

ΠΡΟΛΕΓΟΜΕΝΑ

Το ενδιαφέρον μου για τον πλατωνισμό ήτο κατ' αρχάς το ενδιαφέρον του επιστήμονος που ασχολείται με τον πυθαγορισμό, στοχεύοντας στην κατανόηση του τρόπου μελέτης από τους πυθαγορείους των ακουστικών φαινομένων, τα οποία ακολουθούν νόμους αρμονικούς και φθάνουν επί αιώνες κατ' αυτόν ή εκείνον τον τρόπο στην ανθρώπινη αίσθηση. Έτσι, ο άνθρωπος από της αρχαιότητας μέχρι της σημερινής εποχής δεν κάνει τίποτ' άλλο από το να προσπαθεί ν' ανακαλύψει και διατυπώσει με την επιστημονική γνώση, την οποία εκάστοτε διαθέτει, τη φύση και τη μορφή αυτών των φαινομένων κατά την Πλατωνική φιλοσοφική και επιστημονική άποψη «*σώζειν τα φαινόμενα*».

Στην προσπάθειά μου αυτή εντυπωσιάσθηκα εξαιρετικώς από τον μυστικισμό, ο οποίος διέκρινε τη μετάδοση της επιστημονικής γνώσεως μεταξύ των μεμνημένων οπαδών του πυθαγορισμού, αλλά συντόμως διεπίστωσα ότι ανέκαθεν οι κοσμοθεωρίες των κατ' έθνη ιερατείων εβασίζοντο στον συμβολισμό. Για τον λόγο αυτό τα ιερά κείμενά τους ήσαν αρρήκτως συνδεδεμένα με σημεία, σύμβολα, αριθμούς και αστερισμούς, προκειμένου να προστατευθούν αλήθειες και ιδανικά τα οποία, διαφορετικώς, με το πέρασμα των χρόνων θα υφίσταντο διαστρεύλωση.

Διεπίστωσα ότι υπάρχουν κρίσιμες περικοπές ιερών κειμένων και κειμένων της παγκοσμίου λογοτεχνίας -Βέδες, Αιγυπτιακό βιβλίο των Νεκρών, Βίβλος, Πλάτων- τα οποία πραγματεύονται αριθμούς. Επί πλέον συνειδητοποίησα ότι η επανάληψη ταυτοσήμων και ομοίων αριθμών στη Βαβυλώνα, την Αίγυπτο, την Ελλάδα και την Παλαιστίνη επιβεβαιώνουν τις κάποτε αναπτυχθείσες θεωρήσεις, οι οποίες είχαν ιστορική συνέχεια και προσανατολισμό μιας βασικής πνευματικής παραδόσεως.

Μελετώντας την πορεία των μουσικών ιδεών από τον Πυθαγόρα στον Πλάτωνα, ασχολήθηκα επί πολύν καιρό με το «μουσικό χωρίον» του Πλατωνικού Τιμαίου (35 a1 - 36 b6), το οποίο αναφέρεται στη δημιουργία και τη σύσταση της Ψυχής του Κόσμου επί τη βάσει ενός αλγορίθμου διατυπωμένου με Πυθαγόρειο μουσική ορολογία.

Συντόμως αντελήφθηκα ότι ο πλατωνισμός αντιμετωπίζει τη μουσική με μια νέα οπτική. Μια οπτική, η οποία αναγνωρίζει τη μουσική ως μία δύναμη ικανή να προβάλλει μια φιλοσοφική σύνθεση μόνο που ο μελετητής θα πρέπει ν' ασχοληθεί με ένα απόθεμα αριθμολογίας και να συσχετίσει μια μυθολογία με μαθηματικές αλληγορίες.

Το ερώτημα που με απασχολεί είναι εάν πράγματι πρόκειται για ένα απόθεμα αριθμολογίας ή είναι ένα απόθεμα βαθύτερης μαθηματικής γνώσεως, τόσο βαθύτερης, που ούτε καν την υποψιαζόμεθα ότι υπήρχε εκείνη την εποχή.

Εξηγούμαι. Ο Πλάτων, ως Πυθαγόρειος, μεταφέρει αλληγορικώς μηνύματα και γνώση στους αναγνώστες των διαλόγων του. Το επιφανειακό νόημα των γραφομένων του, αυτό που εμπεριέχουν οι γραμμές, οι «αράδες» των κειμένων των διαλόγων του, το κατανοούμε με την βοήθεια της γραμ-

ματικής και του συντακτικού (υποκείμενο-ρήμα-αντικείμενο). Η αλληγορία, δηλαδή το κωδικοποιημένο μήνυμα, το οποίο απευθύνεται προς τους μεμνημένους αναγνώστες των διαλόγων, ευρίσκεται «ανάμεσα» ή «πίσω» από τις γραμμές των κειμένων.

Για την άντληση αυτής της εκάστοτε αλληγορίας, που είναι η πεμππουσία της διδασκαλίας του δια των διαλόγων, επίστευα αφελώς ότι απαιτείτο η γνώση των Πυθαγορείων μαθηματικών (Αριθμητικής, Γεωμετρίας και Στερεομετρίας) και της Πυθαγορείου Αρμονικής (μουσικής), της κορωνίδος της Πυθαγορείου Μαθηματικής Επιστήμης.

Επίσης αφελώς επίστευα ότι ο Πλάτων, ως πολύτιμη στήλη της Ροζέττης στα γραπτά του με αριθμητικές μόνον εκφράσεις edίδασκε μουσική και με μουσικές μόνον εκφράσεις edίδασκε μαθηματικά.

Το πρώτο λ.χ. συμβαίνει στο Η' Βιβλίο της Πολιτείας του, την Πολιτειολογία, όπου δι' αριθμών ο Πλάτων μας αποκαλύπτει αλληγορικώς τις μουσικολογικές του γνώσεις περί του εναρμονίου γένους της πυθαγορείου μουσικής και περί του αρμονικού περιεχομένου των μουσικών διαστημάτων της εποχής του.

Το δεύτερο ξεκάθαρα αποδεικνύεται στο μετά χείρας βιβλίο ότι πραγματοποιείται στο «μουσικό χωρίον» του Πλατωνικού Τιμαίου.

Για την άντληση αυτής της εκάστοτε αλληγορίας, που, όπως έχω προείπει, είναι η πεμππουσία της διδασκαλίας του δια των διαλόγων, χρειάζονται πολλές γνώσεις από πολλά πεδία του επιστητού και ιδιαίτερες γνώσεις «προκεχωρημένων συγχρόνων» μαθηματικών! Μήπως αυτά τα «προκεχωρημένα σύγχρονα» μαθηματικά ήσαν γνωστά –κατά κάποιον μικρό ή μεγάλο βαθμό– σε κάποιους πεφωτισμένους και μεμνημένους ανθρώπους εκείνης της εποχής και εμείς το αγνοούμε ή δεν θέλουμε να το πιστέψουμε ή –ακόμη– το διαβάζουμε σε κείμενα διαφόρων αρχαίων συγγραφέων και δεν το καταλαβαίνουμε, επειδή από τότε μέχρι σήμερα οι όροι έχουν διαφοροποιηθεί εννοιολογικώς και δεν έχουν καμία σχέση με το εννοιολογικό περιεχόμενο, το οποίο τους αποδίδουμε σήμερα.

Για τις σκέψεις και τον προβληματισμό μου, που εξέθεσα ανωτέρω, θα ήθελα να αναφερθώ στη Θεωρία των Ιδεών του Πλάτωνος, να προσπαθήσω να την αναλύσω ή να την περιγράψω με μαθηματικό τρόπο έτσι, όπως εγώ την αντιλαμβάνομαι, και μετά σας καλώ να συζητήσουμε και ν' αποφανθούμε, εάν ο Georg Cantor (Εικόνα Πρ. 1) το έτος 1873 ανακάλυψε τη θεωρία των Συνόλων.

Στην εγκυκλοπαιδεία Πάπυρος-Larousse-Britanica διαβάζουμε ότι κατ' αρχάς ο όρος «ιδέα» εσήμαινε την θέαση του κόσμου διά μέσου των αισθήσεων. Στη συνέχεια, ο όρος edήλωνε μία περισσότερο προσεκτική θεώρηση της εξωτερικής εμφανίσεως του κόσμου λ.χ. του σχήματος, της μορφής του κ.λπ. ακόμη και της εσωτερικής υφής του, δηλαδή της ουσίας του.

Ιστορικώς, η γέννηση της ιδέας συνδέεται με την εξέλιξη τής ελληνικής φιλοσοφίας.

Την εποχή του Πλάτωνος είχε φτάσει σε αδιέξοδο η φιλοσοφική αναζήτηση, των προσωκρατικών φιλοσόφων, όσον αφορά στη γνώση αυτού καθαυτού του Κόσμου και των αρχών λειτουργίας του.



Εικόνα Πρ. 1: Georg Cantor: 3 Μαρτίου 1845 – 6 Ιανουαρίου 1918

Οι οπαδοί του Ηρακλείτου υπεστήριζαν ότι τα πάντα στον κόσμο συνεχώς μετεβάλλοντο, ώστε τίποτα δεν έμενε το ίδιο από τη μία στιγμή στην άλλη. «γίνεσθαι τε πάντα κατ' ἐναντιότητα καὶ ρεῖν τὰ ὅλα ποταμοῦ δίκην» (Σπάραγμα 1, 49-50) και «ποταμῶι γὰρ οὐκ ἔστιν ἐμβῆναι δις τῶι αὐτῶι» (Σπάραγμα 91, 1-2). Συνέπεια αυτής της θεωρίας εφαινετο να είναι ότι δεν μπορούμε να γνωρίσουμε αυτόν τον αιμεταβαλλόμενο κόσμο, αφού η γνώση απαιτεί την ύπαρξη ενός σταθεροῦ μελετουμένου αντικειμένου.

Οι οπαδοί του Παρμενίδη υπεστήριζαν ότι υπάρχει μία σταθερή πραγματικότητα («ἀγένητον» «ἀνώλεθρον», «ἕν, συνεχές», «ἄναρχον», «ἀκίνητον μεγάλων ἐν πείρασι δεσμών ἔστιν ἄναρχον ἄπαυστον, ἐπεὶ γένεσις καὶ ὄλεθρος τῆλε μάλ' ἐπλάχθησαν, ἀπῶσε δὲ πίστις ἀληθῆς. ταῦτόν τ' ἐν ταῦτῶι τε μένον καθ' ἑαυτό τε κεῖται χούτως ἔμπεδον αἰθι μένει· κρατερὴ γὰρ Ἀνάγκη πείρατος ἐν δεσμοῖσιν ἔχει» (Σπάραγμα 8, 26-31), την οποία μπορούμε να ανακαλύψουμε μόνο νοερώς, χωρίς καμία ανάμειξη των αισθήσεων και τούτο διότι το αντικείμενο της γνώσεως πρέπει να είναι αμετάβλητο και αἰώνιο, εκτός χρόνου και μεταβολής, ενώ οι αισθήσεις μας φέρνουν σε επαφή με ό,τι είναι μεταβλητό και φθαρτό.

Την θεωρία των ιδεών την εισήγαγε ο Πλάτων θέλοντας να συνάψει το **γίνεσθαι** του Ηρακλείτου (Κρατύλος 411c) με το **εἶναι** του Παρμενίδη (Θεαίτητος 180d-181b) και δια της μετοχής του γίνεσθαι στο εἶναι «σῶζει τα φαινόμενα». Επίσης ήθελε να διαφυλάξει το αγαθό της γνώσεως και της αντικειμενικής αληθείας από ιδεολογήματα, τα οποία την απέρριπταν κατα-

δικάζοντας τον άνθρωπο σε μια άγνοια μόνιμη και οδηγώντας τον, τελικώς, στον αμοραλισμό.

Η θεωρία αυτή αποτελεί μια τομή στην ιστορία της Φιλοσοφίας καθώς επίσης σημείο αναφοράς για όλη την μετέπειτα φιλοσοφική αναζήτηση.

Κατ' αυτήν, η πραγματικότητα χωρίζεται σε αισθητή και νοητή. Στην πρώτη ανήκουν τα πράγματα και τα αντικείμενα, τα οποία αντιλαμβανόμεθα με τις αισθήσεις μας και τα οποία υπόκεινται εις φθορά. Στη δεύτερη ανήκουν οι περίφημες πλατωνικές **ιδέες** ή **είδη**, οι οποίες γίνονται αντιληπτές μόνο με τον νου μας, είναι τα αντικείμενα της γνώσεως και υπάρχουν πέραν του χώρου και του χρόνου.

Οι ιδέες για τον Πλάτωνα είναι τα «**καθαρώς όντα**», τα «**όντως όντα**», δηλαδή αυτές που υπάρχουν πραγματικώς, που είναι άυλες, αιώνιες, απόλυτες, αυθύπαρκτες και αποτελούν την πηγή της γνώσεως.

Τα αντικείμενα του αισθητού κόσμου, τα οποία αντιλαμβανόμεθα δια των αισθήσεών μας, είναι ατελή αντίγραφα των ιδεών. Με άλλα λόγια ο κόσμος των ιδεών, ο οποίος είναι αυθύπαρκτος και έξω από τον αισθητό κόσμο, επεμβαίνει ως μια μορφολογική ή θεμελιούσα αρχή στη διαμόρφωση αυτού καθαυτού του αισθητού κόσμου.

Οι πλατωνιστές (λ.χ. Vegetti, Taylor κ.α.) υποστηρίζουν ότι προκειμένου να καταλήξει ο Πλάτων στη θεωρία των ιδεών, ξεκίνησε από την έννοια του κατηγορουμένου της κρίσεως, την οποία είχε εισαγάγει ο Σωκράτης. Το προτεινόμενο σκεπτικό είναι το εξής: όταν για διαφορετικά υποκείμενα βεβαιώνουμε το ίδιο κατηγορούμενο (π.χ. «ο σκύλος είναι καλός», «ο Σωκράτης είναι καλός», «ο Θεός είναι καλός» κλπ.), τότε, σε κάθε χωριστή περίπτωση, το κατηγορούμενο πρέπει να έχει την ίδια σημασία ανεξαρτήτως από τα υποκείμενα στα οποία αποδίδεται. Η σημασία αυτή του κατηγορουμένου, εφόσον η κρίση είναι αληθής, αντλεί την αλήθειά της από την αναφορά της στην ιδέα. Οι ιδέες είναι εκείνες οι τέλειες, άφθαρτες και αμετάβλητες νοητές οντότητες, στις οποίες όλα τα ατελή, φθαρτά και μεταβλητά αισθητά πράγματα μετέχουν.

Ο Πλάτων ονομάζει αυτή τη σχέση, από τη σκοπιά των αισθητών, μέθεξη¹ ή μίμηση². Ο ίδιος, όταν αναφέρεται στην ίδια σχέση από την πλευρά των ιδεών, ομιλεί για παρουσία της ιδέας μέσα στα πράγματα ή για κοινωνία της ιδέας με τα πράγματα.

Σε κανέναν, όμως, από τους διαλόγους του δεν εξηγεί επακριβώς τη φύση αυτής της σχέσεως. Αφήνει, έτσι, ανοιχτό το ενδεχόμενο μελέτης της

¹ Μέθεξη: η συμμετοχή του αισθητού μας κόσμου στον νοητό-ιδεατό κόσμο. Δι' αυτής ο εμπειρικός κόσμος εντός του οποίου υπάρχουμε, ο μεταβαλλόμενος εντός του χωροχρόνου, δηλαδή που γεννάται και φθείρεται συνεχώς, αποκτά δια της μετοχής του στις ιδέες μια ταυτότητα. Με άλλα λόγια η «μέθεξη» αποτελεί την γέφυρα η οποία συνδέει τους δύο κόσμους.

² Ορισμένοι μελετητές υποστηρίζουν την άποψη ότι ο Πλάτων εγκατέλειψε την έννοια «μέθεξη» ως μη ικανοποιητική και την αντικατέστησε με την έννοια «μίμηση», επειδή την εθεώρησε πληρεστέρα.

σχέσεως των όντων του πραγματικού κόσμου με τα όντα του κόσμου των ιδεών (μέθεξη ή μίμηση) και αντιστρόφως (παρουσία της ιδέας μέσα στα πράγματα ή κοινωνία της ιδέας με τα πράγματα).

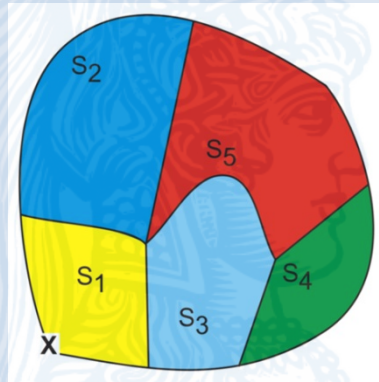
Επειδή πιστεύω ότι ο Πλάτων οικοδομεί την θεωρία των ιδεών για να την χρησιμοποιήσει ως θεμέλιο «ως την παιδαγωγική βάση» επάνω στο οποίο θα στηριχθεί για να διδάξει «αλληγορικώς» στους μαθητάς του κάτι το εξαιρετικώς σημαντικό, ασχολήθηκα επί πολύν χρόνον για να διασαφηνίσω Μαθηματικώς³ αυτήν την σχέση.

Διαμερισμός, διαμέριση ή διαμελισμός⁴ ενός μη κενού συνόλου X είναι ένα σύνολο $S = \{S_j\}$ υποσυνόλων του X , τα οποία είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους και επιπλέον έχουν ως ένωση το σύνολο X (Σχήμα Πρ. 1):

$$\forall i \neq j \quad S_i \cap S_j = \emptyset$$

και

$$\bigcup_i S_i = X$$



Σχήμα Πρ. 1: Διαμερισμός του συνόλου X σε πέντε υποσύνολα S_1, S_2, S_3, S_4, S_5

Κατά τα ανωτέρω το σύνολο X διεμερίσθη σε πέντε υποσύνολα, τα S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 .

³ Ευχαριστώ τον κ. Συμεών Μποζαμπαλίδη, καθηγητή Αλγέβρας και Λογικής στο Τμήμα Μαθηματικών του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης, για την εποικοδομητική συζήτηση που είχα μαζί του επί του θέματος της αμφιέσεως του πραγματικού κόσμου και του κόσμου των ιδεών κατά Πλάτωνα.

⁴ Τα θεωρητικά των κάτωθι Μαθηματικών ελήφθησαν από την Βικιπαίδεια, την ελεύθερη εγκυκλοπαίδεια.

Κάθε διαμερισμός S ενός συνόλου X ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας⁵ \equiv_S μεταξύ των στοιχείων του συνόλου, ως εξής:

$$a \equiv_S b \text{ εάν και μόνον εάν } \exists i: a, b \in S_i$$

Αντιστρόφως, κάθε σχέση ισοδυναμίας σε σύνολο επάγει και έναν διαμερισμό του συνόλου, ο οποίος ορίζεται από τις κλάσεις ισοδυναμίας⁶ του.

⁵ ΣΧΕΣΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Ορισμός

Έστω A ένα μη κενό σύνολο και σ μια διμελής σχέση στο A . Η σχέση σ ονομάζεται σχέση ισοδυναμίας στο A , εάν και μόνον εάν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

Αυτοπαθή ή ανακλαστική. Δηλαδή, $x \sigma x \quad \forall x \in A$

Συμμετρική. Δηλαδή, $x \sigma y \Rightarrow y \sigma x \quad \forall x, y \in A$

Μεταβατική. Δηλαδή, $x \sigma y$ και $y \sigma z \Rightarrow x \sigma z \quad \forall x, y, z \in A$

Τη σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο A την παριστάνουμε με το σύμβολο « \sim ». Για κάθε ζεύγος, το οποίο ανήκει στη σχέση αυτή σημειώνουμε $x \sim y$ και λέμε ότι το στοιχείο x είναι ισοδύναμο με το στοιχείο y .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η ομοιότητα τριγώνων είναι μια σχέση ισοδυναμίας.

⁶ ΚΛΑΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Αν θεωρήσουμε μια σχέση ισοδυναμίας σ σε ένα σύνολο X , μπορούμε να δημιουργήσουμε υποσύνολα του X καθένα από τα οποία θα περιέχει στοιχεία του X , τα οποία θα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους, κατά τον εξής τρόπο :

Παίρνουμε ένα τυχαίο στοιχείο a του X και επιλέγουμε όλα τα στοιχεία του X , που είναι ισοδύναμα με το a ως προς τη σχέση σ . Έτσι δημιουργούμε ένα σύνολο, το οποίο θα το συμβολίζουμε με $[a]$. Δηλαδή, $[a] = \{x \in X \mid x \sim a\}$.

Το σύνολο $[a]$ το ονομάζουμε κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο το στοιχείο a .

Επομένως, η σ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο X . Μπορούμε να ορίσουμε στο X κλάσεις ισοδυναμίας σύμφωνα με τη σχέση σ με τον εξής τρόπο.

Έστω X το σύνολο, το οποίο παριστά τον «πραγματικό κόσμο» κατά Πλάτωνα. Παίρνουμε τυχαία ένα οικοδόμημα a , που είναι στοιχείο του συνόλου X και διαπιστώνουμε ότι είναι μια κατοικία (η σχέση σ). Επιλέγουμε όλα τα στοιχεία του X , τα οποία είναι ισοδύναμα με το a ως προς τη σχέση σ , δηλαδή όλες τις κατοικίες του «πραγματικού κόσμου». Έτσι δημιουργούμε το σύνολο $[a]$, το οποίο είναι η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο το στοιχείο a . Η κλάση ισοδυναμίας $[a]$ προφανώς θα είναι το σύνολο όλων των κατοικιών του «πραγματικού κόσμου».

Ορισμός

Αν X είναι ένα μη κενό σύνολο και σ μια σχέση ισοδυναμίας στο X , τότε για κάθε στοιχείο a του X , το σύνολο $[a] = \{x \in X \mid x \sigma a\} = \{x \in X \mid x \sim a\}$ των στοιχείων του X , τα οποία είναι ισοδύναμα με το a ως προς τη σχέση σ , ονομάζεται κλάση ισοδυναμίας του X ως προς τη σχέση σ , που αντιστοιχεί στο στοιχείο a .

Ιδιότητα 1. Κάθε κλάση $[a]$ είναι ένα μη κενό σύνολο, δηλαδή $[a] \neq \emptyset, \forall a \in X$

Πράγματι, αφού η σ είναι σχέση ισοδυναμίας θα έχουμε $a \sim a \quad \forall a \in X$, άρα $[a]$ θα έχει ένα τουλάχιστον στοιχείο, το οποίο είναι το a .

Συνάρτηση ή απεικόνιση στα μαθηματικά είναι ένας κανόνας αντιστοιχίσεως στοιχείων ενός συνόλου σε στοιχεία ενός άλλου συνόλου έτσι, ώστε κάθε στοιχείο του πρώτου να μην αντιστοιχίζεται σε περισσότερα του ενός στοιχεία του δεύτερου (αξίωμα **μονοτιμίας ή μονοσημαντότητας**).

Αν A και B είναι δύο σύνολα, γράφουμε $f : A \rightarrow B$ για μια αντιστοιχία από το A στο B . Το A λέγεται **σύνολο ορισμού** και το B **σύνολο τιμών**. Κάθε στοιχείο a του A λέγεται **όρισμα** της f και κάθε στοιχείο b του B , στο οποίο αντιστοιχίζεται ένα τουλάχιστον όρισμα a λέγεται **τιμή ή εικόνα** της f στο a και γράφουμε $b = f(a)$. Συμφώνως προς τον ανωτέρω ορισμό, για να είναι η f **συνάρτηση**, θα πρέπει

εάν $f(a) \neq f(a')$ τότε $a \neq a'$

δηλαδή δυο τιμές, οι οποίες είναι διαφορετικές να μην αντιστοιχούν παρά σε διαφορετικά ορίσματα. Λέμε τότε ότι η f είναι καλώς ορισμένη (ενν. ως συνάρτηση).

Ο όρος **απεικόνιση** χρησιμοποιείται συνήθως εν γενικεύσει στην περίπτωση κατά την οποία τα σύνολα A και B (ιδιαιτέρως το B) δεν είναι συνήθη σύνολα αριθμών.

Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ λέγεται **ένα προς ένα (1-1) ή αμφιμονότιμη ή αμφιμονοσήμαντη ή ένεση**, όταν αντιστοιχίζει κάθε όρισμα σε αποκλειστικά δική του τιμή, δηλαδή, όταν διαφορετικά ορίσματα απεικονίζονται σε διαφορετικές τιμές:

εάν $a \neq a'$ τότε $f(a) \neq f(a')$

Ιδιότητα 2. Δύο κλάσεις $[a]$ και $[\beta]$ είναι ίσες, εάν και μόνον εάν οι αντιπρόσωποι a και β των κλάσεων είναι στοιχεία ισοδύναμα μεταξύ τους ως προς τη σχέση σ . Δηλαδή:

$[a] = [\beta] \Leftrightarrow a \sim \beta$.

Ιδιότητα 3. Δύο κλάσεις ισοδυναμίας $[a]$ και $[\beta]$ είτε είναι ίσες είτε είναι σύνολα ξένα μεταξύ τους: $[a] = [\beta]$ ή $[a] \cap [\beta] = \emptyset$.

Από όλα τα ανωτέρω προκύπτει ότι εάν, σε ένα σύνολο X , $X \neq \emptyset$, ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας, τότε μπορούμε να δημιουργήσουμε υποσύνολα $[a]$ του X , κλάσεις ισοδυναμίας, τα οποία να έχουν τις εξής ιδιότητες:

i) Κάθε κλάση ισοδυναμίας $[a]$ δεν είναι κενό σύνολο.

ii) Δύο κλάσεις $[a]$ και $[\beta]$ ή ταυτίζονται ή είναι σύνολα ξένα μεταξύ τους.

iii) Κάθε στοιχείο μιας κλάσης μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπρόσωπός της.

iv) Κάθε στοιχείο a του X ανήκει σε μία κλάση, δηλαδή το X είναι η ένωση όλων των κλάσεων ισοδυναμίας.

ΣΥΝΟΛΟ-ΠΗΛΙΚΟ

Εάν έχουμε ένα μη κενό σύνολο X και μια σχέση ισοδυναμίας σ μέσα στο X , τότε το X διαμερίζεται σε κλάσεις $[a], [\beta], \dots, [v], \dots$ ως προς τη σχέση σ . Το σύνολο όλων αυτών των κλάσεων ισοδυναμίας ονομάζεται σύνολο πηλίκου του X ως προς τη σχέση σ και συμβολίζεται με A/σ .

$A/\sigma = \{ [a], [\beta], \dots, [v], \dots \}$

Μία συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ λέγεται **επί** (με την έννοια: "το A απεικονίζεται μέσω της f επί του B, επάνω στο B") ή **έφεση**, όταν δεν υπάρχει στοιχείο στο B, το οποίο να μην είναι η εικόνα κάποιου στοιχείου στο A: για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $b = f(a)$

Μία συνάρτηση ταυτοχρόνως αμφιμονότιμη και επί λέγεται **αμφίεση**.

Το **γράφημα** της συναρτήσεως $f : A \rightarrow B$ είναι το σύνολο, το οποίο αποτελείται από τα ζευγάρια της αντιστοιχίσεως

$$G(f) = \{(a,b) \in A \times B, \text{ όπου } b = f(a)\}$$

Η **αντίστροφη** αντιστοιχίση f^{-1} της συναρτήσεως f είναι η αντιστοιχίση από το B στο A, που ορίζεται ως εξής:

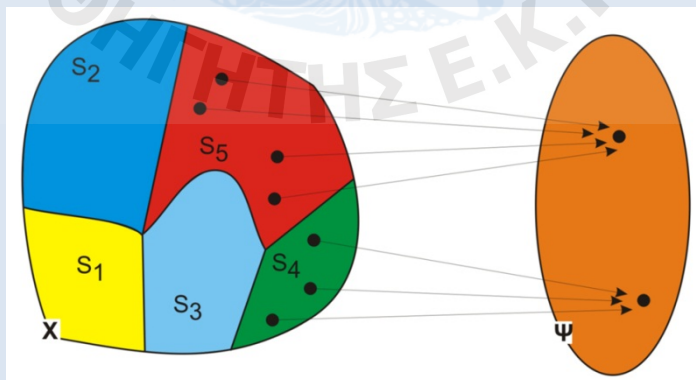
$$f^{-1}(b) = a \text{ εάν } f(a) = b$$

Η αντίστροφη αντιστοιχίση μιας συναρτήσεως δεν είναι πάντοτε συνάρτηση, μια και δεν υπακούει απαραίτητως στο αξίωμα μονοτιμίας: ένα στοιχείο b μπορεί να είναι τιμή δύο διαφορετικών ορισμάτων a και a' της f. Στην περίπτωση πάντως κατά την οποία είναι, η f λέγεται **αντιστρέψιμη** και η f^{-1} **αντίστροφη συνάρτηση** της f.

Έστω, λοιπόν, X ο «πραγματικός κόσμος», ο υφιστάμενος την φθορά κατά Πλάτωνα. Πραγματοποιούμε έναν μερισμό του πραγματικού κόσμου με όλες τις δυνατές κλάσεις των «οντων» εμβίων ή μη του πραγματικού κόσμου.

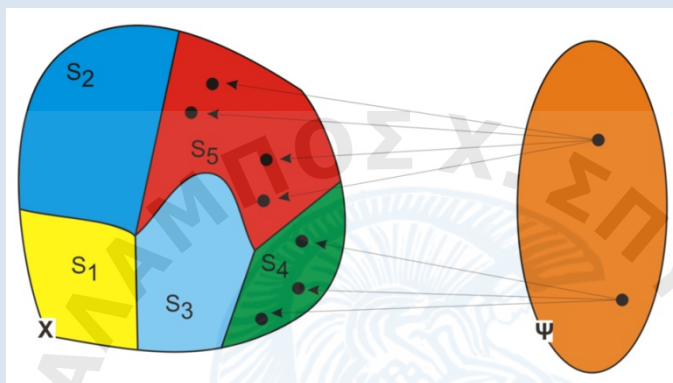
Έστω και το σύνολο Ψ ο «κόσμος των ιδεών» κατά Πλάτωνα. Τούτο σημαίνει ότι το σύνολο Ψ εμπεριέχει ως στοιχεία μόνον τις ιδέες και, μάλιστα, όλες τις ιδέες.

Τώρα αντιστοιχίζουμε ή απεικονίζουμε σε όλα τα στοιχεία μιας κλάσεως του συνόλου X, του «πραγματικού κόσμου», την κατάλληλη ιδέα, η οποία είναι ένα στοιχείο του συνόλου Ψ, του «κόσμου των ιδεών» (μέθεξη ή μίμηση) (Σχήμα Πρ. 2). Με άλλα λόγια θα μπορούσαμε να πούμε ότι η απεικόνιση είναι συμβατή με τις κλάσεις, δηλαδή όλα τα στοιχεία μιας κλάσεως αντιστοιχούνται στο ίδιο στοιχείο του συνόλου Ψ.



Σχήμα Πρ. 2: Μέθεξη ή μίμηση, δηλαδή η αντιστοιχίση ή απεικόνιση σε όλα τα στοιχεία μιας κλάσεως του συνόλου X, του «πραγματικού κόσμου», της κατάλληλου ιδέας, η οποία είναι ένα στοιχείο του συνόλου Ψ, του «κόσμου των ιδεών».

Έτσι, λοιπόν, η ιδέα του τραπεζιού κάθετα επάνω από την κλάση των τραπεζιών, ασχέτως υλικού κατασκευής, μεγέθους, τιμής κ.λπ. και θα την χαρακτηρίζει (παρουσία της ιδέας μέσα στα πράγματα ή κοινωνία της ιδέας με τα πράγματα) (Σχήμα Πρ. 3).



Σχήμα Πρ. 3: Παρουσία της ιδέας μέσα στα πράγματα ή κοινωνία της ιδέας με τα πράγματα, δηλαδή η ιδέα κάθετα επάνω από την κατάλληλη κλάση ομοειδών αντικειμένων του «πραγματικού κόσμου».

Με το σύνολο των κλάσεων, δηλαδή το σύνολο πηλίκον του X , του «πραγματικού κόσμου», με τη σχέση ισοδυναμίας έχουμε ταυτίσει ομοειδή αντικείμενα του πραγματικού κόσμου. Το σύνολον αυτό πηλίκον ευρίσκεται σε «αμφίεση» (ένα προς ένα και επί) με το σύνολον Ψ των Ιδεών.

Όπως έχει ήδη λεχθεί, «ένα προς ένα» (1-1) σημαίνει ότι δύο διαφορετικές κλάσεις ομοειδών αντικειμένων παριστάνονται από δύο διαφορετικές Ιδέες, ενώ «επί» σημαίνει ότι κάθε ιδέα παριστάνει μια κλάση ομοειδών «αντικειμένων» του πραγματικού κόσμου.

Εξομολόγηση: Με την εκτεθείσα μαθηματική περιγραφή της Θεωρίας των Ιδεών εγώ κατανώ πλήρως και επακριβώς –διότι η γλώσσα των Μαθηματικών είναι ακριβεστάτη– το τι ήθελε να διδάξει ο Πλάτων. Πιστεύω ότι ο Πλάτων παρενοήθη φιλολογικώς και δεν κατενοήθη μαθηματικώς, διότι η πλειονότης της Πλατωνικής γραμματολογίας πραγματεύεται μαθηματικές θεωρίες, πολλές εκ των οποίων ΔΕΝ γνωρίζουμε εισέτι.

Το μετά χείρας βιβλίο με τίτλο «Πλάτωνος Τίμαιος: Γένεσις Ψυχής Κόσμου (Γραμμικές και Λαβδοειδείς Λύσεις)» είναι δόκιμος επιστημονική πραγματεία, η οποία αναφέρεται στο γνωστικό αντικείμενο «Μαθηματική δομή της αρχαίας Ελληνικής Μουσικής» του ερευνητικού μου χώρου και είναι το τεσσαρακοστό όγδοο σύγγραμμά μου, στα τριάντα τρία χρόνια της Πανεπιστημιακής μου καριέρας.

Το σύγγραμμά μου «Πλάτωνος Τίμαιος: Γένεσις Ψυχής Κόσμου (Γραμμικές και Λαβδοειδείς Λύσεις)» συνέγραψα αφενός μεν για να εκθέσω για

πρώτη φορά την Λαβδοειδή επίλυση του Πλατωνικού προβλήματος *Περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου*, αφετέρου δε να συμπεριλάβω και όλες τις γραμμικές λύσεις του ίδιου προβλήματος, τις οποίες είχα εκθέσει στο σύγγραμμά μου «*Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*», βασιζόμενος αποκλειστικώς στις τρεις μαθηματικές Επιστήμες, οι οποίες προηγούνται της Επιστήμης της Μουσικής, δηλαδή την Αριθμητική, την Γεωμετρία και την Στερεομετρία -κατά τα γραφόμενα υπό του Νικομάχου του Γερασηνού και του Πλάτωνος-.

Το σύγγραμμά απευθύνεται σε όσους εκ των φοιτητών του Τμήματος Μουσικών Σπουδών του Πανεπιστημίου Αθηνών επιλέγουν να παρακολουθήσουν το μάθημά μου «Πλάτωνος Τίμαιος Γένεσις Ψυχής Κόσμου» -ελεύθερης επιλογής-. Απευθύνεται, βεβαίως, και σε όλους τους επιστήμονες των Φιλοσοφικών Σχολών, οι οποίοι «διατριβάς ποιούνται» περί τον Πλάτωνα.

Η ύλη του συγγράμματος, συμβολικώς κατά τα Πυθαγόρεια, εχωρίσθη στην κάτωθι αναφερόμενη τετρακτύν Μερών:

ΜΕΡΟΣ Α΄: Μαθηματική και Μουσική υποδομή για την αντιμετώπιση του Πλατωνικού προβλήματος «Γένεση Ψυχής Κόσμου»

ΜΕΡΟΣ Β΄: Γραμμικές και Λαβδοειδείς λύσεις του Πλατωνικού προβλήματος «Γένεση Ψυχής Κόσμου»

ΜΕΡΟΣ Γ΄: Γραμμικές λύσεις του Πλατωνικού προβλήματος «Γένεση Ψυχής Κόσμου» άλλων μελετητών

ΜΕΡΟΣ Δ΄: Θέματα πυθαγορείου αριθμοσοφίας κατά την Ψυχογονία του Πλατωνικού *Τιμαίου*

και στο ακόλουθο επταμελές σύνολον Κεφαλαίων:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Στοιχεία Θεωρητικής Πυθαγορείου Αριθμητικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Στοιχεία Αρχαιοελληνικής Μουσικής

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Μαθηματικά «εργαλεία» για την ανάλυση του «Μουσικού χωρίου» του Πλατωνικού *Τιμαίου*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Η Γραμμική λύση του Πλατωνικού προβλήματος «Γένεση Ψυχής Κόσμου» (*Τίμαιος*, 35a1-36b6)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Η Λαβδοειδής λύση του Πλατωνικού προβλήματος «Γένεση Ψυχής Κόσμου» (*Τίμαιος*, 35a1-36b6)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: Γραμμικές λύσεις του Πλατωνικού προβλήματος «Γένεση Ψυχής Κόσμου» (*Τίμαιος*, 35a1-36b6) άλλων μελετητών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: Θέματα πυθαγορείου αριθμοσοφίας κατά την Ψυχογονία του Πλατωνικού *Τιμαίου*

Το σύγγραμμα «Πλάτωνος Τίμαιος: Γένεσις Ψυχής Κόσμου (Γραμμικές και Λαβδοειδείς Λύσεις)» συνεγγράφη με πλήρη τεκμηρίωση, με μαθηματική ορθότητα, με πολλή σαφήνεια, με έναν απλό, λιτό, ευρηματικό και εποπτικό

τρόπο, ώστε να κατανοούνται μαθηματικώς οι μουσικές ενέργειες ή μουσικώς οι πυθαγόρειες μαθηματικές πράξεις.

Επροτιμήθη να εκτυπωθεί πολύχρωμο, πλαισιωμένο από πλήθος σχημάτων, διαγραμμάτων και πινάκων, τα οποία όλα ομού διευκολύνουν την μετάδοση της απαραίτητου γνώσεως.

Όλα τα δικτυωτά, ευθέα ή αντίστροφα, εσχεδιάσθησαν εις τον ηλεκτρονικό υπολογιστή με λογισμικό, το οποίο επί τούτοις συνέγραψε ο Μουσικολόγος κ. Πέτρος Κ. Μουστάκας.

Όλα τα σχήματα επί των δικτυωτών και τα διαγράμματα, καθώς επίσης η διαμόρφωση σελίδος, η μορφοποίηση των χαρακτήρων και η μακέτα του εξωφύλλου, εγένοντο από τη θυγατέρα μου Ελένη Χ. Σπυρίδου PhD, BSc (Hons).

Ευχαριστώ θερμώς αμφοτέρους και τους εύχομαι επίτευξη των επιστημονικών τους στόχων.

Ο συγγραφεύς

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης

Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής

