

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΝΟΝΟΣ¹ ΚΑΤΑΤΟΜΗ

¹ Κάννα ή κάννη, ης, η, Λατινικά canna: καλάμι (ή με εξομοίωση κάθε ευθεία ράβδος, που χρησιμεύει ιδιαιτέρως στο να τηρεί κάτι ίσιο). Αυτή η ευθύτητα του καλαμιού δίδει τη λέξη κανών με τη σημασία του χάρακα, της ρήγας ή με τη σημασία του ίσιου, του ορθού και του δικαίου.

Ο κανών εχρησιμοποιείτο από τους κτίστες ή τους τέκτονες και διέφερε από το νήμα της στάθμης.

Στη μουσική κανών ήτο το μονόχορδο, δηλαδή το όργανο για την πειραματική μελέτη όλων των μουσικών διαστημάτων.

Η λέξη πάλι κανών σχετίζεται με τη λέξη κενός ή κενός, δηλαδή άδειος, ακριβώς επειδή δηλώνει το κούφιο του στελέχους του καλαμιού. Την ίδια σημασία έχουμε και στη λέξη αυλός, που επίσης σημαίνει καλάμι, φλογέρα, σωλήνα ή καθετί αυτής της μορφής.

Κανόνες εκαλούντο και οι οπές ή τα κλειδιά του αυλού.

Σπυρίδης, Χ. Χ., 2005. ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ Κανόνος Κατατομή.
Εκδόσεις Γαρταγάνη, Θεσσαλονίκη.

Spyridis, H. C., 2005. EUCLIDE Sectio Canonis.
Gartaganis Publications. Thessaloniki. Greece.

Α' Έκδοση 1996, Β' Έκδοση 1998, Γ' Έκδοση 2005,
Copyright © Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης

I.S.B.N. 960-88706-1-5

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις του Ελληνικού νόμου (Ν. 2121/1993 όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής αδείας του συγγραφέως καθ' οποιονδήποτε τρόπο ή μέσο αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή (ηλεκτρονική, μηχανική ή άλλη) και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

Επιμέλεια εκδόσεως: Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης

Όλα τα γραφικά του βιβλίου φιλοτεχνήθηκαν από την
Ελένη Χ. Σπυρίδου PhD, BSc (Hons).

Κεντρική Διάθεση: Βιβλιοπωλείο Δ. Γαρταγάνη, Κων. Μελενίκου 3,
546 35 Θεσσαλονίκη, Τηλ. (2310) 209.680



ἔστιν αὖ μουσικὴ περὶ
ὁρμονίαν καὶ ῥυθμὸν ἐρωτικῶν ἐπιστήμη.

Πλάτωνος Συμπόσιον

ΕΥΚΑΙΕΛΟΥ

4



Αφιερώνεται
στην πρωτότοκο θυγατέρα μου

Ελένη Χ. Σπυρίδου

διδάκτορα (PhD) της Πληροφορικής
του
Πανεπιστημίου Bradford U.K.

ΕΥΚΑΙΕΛΟΥ

6



ΠΡΟΛΕΓΟΜΕΝΑ

Το μετά χείρας βιβλίο, *Ευκλείδου Κανόνος Κατατομή*, είναι δόκιμος επιστημονική πραγματεία αναφερομένη στο γνωστικό αντικείμενο της ειδικότητός μου Μουσική Ακουστική, Πληροφορική. Μοχθώντας επί μία τριακονταετία στον επιστημονικό στίβο, επεξέτεινα την ερευνητική, διδακτική και συγγραφική μου δραστηριότητα όχι στους μαθηματικούς της ελληνικής αρχαιότητας μόνον, μάλιστα εις αυτούς, οι οποίοι ενδιέτριψαν στη μουσική ακουστική θεωρία, αλλά και στην αρχαία ελληνική γραμματεία εν γένει, αφού ούτως ή άλλως, υπό το πρίσμα αυτής εξετάζονται οι μουσικές θεωρίες των επιφανών Ελλήνων φιλοσόφων, μαθηματικών και φυσικών - θεωρίες σύμμεικτες εν πολλοίς με την προσωδία, τη μετρική και τη ρυθμική. Όσα δε περί της Μουσικής Ακουστικής αναφέρονται εν παρόδω από τους Έλληνες γραμματικούς και μετρικούς, γίνεται τούτο προκειμένου να επισημανθεί το θέμα σχέσεως της προσωδίας και μετρικής-ρυθμικής με τη μουσική και ακόμα η προβεβλημένη σε κάθε εποχή ανέλιξη των διαφορών μουσικών θεωριών, μάλιστα δε και της Μουσικής Ακουστικής. Και όλα αυτά, διότι κατά την ελληνική αρχαιότητα κύριο μέλημα της παιδείσεως των νέων, εξ ίσου δε αντικειμενικός σκοπός της πολιτείας, ήταν και η εκμάθηση της μουσικής, αφού ο ρυθμός και η αρμονία μπορούν να διεισδύσουν στο εσωτερικό της ψυχής των νέων και να έχουν ευεργετικά –ή καταστροφικά- αποτελέσματα για τη διαμόρφωση του χαρακτήρος των (Πλάτων, Πολιτεία 401 d 5 – 402 a 6, Αριστοτέλης Πολιτικά 1340 a 21-23).

Από το μέχρι τώρα γνωστό διδακτικό και προς το ευρύτερο μουσικό αναγνωστικό κοινό απευθυνόμενο συγγραφικό μου έργο εκ σαρανταεσσάρων Πανεπιστημιακών συγγραμμάτων, καταφαίνονται οι ειδικότερες και οι ευρύτερες περιοχές της διδακτικής και της ερευνητικής μου δραστηριότητας. Μία εξ αυτών είναι η αποκλειστική μελέτη της μαθηματικής δομής της αρχαίας ελληνικής μουσικής και ο τρόπος που αυτή μετεξελίσσεται στη βυζαντινή μουσική (εκκλησιαστική μουσική, δημώδη

άσματα, όρχηση), συγχρόνως δε στην κλασική και σύγχρονη Δυτική μουσική παράδοση.

Χρησιμοποιώντας τη Φυσική και τα Μαθηματικά σε αγαστή συνάρτηση με τη Μουσική, οδηγήθηκα στη σπουδή του μοναδικού μουσικού έργου του Ευκλείδου, την *Κατατομή Κανόνος* (*section canonis*) (του μονοχόρδου) (Πτολεμαίος, Νικόμαχος, Ιάμβλιχος, Πολυδεύκης).

Με τη χρήση του μονοχόρδου οι Πυθαγόρειοι κατάφεραν να μεταφέρουν την ακουστική εμπειρία, με τη βοήθεια της Γεωμετρίας, σε οπτική παράληψη, γεγονός εξαιρετικά σημαντικό, αφού η όραση είναι ο πιο αξιόπιστος μάρτυρας ανάμεσα στις αισθήσεις μας. Σχετικώς ο Αριστοτέλης στα Μετά τα φυσικά 985 b 31 (Bekker) αναφέρει: «τῶν ἁρμονιῶν ἐν ἀριθμοῖς ὄρωντες τὰ πάθη καὶ τοὺς λόγους» [βλέποντας στους αριθμούς τις μεταβολές και τους λόγους των αρμονιών].

Η *κατατομή κανόνος* είναι αρχαία πραγματεία, πυθαγόρειος κατά το μείζον τμήμα της και αριστοξένειος κατά το υπόλοιπο, επάνω στη σχέση που συνδέει μαθηματικές και ακουστικές αλήθειες, αποτελώντας, έτσι, τη βάση για την ακουστική επιστήμη του Δυτικού κόσμου².

Αξιίζει τον κόπο να μνημονευθούν περιληπτικά οι πλέον γενικοί λόγοι προκειμένου να αντιμετωπισθεί αυτή η πραγματεία ως αντιπροσωπευτική της Πυθαγορείου παραδόσεως, όσον αφορά στη θεωρία της αρμονίας. Σύμφωνα με τους σύγχρονους μεταφραστές και σχολιαστές υπάρχουν δύο μείζονες διακρίσεις ανάμεσα στις Πυθαγόρειες και τις Αριστοξένειες προσεγγίσεις. Αυτές είναι (α) ότι οι πρώτοι μεταχειρίζονται τα διαστήματα ως λόγους αριθμών, ενώ οι δεύτεροι τα αντιμετωπίζουν ως αποστάσεις σε ένα γραμμικό συνεχές³ και (β) ότι οι πρώτοι δίδουν προτεραιότητα στο νου, ως κριτήριο μουσικής κρίσεως, ενώ οι δεύτεροι στην καρδιά και το συναίσθημα.

² Για τους συγγραφείς της αυτοκρατορικής περιόδου η μουσική θεωρία παρουσίασε μια οξεία διχοτόμηση. Κάποιος μουσικός ή θα ήταν οπαδός των «Μαθηματικών» ή αλλιώς των Πυθαγορείων ή θα ήταν οπαδός των «Ακουστικών» ή αλλιώς των Αριστοξενικών. Οι μέθοδοι και οι θεωρίες των δύο σχολών εθεωρούντο μεταξύ τους ως ριζικά ασυμβίβαστες.

³ Βλ. Χαράλαμπου Χ. Σπυρίδη, «Ο δυϊσμός του μουσικού διαστήματος», εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα 2004.

Η εν λόγω πραγματεία διασώζεται από τρεις ξεχωριστές πηγές: μια μεγάλης έκτασης έκδοση, που αποδίδεται στον Ευκλείδη ή στον Κλεωνείδη ή στον Ζώσιμο τον Πανοπολίτη, μια συντομότερη Ελληνική έκδοση, που εμπεριέχεται στο υπόμνημα του Πορφυρίου «εις τα αρμονικά Πτολεμαίου» και μια λατινική έκδοση, που εμπεριέχεται στο έργο «De institutione musica» του Βοηθίου.

Μερικοί σχολιαστές αμφιβάλλουν, όσον αφορά στον ένα και μοναδικό συγγραφέα της πραγματείας, ακόμη και εάν γράφτηκε αυτή σε μία και μόνον περίοδο. Οι εικασίες αυτές ενθαρρύνονται από την πιθανότητα ο Πορφύριος και ο Βοήθιος να μην γνώριζαν την *Κατατομή κανόνος* ως ολότητα, με τη μορφή που έφθασε σε μας. Το μόνο σίγουρο είναι ότι η εν λόγω πραγματεία βασίζεται επί εργασιών παλαιότερων συγγραφέων.

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις τρεις προμνημονευθείσες διασωσμένες εκδοχές, χωρίς αμφιβολία η Εισαγωγή αποτελεί το πρώτο μεγάλο μέρος, το οποίο δεν υπάρχει στην εκδοχή του Πορφυρίου.

Το δεύτερο μεγάλο μέρος αποτελούν όλες οι μαθηματικές προτάσεις, οι οποίες υπάρχουν και στις τρεις εκδοχές της πραγματείας. Με αυτές τις μαθηματικές προτάσεις τελειώνει η λατινική εκδοχή της πραγματείας.

Ακολουθεί το τρίτο μεγάλο μέρος, που περιέχει ακουστικές προτάσεις με ένα μέρος των οποίων ολοκληρώνεται η εκδοχή του Πορφυρίου.

Το υπόλοιπο μέρος των ακουστικών προτάσεων και ό,τι άλλο απομένει μέχρι το τέλος της ελληνικής εκδοχής με το μεγάλο μήκος απαρτίζουν το τέταρτο και τελευταίο μεγάλο μέρος της αυτής πραγματείας.

Η «*Κατατομή Κανόνος*» είναι γραμμένη πιθανώς γύρω στα 300 π.Χ. με το ίδιο ύφος που είναι γραμμένα τα «*Στοιχεία Γεωμετρίας*» του Ευκλείδου. Γι' αυτό και αποδίδεται σ' αυτόν.

Ο συγγραφέας του βιβλίου τούτου ενδιαφέρεται κυρίως να αποδείξει συστηματικά και τυπικά τις προτάσεις, οι οποίες αποτελούν τη βάση της Πυθαγορείου και της Πλατωνικής παραδόσεως. Πρέπον είναι να σημειωθεί ότι τα συμπεράσματά του δεν είναι καθαρά «ορθολογιστικά» και μαθηματικά. Βασίζονται κυρίως σε αποδεκτά γεγονότα της εμπειρικής παρατηρήσεως και σε φυσικές και σε γενικής φύσεως θεωρήσεις, που εκτίθενται στην εισαγωγή. Έτσι, τα επιχειρήματα δεν αναπληρώνουν τη μουσική εμπειρία, αλλά απλά αποτελούν μια προσπάθεια να μεταφράσουν τις αλήθειες αυτών των εμπειριών στη γλώσσα των μαθηματικών, ώστε οι

επαγωγές και οι αμοιβαίες σχέσεις να μπορούν να μελετηθούν σχολαστικά.

Παρά τις όποιες αδυναμίες της και το περιορισμένο του πεδίου εφαρμογής της, η πραγματεία αυτή αποτελεί μια καθαρή προσπάθεια για τη μαθηματική θεμελίωση της αρμονικής με είκοσι θεωρήματα (βλέπε κατωτέρω), που αποδεικνύονται θαυμαστά και συνυφαίνονται με ένα μοναδικό τρόπο.

Αλήθεια είναι ότι η *κατατομή κανόνος* με το Ευκλείδειο ύφος, τη σπονδυλωτή (κομματιαστή) και ουσιαστικά Πυθαγόρεια φύση αποτελεί έργο αναφοράς από την αρχαιότητα και έχει τραβήξει την προσοχή και το ενδιαφέρον πολλών μουσικολόγων, φιλολόγων, φυσικομαθηματικών και ιστορικών της επιστήμης. Έτσι, η *κατατομή κανόνος* έχει πολυμελετηθεί, αφού πρώτα πολυαντιγραφήθηκε.

Όσα αφορούν στην καταγωγή του Ευκλείδου, του διδασκάλου της Αριθμητικής και της Γεωμετρίας των Αλεξανδρινών χρόνων, δεν μας είναι όλα γνωστά. Κατά μία παράδοση γεννήθηκε στην πόλη Γέλα της Σικελίας. Αραβικές πηγές, όμως, τον φέρουν να γεννήθηκε στη Συρία, ίσως και στην Τύρο της Φοινίκης. Κατά πάσα πιθανότητα ο Ευκλείδης έζησε περί το 330 με 270 π.Χ. Κατά πληροφορίες του Πάππου του Αλεξανδρέως (3^{ος} αι. μ.Χ.) ο Ευκλείδης ευχαρίστως edίδασκε τη Γεωμετρία σε όλους όσους επιθυμούσαν να τη διδαχθούν. Ο Στοβαίος μας διασώζει το εξής επεισόδιο ανάμεσα στον Ευκλείδη και σε ένα νεοφώτιστο μαθητή του: Παρ' Εὐκλείδην τις ἀρξάμενος γεωμετρεῖν, ὥς τὸ πρῶτον θεώρημα ἔμαθεν, ἤρετο τὸν Εὐκλείδην· τί δέ μοι πλέον ἔσται ταῦτα μαθόντι; καὶ ὁ Εὐκλείδης τὸν παῖδα καλέσας δὸς, ἔφη, αὐτῷ τριῶβλον, ἐπειδὴ δεῖ αὐτῷ ἐξ ὧν μανθάνει κερδαίνειν.

Ο Πρόκλος διηγείται για τον Ευκλείδη ότι έδωσε στον Πτολεμαίο Α' που τον ερώτησε, εάν υπήρχε ευκολότερος δρόμος στοιχειώσεως της Γεωμετρίας, παρόμοια απάντηση με εκείνη, που έδωσε στον Μέγα Αλέξανδρο ο περίφημος μαθηματικός Μέναιχμος, μαθητής του Πλάτωνος:

**μὴ εἶναι βασιλικὴν ἄτραπον ἐπὶ Γεωμετρίας
(δεν υπάρχει βασιλική οδός προς τη Γεωμετρία).**

Η δομή της *Κατατομής κανόνος* είναι απλή. Την πραγματεία απαρτίζουν, όπως ήδη έχει λεχθεί, τέσσερα μεγάλα μέρη.

Το πρώτο μεγάλο μέρος της πραγματείας αντιμετωπίζεται ως μια ενιαία ολότητα, ως εισαγωγή. Στην εισαγωγή διατυπώνεται μια θεωρία για τη φυσική αιτία των ήχων και των μουσικών τους υψών, έτσι σχεδιασμένη,

ώστε να αιτιολογεί τη χρήση των μουσικών υψών ως σχετικών ποσοτήτων και των μεταξύ τους διαστημάτων ως αριθμητικών λόγων.

Οι συγγραφείς του 4ου π.Χ. αιώνας, όπως π.χ. ο Αριστοτέλης και ο Αριστόξενος, συσχέτισαν την κίνηση με το ύψος (pitch) του μουσικού ήχου. Διάφορες άλλες πηγές εστιάζουν το ενδιαφέρον τους στο γεγονός ότι προφανώς συνεχείς ήχοι γεννώνται από αλληλουχίες διακριτών συγκρούσεων ενός σώματος με τον αέρα. Αλλά καμμία από αυτές τις πηγές δεν δηλώνει -ούτε υπονοεί- ότι η μεγαλύτερη συχνότητα των συγκρούσεων είναι αυτή που προκαλεί ή ορίζει το μεγαλύτερο μουσικό ύψος. Ο Αρχύτας και ο Πλάτων υποστηρίζουν ότι το μεγαλύτερο μουσικό ύψος έχει να κάνει με τη μεγαλύτερη ταχύτητα μεταδόσεως. Ο Ευκλείδης είναι αυτός που διατυπώνει την άποψη ότι η «συχνότητα» αυτών των κρούσεων είναι στην πραγματικότητα υπεύθυνη για το μουσικό ύψος του φθόγγου, που γίνεται αντιληπτό. Οι πολυαριθμότερες και «πυκνές» κινήσεις προκαλούν τους υψηλότερους ήχους, ενώ οι ολιγαριθμότερες και «αραιές» κινήσεις προκαλούν τους χαμηλότερους ήχους.

Ο συγγραφέας συμπεραίνει ότι οι ήχοι συνίστανται από «μόρια (=υποπολλαπλάσια τμήματα)», «αφού αυτοί επιτυγχάνουν το απαιτούμενο μουσικό ύψος με πρόσθεση και αφαίρεση». Ήχοι διαφορετικού μουσικού ύψους πρέπει τότε να είναι ικανοί να αλληλοσυσχετισθούν με αριθμητικούς λόγους, όπως ακριβώς συμβαίνει σε όλα τα πράγματα που συνίστανται από τμήματα.

Ο συγγραφέας συνεχίζει δίνοντας μια τριπλή κατάταξη των λόγων. Συγκεκριμένα οι λόγοι είτε είναι πολλαπλάσιοι $\left(\frac{n}{1}, n \in N\right)^4$,

είτε είναι επιμόριοι $\left(\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}, n \in N\right)$,

είτε είναι επιμερείς $\left(\frac{n+m}{n} = 1 + \frac{m}{n}, m, n \in N, m > 1\right)$.

Αμέσως μετά ο συγγραφέας εισέρχεται στο θέμα των ευφώνων και των διαφώνων φθόγγων⁵. Λέει ότι εύφωνα είναι οι φθόγγοι τα στοιχεία των

⁴ N είναι το σύνολον των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, ...

⁵ Με τον όρο φθόγγος στην κατατομή κανόνος δυνατόν να υπονοείται:
η νότα,
το τάστο (=δεσμός, μπερντές, fret),
το μη ηχούν τμήμα της χορδής,

οποίων σχηματίζουν έναν ομοιογενή σύνθετο ήχο, κάτι που δεν συμβαίνει με τους διαφώνους φθόγγους. Με ένα σ υ γ κ ε χ υ μ έ ν ο επιχείρημα ο συγγραφέας εντάσσει τα εύφωνα διαστήματα στις δύο πρώτες κλάσεις λόγων, διότι έχουν μεταξύ τους κάτι το κοινό, που δεν το μοιράζονται με την τρίτη. Είναι η ασάφεια, η λακωνικότητα και η αδύναμη αποδεικτικότητα αυτής της παραγράφου που δημιουργεί υποψίες ότι αυτή η παράγραφος δεν στέκει σαν καρπός σκέψεως του λεπτολόγου συγγραφέως των Στοιχείων. Παρόλα αυτά η παράγραφος περιέχει το κυρίαρχο στοιχείο, την ουσία στην ανάλυση που ακολουθεί. Ρητώς λαμβάνεται ως πρόταση συλλογισμού Λογικής σε κάποιες Προτάσεις. Επί πλέον η απουσία της θα συνεπάγετο την κατάρρευση του μεθοδολογικού πλαισίου ολοκλήρου της πραγματείας.

Τα υπόλοιπα τρία μεγάλα μέρη, όμως, υποδιαιρούνται σε μικρότερες ενότητες.

Το δεύτερο μεγάλο μέρος τόσο στον Βοήθιο, όσο και στην ελληνική εκδοχή με το μεγάλο μήκος, υποδιαιρείται σε εννέα μαθηματικές προτάσεις (1-9 ή α-θ), εννέα καθαρά μαθηματικά θεωρήματα, που αποδεικνύουν διάφορες προτάσεις για αυτές καθαυτές τις αναλογίες και τα «διαστήματα» -με την ευρεία έννοια του όρου και όχι απαραίτητα με τη μουσική- ανάμεσα στους όρους τέτοιων αναλογιών.

Ο συγγραφέας της μετά χειρας διατριβής ενδιαφέρεται κυρίως να αποδείξει συστηματικά και τυπικά τις προτάσεις, οι οποίες αποτελούν τη βάση της Πυθαγορείου και της Πλατωνικής παραδόσεως. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης στα Στοιχεία είναι οι εξής τέσσερις:

η συνθετική,
η αναλυτική,
η της εις άτοπον (ή αδύνατον) απαγωγής και
η μέθοδος της τελείας επαγωγής.

Στο εν λόγω δεύτερο μέρος η πρόταση γ' είναι μια εκδοχή ενός σημαντικού θεωρήματος, το οποίον ο Αρχύτας είχε αποδείξει. Αξίζει να εμμείνουμε στην πρόταση αυτή, διότι πλήττει καίρια τη μεγαλόπνοη πυθαγόρειο θεωρία περί μουσικής και μαθηματικής αναλογίας των συμμετρωρητών αριθμών. Εξ άλλου η εν λόγω πρόταση θέτει θέμα αμφισβήτησεως της πυθαγορείου θεωρίας και δεν θα έπρεπε να διαιωνίζεται αναπάντητο·

το δονούμενο τμήμα της χορδής.

διότι θα ισοδυναμούσε με μια έμμεση αναγνώριση της ελαττωματικότητας των θεμελιωδών αρχών, επί των οποίων οι πυθαγόρειοι εβάσισαν και ανέπτυξαν ολόκληρο το φιλοσοφικό τους οικοδόμημα. Λύση στο πρόβλημα δόθηκε με την εισαγωγή των ασυμμέτρων αριθμών⁶.

Παρόλα ταύτα εσκεμμένα έπαψαν ν' ασχολούνται με τους ασύμμετρους αριθμούς, διότι στην ψυχή τους ήταν βαθειά ριζωμένη η πίστη ότι η φύση του κόσμου δομείται κατά τρόπο ρητό και ότι οι δομικές σχέσεις του σύμπαντος κόσμου δεν μπορεί παρά να εκφράζονται με λόγους ακριβών αριθμών.

Οι ακουστικές προτάσεις είναι επτά τον αριθμό, εκ των οποίων οι δύο πρώτες υπάρχουν στο τρίτο μεγάλο μέρος και οι υπόλοιπες πέντε ανήκουν στο τέταρτο μεγάλο μέρος της πραγματείας (10-16 ή ι-ις). Στην πρόταση 10 αρχίζουν να εισάγονται μουσικές έννοιες. Με βάση τα μαθηματικά των πρώτων εννέα προτάσεων, τα επιχειρήματα της εισαγωγής και ένα πλήθος γεγονότων από τη μουσική εμπειρία, οι προτάσεις 10-13 παρουσιάζουν τους αριθμητικούς λόγους των βασικών μουσικών συμφωνιών και του τόνου. Οι προτάσεις 14-16 είναι αποδείξεις δευτερευουσών θέσεων, που προκύπτουν από μια «Πυθαγόρειο» πραγματεία περί μουσικών διαστημάτων ως λόγων, αλλά οι οποίες είναι εντελώς ενάντιες προς τις «Αριστοξένειες» μεθόδους αναλύσεως.

Πρέπει να εστιάσουμε την προσοχή μας κυρίως σε μία αδυναμία αυτής της πραγματείας, η οποία αφορά στη μη ικανοποιητική φύση των απόψεων του συγγραφέως, που συνδέουν τις συμφωνίες με τους πολλαπλάσιους και τους επιμορίους λόγους στο τέλος της εισαγωγής. Η εν λόγω αδυναμία ωδήγησε σε ένα σοβαρό πρόβλημα σχετικά με το εάν είναι ή δεν είναι εύφωνο διάστημα το διάστημα της διαπασών + δια τεσσάρων (=οικτάβας + τετάρτη) (πολλαπλασιεπιμερής σχέση 8:3). Το συγκεκριμένο διάστημα αποτελεί την «αχίλλειο πέτρα» της πραγματείας και ο συγγραφέας της αποφεύγει εντελώς να το μνημονεύσει (πρόταση 12).

⁶ Πρέπει να τονισθεί με έμφαση ότι οι ασύμμετροι αριθμοί είχαν απασχολήσει τους φιλοσόφους και διανοητές της αρχαιότητας, όπως π.χ. τον Πυθαγόρα και τον επιφανή πυθαγόρειο μαθηματικό τον Αρχύτα, διότι τους είχε προβληματίσει το μήκος της υποτεινουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου πλευράς ίσης προς τη μονάδα ($x^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$).

Στη συνέχεια του τετάρτου μεγάλου μέρους υπάρχουν δύο προτάσεις σχετικές με το εναρμόνιο γένος (17-18 ή ιζ-ιη). Η πρόταση 17 δείχνει πώς να τοποθετηθούν κάποιες νότες στο εναρμόνιο γένος με τη βοήθεια των συμφωνιών και η πρόταση 18, που αφορά στο σχηματισμό ανίσων διαστημάτων, αποτελεί ένα επί πλέον αντιαριστοζένειο εγχείρημα.

Τέλος, ακολουθούν άλλες δύο προτάσεις, που αφορούν στην *κατατομή του κανόνας* (19-20 ή ιθ-κ). Οι προτάσεις 19-20 δείχνουν πώς να υποδιαριθμωθεί, με τη βοήθεια αναλογιών, η χορδή του μονοχόρδου, ώστε να προκύψει ένα σύστημα του διατονικού γένους το επονομαζόμενο τέλειον αμετάβολον σύστημα της μουσικής θεωρίας των αρχαίων Ελλήνων, το οποίο επί μακρόν ήλκυσε την προσοχή των αρχαίων σχολιαστών, στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν τη μυστηριώδη και δυσνόητη θεωρητική βάση της αρχαίας ελληνικής μουσικής. Αυτό, άλλωστε, αποτελεί την «*Κατατομή του κανόνας*», από την οποία η πραγματεία φέρει το όνομά της.

Πράγματι, ακόμα και τα πλέον σύγχρονα ανεγνωρισμένα μουσικά εγχειρίδια και οι γενικές ιστορίες μουσικής συχνά περιλαμβάνουν ως θέμα σειράς μαθημάτων μια εξήγηση του μείζονος τελείου συστήματος, ως μια επίδειξη της σχέσεως μεταξύ ποικίλων τετραχόρδων και φθόγγων των κλιμάκων των αρχαιοελληνικών συστημάτων. Χαρακτηριστικώς λέγει ο νεοπλατωνικός φιλόσοφος Πορφύριος εις το Υπόμνημα εις τα Αρμονικά του Πτολεμαίου (2, δ')

τὸ τέλειον σύστημα ὀρίζεται τὸ λείπον ἐν μηδενί, ἐπεὶ καὶ πανταχοῦ τοιοῦτον τὸ τέλειον. καὶ ἔστιν ὥς φησι τὸ δις διὰ πασῶν. τοῦτο γὰρ περιέχει μὴ μόνον τὰ στοιχειωδέστερα σύμφωνα, τὸ διὰ τεσσάρων καὶ διὰ πέντε καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν διὰ πασῶν, ἀλλὰ καὶ τὰ τούτων ἅπαντα εἶδη καὶ τὰ ἐξ αὐτῶν συγκείμενα ... διὸ καὶ τέλειον τὸ τοιοῦτο σύστημα, ὃ ὀριζόμενος λέγει τὸ περιέχον πάσας τὰς συμφωνίας μετὰ τῶν καθ' ἕκαστον εἰδῶν.

Στο Τέλειον Μείζον Σύστημα η αλληλουχία των δεκαπέντε φθόγγων από τον χαμηλότερο προς τον υψηλότερο είναι η ακόλουθος: προσλαμβανόμενος, υπάτη υπατών, παρυπάτη υπατών, λιχανός υπατών, υπάτη μέσων, παρυπάτη μέσων, λιχανός μέσων, μέση, παραμέση, τρίτη διεζευγμένων, παρανήτη διεζευγμένων, νήτη διεζευγμένων, τρίτη υπερβολαίων, παρανήτη υπερβολαίων, νήτη υπερβολαίων. Η αλληλουχία των διαστημάτων μεταξύ των προαναφερθέντων φθόγγων είναι η ακόλουθος: τόνος -λείμμα, τόνος, τόνος - λείμμα, τόνος, τόνος – τόνος - λείμμα, τόνος, τόνος - λείμμα, τόνος, τόνος. Τα τρία διαστήματα ανάμεσα στις παύλες αποτελούν τετράχορδα του δωρίου διατονικού γένους.

Ο Ευκλείδης παρεκκλίνει από τον Αρχύτα στην ανάλυσή που κάμνει για το εναρμόνιο και το διατονικό γένος (πρόταση 17, πρόταση 20). Οι διαιρέσεις του αντιστοιχούν σε αυτές του Φιλόλαου (1.12 απόσπ. 6) και του Πλάτωνος (2.3 Τίμ. 35b-36b) και των μεταγενεστέρων πλατωνικών πυθαγορείων, όπως σχολιάζει ο Θέων ο Σμυρναίος (Αδραστός 9.2-9.3, Θράσυλλος 9.4-9.5) και ο Νικόμαχος στο Εγχειρίδιό του.

Υποτονικά υποστηρίζεται ότι ή οι προτάσεις 17-18 ή οι προτάσεις 19-20 προέρχονται από άλλη πέννα (=πετερόν) και τούτο, διότι αυτές προϋποθέτουν μια μορφή κλίμακος διαφορετική από αυτήν που αξιώνουν οι Προτάσεις 17 και 18.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην Πρόταση ιθ ο Ευκλείδης εκθέτει αναλυτικώς έναν αλγόριθμο για την τοποθέτηση των δεσμών (=τάστων) επί του κανόνος, προκειμένου να ληφθούν οι εστώτες (ακλινείς) φθόγγοι (Βακχείος, Αριστείδης Κοϊντιλιανός) του τελείου αμεταβόλου συστήματος. Εξάιρεση αποτελεί ο δεύτερος φθόγγος, που τοποθετεί, διότι είναι ο «υπάτων διάτονος», δηλαδή ο λιχανός του διατονικού τετραχόρδου υπατών, ο οποίος δεν είναι εστώς, αλλά φερόμενος φθόγγος.

Στην Πρόταση κ ο Ευκλείδης εκθέτει αναλυτικώς έναν αλγόριθμο για την τοποθέτηση των δεσμών (=τάστων) επί του κανόνος, προκειμένου να ληφθούν οι κινούμενοι (φερόμενοι) φθόγγοι του τελείου αμεταβόλου συστήματος.

Θα πρέπει να υπογραμμίσουμε επίσης ότι ο Ευκλείδης με τις Προτάσεις ιθ και κ ή περιγράφει το τέλειον αμετάβολο σύστημα με μία ουσιαστικά παράλειψη, αυτήν που αφορά στην τοποθέτηση της τρίτης συνημμένων, ή περιγράφει το μείζον τέλειον σύστημα με έναν πλεονασμό, αυτόν που αφορά στην τοποθέτηση της νήτης συνημμένων.

Με αφορμή τις μαθηματικές θεωρίες του Ευκλείδου περί του τρόπου παραγωγής του ήχου, παραθέτω αναλυτικώς ολόκληρη τη σύγχρονη γνώση από τον χώρο της Φυσικής Ακουστικής, της Μουσικής Ακουστικής, μάλιστα δε και της Ακουσολογίας, σχετικά με την ανατομία και τη φυσιολογία του αισθητηρίου της ακοής (του αυτιού) και την ακοή, τις διάφορες θεωρίες περί της αισθήσεως των ήχων, του τί είναι ήχος και με ποιά εξίσωση περιγράφεται. Επίσης, τα είδη των ήχων, το μουσικό ύψος των ήχων, την ανάλυση των ήχων κατά Fourier, το φάσμα και τη χροιά, ήτοι το ιδιαίτερο «χρώμα» των ήχων.

Προκειμένου να διευκρινισθούν οι έννοιες *σύμφωνοι* και *διάφωνοι* φθόγγοι, για τους οποίους όχι μόνον ο Ευκλείδης στην *Κατατομή Κανόνος*, αλλά και οι Αριστοτέλης, Θεόφραστος, Γαυδέντιος κ.ά. ομιλούν, παραθέτω και τη θεωρία διαμορφώσεως των κυμάτων και των διακροτημάτων (του Hermann von Helmholtz) καθώς επίσης και τη θεωρία της κρισίμου ζώνης του Plomp, προκειμένου να εξηγήσω το εύφωνον των μουσικών διαστημάτων της ταυτοφωνίας, της οκτάβας (δια πασών), της πέμπτης (δια πέντε) και της τετάρτης (δια τεσσάρων), ως και το διάφωνον του τόνου.

Ενσύμπτοντας στη διακρίβωση των αριθμητικών αναλογιών των φθόγγων της μουσικής κλίμακος, θεώρησα αναγκαίον να γνωρίσω στους φοιτητές μου το αριθμητικό σύστημα των Ελλήνων της εποχής του Ευκλείδου, προς αρίθμηση και καταγραφή των αριθμών. Συγχρόνως τον χαρακτήρα του ήθους της μουσικής. Λέγοντες δε ήθος στην αρχαία ελληνική μουσική, όπως και τη βυζαντινή και την ευρωπαϊκή, εννοούμε το συναισθήμα που γεννάται στην ψυχή από το ύψος του μουσικού ακούσματος, της μελωδίας. Βεβαίως, εν σχέσει με την ελληνική μουσική, αρχαία και βυζαντινή, είναι διακριβωμένο και το ήθος του ρυθμού, για το οποίο πραγματεύεται εκτενώς ο Αριστείδης Κοϊντιλιανός, έχει δε γράψει σχετικώς ο Διονύσιος Αλικαρνασσεύς κ.α. Εννοείται δε με το ήθος του ρυθμού η συμφωνία κάθε είδους ρυθμού με έναν ιδιαίτερο χαρακτήρα ψυχικών συναισθημάτων. Απλούστερα, αναλόγως του σχήματος κάθε ρυθμού, παράγεται ιδιον ύψος και ήθος ρυθμικών, εκφραζόμενο πληρέστερα με τη μελωδία. Κατ' αυτόν τον τρόπο διαφωτίζεται επαρκώς το φοιτητικό και ευρύτερο μουσικό κοινό, όσον αφορά και στον χαρακτήρα του ήθους όχι μόνον στην αρχαία ελληνική και τη βυζαντινή μουσική, ή τους τρόπους (ήχους) της μουσικής, αλλά εναμίλλως την Ανατολική εν γένει και τη Δυτική μουσική (περί ήθους στη μουσική έγραψαν και οι D. B. Monro, H. Abert, Fr. Aur. Gevaert, E. Wellesz, E. M. Hornbostel, Ev. A. Moutsopoulos, κ.α.).

Δεδομένου δε ότι στη μετά χείρας πραγματεία γίνεται συχνή αναφορά στις χορδές, εκρίθη εντελώς απαραίτητο και σκόπιμο συγχρόνως, να αναλύσω εξ ολοκλήρου και στις λεπτομέρειές της τη θεωρία των χορδών από της σκοπιάς της Φυσικής Ακουστικής και της μουσικής πρακτικής. Έτσι, γίνεται λόγος για τη σχέση των κατασκευαστικών παραμέτρων και του ύψους του παραγομένου ήχου, για τη σχέση του μήκους της χορδής και του ύψους του παραγομένου ήχου, για τη σχέση του τρόπου διεγέρσεως της χορδής (με δοξάρι, έλξη, κρούση) και της εντάσεως του παραγομένου ήχου, για τη σχέση της θέσεως των δεσμών (=τάστων) στο μάνικο του εγχόρδου οργάνου και των «υλοποιουμένων» μουσικών δια-

στημάτων, για την επίδραση της ακαμψίας της χορδής στους παραγομένους υπ' αυτής ήχους, για την επίδραση του σημείου έλξεως της χορδής στην ποιότητα του παραγομένου ήχου.

Χάριν των φοιτητών της μουσικής εις τους οποίους περισσοτέρως χαρίζεται το σύγγραμμα αυτό, εξηγώ δύο συγκεχυμένες μουσικές κινήσεις, οι οποίες αφορούν στη μουσική πρακτική.

Γνωρίζουμε από τη θεωρία των χορδών ότι μεγάλο μήκος παλλομένου τμήματος οριζοντίου χορδής παράγει χαμηλή συχνότητα και σημαίνει θέση χορδής προς την *υπάτη*, δηλαδή ψηλά στο μάνικο, ή θέση υπαγωγής προς μεγάλες υποδιαίρεσεις του αριθμημένου κανόνος. Αντίθετα, μικρό μήκος παλλομένου τμήματος χορδής παράγει υψηλή συχνότητα και σημαίνει θέση χορδής προς τη *νήτη*, δηλαδή χαμηλά στο μάνικο, ή θέση υπαγωγής προς μικρές υποδιαίρεσεις του αριθμημένου κανόνος.

Επειδή πολλού λόγου αξία είναι η μουσική πραγματεία του Ευκλείδου, θεωρουμένη μάλιστα στην πράξη με τον κανόνα και τον διαβήτη, προς ευκολία των φοιτητών της μουσικής κυρίως, έκρινα σκόπιμο να παραθέσω και το θεώρημα του φιλοσόφου Θαλού, ώστε να καταστεί σαφής ο τρόπος διαιρέσεως ενός ευθυγράμμου τμήματος σε οιοδήποτε πλήθος ίσα τμήματα. Με τον κανόνα και τον διαβήτη και με τη δέουσα μαθηματική στήριξη και απόδειξη πραγματοποιώ την τρίτη έκδοση του *κανόνος κατατομή*.

Ασφαλώς δε από τους αρχαίους και άλλοι, όπως ο Θέων ο Σμυρναίος ο οποίος έζησε το α' ήμισυ του 2^{ου} αι. μ.Χ. και έγραψε *Περί των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν*, ακόμη δε ο Θρασύλλος, περίφημος και αυτός μαθηματικός, αστρολόγος και πλατωνικός φιλόσοφος των χρόνων του αυτοκράτορος Τιβερίου, πραγματεύονται περί την κατατομήν του κανόνος. Του Θρασύλλου κανένα σύγγραμμα δεν διεσώθη μέχρι των ημερών μας. Ο Θέων εξ άλλου αποδεικνύει πώς η *του κανόνος κατατομή* γίνεται

ή δὲ τοῦ κανόνος κατατομή γίνεται διὰ τῆς ἐν τῇ δεκάδι τετρακτύος, ἢ σύγκειται ἐκ μονάδος δυάδος τριάδος τετράδος, α β γ δ' ἔχει γὰρ ἐπίτριτον, ἡμιόλιον, διπλάσιον, τριπλάσιον, τετραπλάσιον λόγον.

επικάθηται δε αυτός στη διαίρεση του Θρασύλλου, δίχα, τρίχα και τετραχῆ, πλην όμως με τη διεύρυνση των αποδείξεων τούτων τιθέμεθα εκτός θέματος.

Από τους νεωτέρους οι M. Meibomius, Ch. Em. Ruelle και C. Janus κυρίως ασχολήθηκαν επισταμένως με την Ευκλείδειο *κατατομή του κανόνος* και εξέδωσαν τύποις το έργο αυτό.

Το αρχαίο κείμενο της Ευκλείδειου πραγματείας *Κανόνος Κατατομή* του μετά χειράς βιβλίου έχει ληφθεί από το CD-ROM του MUSAIOS, εκδόσεως 1.0d-32 (1992-95) των Darl J. Dumont και Randall M. Smith. Προκειμένου το κείμενο να διαθέτει τον παιδαγωγικό χαρακτήρα, ο οποίος επηγάξει από τα διαγράμματα των Προτάσεων της πραγματείας της εκδόσεως του C. Janus (*Musici Scriptores Graeci*, Leipzig 1895), προσετέθησαν τα αντίστοιχα γραφικά υπό την πρέπουσα κλίμακα καθώς και πληθώρα άλλων επιβοηθητικών γραφημάτων διαγραμμάτων ή εικόνων στα σχόλια, φιλοτεχνημένα όλα από την θυγατέρα μου Ελένη Χ. Σπυρίδου PhD, BSc (Hons).

Παραδίδοντας στους φοιτητές μου το μετά χειράς βιβλίο προσδοκώ από αυτούς –έχοντας πάντοτε κατά νουν τα όσα έχουν διδαχθεί στο Τμήμα Μουσικών Σπουδών του Πανεπιστημίου Αθηνών- να συμπεριλάβουν τα παραδιδόμενα «παλαιά» μουσικά στοιχεία στις νέες καλλιτεχνικές τους δημιουργίες, μη λησμονούντες ότι η δομή (Πυθαγόρειο στοιχείο) και η ελευθερία (Αριστοξένειο στοιχείο), όπως το ηχούν και το μη ηχούν τμήμα μιας χορδής δεν είναι αντιμαχόμενες μουσικές έννοιες, αλλά συμπληρωματικές.

Ο συγγραφέας
Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης
Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής