Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης

Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής
Τμήμα Μουσικών Σπουδών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κεφαλαιώδης καὶ σύντομος παράδοσις ἀριθμητικῶν τε καὶ μουσικῶν καὶ γεωμετρικῶν κατὰ τὴν στερεομετρίαν μαθηματικῶν θεωρημάτων διὰ τὴν τοῦ Πλατωνικοῦ γεωμετρικοῦ ἢ εὐγονικοῦ ἢ γαμικοῦ αριθμοῦ κατανόησιν (*Πολιτεία*, 546, a, 1)[1].

Προλεγόμενα

Ο τέως κοσμήτωρ της Φιλοσοφικής Σχολής, καθηγητής Ιστορίας, κ. Εμμανουήλ Μικρογιαννάκης, παρακολουθείσας την 5ην Μαρτίου του έτους 2008 διάλεξή μου εις την ιστορικήν αίθουσα «Κωστής Παλαμάς» του κτηρίου του Φιλολογικού Συλλόγου Παρνασσός (Πλατεία Αγίου Γεωργίου Καρύτση 8, 10561 Αθήναι) περί την «Μουσικολογικήν Αλληγορίαν της Πλατωνικής Πολιτειολογίας» (587, b, 11 – 588, a, 2), με προέτρεψε να ασχοληθώ με την μελέτην του χωρίου του Γεωμετρικού ή Ευγονικού ή Γαμικού αριθμού από την Πολιτείαν του Πλάτωνος (546, a, 1 – 547, a, 5).

Μου ετόνισε ότι το χωρίον είναι δυσνόητον, προβληματικής διατυπώσεως, ανερμήνευτον –με την έννοιαν ότι οι δοθείσες ερμηνείες μέχρι σήμερον δεν τυγχάνουν της καθολικής αποδοχής των Πλατωνιστών- και σχετικόν, πιθανώς, με τα θέματα αρχαιοελληνικής Μουσικής Ακουστικής, τα οποία εμπίπτουν εις τα διδακτικά και ερευνητικά μου ενδιαφέροντα, αφού ο Πλάτων αναφέρει έννοιες όπως «επίτριτος», «πυθμήν», «αρμονίες» εκ της μαθηματικής θεωρίας της αρχαιοελληνικής μουσικής. Καταλήγων ο κ. Κοσμήτωρ, μου συνέστησε να συμπεριλάβω οπωσδήποτε το εν λόγω χωρίον εις το πρόγραμμα των ερευνητικών μου δραστηριοτήτων και να ασχοληθώ ουσιαστικώς με αυτό.

Ακολούθησα την συμβουλήν του σεβαστού και γεραρού καθηγητού και άρχισα ερευνών το εν λόγω Πλατωνικόν χωρίον.

Ομολογώ ότι η έρευνά μου ήτο και εξακολουθεί να είναι όντως ένα ταξίδι εις αγνώστους ατρυγέτους (α72) και πολυνβενθείς (δ406) θάλασσες, εις Φαιήκων γαίες (ε35), εις ανθρώπων άστεα (α3), όπου δεν έλειπον οι άγριοι Κύκλωπες (β19), οι ίφθιμες κόρες των Λαιστρυγόνων (κ106), οι Λωτοφάγοι (ι96), η δεινὸν λελαλυῖα Σκύλλα (μ85) και η δεινὴ (μ260) Χάρυβδις, αλλά και η πότνια Κίρκη (θ448) και η νύμφη Καλυψώ (α14), και η λευκώλενος Ναυσικά (η12)˙ ένα ταξίδι υπό την προστασίαν της γλαυκώπιδος Αθηνάς (ω540) με κατάληξη την ιδικήν μου ἀμφίαλον Ιθάκην (α386) με γέρας ἐσθλὸν (λ534) την σχεδίαση και την σχετικήν απόδειξη του «Γεωμετρικού ή Ευγονικού ή Γαμικού αριθμού» …

Εις το προμνημονευθέν χωρίον ο Πυθαγορικός Πλάτων, ο μεταδίδων την γνώση αλληγορικώς, εκκινεί με καλήν ποιητικήν διάθεση και γράφει με «φαντασιώδη

[1] Ο τίτλος της παρούσης εργασίας προέρχεται εκ του έργου του Πλατωνικού φιλοσόφου Θέωνος του Σμυρναίου «*Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν*», 1, 13-17.

φρασεολογία[2]» χρησιμοποιών λέξεις ευήχους και ομοιοκαταλήκτους, οι οποίες εις πρώτην ανάγνωση προσδίδουν εις το χωρίον έναν περισσότερον μυστικιστικόν παρά μαθηματικόν χαρακτήρα ή ένα «ραψωδιακόν ύφος». Δια των λέξεων αυτών επιθυμεί να μεταφέρει εις τον μεμυημένον τα όσα έχει κατά νουν, αλλά το κείμενόν του –θεὸς οἶδεν διατὶ- είναι ασαφές, ακατανόητον και εντάσσεται εις την χορείαν των αλύτων προβλημάτων παρά του επίσης αλύτου προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου.

Εκκινών την έρευνά μου, εστράφην εις δύο μελετητές του προβλήματος, τον Πρόκλον, τον Λύκιον, τον Πλατωνικόν διάδοχον και τον νεοπυθαγόρειον φιλόσοφον Ιάμβλιχον. Ο πρώτος αντιμετωπίζει το πρόβλημα κατά βάση εξ επόψεως της Στερεομετρίας[3] και ο δεύτερος εξ επόψεως της Επιπεδομετρίας[4]. Αριθμητικήν λύση προτείνει μόνον ο πρώτος. Βεβαίως, έχω μελετήσει και τις λύσεις, οι οποίες προτείνονται από τους Adam και Hultsch[5] και έχω σχηματίσει προσωπικήν άποψη περί της ορθότητος ή μη αυτών.

Εδαπάνησα χρόνον πολύν προκειμένου να κατανοήσω τα Πυθαγόρεια Μαθηματικά περί τους επιπέδους και στερεούς ορθογωνίους αριθμούς[6] ή, εν άλλαις λέξεσι, περί των διχή και τριχή διαστατών σχέσεων, τις οποίες χρησιμοποιεί ο Πρόκλος κατά την λύση του γεωμετρικού προβλήματος.

Προκειμένου να φανώ ωφέλιμος σε μελετητές και ερευνητές της Πλατωνικής γραμματολογίας εν γένει, αλλά ιδιαιτέρως του συγκεκριμένου χωρίου, απεφάσισα, μιμούμενος τον Θέωνα τον Σμυρναίον, να συγγράψω την παρούσαν εργασίαν εκθέτων

---

[2] Κατά διατύπωση του Heath.

[3] Πρόκλος, *Σχόλια εις την Πολιτεία του Πλάτωνος*, 2, 35, 1 – 2, 39, 28.

[4] Ιάμβλιχος, *Πυθαγορικός Βίος*, 27, 130, 11 – 27, 131, 10

[5] Sir Thomas Heath, *A History of greek Mathematics*, vol. 1, New York, pp. 305-308.

[6] Η έννοια του επιπέδου και του στερεού ορθογωνίου αριθμού ανάγεται εις την ιεράν τετρακτύν των Πυθαγορείων, της οποίας ενσαρκωτές είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4. Η ιερά τετρακτύς συμβολικώς παρίσταται δια δέκα κουκίδων εις τριγωνικήν διάταξη (Σχήμα 1), αφού ο αριθμός δέκα αποτελεί τον δεύτερον μετά τον αριθμόν 6 (6=1+2+3) «τριγωνικόν» αριθμόν των Πυθαγορείων (10=1+2+3+4).

Σχήμα 1: Η τριγωνική δομή των δέκα κουκίδων της ιεράς τετρακτύος.

Οι ερμηνείες και οι συμβολισμοί της ιεράς τετρακτύος ήσαν πολυειδείς και πολυποίκιλες.
Κατά την γεωμετρικήν και στερεομετρικήν αποκωδικοποίηση της τριγωνικής διατάξεως της ιεράς τετρακτύος το πλήθος των κουκίδων εκάστης σειράς συμβολίζει και ένα θεμελιώδες γεωμετρικόν και στερεομετρικόν στοιχείον (σχήμα 1). Περί αυτής της αποκωδικοποιήσεως μας πληροφορεί ο Διογένης Λαέρτιος εις το έργον του *Βίος Φιλοσόφων* (7, 135, 1-8) παραπέμποντάς μας εις την Φυσικήν του Απολλοδώρου.

Σῶμα δ’ ἐστίν, ὥς φησιν Ἀπολλόδωρος ἐν τῇ Φυσικῇ, τὸ τριχῇ διαστατόν, εἰς μῆκος, εἰς πλάτος, εἰς βάθος· τοῦτο δὲ καὶ στερεὸν σῶμα καλεῖται. ἐπιφάνεια δ’ ἐστὶ σώματος πέρας ἢ τὸ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχον βάθος δ’ οὔ· ταύτην δὲ Ποσειδώνιος ἐν πέμπτῳ Περὶ μετεώρων καὶ κατ’ ἐπίνοιαν καὶ καθ’ ὑπόστασιν ἀπολείπει. γραμμὴ δ’ ἐστὶν ἐπιφανείας πέρας ἢ μῆκος ἀπλατὲς ἢ τὸ μῆκος μόνον ἔχον. στιγμὴ δ’ ἐστὶ γραμμῆς πέρας, ἥτις ἐστὶ σημεῖον ἐλάχιστον.

και αναλύων όλες τις στερεομετρικές έννοιες, τις απαραίτητες για την κατανόηση της Προκλείου λύσεως του χωρίου του Γεωμετρικού ή Ευγονικού ή Γαμικού αριθμού.

Διχή και τριχή διαστατή σχέσις

Η σχέσις μεταξύ δύο φυσικών (ακεραίων θετικών) αριθμών εις την Πυθαγόρειον μουσικήν θεωρίαν εκαλείτο «*διάστημα*»[7].

Δύο σχόλια του Πορφυρίου εις την περί της αρμονίας διδασκαλίαν του Πτολεμαίου αναφέρουν «καὶ τῶν κανονικῶν[8] δὲ καὶ πυθαγορείων οἱ πλείους τὰ διαστήματα ἀντὶ τῶν λόγων λέγουσιν» και «τὸν λόγον καὶ τὴν σχέσιν τῶν πρὸς ἀλλήλους ὅρων τὸ διάστημα καλοῦσι» γεγονός το οποίον σημαίνει ότι εις την Πυθαγόρειον μουσικήν θεωρίαν, η οποία θεμελιούται πειραματικώς επί του μονοχόρδου, οι έννοιες «διάστημα (=διάσταση, απόσταση)» και «λόγος (=αριθμητική σχέσις)» είναι ταυτόσημες ή εναλλάσσονται ισοδυνάμως.

Τυγχάνει γνωστόν τοῖς πᾶσι ότι οι πυθαγόρειοι ανεκάλυψαν τις θεμελειώδεις αρχές της παγκοσμίου αρμονίας, τις οποίες εξέφρασαν δια μουσικών λόγων.

Η αλληλοδιαδοχή μουσικών λόγων συνεπάγεται τον σχηματισμόν μιας ακολουθίας μουσικών φθόγγων, οι οποίοι σχηματίζουν ένα είδος μουσικής κλίμακος. Οι «παλαιοί» μαθηματικοί και μουσικοί εσυνήθιζον να ονομάζουν την μουσικήν κλίμακα εύρους μιας οκτάβας «αρμονίαν[9]». Κατά τον Φιλόλαον[10]

[7] Αργότερα η σχέσις μεταξύ δύο αριθμών εις την Αριθμητικήν και την Γεωμετρίαν έλαβεν το όνομα «λόγος» (Βλέπε Χ. Χ. Σπυρίδη, *Ο δυϊσμός του μουσικού διαστήματος*).

[8] Αυτοί, οι οποίοι πειραματίζονται χρησιμοποιούντες τον κανόνα. Λέγονται και αρμονικοί.
Τίς πρόθεσις ἁρμονικοῦ.
Τὸ μὲν οὖν ὄργανον τῆς τοιαύτης ἐφόδου καλεῖται κανὼν ἁρμονικός, ἀπὸ τῆς κοινῆς κατηγορίας καὶ τοῦ κανονίζειν τὰ ταῖς αἰσθήσεσιν ἐνδέοντα πρὸς τὴν ἀλήθειαν παρειλημμένος. ἁρμονικοῦ δ’ ἂν εἴη πρόθεσις τὸ διασῶσαι πανταχῇ τὰς λογικὰς ὑποθέσεις τοῦ κανόνος μηδαμῇ μηδαμῶς ταῖς αἰσθήσεσι μαχομένας κατὰ τὴν τῶν πλείστων ὑπόληψιν, ὡς ἀστρολόγου τὸ διασῶσαι τὰς τῶν οὐρανίων κινήσεων ὑποθέσεις συμφώνους ταῖς τηρουμέναις παρόδοις, εἰλημμένας μὲν καὶ αὐτὰς ἀπὸ τῶν
ἐναργῶν καὶ ὁλοσχερέστερον φαινομένων, εὑρούσας δὲ τῷ λόγῳ τὰ κατὰ μέρος ἐφ’ ὅσον δυνατὸν ἀκριβῶς. ἐν ἅπασι γὰρ ἴδιόν ἐστι τοῦ θεωρητικοῦ καὶ ἐπιστήμονος τὸ δεικνύναι τὰ τῆς φύσεως ἔργα μετὰ λόγου τινὸς καὶ τεταγμένης αἰτίας δημιουργούμενα καὶ μηδὲν εἰκῇ, μηδὲ ὡς ἔτυχεν ἀποτελούμενον ὑπ’ αὐτῆς καὶ μάλιστα ἐν ταῖς οὕτω καλλίσταις κατασκευαῖς, ὁποῖαι τυγχάνουσιν αἱ τῶν λογικωτέρων αἰσθήσεων, ὄψεως καὶ ἀκοῆς. ταύτης δὴ τῆς προθέσεως οἱ μὲν οὐδόλως ἐοίκασι πεφροντικέναι μόνῃ τῇ χειρουργικῇ χρήσει καὶ τῇ ψιλῇ καὶ ἀλόγῳ τῆς αἰσθήσεως τριβῇ προσχόντες, οἱ δὲ θεωρητικώτερον τῷ τέλει προσενεχθέντες. οὗτοι δ’ ἂν μάλιστα εἶεν οἵ τε Πυθαγόρειοι καὶ οἱ Ἀριστοξένειοι—διαμαρτεῖν ἑκάτεροι·
Κλαύδιος Πτολεμαίος, *Αρμονικά*, 1, 2, 1-19.

[9] *«Ὅτι δὲ τοῖς ὑφ’ ἡμῶν δηλωθεῖσιν ἀκόλουθα καὶ οἱ παλαιότατοι ἀπεφαίνοντο, ἁρμονίαν μὲν καλοῦντες τὴν διὰ πασῶν» (*Νικομάχου, *Αρμονικόν Εγχειρίδιον, 9, 1, 1-2).*
«Οἱ μὲν Πυθαγόρειοι τὴν μὲν διὰ τεσσάρων συμφωνίαν συλλαβὴν ἐκάλουν, τὴν δὲ διὰ πέντε δι’ ὀξειᾶν, τὴν δὲ διὰ πασῶν τῷ συστήματι, ὡς καὶ Θεόφραστος ἔφη, ἔθεντο ἁρμονίαν. ἁρμονία δὲ κατὰ Θρά-συλλον «τὸ συνεστηκὸς ἐκ δυεῖν τινων ἢ πλειόνων συμφώνων διαστημάτων καὶ ὑπὸ συμφώνου περιεχόμενον» (Πορφύριος, *Υπόμνημα εις τα Αρμονικά του Πτολεμαίου*, 96, 21-25).
Την εποχήν του Πλάτωνος (5ος -4ος π.Χ. αιών) «αρμονία» εσήμαινε επίσης την διαστηματικήν έκταση από του χαμηλοτέρου μέχρι του υψηλοτέρου μουσικού φθόγγου, την οποίαν εκάλυπτε ένα μουσικό σύστημα εκείνης της εποχής «ἡ σύμπασα ἁρμονία ἐκ τοῦ τετράκις εἶναι διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε καὶ

ἔστι γὰρ ἁρμονία πολυμιγέων ἕνωσις καὶ δίχα φρονεόντων συμφρόνησις.

κατά τον Θέωνα τον Σμυρναίον[11]

καὶ οἱ Πυθαγορικοὶ δέ, οἷς πολλαχῇ ἕπεται Πλάτων, τὴν μουσικήν φασιν ἐναντίων συναρμογὴν καὶ τῶν πολλῶν ἕνωσιν καὶ τῶν δίχα φρονούντων συμφρόνησιν·

και κατά τον Νικόμαχο τον Γερασηνόν[12]

πᾶν δὲ ἡρμοσμένον ἐξ ἐναντίων πάντως ἥρμοσται καὶ ὄντων γε· οὔτε γὰρ τὰ μὴ ὄντα ἁρμοσθῆναι οἷά τε οὔτε τὰ ὄντα μέν, ὅμοια δὲ ἀλλήλοις, οὔτε τὰ διαφέροντα μέν, ἄλογα δὲ πρὸς ἄλληλα·

Τα ανωτέρω σημαίνουν ότι η αρμονία αφορά εις το πλήθος των εναντίων, δηλαδή των εναντιοτήτων και των αντιθέσεων[13], οι οποίες δομούν ολόκληρον τον κόσμον[14]. Μία των αντιθέσεων, η φιλότης και το νείκος[15], είναι αυτή, η οποία διέπει τα πάντα στον κόσμον, με την έννοιαν ότι, επερχομένη η φιλότης εις τα δίχα φρονέοντα και αντιτιθέμενα[16], γεννά τον δεσμόν της αρμονίας ή της φιλότητος και, κατά κάποιον τρόπον, τα δίχα φρονέοντα συμφρονούν[17], δηλαδή ομονοούν και ηρεμούν.

τόνον», όπερ σημαίνει ότι αυτά τα όρια εκάλυπτον διάστημα 4 διαπασών (οκτάβων) συν ενός διαπέντε (πέμπτης) συν ενός επογδόου τόνου (μείζονος τόνου) $\left(\frac{2}{1}\right)^4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{1}$ (Τίμαιος, *Γένεσις Ψυχής Κόσμου*).

Μετά την εποχήν του Αριστοξένου ο όρος «διαπασών» αντικατέστησεν τον όρον «αρμονία» εις πολλά κείμενα (Κλέον. Εις. και Βακχ. Εις. C.v.J. 197 και 308, αντιστοίχως: «τοῦ δὲ διαπασῶν εἴδη ἐστὶν ἑπτά», ήτοι επτά είδη αρμονίας).

[10] Θραύσμα 10, γρ. 2-3 καθώς επίσης Νικόμαχος Γερασηνός, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 19, 4-5.

[11] Θέων Σμυρναίος, *Τα κατά το μαθηματικόν χρησίμων*, 12, 10-12.

[12] *Αριθμητική Εισαγωγή*, 1, 6, 3, 1-5.

[13] πέρας [καὶ] ἄπειρον, περιττὸν [καὶ] ἄρτιον, ἓν [καὶ] πλῆθος, δεξιὸν [καὶ] ἀριστερόν, ἄρρεν [καὶ] θῆλυ, ἠρεμοῦν [καὶ] κινούμενον, εὐθὺ [καὶ] καμπύλον, φῶς [καὶ] σκότος, ἀγαθὸν [καὶ] κακόν, τετράγωνον [καὶ] ἑτερόμηκες·
Αριστοτέλης, *Μετά τα Φυσικά*, 956a, 23-26.

[14] καὶ εἷς ἀποτελεῖται κόσμος ἐξ ἐναντίων ἡρμοσμένος, ἐκ περαινόντων τε καὶ ἀπείρων ὑφεστηκὼς κατὰ τὸν Φιλόλαον.
Φιλόλαος, *Αποσπάσματα*, σπ. 9, 3-4 και Πρόκλος, *Σχόλια εις τον Πλατωνικόν Τίμαιον*, 1, 176, 28-30.

[15] ἐπεὶ Νεῖκος μὲν ἐνέρτατον ἵκετο βένθος δίνης, ἐν δὲ μέσηι Φιλότης στροφάλιγγι γένηται, ἐν τῆι δὴ τάδε πάντα συνέρχεται ἓν μόνον εἶναι, οὐκ ἄφαρ, ἀλλὰ θελημὰ συνιστάμεν᾽ ἄλλοθεν ἄλλα.
Εμπεδοκλής, *Απόσπασμα 35*, 20-23.

ἡ μὲν Φιλία διακρίνει, τὸ δὲ Νεῖκος συγκρίνει. ὅταν μὲν γὰρ εἰς τὰ στοιχεῖα διίστηται τὸ πᾶν ὑπὸ τοῦ Νείκους
Εμπεδοκλής, *Απόσπασμα 37*, 3-4.

[16] Με την έννοιαν των δυσαρμονούντων ακουσμάτων.

[17] Καθίστανται ευάκουστα.

Τα πολυμιγέα και δίχα φρονέοντα οι Πυθαγόρειοι τα εξέφραζον δι’ αριθμών. Κατ’ αυτούς οι αριθμοί της δεκάδος, λόγω της αφηρημένης φύσεώς των, απετέλουν τα θεία πρότυπα της κοσμικής και μουσικής αρμονίας και απεικόνιζον τις θείες ιδέες (ἀριθμὸς τὸ πᾶν).

Ανατρέχοντες εις το μουσικόν σύστημά μας, από των αρχαιοτάτων χρόνων μέχρις των ημερών μας, διαπιστώνομε ότι δια των αριθμών εκφράζονται όλες οι θεμελιώδεις αρχές της αρμονικής.

Την δυσαρμονίαν (νείκος) επιφέρουν οι δίχα φρονέοντες και αλόγως ηχούντες φθόγγοι. Δια της παρεμβολής μεταξύ αυτών των «μεσοτήτων» (αριθμητικός, αρμονικός, γεωμετρικός κ.α. μέσοι) επέρχεται η συμφρόνησίς των (φιλότης). Αυτή, άλλωστε, είναι η φιλοσοφική βάσις του Πλατωνικού αλγορίθμου από τον οποίον εδημιουργήθη η Ψυχή του Κόσμου (*Τίμαιος*).

Δοθέντων δύο αριθμών, ορίζεται ένα διάστημα, το οποίον είναι «ἐφ’ ἓν διαστατόν», δηλαδή έχει μία διάσταση

διάστημα γάρ ἐστι δυεῖν ὅρων τὸ μεταξὺ θεωρούμενον. πρῶτον δὲ διάστημα γραμμὴ λέγεται, γραμμὴ γάρ ἐστι τὸ ἐφ’ ἓν διαστατόν·
Νικόμαχος, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 6, 3, 20-22.

Δοθέντων δύο μη διαδοχικών φυσικών αριθμών x, y, δηλαδή $x, y \in N$, υπάρχει τουλάχιστον ένας φυσικός αριθμός z μεταξύ των, δηλαδή x<z<y, ο οποίος ονομάζεται «μέσος» αυτών. Ο μέσος χωρίζει το διάστημα των αρχικών φυσικών αριθμών $\left(\frac{y}{x}\right)$ εις τα δύο διαστήματα $\left(\frac{z}{x}\right)$ και $\left(\frac{y}{z}\right)$, τα οποία δεν είναι κατ’ ανάγκην ίσα μεταξύ των.

Εις την περίπτωση κατά την οποία αυτά τα δύο διαστήματα είναι ΙΣΑ μεταξύ των, δηλαδή $\frac{z}{x} = \frac{y}{z}$, τότε και μόνον τότε ο μέσος ονομάζεται «μέσος ανάλογος» των δύο δοθέντων φυσικών αριθμών x και y. Επειδή $\frac{z}{x} = \frac{y}{z}$, προκύπτει ότι ο μέσος ανάλογος των δύο δοθέντων φυσικών αριθμών είναι ο γεωμετρικός των μέσος, δηλαδή $z^2 = x \cdot y \;\Rightarrow\; z = \sqrt{x \cdot y}$.

Έστωσαν οι δύο φυσικοί μη διαδοχικοί αριθμοί α και γ (α>γ), οι οποίοι δομούν την σχέση $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$, δηλαδή σχηματίζουν το μουσικόν διάστημα $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)$. Μεταξύ των α και γ υπάρχει οπωσδήποτε τουλάχιστον ένας «μέσος», έστω ο β. Ο μέσος αυτός δυνατόν να είναι ένας εκ των δέκα πυθαγορείων μέσων[18] ή και κάποιος άλλος μέσος, ο οποίος διαι-

---

[18] Πίναξ 1. Οι δέκα αναλογίες των Πυθαγορείων.

α/α	Ονομασία & Μαθηματικός Ορισμός της αναλογίας μετά παραδείγματος	Η ανά λόγον μεσότης β εις τα αντίξοα α,γ (α>γ) ή Μέσοι (ανάλογοι)

1	Αριθμητική $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{\alpha}{\alpha}=\dfrac{\beta}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\gamma}$ ή $\alpha-\beta=\beta-\gamma$ 3, 2, 1	$\alpha^2-\alpha\beta=\alpha\beta-\alpha\gamma \Rightarrow \alpha(\alpha+\gamma)=2\alpha\beta \Rightarrow \beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$ ή $\alpha\beta-\beta^2=\beta^2-\beta\gamma \Rightarrow \beta(\alpha+\gamma)=2\beta^2 \Rightarrow \beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$ ή $\alpha\gamma-\beta\gamma=\beta\gamma-\gamma^2 \Rightarrow \gamma(\alpha+\gamma)=2\beta\gamma \Rightarrow \beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$
2	Γεωμετρική $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}$ 4, 2, 1	$\alpha\beta-\beta^2=\alpha\beta-\alpha\gamma \Rightarrow \beta=\sqrt{\alpha\gamma}$ ή $\alpha\gamma-\beta\gamma=\beta^2-\beta\gamma \Rightarrow \beta=\sqrt{\alpha\gamma}$ ή $\alpha\gamma=\beta^2 \Rightarrow \beta=\sqrt{\alpha\gamma}$
3	Αρμονική ή υπενάντιος $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$ ή $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{2}{\beta}$ 6, 4, 3	$\alpha\gamma-\beta\gamma=\alpha\beta-\alpha\gamma \Rightarrow 2\alpha\gamma=\beta(\alpha+\gamma) \Rightarrow \beta=\dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$
4	Τετάρτη (Υπενάντιος της αρμονικής) $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ 6, 5, 3	$\alpha^2-\alpha\beta=\beta\gamma-\gamma^2 \Rightarrow \alpha^2+\gamma^2=\beta\gamma+\alpha\beta \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta(\alpha+\gamma)=\alpha^2+\gamma^2 \Rightarrow \beta=\dfrac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha+\gamma}$
5	Πέμπτη (Υπενάντιος της γεωμετρικής) $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{\gamma}{\beta}$ ή $\alpha=\beta+\gamma-\dfrac{\gamma^2}{\beta}$ 5, 4, 2	$\alpha\beta-\beta^2=\beta\gamma-\gamma^2 \Rightarrow -\beta^2+\beta(\alpha-\gamma)+\gamma^2=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta^2-\beta(\alpha-\gamma)-\gamma^2=0 \Rightarrow$ $\beta=\dfrac{+(\alpha-\gamma)\pm\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+4\gamma^2}}{2}$, $\Delta=(\alpha-\gamma)^2+4\gamma^2>0 \Rightarrow$ $\beta=\dfrac{+(\alpha-\gamma)+\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+4\gamma^2}}{2}>0$
6	Έκτη (Υπενάντιος της γεωμετρικής) $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\dfrac{\beta}{\alpha}$ ή $\gamma=\alpha+\beta-\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ 6, 4, 1	$\alpha^2-\alpha\beta=\beta^2-\beta\gamma \Rightarrow \beta^2-\beta(\gamma-\alpha)-\alpha^2=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta=\dfrac{+(\gamma-\alpha)\pm\sqrt{(\gamma-\alpha)^2+4\alpha^2}}{2}$, $\Delta=(\gamma-\alpha)^2+4\alpha^2>0 \Rightarrow$ $\beta=\dfrac{+(\gamma-\alpha)+\sqrt{(\gamma-\alpha)^2+4\alpha^2}}{2}>0$

ρεί το διάστημα $\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)$ σε δύο διαστήματα (ίσα ή άνισα μεταξύ των, αναλόγως του είδους του μέσου) τα $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$ και $\left(\dfrac{\beta}{\gamma}\right)$, καθιστών την αρχικήν σχέση «διχή διαστατή». Η αρχική σχέσις $\left(\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)$ τώρα εκφράζει, κατά τα προαναφερθέντα, το εμβαδόν μιας ορθογωνίου επιφανείας[19] με διαστάσεις $\left(\dfrac{\beta}{\gamma}\right)$ και $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$. Η μεγαλύτερη διάστασις εκλαμβάνεται ως μήκος και η άλλη ως πλάτος.

7	$\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$ ή $\gamma^2=2\alpha\gamma-\alpha\beta$ 9, 8, 6	$\alpha\gamma-\gamma^2=\alpha\beta-\alpha\gamma \Rightarrow 2\alpha\gamma-\gamma^2=\alpha\beta \Rightarrow \beta=\dfrac{\gamma(2\alpha-\gamma)}{\alpha}$
8	$\dfrac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$ ή $\alpha^2+\gamma^2=\alpha(\beta+\gamma)$ 9, 7, 6	$\alpha\gamma-\gamma^2=\alpha^2-\alpha\beta \Rightarrow \alpha\beta=\alpha^2+\gamma^2-\alpha\gamma \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta=\dfrac{\alpha^2+\gamma^2-\alpha\gamma}{\alpha}$
9	$\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma}$ ή $\beta^2+\gamma^2=\gamma(\alpha+\beta)$ 7, 6, 4	$\alpha\gamma-\gamma^2=\beta^2-\beta\gamma \Rightarrow \beta^2-\beta\gamma-\alpha\gamma+\gamma^2=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta^2-\beta\gamma+\gamma(\gamma-\alpha)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta=\dfrac{\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\gamma(\gamma-\alpha)}}{2},\ \Delta=\gamma^2-4\gamma(\gamma-\alpha)>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta=\dfrac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-4\gamma(\gamma-\alpha)}}{2}$
10	$\dfrac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}$ ή $\alpha=\beta+\gamma$ 8, 5, 3	$\alpha\gamma-\gamma^2=\alpha\beta-\beta^2 \Rightarrow \beta^2-\alpha\beta+\gamma(\alpha-\gamma)=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta=\dfrac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\gamma(\alpha-\gamma)}}{2}=\dfrac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\alpha\gamma+4\gamma^2}}{2}=$ $=\dfrac{\alpha\pm\sqrt{(\alpha-2\gamma)^2}}{2} \Rightarrow \Delta=(\alpha-2\gamma)^2>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \beta=\dfrac{\alpha+\sqrt{(\alpha-2\gamma)^2}}{2}=\dfrac{\alpha+\alpha-2\gamma}{2}=\dfrac{2(\alpha-\gamma)}{2}=\alpha-\gamma$

Ιδιαίτερη σημασία έχει η περίπτωση κατά την οποίαν ο μέσος είναι ένας εκ των τριών πρώτων, δηλαδή ή αριθμητικός ή γεωμετρικός ή αρμονικός.

[19] δύο δὲ διαστήματα ἐπιφάνεια, ἐπιφάνεια γάρ ἐστι τὸ διχῇ διαστατόν·
Νικόμαχος, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 6, 4, 2-4.

Παράδειγμα 1

Έστωσαν οι φυσικοί μη διαδοχικοί αριθμοί α=18 και γ=16. Μεταξύ των υπάρχει ο φυσικός αριθμός β=17, ο οποίος είναι ο αριθμητικός των μέσος και χωρίζει το διάστημα των αρχικών φυσικών αριθμών σε δύο άνισα διαστήματα $\left(\frac{17}{16} > \frac{18}{17}\right)$. Το μήκος είναι $\left(\frac{17}{16}\right)$ και το πλάτος είναι $\left(\frac{18}{17}\right)$. Το εμβαδόν της ορθογωνίου επιφανείας είναι $\left(E = \frac{17}{16} \cdot \frac{18}{17} = \frac{18}{16}\right)$.

Υπάρχει η περίπτωσις κατά την οποίαν μεταξύ των διδομένων φυσικών μη διαδοχικών αριθμών α και δ (α>δ) να παρεμβάλλωνται δύο μέσοι, έστωσαν οι β και γ (β>γ). Οι μέσοι αυτοί διαιρούν το αρχικόν διάστημα $\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)$ εις τρία διαστήματα (ίσα ή άνισα μεταξύ των, αναλόγως του είδους των μέσων) τα $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)$, $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$, καθιστώντες την αρχικήν σχέση «τριχή διαστατήν» ή ένα στερεόν[20].

τρία δὲ διαστήματα στερεόν, στερεὸν γάρ ἐστι τὸ τριχῇ διαστατὸν καὶ οὐκ ἔστιν οὐδαμῶς ἐπινοεῖν στερεόν, ὃ πλεόνων τέτευχε διαστημάτων ἢ τριῶν, βάθους, πλάτους, μήκους·
Νικόμαχος, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 6, 4, 4-7.

Η αρχική σχέσις $\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)$, κατά τα προαναφερθέντα, εκφράζει τον όγκον ορθογωνίου πρισματικού στερεού με διαστάσεις $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)$ και $\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$.

Παράδειγμα 2

Έστωσαν οι φυσικοί μη διαδοχικοί αριθμοί α=27 και δ=24. Μεταξύ των υπάρχουν οι φυσικοί αριθμοί β=26 και γ=25, οι οποίοι χωρίζουν το διάστημα των αρχικών φυσικών αριθμών εις τρία άνισα διαστήματα $\left(\frac{25}{24} > \frac{26}{25} > \frac{27}{26}\right)$. Το μήκος είναι $\left(\frac{25}{24}\right)$, το

---

[20] Τίμαιος 32 b1-3. Βλέπε και Rivaud 72-74, Chevalier [1965], 3-4.
Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός εις το έργον του *Θεολογούμενα Αριθμητικής* (20, 9-12) αναφέρεται ως ακολούθως εις το απλούστερον εκ των Πλατωνικών στερεών, το τετράεδρον ή τριγωνικήν πυραμίδα: «τὸ γὰρ ἐλάχιστον καὶ πρωτοφανέστατον σῶμα πυραμὶς ἐν τετράδι ὁρᾶται εἴτε γωνιῶν εἴτε ἐπιπέδων, ὥσπερ καὶ τὸ ἐξ ὕλης καὶ εἴδους αἰσθητόν, ὅ ἐστιν ἀποτέλεσμα τριχῇ διαστατόν, ἐν τέσσαρσιν ὅροις ἐστί».
Εις τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη αναφέρεται ο ορισμός του στερεού ως «στερεό είναι αυτό, το οποίον έχει μήκος, πλάτος και βάθος».
Ο Αριστοτέλης χρησιμοποιεί την τρίτη διάσταση, το βάθος, από μόνη της για να περιγράψει το στερεόν σώμα, ωσάν να υποδηλώνει και τις άλλες δύο διαστάσεις. Κατά τον Αριστοτέλη μήκος είναι μία γραμμή και αναφέρεται σε μία διάσταση, πλάτος είναι μία επιφάνεια και αναφέρεται σε δύο διαστάσεις, βάθος είναι το στερεό σώμα και αναφέρεται σε τρεις διαστάσεις. Εις τα Τοπικά του Αριστοτέλους ευρίσκομε τον ορισμό του σώματος ωσάν αυτό, το οποίον έχει τρείς διαστάσεις ή αυτό, το οποίον έχει όλες τις διαστάσεις. Βεβαίως, εις τα Φυσικά λέγων όλες τις διαστάσεις ο Αριστοτέλης εννοεί έξι διαστάσεις, διότι διαιρεί κάθε μία εκ των τριών διαστάσεων σε δύο επί μέρους διαστάσεις αντιθέτου φοράς: επάνω – κάτω, πριν – μετά, δεξιόν – αριστερόν. Ο Αριστοτέλης υποστηρίζει εις τα *Μετά τα Φυσικά* (1066 b23) ότι ο όγκος του σώματος είναι αυτός, ο οποίος οριοθετείται από επίπεδα και, εις το ίδιο του έργον (1060 b15) υποστηρίζει, ότι οι επιφάνειες είναι τα όρια των σωμάτων.
Ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς συνδυάζει και τους δύο προηγουμένους ορισμούς: Στερεό σώμα είναι αυτό, το οποίον έχει μήκος, πλάτος και βάθος ή αυτό, το οποίον κατέχει τρείς διαστάσεις.

πλάτος είναι $\left(\frac{26}{25}\right)$ και το ύψος είναι $\left(\frac{27}{26}\right)$. Ο όγκος του ορθογωνίου πρίσματος είναι $\left(V = \frac{25}{24} \cdot \frac{26}{25} \cdot \frac{27}{26} = \frac{27}{24}\right)$.

Ιδιαίτερη σημασία εις τον χώρον της Στερεομετρίας έχει η περίπτωσις διδομένου φυσικού αριθμού, αναλελυμένου εις διατεταγμένον γινόμενον τριών παραγόντων, ο οποίος «παριστά» ένα στερεόν. Το εν λόγω στερεόν δυνατόν να είναι ή κύβος[21] (οἱ κύβοι <ἦσαν ἀριθμοὶ> ἰσάκις ἴσοι ἰσάκις) ή πλινθίς (πλινθίδες λέγονται <οἱ ἀριθμοὶ οἱ> ἰσάκις ἴσοι ἐλαττονάκις) ή δοκίς (ἔστι δὲ δοκὶς ἀριθμὸς ἰσάκις ἴσος μειζονάκις) ή σφηνίσκος (οἱ δέ γε σφηνίσκοι ἦσαν <ἀριθμοὶ > ἀνισάκις ἄνισοι ἀνισάκις). Όπως αναφέρει ο Νικόμαχος ο Γερασηνός[22], οι παρεμβαλλόμενοι δύο μέσοι εις δοθέντες δύο φυσικούς μη διαδοχικούς αριθμούς, αναλυόμενοι καθ’ όμοιον τρόπον, εκφράζουν στερεά, τα οποία είναι ή δοκίδες ή πλινθίδες ή σκαληνά.

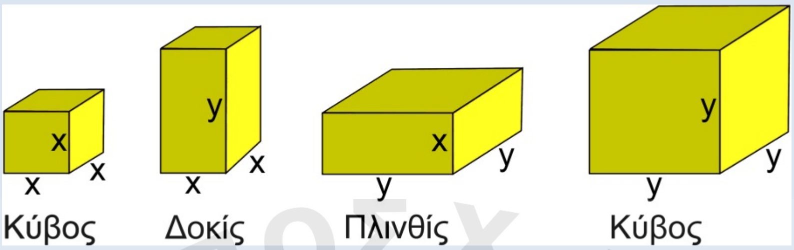
---

[21] Νικόμαχος, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 17, 6.

[22] Πίναξ 2: Ένδεκα περιπτώσεις εκ της Γενέσεως Ψυχής Κόσμου ενθέσεως δύο μεσοτήτων μεταξύ δύο δοθέντων φυσικών αριθμών, ώστε η σχέσις των να καταστεί τριχή διαστατή και οι επί μέρους σχηματιζόμενοι λόγοι να εκφράζουν μουσικά διαστήματα της αρχαιοελληνικής μουσικής. Οι αριθμοί εκάστης τετράδος είναι αναλελυμένοι εις διατεταγμένα γινόμενα τριών παραγόντων, τα οποία παριστούν στερεά σώματα. (Βλέπε Χ. Χ. Σπυρίδη, *Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*, σ. 381 κ.ε.)

1	6 $1\cdot2\cdot3$	8 $1\cdot2\cdot4$	9 $1\cdot3\cdot3$	12 $1\cdot3\cdot4$
2	1 $1\cdot1\cdot1$	2 $1\cdot1\cdot2$	4 $2\cdot2\cdot1$	8 $2\cdot2\cdot2$
3	2 $1\cdot1\cdot2$	3 $1\cdot1\cdot3$	8 $1\cdot4\cdot2$	12 $1\cdot4\cdot3$
4	6 $1\cdot3\cdot2$	9 $1\cdot3\cdot3$	16 $2\cdot4\cdot2$	24 $2\cdot4\cdot3$
5	3 $1\cdot1\cdot3$	4 $1\cdot1\cdot4$	9 $1\cdot3\cdot3$	12 $1\cdot3\cdot4$
6	3 $1\cdot1\cdot3$	4 $1\cdot1\cdot4$	6 $1\cdot2\cdot3$	8 $1\cdot2\cdot4$
7	2 $1\cdot1\cdot2$	3 $1\cdot1\cdot3$	4 $1\cdot2\cdot2$	6 $1\cdot2\cdot3$
8	48 $2\cdot8\cdot3$	64 $2\cdot8\cdot4$	81 $3\cdot9\cdot3$	108 $3\cdot9\cdot4$
9	24 $1\cdot3\cdot8$	27 $1\cdot3\cdot9$	32 $2\cdot2\cdot8$	36 $2\cdot2\cdot9$
10	1728 $8\cdot8\cdot27$	2048 $8\cdot8\cdot32$	2187 $27\cdot3\cdot27$	2592 $27\cdot3\cdot32$
11	216 $1\cdot27\cdot8$	243 $1\cdot27\cdot9$	256 $8\cdot4\cdot8$	288 $8\cdot4\cdot9$

Ο Πλάτων, εκμεταλλεύεται εις το έπακρον τα ανωτέρω για την επίλυση μουσικών θεμάτων με την συνδρομήν της Στερεομετρίας. Εμφανίζει την Στερεομετρίαν ως μία εκ των πέντε ιδιοτήτων ή ένα εκ των πέντε μαθημάτων, που εξαγνίζουν τον άνθρωπον και την τοποθετεί τρίτην κατά σειράν, δηλαδή μετά την Γεωμετρίαν και προ της Μουσικής.



Σχήμα 2: $\frac{\text{ΔΟΚΙΣ}}{\text{ΚΥΒΟΣ ΜΙΚΡΟΣ}} = \frac{\text{ΚΥΒΟΣ ΜΕΓΑΛΟΣ}}{\text{ΠΛΙΝΘΙΣ}}$

Η διαδικασία έχει ως ακολούθως: Δοθέντων δύο κύβων, ενός μικρού και ενός μεγάλου, παρατίθενται μεταξύ των, ώστε να σχηματίζουν αναλογίαν, μία δοκίς, η οποία έχει την βάση του μικρού κύβου και το ύψος του μεγάλου κύβου και μια πλινθίς, η οποία έχει την βάση του μεγάλου κύβου και το ύψος του μικρού.

Εις την περίπτωση κατά την οποίαν ο μικρός κύβος έχει πλευράν ίσην προς την μονάδα (1X1X1=1) και ο μεγάλος κύβος έχει πλευράν ίσην προς 2 (2X2X2=8), δοκίς είναι ο αριθμός 2 (1X1X2=2) και πλινθίς είναι ο αριθμός 4 (2X2X1=4).

Η περίπτωσις αυτή γεννά την τετρακτύν (=τετράδα αριθμών) 1, 2, 4, 8, την οποίαν δίδει ο Πλάτων εις την Γένεση Ψυχής Κόσμου[23] και η οποία μας αποκαλύπτει την γεννήτρια συνάρτηση $y = 2^x \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Τα προηγούμενα διατυπούνται δια μουσικών όρων ως εξής:

Όταν το δις διαπασών $\left(\frac{2}{1}\right)^2$ αφαιρείται από το τρις διαπασών $\left(\frac{2}{1}\right)^3$, γεννάται το διαπασών $\left(\frac{2}{1}\right)$.

Σχήμα 3: Όταν το δις διαπασών $\left(2^2 : 1^2\right)$ αφαιρείται από το τρις διαπασών $\left(2^3 : 1^3\right)$, γεννάται το διαπασών $(2:1)$.

[23] (Βλέπε Χ. Χ. Σπυρίδη, *Πλάτωνος Τίμαιος: ΓΕΝΕΣΙΣ ΨΥΧΗΣ ΚΟΣΜΟΥ (γραμμικές και λαβδοειδείς λύσεις)*, σ. 139 κ.ε.)

Εις την περίπτωση κατά την οποίαν ο μικρός κύβος έχει πλευράν ίσην προς τη μονάδα (1Χ1Χ1=1) και ο μεγάλος κύβος έχει πλευράν ίσην προς 3 (3Χ3Χ3=27), δοκίς είναι ο αριθμός 3 (1Χ1Χ3=3) και πλινθίς είναι ο αριθμός 9 (3Χ3Χ1=9). Τα προηγούμενα διατυπούνται δια μουσικών όρων ως εξής:

Όταν το δις (διαπασών και διαπέντε) $\left(\frac{3}{1}\right)^2$ αφαιρείται από το τρις (διαπασών και διαπέντε) $\left(\frac{27}{1}\right)$, γεννάται το διαπασών και διαπέντε $\left(\frac{3}{1}\right)$.

Η περίπτωσις αυτή γεννά την τετρακτύν 1, 3, 9, 27, την οποίαν παραδίδει ο Πλάτων στην Γένεση Ψυχής Κόσμου και η οποία μας αποκαλύπτει την γεννήτρια συνάρτηση $y = 3^x \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

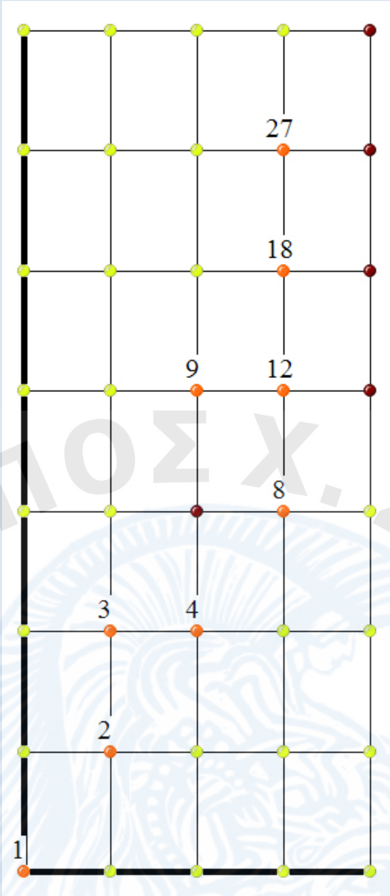
Εις την περίπτωση κατά την οποίαν ο μικρός κύβος έχει πλευράν ίσην προς 2 (2Χ2Χ2=8) και ο μεγάλος κύβος έχει πλευράν ίσην προς 3 (3Χ3Χ3=27), δοκίς είναι ο αριθμός 12 (2Χ2Χ3=12) και πλινθίς είναι ο αριθμός 18 (3Χ3Χ2=18). Τα προηγούμενα διατυπούνται δια μουσικών όρων ως εξής:

Όταν το δις διαπέντε $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ αφαιρείται από το τρις διαπέντε $\left(\frac{3}{2}\right)^3$, γεννάται το διαπέντε $\left(\frac{3}{2}\right)$.

Η περίπτωσις αυτή γεννά την τετρακτύν 8, 12, 18, 27, την οποίαν, όπως και τις δύο προηγούμενες, μας επιτρέπει ο Πλάτων εις τον διάλογόν του *Τίμαιος* (32b, 2-3) να δομήσωμε με την χρήση του θεωρήματός του «τὰ δὲ στερεὰ μία μὲν οὐδέποτε, δύο δὲ ἀεὶ μεσότητες συναρμόττουσιν». Οι τέσσερις αριθμοί 8, 12, 18, 27 δεν είναι τίποτα άλλο από μία τετρακτύν διαδοχικών πεμπτών, η οποία μας αποκαλύπτει την γεννήτρια συνάρτηση

$$y = 2^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Και η οποία, κατ’ουσίαν, εκφράζει τον «κύκλον των πεμπτών».



Σχήμα 4: Οι παρεμβαλλόμενοι φυσικοί αριθμοί μεταξύ τριών
ζευγών κύβων (1, 8), (1, 27) και (8, 27) επί του Σπυριδείου δικτυωτού (Βλέπε Χ. Χ. Σπυρίδη,
Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική, σ. 60 κ.ε.)

Μελέτη της δομής μιας τριχή διαστατής σχέσεως

Δοθέντων δύο μη διαδοχικών φυσικών αριθμών α και δ, επιθυμούμε να ενθέσωμε δύο μέσους φυσικούς αριθμούς β και γ (α<β<γ<δ) ούτως, ώστε η σχέσις των να καταστεί τριχή διαστατή και οι επί μέρους σχηματιζόμενοι λόγοι να εκφράζωνται δια των μουσικών συμφωνιών ή/και των διπλασίων ή/και των τριπλασίων τους κατά τα πυθαγόρεια μαθηματικά για τα μουσικά διαστήματα.

Οι σχηματιζομένοι λόγοι εις αυτήν την τριχή διαστατήν σχέση θα εκφράζονται δια των εννοιών «Μεριστέον διάστημα ή στερεόν», «Διαστήματα εμπλέγδην κι εναλλάγδην», «Άκρα διαστήματα», «Μέσον διάστημα»[24], όπως αυτές ορίζονται ακολούθως και εκτίθενται εις τον Πίνακα 3.

Με την έννοιαν «Μεριστέον διάστημα ή στερεόν» εκφράζεται η σχέσις μεταξύ των δύο δοθέντων φυσικών αριθμών $\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)$.

Η έννοια «Διαστήματα εμπλέγδην κι εναλλάγδην» αναφέρεται εις τα εμπεπλεγμένα διαστήματα $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)$ και $\left(\frac{\delta}{\beta}\right)$ για τα οποία ισχύει η ισότης $\left(\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\delta}{\beta}\right)$.

Με την έννοιαν «Άκρα διαστήματα» γίνεται αναφορά εις την σχέση του πρώτου και δευτέρου αριθμού καθώς επίσης και εις την σχέση του τρίτου και τετάρτου αριθμού για τις οποίες ισχύει η ισότης $\left(\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}\right)$.

Τέλος, με την έννοιαν «Μέσον διάστημα» δηλούται η σχέσις $\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)$.

Σχήμα 5: Γραφική παράσταση των διαστημάτων των σχηματιζομένων σε μια τριχή διαστατήν σχέση (στερεό).

Πίναξ 3: Ορισμοί και σχέσεις των διαστημάτων των σχηματιζομένων εις μίαν τριχή διαστατήν σχέση (στερεόν).

Μεριστέον Διάστημα	$\frac{\delta}{\alpha}$
Εναλλάγδην & Εμπλέγδην Διάστημα	$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\delta}{\beta}$
Άκρα Διαστήματα	$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}$
Μέσον Διάστημα	$\frac{\gamma}{\beta}$

[24] Σ. Ι. Καράς, *Τα βασικά γνωρίσματα της Βυζαντινής Εκκλησιαστικής Μουσικής*, εν χγφοις.

Επειδή

$$\left(\text{ΑΚΡ}ON \text{ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\frac{\beta}{\alpha}=\left(\frac{\frac{\delta}{\alpha}}{\frac{\delta}{\beta}}\right)=\left(\frac{\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ \quad ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}{\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ \quad ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}\right)$$

$$\left(\text{ΑΚΡ}ON \text{ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\frac{\delta}{\gamma}=\left(\frac{\frac{\delta}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)=\left(\frac{\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ \quad ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}{\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ \quad ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}\right)$$

προκύπτουν οι σχέσεις 1α, 1β και 1γ εκ των οποίων, δοθέντων των δύο διαστημάτων του δευτέρου μέλους εκάστης, δυνάμεθα να υπολογίσωμε το διάστημα του πρώτου μέλους αυτής.

(Σχέση 1α)

$$\left(\text{ΑΚΡ}ON \text{ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\left(\frac{\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ \quad ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}{\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ \quad ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}\right)$$

(Σχέση 1β)

$$\left(\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ \quad ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\left(\frac{\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ \quad ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}{\text{ΑΚΡ}ON \text{ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}\right)$$

(Σχέση 1γ)

$$\left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ \quad ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\left(\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ \quad ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)\left(\text{ΑΚΡ}ON \text{ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)$$

Επειδή

$$\left(\text{ΜΕΣΟΝ \quad ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\frac{\gamma}{\beta}=\left(\frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha}}\right)=\left(\frac{\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ \quad ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}{\text{ΑΚΡ}ON \text{ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}\right)$$

$$\left(\text{ΜΕΣΟΝ \quad ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\frac{\gamma}{\beta}=\left(\frac{\frac{\delta}{\beta}}{\frac{\delta}{\gamma}}\right)=\left(\frac{\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ \quad ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}{\text{ΑΚΡ}ON \text{ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}\right)$$

προκύπτουν οι σχέσεις 2α, 2β και 2γ εκ των οποίων, δοθέντων των δύο διαστημάτων του δευτέρου μέλους εκάστης, δυνάμεθα να υπολογίσωμε το διάστημα του πρώτου μέλους αυτής.

(Σχέση 2α)

$$\left(\text{ΜΕΣΟΝ \quad ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\left(\frac{\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ \quad ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}{\text{ΑΚΡ}ON \text{ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}\right)$$

(Σχέση 2β)

$$\left(\text{ΑΚΡ}\mathit{ON}\ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\left(\frac{\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}{\text{ΜΕΣΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}\right)$$

(Σχέση 2γ)

$$\left(\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\left(\text{ΑΚΡ}\mathit{ON}\ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)\left(\text{ΜΕΣΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)$$

Επειδή

$$\frac{\delta}{\alpha}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\right)\cdot\frac{\gamma}{\beta}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\left(\text{ΑΚΡ}\mathit{ON}\ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)^2\cdot\left(\text{ΜΕΣΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)$$

προκύπτουν οι σχέσεις 3α, 3β και 3γ εκ των οποίων, δοθέντων των δύο διαστημάτων του δευτέρου μέλους εκάστης, δυνάμεθα να υπολογίσωμε το διάστημα του πρώτου μέλους αυτής.

(Σχέση 3α)

$$\left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\left(\text{ΜΕΣΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)\left(\text{ΑΚΡ}\mathit{ON}\ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)^2$$

(Σχέση 3β)

$$\left(\text{ΜΕΣΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\frac{\left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)}{\left(\text{ΑΚΡ}\mathit{ON}\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)^2}$$

(Σχέση 3γ)

$$\left(\text{ΑΚΡ}\mathit{ON}\ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\sqrt{\frac{\left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)}{\left(\text{ΜΕΣΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)}}$$

Επειδή

$$\frac{\gamma}{\beta}=\left(\frac{\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\delta}{\beta}}{\frac{\delta}{\alpha}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\text{ΜΕΣΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\frac{\left(\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)^2}{\left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)}$$

προκύπτουν οι σχέσεις 4α, 4β και 4γ εκ των οποίων, δοθέντων των δύο διαστημάτων του δευτέρου μέλους εκάστης, δυνάμεθα να υπολογίσωμε το διάστημα του πρώτου μέλους αυτής.

(Σχέση 4α)

$$\left(\text{ΜΕΣΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)=\frac{\left(\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)^2}{\left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)}$$

(Σχέση 4β)

$$\left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ}\ \ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right) = \frac{\left(\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ}\ \ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)^2}{\left(\text{ΜΕΣΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)}$$

(Σχέση 4γ)

$$\left(\text{ΕΝΑΛΛΑΓΔΗΝ \& ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ}\ \ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right) = \sqrt{\left(\text{ΜΕΣΟΝ ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)\left(\text{ΜΕΡΙΣΤΕΟΝ}\ \ \text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}\right)}$$

Τα ανωτέρω αναφερόμενα διαστήματα (Μεριστέον, Εναλλάγδην κι εμπλέγδην και Μέσον) δύνανται να ορισθούν κατά ποικίλους και ουκ ολίγους τρόπους, οι οποίοι δυνατόν να έχουν και δυνατόν να μην έχουν επίσημη σχέση με την αρχαιοελληνικήν ή βυζαντινήν μας μουσικήν.

Εις την πρώτην περίπτωση αξιομνημόνευτες είναι οι τριχή διαστατές σχέσεις κατά τις οποίες οι εντιθέμενοι μέσοι φυσικοί αριθμοί συμπίπτουν με κάποιες μεσότητες εκ των δέκα προμνημονευθεισών πυθαγορικών και ιδιαιτέρως με τις τρεις πρώτες (αριθμητικήν, γεωμετρικήν, αρμονικήν) μεσότητες, τις οποίες, κατά γενικήν αποδοχήν, επενόησεν ο ίδιος ο Πυθαγόρας.

Εκ των δομήσεων τριχή διαστατών σχέσεων, τηρούντες τις αναφερθείσες αναλογίες εμπλέγδην κι εναλλάγδην, γεννώνται νέα μουσικά διαστήματα κατά τα τρία γένη και τις χρόες τις μουσικές, από του μείζονος και θειοτέρου μέχρι και του ελαχίστου, του κόμματος.

Παράδειγμα 3

Να δομηθεί τριχή διαστατή σχέσις με μεριστέον διάστημα ενός διαπασών, η οποία να εμπεριέχει συγχρόνως και την αριθμητικήν και την αρμονικήν και τη γεωμετρικήν (εμπλέγδην) μεσότητες.

Πρόκειται για την λεγομένη μουσικήν αναλογίαν[25] και είναι η μοναδική, η οποία εμπεριέχει και τις τρεις μεσότητες του Πυθαγόρου.

---

[25] Λοιπὸν καὶ περὶ τῆς τελειοτάτης καὶ τριχῆ διαστατῆς πασῶν τε περιεκτικῆς ἐν βραχεῖ διαρθρώσω μεσότητος χρησιμωτάτης οὔσης εἰς πᾶσαν τὴν ἐν μουσικῇ καὶ φυσιολογίᾳ προκοπήν· κυρίως γὰρ αὕτη καὶ ὡς ἀληθῶς ἁρμονία ἂν λεχθείη μόνη παρὰ τὰς ἄλλας, εἴπερ μὴ ἐπίπεδος μηδὲ μιᾷ μόνῃ μεσότητι συνδεομένη, ἀλλὰ δυσίν, ἵν’ οὕτω τριχῆ διστάνοιτο, ὡς ὁ κύβος ἁρμονία πρὸ βραχέος ἐσαφηνίσθη. ὅταν τοίνυν δύο ὅρων ἄκρων τριχῆ διαστατῶν ἀμφοτέρων, εἴτε ἰσάκις ἴσων ἰσάκις, ἵνα κύβος ᾖ, ἢ ἰσάκις ἴσων ἀνισάκις, ἵνα ἢ δοκίδες ἢ πλινθίδες ὦσιν, εἴτε ἀνισάκις ἀνίσων ἀνισάκις, ἵνα σκαληνοί, δύο ὅροι εὑρίσκωνται ἀνὰ μέσον ἄλλοι ἐναλλὰξ πρὸς τοὺς ἄκρους τοὺς αὐτοὺς σώζοντες λόγους καὶ ἀναμίξ, ὥστε ὁποτερουοῦν αὐτῶν τὴν ἁρμονικὴν σώζοντος ἀναλογίαν τὸν λοιπὸν ἀποτελεῖν τὴν ἀριθμητικήν· ἀνάγκη γὰρ οὕτως διακειμένων τῶν τεσσάρων ἐπιφαίνεσθαι τὴν γεωμετρικὴν ἐμπλέγδην ἀμφοτέραις ταῖς μεσότησιν ἀντεξεταζομένην, ὡς ὁ μέγιστος πρὸς τὸν τρίτον ἀπ’ αὐτοῦ, οὕτως ὁ ὑπ’ αὐτὸν δεύτερος πρὸς τὸν τέταρτον· τὸ γὰρ τοιοῦτον τὸ ὑπὸ τῶν μέσων ἶσον ποιεῖ τῷ ὑπὸ τῶν ἄκρων· πάλιν δὲ ἂν ὁ μέγιστος πρὸς τὸν ὑπ’ αὐτὸν ἐν τοσαύτῃ δειχθῇ διαφορᾷ, ἐν ὅσῃ καὶ αὐτὸς οὗτος πρὸς τὸν ἐλάχιστον, ἀριθμητικὴ ἡ τοιαύτη ἐξέτασις γίνεται καὶ ἡ τῶν ἄκρων σύνθεσις διπλασία τοῦ μέσου· ἐὰν δ’ ὁ τρίτος ἀπὸ τοῦ μεγίστου τῷ αὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχῃ καὶ ὑπερέχηται, ἁρμονικὴ καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ μέσου καὶ τῆς τῶν ἄκρων συνθέσεως διπλάσιον τοῦ ὑπὸ τῶν ἄκρων. ὑπόδειγμα αὐτῆς ἔστω τοιοῦτον ϛ, η, θ, ιβ· οὐκοῦν ὁ μὲν ϛ σκαληνὸς ἀπὸ τοῦ ἅπαξ β τρίς, ὁ δὲ ιβ ἀπὸ τοῦ δὶς β τρὶς ἐν συνεχείᾳ μηκυνθέντων, τῶν δὲ μέσων ὁ μὲν ἐλάττων ἀπὸ τοῦ ἅπαξ β τετράκις, ὁ δὲ μείζων ἀπὸ τοῦ ἅπαξ γ τρίς, καὶ στερεοί τε οἱ ἄκροι καὶ τριχῆ διαστατοὶ καὶ ὁμογενεῖς αὐτοῖς αἱ μεσότητες, καὶ κατὰ μὲν τὴν γεωμετρικὴν ὡς ὁ ιβ πρὸς τὸν η, οὕτως ὁ θ πρὸς τὸν ϛ, κατὰ δὲ τὴν ἀριθμητικὴν ὅσῳ ὁ ιβ τοῦ θ ὑπερέχει, τοσούτῳ καὶ ὁ θ τοῦ ϛ, κατὰ δὲ τὴν ἁρμονικὴν ᾧ μέρει ὁ η τοῦ ϛ ὑπερέχει, ἐν αὐτῷ τῷ ϛ τοῦ μέρους θεωρουμένου, τούτῳ ὑπὸ τοῦ ιβ ὑπερέχεται ἐν αὐτῷ τῷ ιβ θεωρουμένῳ. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ μὲν η πρὸς ϛ ἢ ὁ ιβ πρὸς θ διὰ τεσσάρων ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ, ὁ δὲ θ πρὸς ϛ ἢ ὁ ιβ πρὸς η διὰ πέντε ἐν ἡμιολίῳ, ὁ δὲ ιβ πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν ὅσῳ ὁ ιβ τοῦ θ ὑπερέχει, τοσούτῳ καὶ ὁ θ τοῦ ϛ, κατὰ δὲ τὴν ἁρμονικὴν ᾧ μέρει ὁ η τοῦ ϛ ὑπερέχει, ἐν αὐτῷ τῷ ϛ

Αξιοσημείωτον είναι το γεγονός ότι οιαδήποτε τριχή διαστατή δομή αριθμών, εμπεριέχουσα την αρμονικήν αναλογίαν, υποδηλοί στερεόν σώμα με ισχυρώς συνεκτικήν δομήν των συστατικών του μερών. Μεταξύ των αριθμών, οι οποίοι εκφράζουν τα γεωμετρικά στοιχεία, ήτοι κορυφές, ακμές, έδρες κ.λπ. εκάστου των πέντε πλατωνικών στερεών, εις τον κύβον και το οκτάεδρον[26] εντοπίζεται η αρμονική αναλογία. Επειδή, επιπροσθέτως, ο κύβος περιορίζεται από επίπεδες τετράγωνες επιφάνειες (έδρες), συναρμολογούμενες από «ατομικά» ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα και μόνον, για τον λόγον αυτόν ο Πλάτων αντιστοίχισε εις τον κύβον την στερεάν και συνεκτικήν γαίαν.

Έστωσαν οι φυσικοί αριθμοί α, β, γ, δ, οι οποίοι δομούν την ζητουμένην αναλογίαν με τους α και δ σε σχέση διαπασών, ήτοι $\frac{\delta}{\alpha} = \frac{2}{1}$.

Ο β, ως η αρμονική μεσότης των όρων του μεριστέου διαστήματος κατά τους Πυθαγορείους, θα δίδεται υπό της σχέσεως:

$$\frac{\delta - \beta}{\beta - \alpha} = \frac{\delta}{\alpha} \Rightarrow \alpha \cdot \delta - \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \delta - \alpha \cdot \delta \Rightarrow 2\alpha \cdot \delta = \beta \cdot (\alpha + \delta) \Rightarrow \beta = \frac{2 \cdot \alpha \cdot \delta}{\alpha + \delta}$$

Ο γ, ως η αριθμητική μεσότης των όρων του μεριστέου διαστήματος κατά τους Πυθαγορείους, θα δίδεται υπό της σχέσεως:

$$\delta - \gamma = \gamma - \alpha \Rightarrow 2\gamma = \alpha + \delta \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha + \delta}{2}$$

τοῦ μέρους θεωρουμένου, τούτῳ ὑπὸ τοῦ ιβ ὑπερέχεται ἐν αὐτῷ τῷ ιβ θεωρουμένῳ. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ μὲν η πρὸς ϛ ἢ ὁ ιβ πρὸς θ διὰ τεσσάρων ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ, ὁ δὲ θ πρὸς ϛ ἢ ὁ ιβ πρὸς η διὰ πέντε ἐν ἡμιολίῳ, ὁ δὲ ιβ πρὸς ϛ διὰ πασῶν ἐν διπλασίῳ· λοιπὸν δὲ ὁ θ πρὸς τὸν η τονιαῖον ἐν ἐπογδόῳ, ὅπερ μέτρον κοινὸν πάντων τῶν ἐν μουσικῇ λόγων, ἅτε καὶ γνωριμώτερον ὄν, ὅτι ἄρα καὶ διαφορὰ τῶν πρώτων καὶ στοιχειωδεστάτων συμφώνων πρὸς ἄλληλα ὑπάρχει.
Νικομάχου, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 29, 1, 1 - 2, 29, 4, 8.

[26] Κύβος, η «Γεωμετρική Αρμονία»: (Νικόμαχος, ό.π. 26,2) «γεωμετρικὴν ἁρμονίαν φασὶ τὸν κύβον ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸ τρία διαστήματα ἡρμόσθαι ἰσάκις. ἐν γὰρ παντὶ κύβῳ ἥδε ἡ μεσότης ἐνοπτρίζεται. πλευραὶ μὲν γὰρ παντὸς κύβου εἰσὶν ιβ', γωνίαι δὲ η', ἐπίπεδα δὲ ς'. μεσότης ἄρα ὁ η' τῶν ς' καὶ τῶν ιβ' κατὰ τὴν ἁρμονικήν». Εις την εν λόγω σειράν αριθμών διακρίνονται όλες οι μουσικές συμφωνίες και γιαυτό τον κύβο τον ωνόμαζον οι Πυθαγόρειοι «Γεωμετρική Αρμονία». Πράγματι, το 8 είναι ο μέσος αρμονικός των αριθμών 6 και 12, διότι $\frac{12}{6} = \frac{12-8}{8-6}$. Ο επίτριτος λόγος 8:6 εκφράζει το διατεσσάρων διάστημα. Ο ημιόλιος λόγος 12:8 εκφράζει το διαπέντε διάστημα. Ο διπλάσιος λόγος, δηλαδή το διαπασών διάστημα, εκφράζεται από το γινόμενον $\frac{12}{8} . \frac{8}{6} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$. Το διαπασών και το διαπέντε, συνδυαζόμενα, εκφράζονται από τον τριπλάσιον λόγον $\frac{2}{1} . \frac{3}{2} = \frac{3}{1}$ ή $\frac{12-6}{8-6} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1}$. Το δις διαπασών διάστημα εκφράζεται από τον τετραπλάσιον λόγον ως εξής: $\frac{8}{8-6} = \frac{4}{1}$.

Η γεωμετρική (εμπλέγδην) αναλογία μεταξύ των τεσσάρων όρων της τριχή διαστατής δομής είναι η $\dfrac{\delta}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Εκ των ανωτέρω σχέσεων, εάν τεθεί α=1, προκύπτουν οι τιμές:

$$\beta=\frac{2\cdot 1\cdot 2}{1+2}=\frac{4}{3}$$

$$\gamma=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\delta=2$$

Επειδή οι α, β, γ, δ πρέπει να είναι φυσικοί αριθμοί, πολλαπλασιάζομε επί το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών [Ε.Κ.Π.(2, 3)=6] και προκύπτει η ζητουμένη τριχή διαστατή δομή αριθμών (Σχήμα 6)

6	8	9	12
α	β	γ	δ

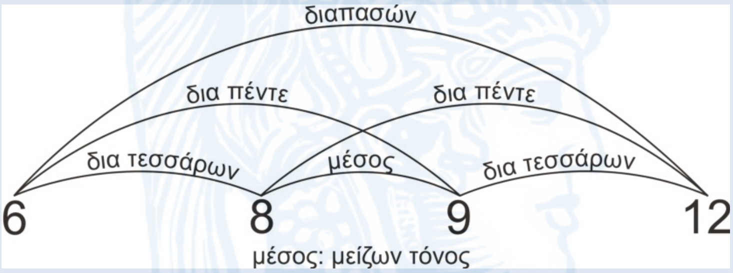
εις την οποίαν:

το μεριστέον διάστημα $12:6$ είναι διπλάσιον,

τα εναλλάγδην κι εμπλέγδην διαστήματα $9:6$, $12:8$ είναι ημιόλια,

τα άκρα διαστήματα $8:6$, $12:9$ είναι επίτριτα και

το μέσον διάστημα $9:8$ είναι επόγδοον.



Σχήμα 6: Του δις διατεσσάρων $\left(4^2:3^2\right)$αφαιρουμένου από το διαπασών $(12:6)$, ο μείζων τόνος (επόγδοος) $(9:8)$.

Τα προηγούμενα δια μουσικών όρων διατυπούνται ως εξής: Του δις διατεσσάρων $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ αφαιρουμένου εκ του διαπασών $\left(\frac{12}{6}\right)$, ο μείζων τόνος (επόγδοος) $\left(\frac{9}{8}\right)$.

Παράδειγμα 4

Να αποδειχθεί το θεώρημα του Πλάτωνος, το οποίον εκτίθεται εις τον διάλογόν του *Τίμαιος* (32 b, 2-3) και διατυπούται ως: «τὰ δὲ στερεὰ μία μὲν οὐδέποτε, δύο δὲ ἀεὶ μεσότητες συναρμόττουσιν»

Ζητείται, δηλαδή, μια τριχή διαστατή σχέσις μεταξύ τεσσάρων φυσικών αριθμών α, β, γ, δ εις την οποίαν το μεριστέον διάστημα είναι $\dfrac{\delta}{\alpha}$ και τα άκρα διαστήματα είναι ίσα με το μέσον διάστημα $\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\delta}{\gamma}=\dfrac{\gamma}{\beta}=\kappa$. Εκ των σχέσεων αυτών προκύπτουν οι σχέσεις:

$\beta = \kappa\alpha$

$\gamma = \kappa\beta = \kappa^2\alpha$

$\delta = \kappa\gamma = \kappa^3\alpha$

Εκ της τελευταίας σχέσεως προκύπτει ότι το μεριστέον διάστημα δίδεται υπό της σχέσεως $\frac{\delta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \kappa \cdot \kappa \cdot \kappa = \kappa^3$, όπου $\kappa = \sqrt[3]{\frac{\delta}{\alpha}}$ ρητός αριθμός. Προκειμένου εκ της σχέσεως αυτής να προκύπτει ο κ φυσικός αριθμός, θα πρέπει το μεριστέον διάστημα να εκφράζεται ως λόγος δύο κύβων (στερεών αριθμών).

Έστω, λοιπόν, ότι $\left.\begin{array}{l} \delta = \psi^3 \\ \alpha = \chi^3 \end{array}\right] \Rightarrow \ \kappa = \sqrt[3]{\frac{\psi^3}{\chi^3}} = \frac{\psi}{\chi}$

Η τριχή διαστατή δομή απαρτίζεται εκ των κάτωθι τεσσάρων όρων:

$\alpha = \chi^3$ (ελάσσων κύβος)

$\beta = \kappa\alpha = \frac{\psi}{\chi} \cdot \chi^3 = \psi\chi^2$ (δοκίς)

$\gamma = \kappa\beta = \kappa^2\alpha = \left(\frac{\psi}{\chi}\right)^2 \cdot \chi^3 = \psi^2\chi$ (πλινθίς)

$\delta = \kappa\gamma = \kappa^3\alpha = \left(\frac{\psi}{\chi}\right)^3 \cdot \chi^3 = \psi^3$ (μείζων κύβος)

Παράδειγμα 5

Ζητείται μια τριχή διαστατή σχέσις μεταξύ τεσσάρων φυσικών αριθμών α, β, γ, δ εις την οποίαν το μεριστέον διάστημα είναι επόγδοον $\left(\frac{9}{8}\right)$ και τα άκρα διαστήματα είναι ίσα με το διάστημα του λείμματος $\left(\frac{256}{243}\right)$. Εκ των σχέσεων αυτών προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\delta}{\alpha} = \frac{9}{8} \\ \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{256}{243} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{9}{8} \cdot \alpha$$

$$\beta = \frac{256}{243} \cdot \alpha$$

$$\gamma = \frac{243}{256} \cdot \delta = \frac{243}{256} \cdot \frac{9}{8} \cdot \alpha$$

Λαμβάνοντες ως τιμήν του α το Ε.Κ.Π. των ανωτέρω παρονομαστών, δηλαδή $a = 8 \cdot 243 \cdot 256 = 497.664$, προκύπτουν οι τιμές των υπολοίπων τριών ζητουμένων φυσικών αριθμών.

$$\delta = \frac{9}{8} \cdot 8 \cdot 243 \cdot 256 = 559.872$$

$$\beta = \frac{256}{243} \cdot 8 \cdot 243 \cdot 256 = 524.288$$

$$\gamma = \frac{243}{256} \cdot \delta = \frac{243}{256} \cdot \frac{9}{8} \cdot 8 \cdot 243 \cdot 256 = 531.441$$

Τα προηγούμενα δια μουσικών όρων διατυπούνται ως εξής: του διλείμματος $\left(\frac{256}{243}\right)^2$ αφαιρουμένου εκ του επογδόου τόνου $\left(\frac{9}{8}\right)$, το «άτμητον» πυθαγόρειον κόμμα $\left(\frac{531.441}{524.288}\right)$.

Σχήμα 7: Του διλείμματος $\left(\frac{256}{243}\right)^2$ αφαιρουμένου εκ του επογδόου τόνου $\left(\frac{9}{8}\right)$, το «άτμητον» πυθαγόρειον κόμμα $\left(\frac{531.441}{524.288}\right)$.

Α΄ ΠΗΓΕΣ

Ανών. Bell.	F. Bellermann, *De Anonymi scriptio de Musica*, Ανωνύμου σύγγραμμα περί Μουσικής, Βερολίνο 841. Νέα έκδ. D. Najock, Goettingen 1972.
Αριστείδης	Αριστείδης Κοϊντιλιανός, *Περί Μουσικής*, έκδ. Meibom 1652, A. Jahm 1882 και R. P. Winnington-Ingram, Λιψία 1963.
Αριστόξ. Αρμ.	Αριστόξενος, *Αρμονικά Στοιχεία*, έκδ. Meibom κ.α.
Αριστοτέλης	Bekker, I., *Aristotelis opera omnia*, Berlin, 1831-1870, new edn., O. Gigon ed., 1960-
Γαυδ. Εισ.	Γαυδέντιος Φιλόσοφος, *Αρμονική Εισαγωγή*, έκδ. Meibom, 1652 και C. v. Jan 1895.
Ευκλ.	Ευκλείδης, *Opera Omnia*, ed. J. L. Heiberer και H. Monge, Leipzig (T.) 1883-1916.
Θέων Σμυρν.	Θέωνος Σμυρναίου, *Περί Μουσικής (Τα κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν)*, B. G. Teubneri, Lipsiae, 1878, έκδ. Ism. Bullialdus, Παρίσι 1644 και ed. Hiller, Λιψία 1878, T.
Κλεον. Εισ.	Κλεονείδης (ή Κλεωνίδης), *Εισαγωγή Αρμονική*, έκδ. C. v. Jan 1895.
Ευκλείδου	«*Στοιχεία*» (τόμοι 4) (επιμέλεια, σχολιασμός, απόδοση στη νεοελληνική Ευαγγέλου Σταμάτη) (Ο.Ε.Δ.Β.), Αθήνα, 1953.
LSJ	Henry G. Liddell and R. Scott, *A Greek-English Lexicon*, revised and augmented by Sir Henry St. Jonew, with a Supplement, Οξφόρδη, 1968, ανατύπωση 1973.
Macran	Henry S. Macran, *The Harmonics of Aristoxenus* (Αριστοξένου Αρμονικά Στοιχεία, Οξφόρδη 1902).
Mb	Marc Meibom (Marcus Meibomius), *Antiquae Musicae Auctores Septem*, graece et latine, Amsterdam 1652.
Νικόμ. Εγχ.	Νικόμαχος Γερασηνός, *Αρμονικής Εγχειρίδιον*, έκδ. Meibom, 1652 και C. v. Jan 1895.
Παχυμ.	Γεώργιος Παχυμέρης, *Περί Αρμονικής* (Vincent, Notices),

Παρίσι 1847, σσ. 401-552.

Πλάτων — Πλάτων, *Νόμοι*, *Πολιτ*. (Πολιτεία), *Πρωταγ*. (Πρωταγόρας), *Φίληβος* κλπ.

Πλούτ. Περί μουσ. — Πλούταρχος, *Περί μουσικής*.

Πορφύρ.Comment. — Πορφύριος, *Commentarius in Ptolemaei Harmonica*, έκδ. J. Wallis, Οξφόρδη 1699 και I. During Goeteborg 1932.

Πρόκλου — Πρόκλος, «*Σχόλια εις το α΄ βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδου*» τόμος Α΄ (Εκδ. Αίθρα), Αθήνα 2001.

Πρόκλου — Πρόκλος, «*Σχόλια εις το α΄ βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδου*» τόμος Β΄ (Εκδ. Αίθρα), Αθήνα 2002.

Πρόκλου — Πρόκλος, *Εις τον Τίμαιον*, E. Diehl (ed.), Leipzing, 1903 (tr. By J. Festugiere, 5 vols, Paris, 1966-68).

Πρόκλου — Πρόκλος, *Περί της κατά Πλάτωνος θεολογίας*, στο Proclus, Opera inedita, V. Cousin (ed.), Paris, 1864 (αγγλική έκδοση από τους Morrow και Dillon, Princeton, 1987.

Πτολ. Αρμ. — Πτολεμαίος, *Αρμονικά*, έκδ. J. Wallis, Οξφόρδη 1699 και I. During, Goeteborg 1930.

Φιλόλαος — Philolaus, *Notices and fragments in Diels-Kranz 44* (Vol. 1, pp. 398-419); Timpanaro Cardini, Pitagorici 18, Fasc. II, pp. 82-249.

Online TLG — *THESAURUS LINGUAE GRAECAE: A Digital Library of Greek Literature*

Β΄ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΑ

De Falco, V. (ed.), 1922, *Theologumena Arithmeticae*, Teubner, Lipsiae, μετάφραση στη νεοελληνική Ι. Ιωαννίδης, Α. Φωτόπουλος και Π. Γράβιγγερ (επ.), Ιδεοθέατρον, Αθήνα, 1998.

Fowler, D., 1979, *Ratio in early Greek Mathematics*, (Bulletin of American Mathematical Society, pp. 807-846), New York.

Fowler, H., 1999, *The Mathematics of Plato's Academy*, Oxford University Press, Oxford.

Heath, T., 1926, *Euclid; the thirteen books of the Elements*, Dover, N. York.

Heath, T., 1949, *Mathematics in Aristotle*, Clarendon Preess, Oxford.

Heath, T., 1981, *A History of Greek Mathematics (Vol. I, II)*, Dover, N. York.

Hoche, Richard, ed. *Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Arithmeticae Libri II*, Leipzing, 1866.

Ivor Thomas, 1980, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, vol. I-II, Cambridge Mass., London.

LOEB CLASSICAL LIBRARY, 1998, *Greek Mathematical Works II– Aristarchus to Pappus*, Transl. Ivor Thomas, Harvard University Press, London.

LOEB CLASSICAL LIBRARY, 2000, *Greek Mathematical Works I– Thales to Euclid*, Transl. Ivor Thomas, Harvard University Press, London.

Martin, T. H., 1841, *Μελέτες για τον Τίμαιο του Πλάτωνα*, Παρίσι.

Pearson, L., 1990, *ARISTOXENUS: Elementa Rhythmica*, Clarendon Prees, Oxford.

Pistelli. H. (ed.), 1894, In Nicomahi Arithmeticam introductionem, ανατ. Teubner, Stuttgart, 1975.

Reinach, Theodore, 1999, *Η ελληνική μουσική*, Μτφρ. Αναστασίας-Μαρίας Καραστάθη, σελ. 158, Αθήνα.

Rivaud, A., 1925, *Πλάτων, Τίμαιος, Κριτίας*, Παρίσι.

Szabo, Arpad, 1973, *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών*, Εκδόσεις Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδος, Αθήνα.

Taylor, A. E., 1992, *ΠΛΑΤΩΝ (Ο άνθρωπος και το έργο του)*, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, Αθήνα.

Taylor, Thomas, 1994, *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων,* Μτφρ. Μαρία Οικονομοπούλου, *Εκδόσεις* ΙΑΜΒΛΙΧΟΣ, Αθήνα.

West. M., L., 2004, *Αρχαία Ελληνική Μουσική*, Μτφρ. Στ. Κομνηνός, Εκδ. Παπαδήμα, Αθήνα.

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΑ

Ανδρεαδάκης, Ν., 1999, *Η τετρακτύς της Ιωνίας και ο Ιωνικός λόγος αποκαλύπτουν*, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.

Αρχαίοι Αρμονικοί Συγγραφείς, Τόμος Α΄, 1995, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.

Αρχαίοι Αρμονικοί Συγγραφείς, *ΑΡΙΣΤΟΞΕΝΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ*, Τόμος Β΄, 1997, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.

Ιάμβλιχος, 1998, *Τα θεολογούμενα της Αριθμητικής*, Εκδ. Ιδεοθέατρον, Αθήνα.

Ιάμβλιχος, 2001, *Περί του Πυθαγορικού Βιου*, Εισαγωγή-Μετάφραση-Σχόλια Αλ. Α. Πέτρου, Πρόλογος Τ. Πεντζοπούλου-Βαλαλά, Εκδ. Ζήτρος, Θεσσαλονίκη.

Κάλφας, Βασίλης, 1997, *ΠΛΑΤΩΝ ΤΙΜΑΙΟΣ,* Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ, Αθήνα.

Καράς Σίμων, 1989, *Αρμονικά*, Ανακοίνωσις εις το Μουσικολογικόν Συνέδριον των Δελφών της 28-30 Οκτωβρίου 1988, Εκδ. Συλλόγου προς διάδοσιν της Εθνικής Μουσικής, Αθήνα.

Καράς Σίμων, *Τα βασικά γνωρίσματα της Βυζαντινής Εκκλησιαστικής Μουσικής*, εν χγφοις.

Λαμπρίδης, Χ. Χ., 1996, *ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΣ*, Βιβλιοπωλείο ΚΛΕΙΩ, Πάτρα.

Μιχαηλίδης, Σ., 1982, *Εγκυκλοπαίδεια της Αρχαίας Ελληνικής Μουσικής*, Μ.Ι.Ε.Τ., Αθήνα.

Μωυσιάδης, Χ., και Σπυρίδης, Χ., 1995, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά στην Επιστήμη της Μουσικής*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Σπανδάγου Ευαγ., 2001, *Η Αριθμητική Εισαγωγή του Νικομάχου του Γερασηνού*, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα.

Σπανδάγου Ευαγ., 2003, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν του Θέωνος του Σμυρναίου*, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2004, *Ο δυϊσμός του μουσικού διαστήματος*, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2005, *Ευκλείδου: Κανόνος Κατατομή*, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2005, *Φυσική και Μουσική Ακουστική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2006, *Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2008, *Πλάτωνος Τίμαιος: ΓΕΝΕΣΙΣ ΨΥΧΗΣ ΚΟΣΜΟΥ (γραμμικές και λαβδοειδείς λύσεις)*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2010, *Η Ομηρική Λεξικογραφία και Στιχογραφία από τον Πυλώνα των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών*, Αυτοέκδοση, Αθήνα.