

Η εισήγησις αφιερούται  
εις τον άρχοντα πρωτοψάλτην  
Αθανάσιον Ν. Καραμάνην,  
έναν των εμών διδασκάλων,  
οίτινες παρέσχον μοι το επιστημονικώς «εὖ ζῆν».



Εἰς τὸν Ἑρμοτιτάνα,  
τῆς μουσικῆς μου ὁδοιπορίας ἐκ τῶν ἐνοδίων Ἑρμῶν,  
ἀείμνηστον ἄρχοντα πρωτοψάλτην τε καὶ διδάσκαλον

*Ἀθανάσιον Καραμάνην  
τοῦ Νικολάου  
(1911 -2012)*

**Πολυμεσική εκπαιδευτική εφαρμογή για την λογιστική, οπτική και ακουστική εκμάθησιν των παντοίων μουσικών διαστημάτων με θέμα  
«Πυθαγόρειος Ανθυφαίρεσις ή Ανταναίρεσις»**

**Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης**

Καθηγητής Τμήματος Μουσικών Σπουδών Πανεπιστημίου Αθηνών,  
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας

[hspyridis@music.uoa.gr](mailto:hspyridis@music.uoa.gr)

**Ελένη Χ. Σπυρίδου**

Δρ Πληροφορικής – Καθηγήτρια Πολυμέσων

[elenispyridou@gmail.com](mailto:elenispyridou@gmail.com)

**1 Πυθαγόρειος ανθυφαίρεσις ή ανταναίρεσις**

Πρόκειται περί μιας αρχαιοελληνικής μαθηματικής εννοίας αναφερομένης εις τον ομώνυμον Ευκλείδειον αλγόριθμον δια του οποίου, δοθεισών δύο ομοειδών μαθηματικών οντοτήτων, δυνάμεθα

να εύρωμεν τον Μέγιστον Κοινόν Διαιρέτην αυτών και να αποφανθώμεν εάν η σχέσις (=λόγος) των αποτελεί ρητόν ή άρρητον αριθμόν.

**2 Πώς εδημιουργήθη αυτή η αρκούντως πολύπλοκος έννοια της ανθυφαιρέσεως; Υπό ποιού; και πού;**

Βάσει υπάρχοντος αρχαίου τεκμηρίου και συγκεκριμένως του έκτου αποσπάσματος του Φιλολάου του Κροτωνιάτου ή Ταραντίνου (5<sup>ος</sup> π.Χ. αι.) αυτή η διαδικασία εδημιουργήθη υπό των Πυθαγορείων.

Προ του Φιλολάου δεν διεσώθη κάτι το γραπτόν περί των Πυθαγορείων.

Εις το συγκεκριμένον απόσπασμα ο Φιλόλαος επικεντρούται εις την θεωρίαν της πυθαγορείου μουσικής.

Τα υπό του Φιλολάου γραφόμενα αναφέρονται εις τρεις μουσικές σχέσεις.

Η αρμονία ισούται προς την συλλαβάν συν την διοξειάν (Η οκτάβα ισούται προς μίαν τετάρτην και μία πέμπτην).

Η διοξειά ισούται προς την συλλαβάν συν έναν τόνον (Η πέμπτη ισούται προς μίαν τετάρτην και έναν τόνον).

Η συλλαβά ισούται προς δύο τόνους συν μία δίεσιν (Η τετάρτη ισούται προς δύο τόνους και ένα «ελλειπές» ημιτόνιον).

Υπάρχει και μία τετάρτη σχέσις, την οποίαν αναφέρει ο Ρωμαίος Βοήθιος (Boethius, 5<sup>ος</sup>-6<sup>ος</sup> αιών μ.Χ.), συμπληρώνων τον Φιλόλαον.

Ο τόνος ισούται προς δύο διέσεις συν ένα κόμμα (Ο τόνος ισούται προς δύο «ελλειπή» ημιτόνια συν ένα κόμμα).

Εκάστη εξ αυτών των τεσσάρων σχέσεων περιλαμβάνει μίαν τριάδα ομοειδών οντοτήτων ούτως, ώστε το μέγεθος του πρώτου μέλους ισούται προς το άθροισμα των δύο μεγεθών του δευτέρου μέλους και το μέγεθος του πρώτου μέλους εκάστης ισούται προς το μεγαλύτερον μέγεθος του δευτέρου μέλους της προηγουμένης αυτής σχέσεως.

Δηλαδή πρόκειται περί μιας αλληλουχίας ανθυφαιρετικών διαδικασιών δια των οποίων παράγονται τα παντοία μουσικά διαστήματα, τα απαντώμενα εις την Πυθαγόρειον και εις την Βυζαντινήν μας Μουσικήν.

### **3 Τι προσεπάθουν να επιτύχουν οι Πυθαγόρειοι μέσω της διαδικασίας της ανθυφαιρέσεως;**

Εις το ερώτημα αυτό δεχόμεθα ως απάντησιν ότι οι Πυθαγόρειοι προσεπάθουν να εύρουν έναν μέγιστον κοινόν διαιρέτην, ήτοι ένα κοινό μουσικόν διάστημα, το οποίον να «μετρεί», δηλαδή να διαιρεί ακριβώς όλα τα Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα.

Εξεκίνησαν την ανθυφαιρετικήν διαδικασίαν εκ των δύο θεμελιωδεστέρων Πυθαγορείων μουσικών συμφωνιών, τουτέστιν την αρμονίαν (2/1) και την διοξειάν (3/2) και επεξέτειναν αυτήν την διαδικασίαν περιλαμβάνοντες και μουσικά διαστήματα μικρότερα του τόνου, του λείμματος και αυτού του Πυθαγορείου κόμματος.

Διεπίστωσαν ότι η διαδικασία της ανθυφαιρέσεως επί των μουσικών διαστημάτων δεν περατούται ποτέ. Είναι ατέρμων.

Εκ του γεγονότος τούτου αγόμεθα εις το συμπέρασμα ότι απάντα τα πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα δεν έχουν κάποιο κοινόν μέτρον εν άλλοις λόγοις πάρχει μεταξύ των ασυμμετρία.

Συναίνεσαν, όμως, για πρακτικούς και μόνον λόγους να καθορισθεί ως έσχατον μουσικόν διάστημα το λεγόμενον Πυθαγόρειον κόμμα.

### **4 Το πρόβλημα**

Τυγχάνει γνωστόν «τοις πᾶσι» ότι έν εκ των φυλετικών μας γνωρισμάτων είναι η εθνική μας μουσική, ήτοι η καλλιτεχνική γλώσσα του λαού μας, η περιλαμβάνουσα το εθνικόν έπος και την λυρικήν ποιήσιν. Αυτή η μουσική συνεδέθη κατά την Βυζαντινήν περίοδον μετά της θρησκευτικής ποιήσεως του Έθνους μας, μετά των λειτουργικών κειμένων και μετά του τελετουργικού της Ορθοδόξου Εκκλησίας. Τοιουτοτρόπως, προέκυψεν η γνωστή εις όλους μας Βυζαντινή Μουσική, το κοινόν γνώρισμα και ο πνευματικός δεσμός πάντων των Ορθοδόξων.

Για μας τους Ορθοδόξους Έλληνες αποτελεί υποχρέωσιν επιτακτικήν το ενδιαφέρον, η φροντίς και η μέριμνά μας για αυτήν την λατρευτικήν παράδοσιν της Ορθοδοξίας.

Ίσως να λανθάνω, αλλά διαπιστώνω μετά μεγίστης θλίψεως οσημέραι μία γενικήν παραμέλησιν της Βυζαντινής Εκκλησιαστικής Μουσικής και μίαν διηνεκή αλλοίωσιν κατά την εκτέλεσιν της ιεράς αυτής τέχνης.

Ίσως είναι επακόλουθον του βεβιασμένου τρόπου αποκτήσεως των όποιων γνώσεών μας περί την Βυζαντινήν Μουσικήν. Ίσως να συμβάλλει το ότι βαθμηδόν εκλείπουν εκ του εκκλησιαστικού αναλογίου οι Ισμήνιοι ιεροψάλτες, οι έχοντες την ακριβή γνώσιν της τέχνης και της παραδόσεως του ψάλλειν. Ίσως οι αντικαθιστώντες αυτούς ιεροψάλτες εξεπαιδεύθησαν επί του κλειδοκυμβάλου και δια τούτο άδουν αλλοιούντες και την φωνητικήν και την διαστηματικήν παράδοσιν των βυζαντινών μελών.

Σήμερον όσες οι προελεύσεις των Βυζαντινών ιεροψαλτών, τόσες και οι Σχολές και τόσα τα συστήματα της Βυζαντινής Μουσικής. Πάντα ταύτα οδηγούν εις την στρέβλωσιν των βυζαντινών εκκλησιαστικών μελωδημάτων με συνακόλουθον την αλλοίωσιν του χαρακτήρος της Βυζαντινής εκκλησιαστικής μας μουσικής.

## **5 Ο στόχος της πολυμεσικής εργασίας**

Έχοντες κατά νουν τον πολυειδή παιδαγωγικόν χαρακτήρα των πολυμέσων, ο οποίος συνετέλεσεν εις την αλματώδη εξέλιξιν και ανάπτυξιν των πολυμεσικών εφαρμογών εις τον τομέα της εκπαιδεύσεως, ειργάσθημεν για την κατασκευήν της παρούσης πολυμεσικής εργασίας.

Εβασίσθημεν επί ιστορικών και επιστημονικών κριτηρίων, προερχομένων εξ επισήμων αρχαιοελληνικών και βυζαντινών μουσικών κειμένων στοχεύοντες εις την επιστημονικήν και ιστορικήν αλήθειαν της αποδόσεως των όντως ιδιομόρφων μουσικών διαστημάτων, των θεμελιωδών κυττάρων της εν πολλοίς «στρεβλώς αποδιδομένης» σήμερον βυζαντινής εκκλησιαστικής μουσικής.

Ήδη εις την αρχαιοελληνικήν, αλλά ιδιαίτατα εις την χριστιανικήν μελοποιϊαν, παρατηρείται τοσαύτη διαστηματική ποικιλία, περιλαμβάνουσα προσέτι τρίτα και τέταρτα του τόνου και κόμματα- ώστε οι μουσικοί οι εθισμένοι εις το ευρωπαϊκόν άκουσμα θα σας είπουν, ότι πάντα ταύτα αποτελούν δημιουργήματα της φαντασίας των ιεροψαλτών.

Και όμως τα διαστήματα αυτά όντως υπάρχουν και αφ' ενός οι Πυθαγόρειοι και αφ' ετέρου πάντες οι μετέπειτα αρμονικοί και των Βυζαντινών συμπεριλαμβανομένων, εφαρμόζοντες την διαδικασίαν της ανθυφαιρέσεως επί των διαστημάτων της πρώτης 1:2:3:4 και της δευτέρας 6:7:8:9 τετρακτύος (=τετράδος), εδόμησαν μίαν κατατομήν του κανόνος, συνισταμένην εκ πολυειδών και πολυμιγέων μουσικών διαστημάτων, τα οποία κατακερματίζουν το διαπασών.

Δια της κατατομής ταύτης επιτυγχάνεται ο σαφής μαθηματικός προσδιορισμός των αριθμητικών σχέσεων και των μεγεθών των μουσικών διαστημάτων των μουσικών γενών αφ' ενός και των χροών αφ' ετέρου, προκειμένου ταύτα να αποδίδονται ορθώς, είτε δια φωνής, είτε δι' οργάνων.

Το DVD, το οποίον συνοδεύει την ερευνητική μας εργασία, αποτελεί μίαν πολυ-μεσικήν διαδραστικήν εφαρμογήν, στοχεύουσα εις το να καταστήσει οπτικοακουστικώς γνωστήν την Πυθαγόρειον Ανθυφαιρετικήν διαδικασίαν εις τον χρήστην και να του καταστήσει ακουστικώς γνωστά πάντα τα ιδιόμορφα μουσικά διαστήματα της προαναφερθείσης κατατομής του κανόνος.

Το interface είναι ελκυστικόν αισθητικώς με τα έντονα χρώματά του και πρακτικώς φιλικόν με τις εναλλαγές των μερών, τα οποία το απαρτίζουν. Χωρίζεται εις τρία επίπεδα: δύο πίνακες (κίτρινος και κόκκινος) και εις έναν πάπυρον.

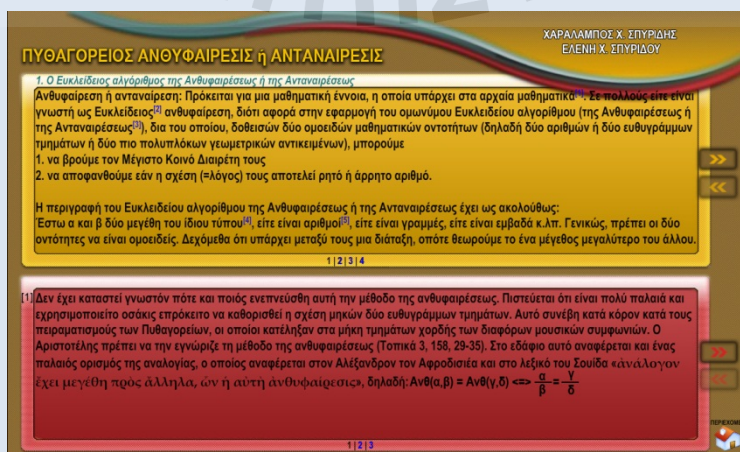


Εικόν 1: Τα τρία επίπεδα εις τα οποία χωρίζεται το αισθητικώς ελκυστικόν interface: οι δύο πίνακες (πρωτεύων και δευτερεύων) και ένας ανοιγοκλειόμενος πάπυρος.

Ο κίτρινος πίναξ είναι ο «πρωτεύων» πίναξ και εις αυτόν ο χρήστης ευρίσκει αφ' ενός τα περιεχόμενα των τίτλων της εφαρμογής, αφ' ετέρου την πλήρη πληροφορίαν, περί της εκάστοτε ανθυφαιρετικής διαδικασίας.

Ο κόκκινος πίναξ είναι ο συνοδός του πρωτεύοντος πίνακος, το μέγεθος του οποίου αυξομειούται αναλόγως του εκάστοτε ανατιθεμένου εις αυτόν βοηθητικού ρόλου.

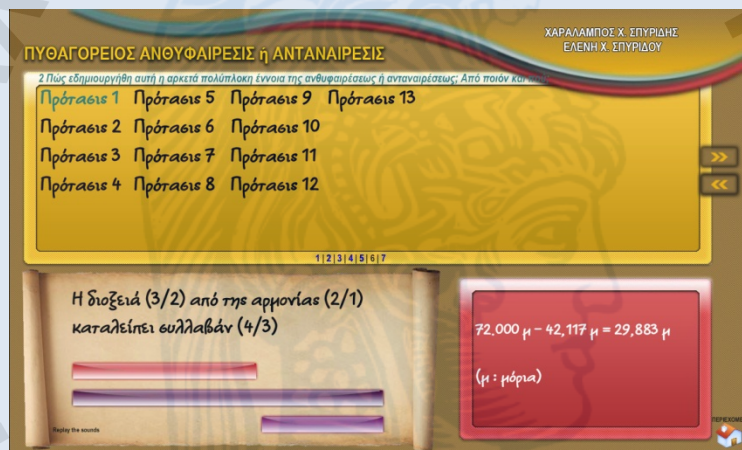
Εις το πλήρες ανάπτυγμα του εμφανίζονται αναλυτικώς οι πληροφορίες των υποσημειώσεων εκ των κειμένων του πρωτεύοντος (κιτρινού) πίνακος.



Εικόν 2: Εις τον πρωτεύοντα πίνακα ο χρήστης ευρίσκει αφ' ενός τα περιεχόμενα των τίτλων της εφαρμογής, αφ' ετέρου την πλήρη πληροφορίαν, περί της εκάστοτε ανθυφαιρετικής διαδικασίας. Εις τον αυξομειουμένον μεγέθους δευτερεύοντα πίνακα ο χρήστης ευρίσκει εις μιν το πλήρες ανάπτυγμά του αναλυτικές πληροφορίες των υποσημειώσεων εκ των κειμένων του πρωτεύοντος πίνακος, εις δε το σύμπτυγμά του ευρίσκει τις μαθηματικές αποδείξεις των ανθυφαιρετικώς παραγομένων μουσικών διαστημάτων της αρχαιοελληνικής και της Βυζαντινής μουσικής.

Εις το σύμπτυγμά του εμφανίζονται οι μαθηματικές αποδείξεις των ανθυφαιρετικώς παραγομένων μουσικών διαστημάτων της αρχαιοελληνικής και της Βυζαντινής μουσικής.

Επί του ανοιγοκλειομένου παπύρου αφ' ενός αναγράφεται ο σχετικός ανθυφαιρετικός κανών επί τη βάσει του οποίου παράγεται το εκάστοτε μουσικόν διάστημα, αφ' ετέρου το εκάστοτε μουσικόν διάστημα απεικονίζεται οπτικώς και αποδίδεται ακουστικώς. Οι μπάρες, δια των οποίων απεικονίζονται οπτικώς τα ανθυφαιρετικώς εμπλεκόμενα μουσικά διαστήματα, δεν είναι τυχαίες, αλλ' έχουν λόγους, επιβαλλομένους υπό των εκάστοτε μελετουμένων μουσικών διαστημάτων, γεγονός αποβλέπον εις την πυθαγόρειον λογαριθμικήν αντίληψιν της ανθυφαιρετικής διαδικασίας.



Εικόν 3: Επί του παπύρου αφ' ενός αναγράφεται ο σχετικός κανών δια του οποίου ανθυφαιρούνται τα μουσικά διαστήματα μιας επιλεγείσης προτάσεως, αφ' ετέρου ταύτα απεικονίζονται με μπάρες, τα μήκη των οποίων έχουν λόγους, επιβαλλομένους υπό των εκάστοτε μελετουμένων μουσικών διαστημάτων.

Η πλειονότης των αναφερομένων εις την εργασίαν μας μουσικών διαστημάτων ακουστικώς είναι άγνωστος ή ασυνήθης εις τα ώτα των δυτικομουσικώς και όχι μόνον πεπαιδευμένων χρηστών. Δια τούτο παρέχεται η δυνατότης εις τον χρήστην να ακούσει με μεγάλην ακρίβειαν πολλάκις τα εκάστοτε ανθυφαιρετικώς εμπλεκόμενα μουσικά διαστήματα.

Η πλοήγησις του χρήστου εις όλες τις σελίδες της συγκεκριμένης πολυμεσικής διαδραστικής εφαρμογής είναι εξαιρετικώς εύκολος.

Να σας πλοηγήσω τώρα εις την διαδραστικήν μας εφαρμογήν.