

**Οί Πυθαγορικοί, οἷς πολλαχῆ ἔπεται Πλάτων,
τὴν μουσικὴν φασιν ἔναντίων συναρμογὴν καὶ τῶν
πολλῶν ἔνωσιν καὶ τῶν δίχα φρονούντων συμφρόνησιν-
Θέων Σμυρναίος, *Των κατὰ το μαθηματικὸν χρησίμων*, 12, 10-12.**

Αριθμοί και Αλληγορία

Ανέκαθεν οι κοσμοθεωρίες των κατ' ἔθνη ιερατείων εβασίζοντο στον συμβολισμό. Για τον λόγον αυτόν τα ιερά κείμενά τους είναι ἄρρηκτα συνδεδεμένα με σημεῖα, σύμβολα, αριθμούς και αστερισμούς προκειμένου να προστατευθούν αλήθειες και ιδανικά που, διαφορετικά, με το πέρασμα των χρόνων θα υφίσταντο διαστρέυλωση.

Υπάρχουν κρίσιμες περικοπές ιερών κειμένων και κειμένων της παγκοσμίου λογοτεχνίας -Βέδδες, Αιγυπτιακό βιβλίο των Νεκρών, Βίβλος, Πλάτων- που πραγματεύονται αριθμούς. Επί πλέον η επανάληψη ταυτοσήμων και ομοίων αριθμών στη Βαβυλώνα, την Αίγυπτο, την Ελλάδα και την Παλαιστίνη επιβεβαιώνουν τις κάποτε αναπτυχθείσες θεωρήσεις, οι οποίες είχαν ιστορική συνέχεια και προσανατολισμό μίας βασικής πνευματικής παραδόσεως.

Οι περικοπές αυτές αντιμετωπίζονται με μια νέα οπτική, η οποία αναγνωρίζει τη μουσική ως μία δύναμη ικανή να προβάλλει μια φιλοσοφική σύνθεση. Η οπτική αυτή προέκυψε λαμβάνοντας κατά λέξη τον Πλάτωνα, ο οποίος μας κληροδότησε ένα απόθεμα αριθμολογίας και συσχέτισε μια μυθολογία με μαθηματικές αλληγορίες. Πιστεύεται ότι ο Πλάτων είναι η πολύτιμη στήλη της Ροζέττης για την περισσότερο δυσνόητη επιστήμη των πρωιμοτέρων πολιτισμών.

Επί παραδείγματι, ο Πλάτων δηλώνει ότι ο τύραννος είναι 729 φορές χειρότερος από τον χειρότερο βασιλέα (Stephanus 587, d, 12 - e, 4). Τί άραγε εννοεί;

Οι φιλόλογοι αποφεύγουν την εμβάθυνση «απλουστεύοντας το κείμενο» και οι μαθηματικοί το αντιμετωπίζουν «ποιητική αδεία». Ο πεπαιδευμένος μουσικός, όμως, γνωρίζει ότι κάθε φθόγγος χαρακτηρίζεται από μια ποσότητα (αριθμητική σχέση) και από μία ποιότητα. Μόνη της, είτε η ποσότητα, είτε η ποιότητα χαρακτηρίζει τον φθόγγο μονοπλεύρως, δεδομένου ότι αμφότερες αποτελούν τις δύο όψεις του αυτού νομίσματος και αμοιβαίως η μία φωτίζει την άλλη.

Αναφορικά με τον αριθμό 729, που επέλεξε ο Πλάτων. Αυτός ο αριθμός από τη σκοπιά της μουσικής ως προς μια μοναδιαία συχνότητα ή ως προς ένα μοναδιαίο μήκος ταλαντουμένης χορδής αντιστοιχεί στο μουσικό διάστημα:

$$729 = 9^3 = \frac{9^3}{8^3} \cdot 8^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot (2^3)^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^9$$

το οποίο είναι ένα τρίτονο συν εννέα οκτάβες.

Το τρίτονο είναι το πλέον διάφωνο μουσικό διάστημα του μουσικού συστήματος που ήτο γνωστό στον Πλάτωνα. Εξακολουθεί και σήμερα να φέρει τον ίδιο διάφωνο χαρακτήρα (*diabolus in musica*) στο δυτικό τονικό σύστημα 2.500 χρόνια μετά απ' αυτόν. Αυτό που ο Πλάτων εξετίμησε με τον αριθμό 729 ήτο η σχέση μεταξύ δύο πολιτειακών συστημάτων και τη θεωρεί ως τη μεγίστη δυνατή ένταση μέσα σε ένα πολιτισμένο σύστημα.

Στην αρχαιότητα ο μουσικός συμβολισμός εγένετο άμεσα κατανοητός από τους μεμυημένους και γι' αυτό ο Πλάτων τον χρησιμοποιεί συχνά. Όταν κατά τον ρούν της Ιστορίας ο ρόλος της μουσικής από πνευματική ή ψυχική δύναμη εθυσιάσθη στον βωμό της ατομικής εκφράσεως και απολαύσεως, η ερμηνεία των άλλοτε ξεκάθαρων κειμένων κατέστη δύσκολη και καμιά φορά ακατόρθωτη.

Στα κείμενα των Βεδδών, που εγράφησαν το 4000 π.Χ. περίπου, υπάρχει θεμελιωμένη μια πρωτοεπιστήμη αριθμών και φθόγγων. Ο άνθρωπος του καιρού εκείνου φρόντισε με τους αριθμούς να προσδιορίσει εναλλακτικά χορδίσματα ή εναλλακτικές δομές της διαπασών. Οι ύμνοι περιγράφουν ποιητικά τους αριθμούς, καθορίζοντας σύνολα κλάσεων θεών και δαιμόνων, και παριστούν τονικές και αριθμητικές σχέσεις με σεξουαλικές παραστάσεις.

Και οι Ινδοί και οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι και οι Έλληνες (Πυθαγόρειοι) στη μουσική αντιμετωπίζουν μια ιεραρχία αριθμών. Συγκεκριμένα όλοι οι άρτιοι αριθμοί, θεωρούνται θηλυκοί αριθμοί, ενώ οι περιττοί αριθμοί θεωρούνται αρσενικοί αριθμοί. Ο Πλάτων λ.χ. στη *Γένεση Ψυχής Κόσμου* (35a1-5) στο έργο του *Τίμαιος* αναφέρει την συνένωση του *ταυτού*, δηλαδή της μονάδος που εκπροσωπεί το άρρεν στοιχείο, ως περιττός αριθμός, μετά του *θατέρου*, δηλαδή της δυάδος που εκπροσωπεί το θηλυκό στοιχείο, ως άρτιος αριθμός, προκειμένου να προκύψει η *ουσία*, δηλαδή η οντότητα τρία, η οποία είναι η αρχή των πυθαγορείων αριθμών.

Ο δυϊσμός της εννοίας «μουσικό διάστημα»

Στην Πυθαγόρειο μουσική θεωρία η σχέση, δηλαδή ο λόγος, μεταξύ δύο αριθμών εκαλείτο «*διάστημα*». Γι' αυτό ο Νικόμαχος ο Γερασηνός αποκαλεί την Πυθαγόρειο μουσική «*θεωρία των λόγων*».

Έχει καταστεί πλέον συνείδηση ότι αυτή η «*θεωρία των λόγων*» εμπεριέχει έναν λογαριθμικό χαρακτήρα, διότι κατ' αυτήν η πρόσθεση των μουσικών διαστημάτων γίνεται με πολλαπλασιασμό και η αφαίρεσή τους γίνεται με διαίρεση. Αυτά δεν τα κατανοεί ο κοινός νους. Παρ' όλα ταύτα η «*θεωρία των λόγων*» χαρακτηρίζεται από μια «πλαστικότητα» κατά τη μαθηματική της επεξεργασία και γι' αυτό προτιμάται από τους Μαθηματικούς.

Ο Αριστόξενος ο Ταραντίνος (4^{ος} αιώνας π.Χ.), εναντιούμενος στον λογαριθμικό χαρακτήρα των πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων, εισάγει την γραμμικότητα στα μουσικά διαστήματα ορίζοντας ως μουσικό διάστημα την απόσταση μεταξύ δύο φθόγγων διαφορετικού μουσικού ύψους «*διάστημα δ' έστι δυοῖν φθόγγων μεταξύτης*» (Νικόμαχος). Κατ' αυτόν τον τρόπο η πρόσθεση των αριστοξενείων μουσικών διαστημάτων γίνεται με πρόσθεση και η αφαίρεσή τους γίνεται με αφαίρεση, γεγονός που χωρεί στον κοινό νουν.

Ο Αριστόξενος κατήγγησε τις όποιες Πυθαγόρειες ανισότητες μεταξύ των συνωνύμων μουσικών διαστημάτων, εισηγούμενος -για πρώτη φορά στην ιστορία της Μουσικής- τον ίσο συγκερασμό. Για τον Αριστόξενο η διαπασών διαιρείται σε έξι ίσους μεταξύ τους τόνους και ο τόνος διαιρείται σε δύο ίσα μεταξύ τους ημιτόνια, σε τρία ίσα μεταξύ τους τρίτα και σε τέσσερα ίσα μεταξύ τους τέταρτα ή διέσεις.

Ἡ γραμμικότητα σε ὄλο της το μεγαλείο! Μια γραμμικότητα που φωλιάζει μόνο στη φαντασία του Αριστοξένου, διότι δεν συναντάται στη μουσική πρακτική.

Μέγεθος μουσικού διαστήματος

Ἡ παράσταση του μουσικού διαστήματος ως λόγου, είτε δύο συχνοτήτων, είτε δύο μηκῶν ταλαντουμένων τμημάτων χορδῆς -που επιβάλλει ἀντὶ προσθέσεως να κά-
νουμε πολλαπλασιασμό και ἀντὶ ἀφαιρέσεως να κάνουμε διαίρεση- οδήγησε τους μελε-
τητές στον ορισμό ενός λογαριθμικού μεγέθους, του λεγομένου **μεγέθους του μουσι-
κού διαστήματος** ως εξής:

$$d_k(\delta) = d_k(f_2 / f_1) = k \cdot \log_2 \left(\frac{f_2}{f_1} \right) = k \cdot \frac{\log \left(\frac{f_2}{f_1} \right)}{0,301029}$$

ὅπου η σταθερά k εκφράζει τα ἴσα μουσικά διαστήματα, στα οποία θεωρούμε ὅτι εἶναι χωρισμένη η διαπασών.

Στον χώρο της Βυζαντινῆς Μουσικῆς το $k=72$, ἀφοῦ η διαπασών διαιρεῖται σε 72 ηχομόρια ἢ γραμμές και, συνεπῶς, ο μείζων τόνος $\left(\frac{9}{8}\right)$ θα ἔχει μέγεθος

$$d_{72} \left(\frac{9}{8} \right) = 72 \cdot \log_2 \left(\frac{9}{8} \right) = 72 \cdot \frac{\log \left(\frac{9}{8} \right)}{0,301029} = 72 \cdot \frac{0,051152}{0,301029} = 12,2346001... \cong 12 \text{ ηχομό-}$$

ρια ἢ γραμμές.

Με τὴν εἰσαγωγή της συναρτήσεως του λογαρίθμου προσεδόθη χαρακτήρας γραμμικός στη λογαριθμικότητα του Πυθαγορείου μουσικού διαστήματος με ἀποτέλεσμα τα μεγέθη των μουσικῶν διαστημάτων να προστίθενται με πρό-
σθεση και ν' ἀφαιρούνται με ἀφαίρεση.

Πυθαγόρειες Θεωρίες

Οι πυθαγόρειοι ἀνεκάλυψαν τις βασικές ἀρχές της παγκοσμίου ἀρμονίας, των ο-
ποίων ἔκφραση και ἀπείκασμα εἶναι οἱ μουσικοὶ λόγοι. Ο Ἰάμβλιχος ἀναφέρει ὅτι ο
Πυθαγόρας ἦταν ὁ πρῶτος που πραγματοποιοῖσε πειράματα Ἀκουστικῆς με τα ο-
ποία ἀνεκάλυψε τους ἀριθμητικούς λόγους για το ημιόλιο, το ἐπίτριτο, το ἐπόγδοο και το
διαπασών διάστημα και στη συνέχεια προχώρησε στην κατασκευὴ της ομωνύμου
μουσικῆς κλίμακος.

Ἡ ἀλληλοδιαδοχὴ ποικίλων μουσικῶν λόγων ἐντὸς της διαπασῶν γεννά ἀλληλου-
χία ποικίλων μουσικῶν διαστημάτων και φθόγγων. Για τον λόγο αὐτὸν οἱ παλαιοὶ
μαθηματικοὶ και μουσικοὶ ἀποκαλοῦσαν τη διαπασῶν «ἀρμονίαν», δηλαδή συναρμο-
λόγηση, σύνδεση, ἐκ του ρήματος *ἀραρίσκω*, που σημαίνει συνάπτω, ἐνώνω, συναρ-
μόζω, βάλλω μαζί, προσαρμόζω τι προς τι, συναρμολογῶ τι με τι.

Κατὰ τον Φιλόλαο (*Θραύσμα 10, γρ. 2-3*)

ἔστι γὰρ ἀρμονία πολυμιγῶν ἔνωσις

Πολυμιγῆς σημαίνει σύμμικτος, μεμιγμένος ἀπὸ πολλά και διάφορα εἶδη, πολυσύνθε-
τος, πολυποικίλος. Μας λέει, λοιπόν, ο Φιλόλαος ὅτι η διαπασῶν εἶναι μια ἔνωση πο-
λυποικίλων μουσικῶν φθόγγων, τον ρόλο της ο-ποίας προσδιορίζει με το ἐπόμενο μι-
σό της ρήσεώς του:

καὶ δίχα φρονούντων συμφρόνησις.

Η αρμονία, άρα, αφορά στο πλήθος των εναντιοτήτων και αντιθέσεων, δηλαδή αυτών που φρονούν ενάντια, αντίθετα.

Ο Αριστοτέλης στα *Μετά τα Φυσικά* (Bekker, 956a, 23-26) αναφέρει τις κάτωθι αντιθέσεις, οι οποίες δομούν ολόκληρον τον κόσμο:

πέρας [καί] ἄπειρον,
 περιττὸν [καί] ἄρτιον,
 ἐν [καί] πλήθος,
 δεξιὸν [καί] ἀριστερόν,
 ἄρρεν [καί] θήλυ,
 ἡρεμοῦν [καί] κινούμενον,
 εὐθὺ [καί] καμπύλον,
 φῶς [καί] σκότος,
 ἀγαθὸν [καί] κακόν,
 τετράγωνον [καί] ἑτερόμηκες·

Ο Πρόκλος (*Σχόλια στον Πλατωνικόν Τίμαιον 1, 176, 28*) τονίζει:
 καὶ εἷς ἀποτελεῖται κόσμος ἐξ ἐναντίων ἡρμοσμένος

ο Νικόμαχος ο Γερασηνός (*Αριθμητική Εισαγωγή, 1, 6, 3, 1-2*) αναφέρει:
 πᾶν
 δὲ ἡρμοσμένον ἐξ ἐναντίων πάντως ἡρμονται

Ο Αριστοτέλης (*De mundo, Bekker, Σελ. 396b, Γρ. 7-12 και 15-17*) επισημαίνει
 Ἴσως δὲ τῶν ἐναντίων ἡ φύσις γλίχεται
 καὶ ἐκ τούτων ἀποτελεῖ τὸ σύμφωνον...
 Ἴοικε δὲ καὶ ἡ
 τέχνη τὴν φύσιν μιμουμένη τοῦτο ποιεῖν.

μουσική δὲ ὀξεῖς ἅμα καὶ βαρεῖς, μα-
 κρούς τε καὶ βραχεῖς, φθόγγους μίξασα ἐν διαφόροις φω-
 ναῖς μίαν ἀπετέλεσεν ἁρμονίαν,

και ο Πλούταρχος (*De amicorum multitudine, Stephanus, Σελ. 96, Παρ. Ε Γρ. 7-8*),
 συμφωνῶν με ὅλους τους προηγουμένους, γράφει:
 ἁρμονία
 δι' ἀντιφῶνων ἔχει τὸ σύμφωνον

Όλα τα ανωτέρω σημαίνουν ότι η αρμονία αφορά στο πλήθος των εναντίων, δηλαδή των εναντιοτήτων και των αντιθέσεων, οι οποίες δομούν ολόκληρον τον κόσμο. Μία των αντιθέσεων, η *φιλότης* και το *νείκος*, είναι αυτή που διέπει τα πάντα στον κόσμο, με την έννοια ότι, *επερχομένη η φιλότης στα δίχα φρονέοντα και αντιτιθέμενα, γεννάται ο δεσμός της αρμονίας ή της φιλότητας και κατά κάποιον τρόπο αυτά ομοιοσούν και ηρεμοούν.*

Τα πολυμυγέα και δίχα φρονέοντα εκφράζονται δι' αριθμών, διότι, όπως τονίζει ο Πρόκλος (*Πλάτωνος «Αλκιβιάδη ι'», τμήμα 259 γραμμή 13-14*).
 «και ο Πυθαγόρας των μεν ὄντων
 πάντων σοφώτατον ἔλεγεν εἶναι τον αριθμόν»

Οι αριθμοί της δεκάδος, λόγω της αφηρημένης φύσεώς των, αποτελούν τα θεία πρότυπα της κοσμικής και μουσικής αρμονίας, απεικονίζοντας τις θείες ιδέες. Ανα-

τρέχοντες στο μουσικό σύστημά μας, από των αρχαιοτάτων χρόνων μέχρις των ημερών μας, εντοπίζουμε όλες τις προαναφερθείσες θεμελιώδεις αρχές της αρμονικής.

Όλο το πλήθος των «πολυμιγέων» ανομοιογενών και ανίσων μουσικών διαστημάτων παρίσταται με αριθμητικούς όρους που ο ένας είναι άρρη (περιττός) και ο άλλος θήλυς (άρτιος) (επιμόριες σχέσεις) και αντιστρόφως:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{28}{27}, \frac{32}{27}, \frac{256}{243}, \frac{2187}{2048}, \dots$$

Έκαστον των «πολυμιγέων» ανομοιογενών και ανίσων μουσικών διαστημάτων δεν μπορεί να είναι αυτοτελές και ανεξάρτητο, χωρίς δηλαδή να έχει σχέση και αρμοσία με άλλο ή άλλα διαστήματα από τα οποία παρήχθη και με τα οποία δομεί άλλα μουσικά διαστήματα.

Τούτο είναι απόρροια, βάσει υπάρχοντος αρχαίου τεκμηρίου, της πολυπλόκου πυθαγορείου εννοίας και διαδικασίας της καλουμένης *ανθυφαιρέσεως* ή *ανταναιρέσεως*. Το αρχαίο τεκμήριο είναι το έκτο απόσπασμα του Φιλολάου του Ταραντίνου, το οποίο αναφέρει:

ἄρμονίας δὲ μέγεθος ἔστι συλλαβὰ καὶ δι' ὄξειαν· τὸ δὲ δι' ὄξειαν μείζον τὰς συλλαβὰς ἐπογδόωι...

ἃ δὲ συλλαβὰ ἐπίτριτον, τὸ δὲ

δι' ὄξειαν ἡμιόλιον, τὸ διὰ πασᾶν δὲ διπλόον. οὕτως ἄρμονία πέντε ἐπόγδοα καὶ δύο διέσεις, δι' ὄξειαν δὲ τρία ἐπόγδοα καὶ διέσεις, συλλαβὰ δὲ δύο ἐπόγδοα καὶ διέσεις.

Vgl. BOETHIUS *Inst. mus.* III 8 p. 278, 11 Friedl. Philolaus igitur haec atque his minora spatia talibus definitionibus includit: diesis, inquit, est spatium quo maior est sesquitercia proportio duobus tonis. comma vero est spatium, quo maior est sesquioctava proportio duabas diesibus, id est duobus semitonii minoribus. schisma est dimidium commatis, diaschisma vero dimidium dieseos, id est semitonii minoris.

Νεοελληνική απόδοση: [Της διαπασῶν το μέγεθος ἰσοῦται με το διατεσσάρων και το διαπέντε. Το μέγεθος του διαπέντε είναι μεγαλύτερο του διατεσσάρων κατά έναν ἐπόγδοο τόνο...]

Το διατεσσάρων είναι σχέση επίτριτος, το διαπέντε είναι σχέση ημιόλιος, το διαπασῶν είναι σχέση διπλασία. Έτσι, το διαπασῶν ἰσοῦται με πέντε ἐπογδόους τόνους και δύο διέσεις (λείμματα, ἐλάσσονα ημιτόνια), το διαπέντε ἰσοῦται με τρεις ἐπογδόους τόνους και διέση (λείμμα, ἐλάσσον ημιτόνιο), το διατεσσάρων δε ἰσοῦται με δύο ἐπογδόους τόνους και διέση (λείμμα, ἐλάσσον ημιτόνιο).

Vgl. BOETHIUS *Inst. mus.* III 8 p. 278, 11 Friedl. Ο Φιλόλαος, λοιπόν, αυτά τα ἐλάσσονα διαστήματα με αυτούς τους ορισμούς τα συμπεριλαμβάνει: διέση (λείμμα, ἐλάσσον ημιτόνιο), λέει, είναι το διάστημα κατά το οποίο υπερέχει η επίτριτος αναλογία (το διατεσσάρων) του διτόνου. Κόμμα είναι το διάστημα κατά το οποίο υπερέχει ο ἐπόγδοος τόνος των δύο διέσεων, δηλαδή των δύο ἐλασσόνων ημιτονίων (λειμμάτων). Σχίσμα είναι το ἡμισυ του κόμματος. Διάσχισμα είναι το ἡμισυ της διέσεως, δηλαδή του ἐλάσσονος ημιτονίου (λείμματος)].

Οι δίχα φρονέοντες και ἀλόγως ηχούντες φθόγγοι αποτελούν δυσαρμονίαν (νεϊκος). Όταν κατά κάποιον λόγο συμφρονήσουν και συνφωνήσουν (φιλότης), γεννάται ο δεσμός της φιλότητος και της αρμονίας. Τούτο επιτυγχάνεται αφενός μεν με την Πυθαγόρειο διαδικασία των μεσοτήτων (αριθμητική, γεωμετρική, αρμονική), αφετέρου δε με την Πλατωνική διαδικασία της Στερεομετρίας.

Πυθαγόρειος διαδικασία των μεσοτήτων (αριθμητική, γεωμετρική, αρμονική)

Το δις διατεσσάρων $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ αφαιρούμενο από το διαπασών $\left(\frac{12}{6}\right)$ γεννά τον μείζονα τόνο (επόγδοον) $\left(\frac{9}{8}\right)$.

Πρόκειται για τη λεγομένη μουσική αναλογία.

Η αναλογία αυτή, τριχή διαστατή, είναι η μόνη που εμπεριέχει συγχρόνως και την αριθμητική και την αρμονική και τη γεωμετρική αναλογία (εμπλέγδην).

$$\begin{matrix} 6 & 8 & 9 & 12 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix}$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ

$$a_4 - a_3 = a_3 - a_1 \Rightarrow 2a_3 = a_1 + a_4$$

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ

$$\begin{aligned} \frac{a_4 - a_2}{a_2 - a_1} &= \frac{a_4}{a_1} \Rightarrow a_1 \cdot a_4 - a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_4 - a_1 \cdot a_4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot a_1 \cdot a_4 = 2(a_1 + a_4) \end{aligned}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΑ (ΕΜΠΛΕΓΔΗΝ)

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_3}{a_1}$$



Σχήμα 1: Το δις διατεσσάρων $(4^2 : 3^2)$ αφαιρούμενο από το διαπασών $(12 : 6)$ προκύπτει ο μείζων τόνος (επόγδοος) $(9 : 8)$.

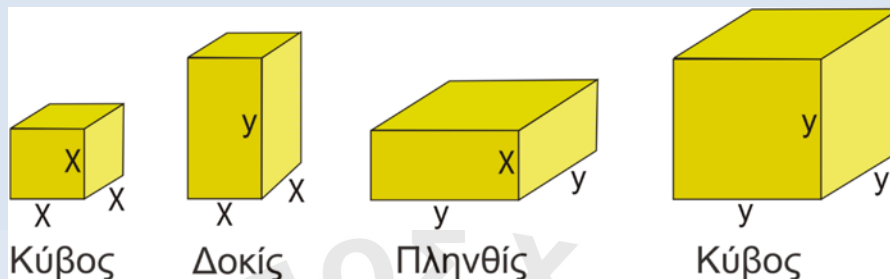
Όροι 12 : 6, σε σχέση διπλάσια (διαπασών)

Πρόοδος 9 : 6, 12 : 8 σε σχέση ημιόλιο

Υπόλοιπα 8 : 6, 12 : 9 σε σχέση επίτριτο

Πλατωνική διαδικασία της Στερεομετρίας

Ιδιαίτερα σημασία έχει η παρεμβολή των δύο μέσων μεταξύ των δύο δοθέντων κύβων με τη συνδρομή της Στερεομετρίας, όπως αναφέρει ο Νικόμαχος ο Γερασηνός. Γι' αυτό ο Πλάτων θεωρεί την Στερεομετρία ως ιδιότητα εξαγνίζουσα τον άνθρωπο και την τοποθετεί μετά την Γεωμετρία και πριν από τη Μουσική.

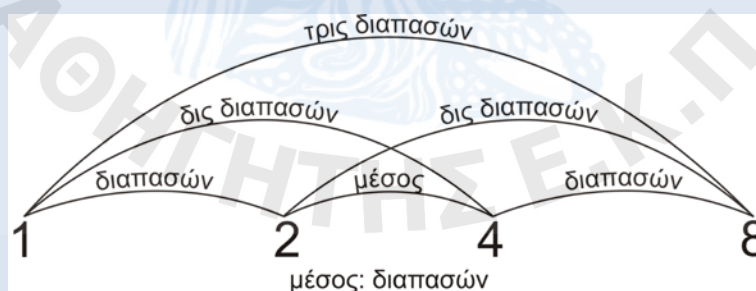


$$\text{Σχήμα 2: } \frac{\text{ΔΟΚΙΣ}}{\text{ΚΥΒΟΣ ΜΙΚΡΟΣ}} = \frac{\text{ΚΥΒΟΣ ΜΕΓΑΛΟΣ}}{\text{ΠΛΗΝΘΙΣ}}$$

Η διαδικασία έχει ως εξής: Δοθέντων δύο κύβων, ενός μικρού και ενός μεγάλου παρατίθενται ανάμεσά τους ώστε να σχηματίζουν αναλογία μία δοκίς, η οποία έχει τη βάση του μικρού κύβου και του ύψος του μεγάλου κύβου και μια πληνθίς, η οποία έχει τη βάση του μεγάλου κύβου και το ύψος του μικρού.

Στην περίπτωση κατά την οποία ο μικρός κύβος έχει πλευρά ίση με τη μονάδα ($1 \times 1 \times 1 = 1$) και ο μεγάλος κύβος έχει πλευρά ίση με 2 ($2 \times 2 \times 2 = 8$), δοκίς είναι ο αριθμός 2 ($1 \times 1 \times 2 = 2$) και πληνθίς είναι ο αριθμός 4 ($2 \times 2 \times 1 = 4$). Τα προηγούμενα με μουσικούς όρους διατυπώνονται ως εξής:

Όταν το δις διαπασών $\left(\frac{2}{1}\right)^2$ αφαιρείται από το τρις διαπασών $\left(\frac{2}{1}\right)^3$, γεννάται το διαπασών $\left(\frac{2}{1}\right)$.



Σχήμα 3: Όταν το δις διαπασών $(2^2 : 1^2)$ αφαιρείται από το τρις διαπασών $(2^3 : 1^3)$, γεννάται το διαπασών $(2 : 1)$.

Όροι 8:1, σε σχέση οκταπλασία

Πρόδος 4:1, 8:2, σε σχέση τετραπλασία

Υπόλοιπα 2:1, 8:4, σε σχέση διπλασία

Διαφοραί

$1:4:8 \Rightarrow (4-1):(8-4) \Rightarrow 3:4$ σε σχέση επίτριτο

$$1:2:8 \Rightarrow (2-1):(8-2) \Rightarrow 1:6 \text{ σε σχέση εξαπλασία}$$

Επί όλων των θεμάτων, τα οποία εθίγησαν εις την εισήγησή μου, ο αναγνώστης μπορεί να ενημερωθεί πλήρως και αναλυτικώς από τα βιβλία:

1. Σίμωνος Ι. Καρά,
«*Τα βασικά γνωρίσματα της Βυζαντινής Εκκλησιαστικής Μουσικής*»
το οποίο θα κυκλοφορήσει οσονούπω.
2. Χαράλαμπου Χ. Σπυρίδη,
«*Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*»

