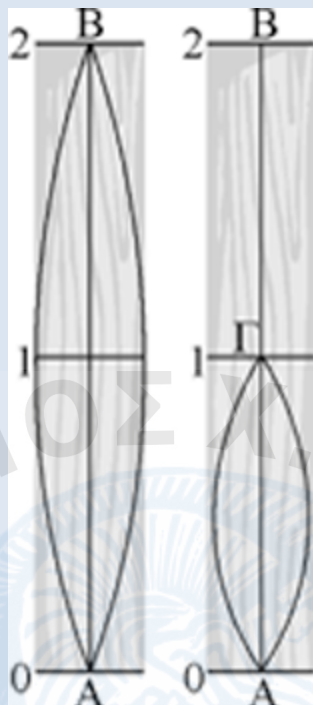
Πυθαγόρειο πείραμα Ακουστικής κατά Γαυδέντιο.



Εικόνα 2: Σύγχρονο εργαστηριακό μονόχορδο για τη μελέτη των νόμων των χορδών.

Ο Γαυδέντιος (4^{ος} αιώνας μ.Χ.) αναφέρει ένα πείραμα Ακουστικής, σωστό από άποψη Φυσικής⁵, με το οποίο ο Πυθαγόρας εφεύρε τις αριθμητικές σχέσεις των μουσικών συμφωνιών. Κατεσκεύασε ένα μονόχορδο τεντώνοντας μια χορδή επί ενός κανόνος (χάρακα) διηρημένου και αριθμημένου σε 2 ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής (2 μονάδες μήκους) και στη συνέχεια το μισό μήκος αυτής (1 μονάδα μήκους) με τη βοήθεια ενός κινητού καβαλάρη, του υπαγωγέα, (Εικόνα 3).

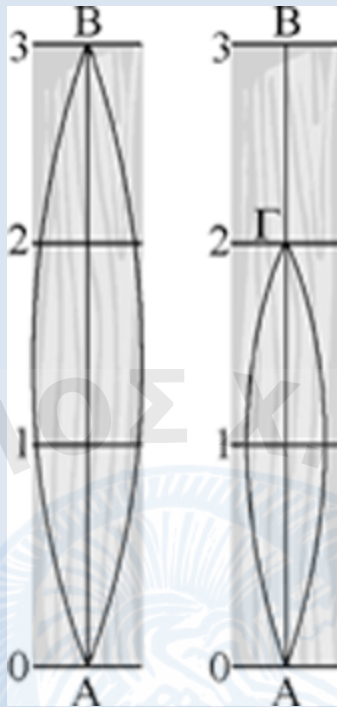
⁵ Σε πηγές των τελευταίων χρόνων της αρχαιότητας αποδίδονται στον Πυθαγόρα ακουστικές παρατηρήσεις και ακουστικά πειράματα, τα οποία από την άποψη της Φυσικής είναι λανθασμένα π.χ. το πείραμα με τα σφυριά των σιδεράδων και τις χορδές, που αναφέρει ο Ιάμβλιχος (3^{ος} αιώνας μ.Χ.) στο «βίος Πυθαγορικός».



Εικόνα 3: Απόδοση του διαστήματος της δια πασών επί του κανόνος.

Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε η διαπασών συμφωνία $\left(\frac{2}{1}\right)$.

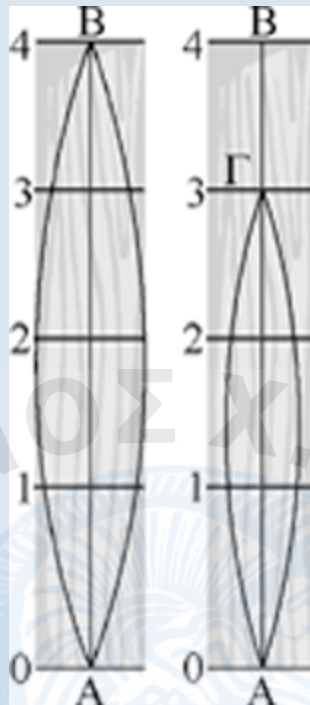
Κατόπιν διήρεσε κι αριθμήσε ολόκληρο το μήκος του κανόνος σε 3 ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής (3 μονάδες μήκους) και στη συνέχεια τα $\frac{2}{3}$ του μήκους αυτής (2 μονάδες μήκους) (Εικόνα 4).



Εικόνα 4: Απόδοση του διαστήματος δια πέντε επί του κανόνος.

Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε η δια πέντε συμφωνία $\left(\frac{3}{2}\right)$.

Τέλος, διήρεσε κι αριθμήσε ολόκληρο το μήκος του κανόνος σε 4 ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής (4 μονάδες μήκους) και στη συνέχεια τα $\frac{3}{4}$ του μήκους αυτής (3 μονάδες μήκους) (Εικόνα 5).



Εικόνα 5: Απόδοση του διαστήματος δια τεσσάρων επί του κανόνος.

Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε η δια τεσσάρων συμφωνία $\left(\frac{4}{3}\right)$.

Σ' αυτό το τριπλό πείραμα ΠΑΝΤΟΤΕ ετίθετο σε ταλάντωση πρώτα ολόκληρο το μήκος της χορδής (BA) και στη συνέχεια ένα τμήμα αυτής (ΓΑ). Αυτό σημαίνει ότι ένα τμήμα (ΓΑ) της χορδής επάλλετο και παρήγε ήχο («**ηχούν**» **τμήμα της χορδής**), ενώ το υπόλοιπο (BΓ) τμήμα της ηρεμούσε και, ως εκ τούτου, παρέμενε «βωβό» («**μη ηχούν**» **τμήμα της χορδής**).

Το παραπάνω πείραμα αφενός μεν απαιτεί την ύπαρξη τριών διαφορετικού μήκους υποδιαιρέσεων του κανόνος $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$, αφετέρου επιτρέπει μόνον

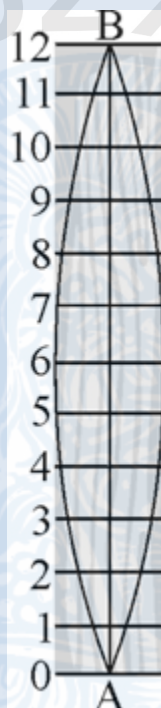
την παραγωγή μεμονωμένων μουσικών συμφωνιών και όχι και των τριών πλην της τελευταίας περιπτώσεως στην οποίαν με τον κινητό καβαλάρη στις θέσεις 4 και 3 παράγεται η δια τεσσάρων συμφωνία, στις θέσεις 3 και 2 παράγεται η δια πέντε συμφωνία και στις θέσεις 4 και 2 παράγεται η δια πασών συμφωνία. Πρέπει να επισημανθεί ότι μόνον μ' αυτή την αλληλουχία θέσεων του κινητού καβαλάρη και με καμιά άλλη παράγονται οι τρεις μουσικές συμφωνίες.

Αξιοσημείωτο είναι ότι το μήκος του **μη ηχούντος** τμήματος της χορδής καθορίζεται στην περίπτωση της δια πασών με τους αριθμούς 4 και 2 του κανόνος, στην περίπτωση της δια τεσσάρων συμφωνίας με τους αριθμούς 4 και 3 και στην περίπτωση της δια πέντε συμφωνίας με τους αριθμούς 3 και 2. Βλέπουμε ότι Γεωμετρικά στη συγκεκριμένη περίπτωση το μήκος του **μη ηχούντος** τμήματος της χορδής στην περίπτωση της δια πασών συμφωνίας ισούται με το

ἄθροισμα των μη ηχούντων τμημάτων της χορδῆς στην περίπτωση της δια τεσσάρων συμφωνίας και στην περίπτωση της δια πέντε συμφωνίας, επαληθεύοντας τη ρήση του Φιλολάου ότι "ἄρμονίας (=διὰ πασῶν) δὲ μέγεθός ἐστι συλληβὰ καὶ δι' ὄξειᾶν".

Εἶναι πολύ πιθανόν με τέτοια πειράματα Ακουστικῆς ἐπάνω σε ἀρχέγονο κανόνα υποδιηρημένο σε τέσσερα μόνο μέρη να δημιουργήθηκε ἡ μυθικὴ σημασία τῆς ἱεράς τετρακτύος των Πυθαγορείων.

Οι πηγές μας ἀναφέρουν τὴ διαίρεση τοῦ κανόνος σε 12 ἴσα μέρη, ὅπου 12 εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. των ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 4 (Εἰκόνα 6).



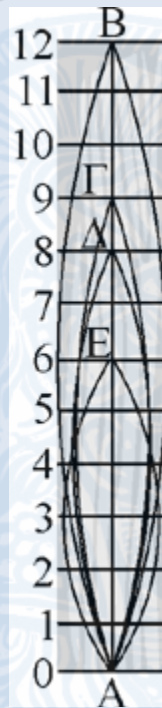
Εἰκόνα 6: Ο εἰς 12 ἴσα μέρη διηρημένος καὶ ἀριθμημένος κανὼν γιὰ τὴν ἀπόδοση τῶν συμφωνιῶν δια πασῶν, δια πέντε καὶ δια τεσσάρων.

Με τὸν κανόνα στα 12 εἶναι δυνατόν να παραχθοῦν καὶ οἱ τρεῖς συμφωνίες δια πασῶν, δια τεσσάρων καὶ δια πέντε θέτοντας τὸν κινητὸ καβαλάρη (υπαγωγέα) στις θέσεις (12, 6), (12, 9) καὶ (12, 8), ἀντίστοιχα. Ἀπὸ ἐδῶ βλέπουμε ὅτι τὸ μήκος τοῦ μη ηχούντος τμήματος τῆς χορδῆς στην περίπτωση τῆς δια τεσσάρων συμφωνίας περιορίζεται μεταξύ των ἀριθμῶν 12 καὶ 9, στην περίπτωση τῆς δια πέντε συμφωνίας περιορίζεται μεταξύ των ἀριθμῶν 12 καὶ 8, ἐνῶ στην περίπτωση τῆς διαπασῶν συμφωνίας περιορίζεται μεταξύ των ἀριθμῶν 12 καὶ 6⁶. Τούτο σημαίνει ὅτι ἡ διαφορά των ἐν λόγω δύο μηκῶν των μη ηχούντων

⁶ Στην περίπτωση αὐτῆ ἀναφέρεται ἡ παρενθετικὴ πρόταση ἀπὸ τὴν Επινομίδα 991 Α του Πλάτωνος: "ἐν μέσῳ δὲ τοῦ ἕξ πρὸς τὰ δώδεκα συνέβη τό τε ἡμίθλιον καὶ τὸ ἐπίτριτον", που σημαίνει ὅτι ἀνάμεσα στη διπλάσια σχέση (τοῦ ἕξ πρὸς τὰ δώδεκα) που ἐκφράζει τὴ διαπασῶν, ἐμπεριέχονται οἱ σχέσεις ἡμίθλιον καὶ ἐπίτριτον, που ἐκφράζουν τὸ δια πέντε καὶ τὸ δια τεσσάρων διάστημα, ἀντίστοιχα.

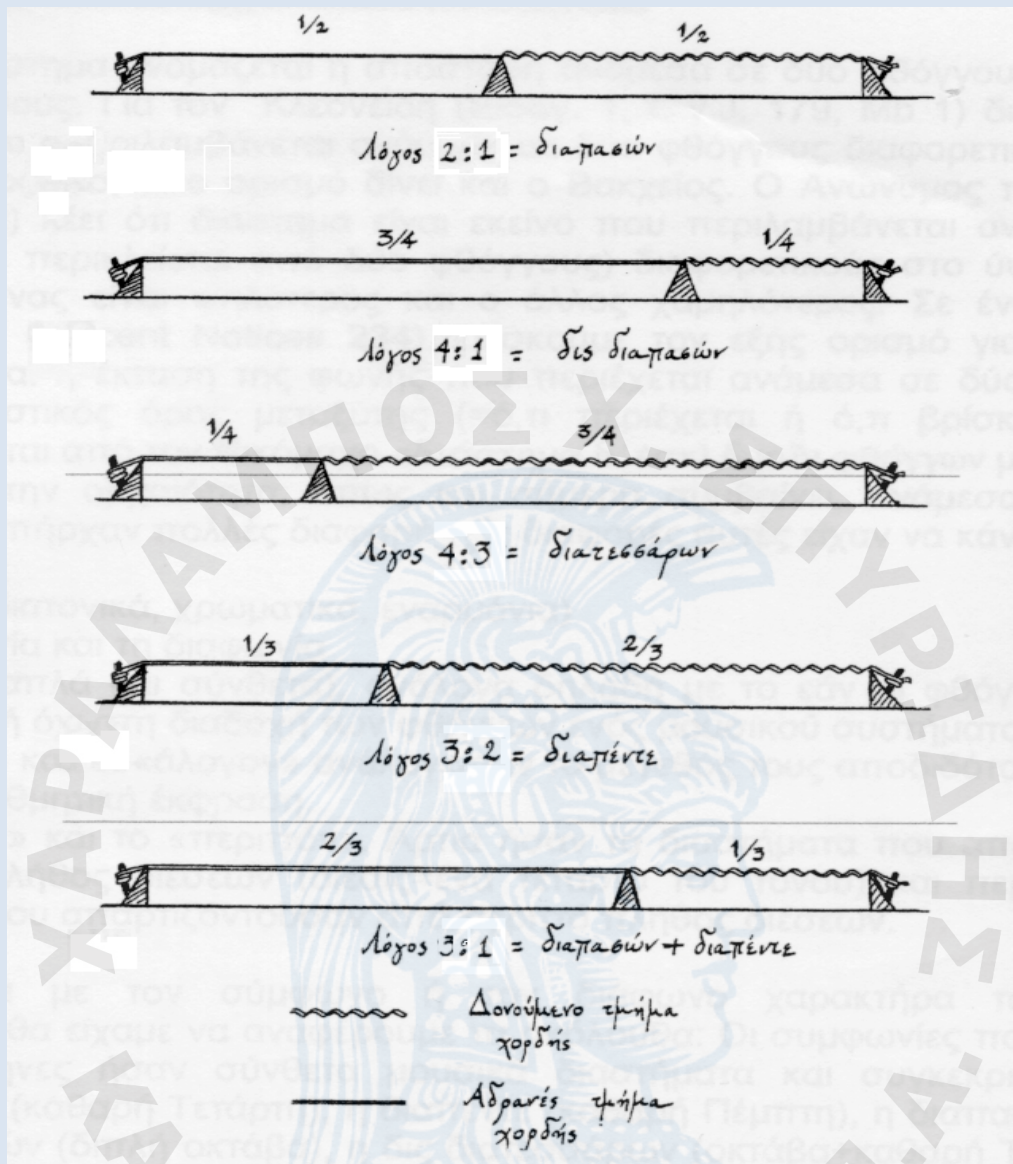
τμημάτων της χορδής περιορίζεται μεταξύ των αριθμών 9 και 8 (Εικόνα 7). Αυτό άλλωστε αναφέρει και το η θεώρημα της Κατατομής Κανόνος του Ευκλείδου: "Ἐὰν ἀπὸ ἡμιοῦ διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα ἀφαιρεθῆ, τὸ ἑπομένον καταλείπεται ἐπόγδοον".

Γενικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι «διάστημα» ήταν αυτό καθαυτό το μουσικό διάστημα το σχηματιζόμενο από δύο φθόγγους προερχομένους από την ταλάντωση δύο διαφορετικού μήκους τμημάτων χορδής και το οποίο αφενός μεν μπορούσε να γίνει αντιληπτό και να καθορισθεί ακουστικά, αφετέρου δε να καταστεί και ορατό επάνω στον Κανόνα ως η διαφορά των μηκών των μη χιούτων τμημάτων της χορδής των εν λόγω δύο φθόγγων.



Εικόνα 7: Απόδοση των συμφωνιών δια πασών, δια τεσσάρων και δια πέντε επάνω στον εις 12 ίσα μέρη διηρημένο και αριθμημένο κανόνα.

Πρέπει να τονισθεί το γεγονός ότι αυτή και μόνον η Πλατωνική πρόταση απορρίπτει την άποψη ότι τον 5^ο και 4^ο αιώνα π.Χ. δεν υπήρχε το όργανο Κανών.



Σχήμα 1: Προσδιορισμός των αριθμητικών σχέσεων των μουσικών συμφωνιών στο μονόχορδο.

Υποπολλαπλάσιες σχέσεις αριθμῶν \Leftrightarrow (μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδῆς):(μήκος του ηχούντος τμήματος της χορδῆς).

Πολλαπλάσιες κι Επιμόριες σχέσεις αριθμῶν \Leftrightarrow (μήκος ολοκλήρου της χορδῆς):(μήκος του ηχούντος τμήματος της χορδῆς).

Ολόκληρο το μήκος της χορδῆς ισούται με το μήκος του παλλομένου (ηχούντος) τμήματος συν το μήκος του μη ηχούντος (ακινήτου) τμήματος αυτής.
 Ἡ **(μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδῆς)=(ολικό μήκος χορδῆς)-(μήκος ηχούντος τμήματος χορδῆς).**

Στις μουσικές συμφωνίες ισχύει η σχέση: **(μήκος ηχούντος τμήματος χορδής)- k · (μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής)=0**, $k \in \mathbb{N}$ ως αποτέλεσμα της Ευκλείδειου Ανθυφαιρέσεως, δηλαδή των πολλαπλών αφαιρέσεων πάντοτε του μικρού από το μεγάλο μέχρι να προκύψει υπόλοιπο ίσο με το μηδέν.

Στη διαπασών συμφωνία το ηχούν και το μη ηχούν τμήμα της χορδής είναι ισομήκη, οπότε **(μήκος ηχούντος τμήματος χορδής)-1 · (μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής)=0**. Άρα το ολικό μήκος της χορδής είναι διπλάσιο του ηχούντος τμήματος της χορδής, εξού ο όρος «**διπλάσιον διάστημα**».

Στη δια πέντε συμφωνία το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι το μισό του μήκους του ηχούντος τμήματος, οπότε **(μήκος ηχούντος τμήματος χορδής)-2 · (μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής)=0**. Άρα το μήκος ολοκλήρου της χορδής είναι ολόκληρο και το $\frac{1}{2}$ του μήκους του ηχούντος τμήματος της χορδής, εξού ο όρος «**ημιόλιος**».

Στη δια τεσσάρων συμφωνία το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι το $\frac{1}{3}$ του μήκους του ηχούντος τμήματος αυτής, οπότε **(μήκος ηχούντος τμήματος χορδής)-3 · (μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής)=0**. Άρα το μήκος ολοκλήρου της χορδής είναι ολόκληρο και το $\frac{1}{3}$ του μήκους του ηχούντος τμήματος της χορδής, εξού ο όρος «**επίτριτος**».

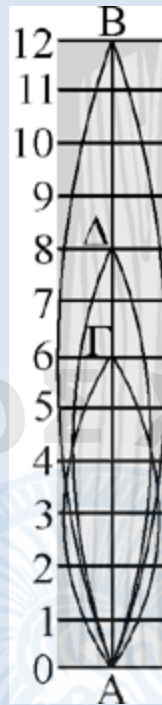
Πράξεις μεταξύ των διαστημάτων

Εάν διασαφηνισθεί το πώς η έννοια «διάστημα» ήταν δυνατό να σημαίνει συγχρόνως «απόσταση μεταξύ δύο σημείων ή μεταξύ δύο φθόγγων», αλλά και «λόγο δύο αριθμών (αριθμητική σχέση ή αναλογία)» θα έχουν ισχύ όλα όσα διδάσκονται στην Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων και ιδιαίτερος ο ορισμός του μουσικού διαστήματος ως λόγου συχνοτήτων.

1. Πρόσθεση δύο διαστημάτων.

Έστω ότι μας δίδονται δύο σημεία, τα A και B. Τα σημεία αυτά μπορεί να θεωρηθούν ότι είναι τα πέρατα ενός ευθυγράμμου τμήματος, του AB και ότι με την απόστασή τους ορίζουν το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB.

Όταν δίδονται οι θέσεις του υπαγωγέα επάνω στον κανόνα με αριθμούς, τότε το μη ηχούν τμήμα της χορδής θα το συμβολίζουμε ως διατεταγμένο ζεύγος αριθμών –πρώτα ο μεγαλύτερος αριθμός και μετά ο μικρότερος- η διαφορά των οποίων αριθμών θα δίδει το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής, που αντιπροσωπεύει κατά Αριστόξενο το συγκεκριμένο διάστημα. Ο λόγος των δύο δοθέντων αριθμών –μεγαλύτερος/μικρότερος- θα δίδει τη σχέση των μηκών των ηχούντων τμημάτων της χορδής, η οποία αντιπροσωπεύει κατά τον Πυθαγόρα το συγκεκριμένο διάστημα.



Εικόνα 8: Πρόσθεση διαστημάτων επάνω στον εις 12 ίσα μέρη διηρημένο και αριθμημένο κανόνα.

Έστω ότι στον κανόνα της εικόνας 8, που είναι διηρημένος και αριθμημένος σε 12 ίσα τμήματα, θέτω σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής BA, που είναι 12 μονάδες μήκους. Στη συνέχεια τοποθετώ τον κινητό καβαλάρη στη θέση Δ (υποδιαίρεση 8 του κανόνα) και θέτω σε ταλάντωση το τμήμα της χορδής AΔ, μήκους 8 μονάδων μήκους. Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα BΔ, μήκους 4 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το δια πέντε διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής BΔ (κατά Αριστόξενο), ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{BA}{\Delta A} = \frac{12}{8}$ (κατά Πυθαγόρα).

Ακολουθώ, εκτελώ ως προς αυτό ένα συνημμένο διάστημα δια τεσσάρων. Προς τούτοις με τον κινητό καβαλάρη στη θέση Δ (υποδιαίρεση 8 του κανόνα) θέτω σε ταλάντωση το τμήμα ΔΑ της χορδής και μετά, αφού μετατοπίσω τον καβαλάρη στη θέση Γ (υποδιαίρεση 6 του κανόνα), θέτω σε ταλάντωση το τμήμα ΓΑ της χορδής, που έχει μήκος 6 μονάδων μήκους. Το μη ηχούν τμήμα της χορδής τώρα είναι το ΔΓ και έχει μήκος 2 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το δια τεσσάρων διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΔΓ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{\Delta A}{\Gamma A} = \frac{8}{6}$.

Τέλος, εκτελώ το διάστημα δια πασών θέτοντας σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής BA του κανόνα, μήκους 12 μονάδων και το τμήμα ΓΑ της χορδής, μήκους 6 μονάδων μήκους. Το μη ηχούν τμήμα της χορδής τώρα είναι το ΒΓ και έχει μήκος 6 μονάδων μήκους. Αυτό το μουσικό διάστημα (δια πασών) ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΒΓ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{BA}{\Gamma A} = \frac{12}{6}$.

Παρατηρώ ότι το άθροισμα των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής στα διαστήματα δια πέντε και δια τεσσάρων ισούται με το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής στο διάστημα της δια πασών, δηλαδή $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma$. Πράγματι η δια πασών είναι το άθροισμα του δια πέντε και του δια τεσσάρων ή, όπως λέει ο Φιλόλαος "άρμονίας (=διά πασών) δὲ μέγεθος ἔστι συλληβὰ καὶ δι' ὄξειαν".

Εάν στη θέση των μηκών αυτών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής, που αντιπροσωπεύουν τα διαστήματα κατά τον Αριστόξενο, τοποθετήσω τους αντιστοίχους λόγους των μηκών των ηχούντων τμημάτων χορδής, που αντιπροσωπεύουν τα διαστήματα κατά τον Πυθαγόρα, οδηγούμαι στη διαδικασία της προσθέσεως των μουσικών διαστημάτων ως λόγων μεγεθών, δηλαδή

$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{AB}{A\Delta} \oplus \frac{A\Delta}{A\Gamma}$. Η σχέση αυτή για να υφίσταται ως αληθής, θα πρέπει η

διαδικασία, η συμβολιζόμενη με το σύμβολο \oplus , να συμπίπτει με τη διαδικασία του γνωστού πολλαπλασιασμού.

$$(12, 8) + (8, 6) = (12, 6) \text{ κατά τον Αριστόξενο.}$$

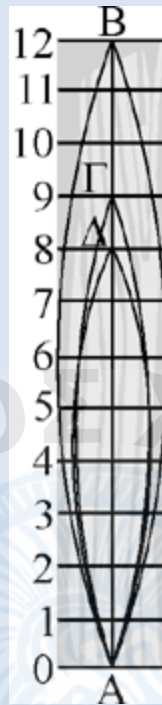
$$\frac{12}{6} = \frac{12}{8} \oplus \frac{8}{6} = \frac{12}{8} \cdot \frac{8}{6} \text{ κατά τον Πυθαγόρα.}$$

Συμπερασματικά λέμε ότι:

α. για να προσθέσουμε συνημμένα διαστήματα, που αντιπροσωπεύονται στον κανόνα με διαδοχικά μήκη μη ηχούντων τμημάτων της χορδής (Αριστόξενος), προσθέτουμε αυτά τα διαδοχικά μη ηχούντα τμήματα της χορδής, οπότε το άθροισμά τους δίνει το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής για το ολικό διάστημα.

β. για να προσθέσουμε συνημμένα διαστήματα, που αντιπροσωπεύονται στον κανόνα με λόγους ηχούντων τμημάτων της χορδής (Πυθαγόρας), πολλαπλασιάζουμε αυτούς τους λόγους των ηχούντων τμημάτων της χορδής και βρίσκουμε το λόγο των ηχούντων τμημάτων της χορδής για το ολικό διάστημα.

2. Αφαίρεση δύο διαστημάτων



Εικόνα 9: Αφαίρεση διαστημάτων επάνω στον εις 12 ίσα μέρη διηρημένο και αριθμημένο κανόνα.

Έστω ότι στον κανόνα της εικόνας 9 που είναι διηρημένος και αριθμημένος σε 12 ίσα τμήματα θέτω σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής BA, που είναι 12 μονάδες μήκους. Στη συνέχεια τοποθετώ τον κινητό καβαλάρη στη θέση Δ (υποδιαίρεση 8 του κανόνα) και θέτω σε ταλάντωση το τμήμα της χορδής ΔΑ, μήκους 8 μονάδων μήκους. Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ, μήκους 4 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το δια πέντε διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΒΔ (Αριστόξενος), ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{BA}{\Delta A} = \frac{12}{8}$ (Πυθαγόρας).

Στη συνέχεια θέτω σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής BA, που είναι 12 μονάδες μήκους. Μετά τοποθετώ τον κινητό καβαλάρη στη θέση Γ (υποδιαίρεση 9 του κανόνα) και θέτω σε ταλάντωση το τμήμα της χορδής ΓΑ, μήκους 9 μονάδων μήκους. Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, μήκους 3 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το δια τεσσάρων διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΒΓ (Αριστόξενος), ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{BA}{\Gamma A} = \frac{12}{9}$ (Πυθαγόρας).

Ακολουθως, θα εκτελέσω το επόγδοο διάστημα. Προς τούτοις με τον κινητό καβαλάρη στη θέση Δ (υποδιαίρεση 8 του κανόνα) θέτω σε ταλάντωση το τμήμα ΔΑ της χορδής και μετά, αφού μετατοπίσω τον καβαλάρη στη θέση Γ (υποδιαίρεση 9 του κανόνα), θέτω σε ταλάντωση το τμήμα ΓΑ της χορδής, που έχει μήκος 9 μονάδων μήκους. Το μη ηχούν τμήμα της χορδής τώρα είναι το ΓΔ=ΒΔ-ΒΓ και έχει μήκος 1 μονάδα μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το επόγδοον διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΓΔ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta\Lambda} = \frac{9}{8}$.

Παρατηρώ ότι η διαφορά των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής στα διαστήματα δια πέντε και δια τεσσάρων ισούται με το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής στο επόγδοον διάστημα, δηλαδή ΓΔ=ΒΔ-ΒΓ. Πράγματι, όπως άλλωστε αναφέρει και το η θεώρημα της Κατατομής Κανόνος του Ευκλείδου: "Ἐὰν ἀπὸ ἡμιοθίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα ἀφαιρεθῆ, τὸ ἑοικὸν καταλείπεται ἐπόγδοον".

Εάν στη θέση των μηκών αυτών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής, που αντιπροσωπεύουν τα διαστήματα κατά τον Αριστόξενο, τοποθετήσω τους αντιστοίχους λόγους των μηκών των ηχούντων τμημάτων χορδής, που αντιπροσωπεύουν τα διαστήματα κατά τον Πυθαγόρα, οδηγούμαι στη διαδικασία της αφαιρέσεως των μουσικών διαστημάτων ως λόγων μεγεθών, δηλαδή $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta\Lambda} = \frac{BA}{\Delta\Lambda} \frac{BA}{\Gamma\Delta}$. Η σχέση αυτή για να υφίσταται ως αληθής, θα πρέπει η

διαδικασία, η συμβολιζομένη με το σύμβολο \square να συμπίπτει με τη διαδικασία της γνωστής διαιρέσεως.

(12, 8)-(12, 9)=(9, 8) κατά τον Αριστόξενο.

$$\frac{9}{8} = \frac{12}{8} \square \frac{12}{9} = \frac{12}{8} : \frac{12}{9} = \frac{12}{8} \cdot \frac{9}{12} \text{ κατά τον Πυθαγόρα.}$$

Συμπερασματικά λέμε ότι:

A. για ν' αφαιρέσουμε δύο διαστήματα που αντιπροσωπεύονται στον κανόνα με δύο μήκη μη ηχούντων τμημάτων της χορδής, που έχουν κοινή αρχή, αφαιρούμε αυτά τα δύο μη ηχούντα τμήματα της χορδής και βρίσκουμε το μη ηχούν τμήμα της χορδής του διαστήματος της διαφοράς.

B. για ν' αφαιρέσουμε δύο διαστήματα, που αντιπροσωπεύονται στον κανόνα με λόγους ηχούντων τμημάτων της χορδής, διαιρούμε το λόγο του μειωτέου δια του λόγου του αφαιρετέου και βρίσκουμε το λόγο των ηχούντων τμημάτων της χορδής για το διάστημα της διαφοράς.

Στα μέσα του 19^{ου} αιώνα οι Φυσικοί Ernst Weber και Gustaf Fechner κατέληξαν σε έναν ψυχοφυσικό νόμο, που λέει ότι το αίσθημα είναι ανάλογο του δεκαδικού λογαρίθμου του ερεθίσματος, που το προκαλεί. Δηλαδή

$$\text{Αίσθημα} = k \log(\text{Ερέθισμα})$$

Το k είναι μια σταθερά αναλογίας που, κατά περίπτωση, λαμβάνει κάποια τιμή. Από δύο δοθέντα ομοειδή ερεθίσματα ε_1 και ε_2 τα προκαλούμενα αισθήματα α_1 και α_2 , αντίστοιχα, είναι:

$$\alpha_1 = k \log(\varepsilon_1)$$

$$\alpha_2 = k \log(\varepsilon_2)$$

Η διαφορά $\alpha_1 - \alpha_2$ των δύο προκαλουμένων αισθημάτων εκφράζεται από τη σχέση:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = k \log(\varepsilon_1) - k \log(\varepsilon_2) = k \log\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)$$

Βλέπει κανείς ότι στη σχέση αυτή εισάγεται ο λογάριθμος του λόγου των δύο μεγεθών ε_1 και ε_2 .

Είναι σε όλους μας γνωστό το ψυχοφυσικό μέγεθος του μουσικού ύψους (pitch) με βάση το οποίο οι ήχοι μπορούν να διαταχθούν επάνω σε μια μουσική κλίμακα και οι διακυμάνσεις του συνιστούν τη μελωδία. Το μουσικό ύψος ενός ήχου σχετίζεται με το ρυθμό της επαναλήψεώς του και στην απλή περίπτωση του ημιτονοειδούς κύματος σχετίζεται με τη συχνότητα. Για κάθε συχνότητα (ερέθισμα) αντιλαμβανόμαστε ένα μουσικό ύψος (αίσθημα). Δύο συχνότητες, οι f_1 και f_2 , με τα αντίστοιχά τους μουσικά ύψη, v_1 και v_2 συνδέονται, σύμφωνα με τα προηγούμενα, με τη σχέση:

$$v_1 - v_2 = k \log_2(f_1) - k \log_2(f_2) = k \log_2\left(\frac{f_1}{f_2}\right)$$

όπου $v_1 > v_2$, επειδή $f_1 > f_2$. Οι συχνότητες, όμως στην περίπτωση πακτωμένων κατά τα δύο άκρα χορδών, είναι αντιστρόφως ανάλογες του μήκους των ηχούντων τμημάτων των χορδών. Οπότε η προηγούμενη σχέση παίρνει τη μορφή:

$$v_1 - v_2 = k \log_2(f_1) - k \log_2(f_2) = k \log_2\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = k \log_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)$$

Και επειδή κατά Πυθαγόρα ο λόγος των ηχούντων τμημάτων των χορδών ονομάζεται διάστημα, δια τούτο σήμερα στη Μουσική Ακουστική τον λόγο των δύο συχνοτήτων, που παράγονται από τα ηχούντα τμήματα δύο χορδών ονομάζεται διάστημα και κατ' επέκτασιν μουσικό διάστημα ονομάζουμε το λόγο δύο συχνοτήτων. Τη δε διαφορά των αντιστοίχων μουσικών υψών ($v_1 - v_2$) την ονομάζουμε μέγεθος του μουσικού διαστήματος.