

ἁρμονίας δὲ μέγεθος συλλαβὰ καὶ δι' ὄξειᾶν

Φιλολάος¹

$$(1,1) = (1,0) + (0,1)$$

Χ. Χ. Σπυρίδης

¹ ἢ τοῦ Φιλολάου λέξις. ἁρμονίας δὲ μέγεθος
συλλαβὰ καὶ δι' ὄξειᾶν.

Νικόμαχος, *Ἐγχειρίδιον Ἀρμονικῆς*, 9.1.14-15.

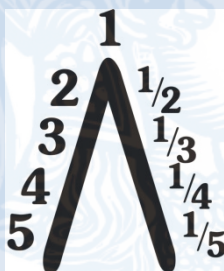


Τῆ μουσικῇ,
ὡς τρίτη τῶν ἀδελφῶν μαθηματικῶν ἐπιστημῶν,
κατὰ τοὺς Πυθαγορείους.

ΠΡΟΛΕΓΟΜΕΝΑ

Στο μετά χείρας βιβλίο εκτίθεται η εντελώς πρωτότυπη θεωρία μου περί των «δικτυωτών» -ευθέων ή αντιστρόφων- στο χώρο της μουσικής. Με την εν λόγω θεωρία παρέχεται με ασφάλεια μια αυστηρώς μαθηματική θέαση της Πυθαγορείου -και όχι μόνο- μουσικής δια της οποίας επιτυγχάνεται η λύση του οποιουδήποτε θεωρητικού μουσικού προβλήματος -και οποιουδήποτε άλλου μουσικού πολιτισμού- με την πλέον λεπτή μέθοδο, με τη συντομότερη ανάλυση, με τη μεγαλύτερη δυνατή σαφήνεια και καλαισθησία και, τέλος, τον μικρότερο πνευματικό κόπο.

Οι Πυθαγόρειοι κατά τον Μαθηματικό τον Νικόμαχο τον Γερασινό (Γέρασα – Αραβία Πετραία, η σημερινή Ιορδανία 50-120 μ.Χ.) διεχώριζαν τη Μαθηματική² επιστήμη σε τέσσερα³ μέρη, σε τέσσερις αδελφές επιστήμες: την Αριθμητική, τη Γεωμετρία, την Αρμονική (=Μουσική) και τη Σφαιρική (Αστρονομία). Το ένα ήμισυ της Μαθηματικής επιστήμης το απέδιδαν στο πόσα πολλά και το άλλο ήμισυ στο πόσο πολύ. Διεχώριζαν πάλι το κάθε ήμισυ στα δύο, διότι έλεγαν ότι το πόσα πολλά, δηλαδή μια ποσότητα, είτε υφίσταται αυτή καθαυτή -εκφράζεται με απολύτους αριθμούς-, είτε μελετάται σε σχέση με κάτι άλλο -εκφράζεται με μία σχέση- (Σχήμα α) και ότι το πόσο πολύ είτε είναι σταθερό, είτε είναι σε κίνηση.



Σχήμα α: Λαβδοειδές διάγραμμα για την ποσότητα και την πηλικότητα. Συμβολίζει ότι μια ποσότητα, είτε υφίσταται αυτή καθαυτή -εκφράζεται με απολύτους αριθμούς-, είτε μελετάται σε σχέση με κάτι άλλο -εκφράζεται με μια σχέση.

² Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν αναγκαίο το να πλάθουν λέξεις εσωτερικής σημασίας, όπως λ.χ. φιλοσοφία, κόσμος, τετρακτύς, κάθαρσις, εχεμύθεια, κατάρτυσις, μαθηματικά κ.α., στις οποίες απέδιδαν ιδιαίτερη σημασία. Σχετικά με τη λέξη Μαθηματικά ο Πρόκλος υποστηρίζει ότι μια τέτοια ονομασία της επιστήμης που γνωρίζει τα αντικείμενα της ελλόγου δυνάμεως, δεν επινοήθηκε από τυχαία πρόσωπα, αλλά από τους Πυθαγορείους.

³ Ο Πλάτων αναφέρει ότι ο εξαγνισμός πρέπει να απορρέει από πέντε κανόνες, που είναι η αριθμητική, η γεωμετρία, η στερεομετρία, η μουσική και η αστρονομία.

Επίσης έλεγαν ότι η Αριθμητική ερευνά το πόσα πολλά, που υφίστανται καθεαυτά, ενώ η Μουσική ερευνά το πόσα πολλά, που υφίστανται αναφορικά προς κάτι άλλο. Η Γεωμετρία μελετά το πόσο πολύ, που είναι ακίνητο, αλλά η Αστρονομία μελετά το πόσο πολύ, που είναι από μόνο του ή κατ' ουσίαν κινητό⁴.

Ο Thomas Taylor⁵ αναφέρεται στην ιεράρχηση των τεσσάρων αυτών Μαθηματικών επιστημονικών τομέων λέγοντας: «Η Αριθμητική⁶ πρέπει να διδάσκεται πρώτη από τις μαθηματικές επιστήμες, διότι έχει τη σχέση της πρώτης αιτίας και μητέρας προς τις άλλες. Προηγείται όλων των άλλων, όχι μόνο επειδή ο δημιουργός του σύμπαντος τη χρησιμοποίησε ως το πρώτο υπόδειγμα της κατανεμημένης νόησής του και συγκρότησε όλα τα πράγματα σύμφωνα με τον αριθμό, αλλά και για έναν άλλο λόγο. Όποτε εκείνο που είναι φύσει προηγούμενο ανατρέπεται, αυτό που είναι μεταγενέστερο ανατρέπεται την ίδια ώρα, αλλά όταν εξαφανίζεται το μεταγενέστερο, το προηγούμενο δεν υφίσταται καμία ουσιαστική αλλαγή της προγενέστερης κατάστασής του...

⁴ ἀριθ-

μητική μὲν τὸ περὶ τοῦ καθ' ἑαυτό, μουσική δὲ τὸ περὶ τοῦ πρὸς ἄλλο. πάλιν δὲ ἐπεὶ τοῦ πηλίκου τὸ μὲν ἔστιν ἐν μονῇ καὶ στάσει, τὸ δὲ ἐν κινήσει καὶ περιφορᾷ, δύο ἕτεροι κατὰ τὰ αὐτὰ ἐπιστήμαι ἀκριβώσουσι τὸ πηλίκον, τὸ μὲν μένον καὶ ἡρεμοῦν γεωμετρία, τὸ δὲ φερόμενον καὶ περιπολοῦν σφαιρική. Νικόμαχος Γερασινός, *Αριθμητικὴ Εἰσαγωγή*, 1,3,1,8-1,3,2,5

⁵ Thomas Taylor, (1995), *Θεωρητικὴ Αριθμητικὴ τῶν Πυθαγορείων*, Εκδόσεις I-AMBLIXOS, μτφρ. Μαρία Οικονομοπούλου, Αθήνα, Βιβλίο Ένα, Κεφάλαιο I, σσ. 65-67.

⁶ Τίνα οὖν ἀναγκαῖον πρωτίστην τῶν τεσσάρων τούτων μεθόδων ἐκμανθάνειν; ἢ δηλονότι τὴν φύσει πασῶν προυπάρχουσαν καὶ κυριωτέραν ἀρχῆς τε καὶ ρίζης καὶ οἰονεὶ πρὸς τὰς ἄλλας μητρὸς λόγον ἐπέχουσιν. ἔστι δὲ αὕτη ἡ ἀριθμητικὴ οὐ μόνον, ὅτι ἔφαμεν αὐτὴν ἐν τῇ τοῦ τεχνίτου θεοῦ διανοίᾳ προυποστῆναι τῶν ἄλλων ὡσανεὶ λόγον τινὰ κοσμικὸν καὶ παραδειγματικόν, πρὸς ὃν ἀπερειδόμενος ὁ τῶν ὄλων δημιουργὸς ὡς πρὸς προκέντημά τι καὶ ἀρχέτυπον παράδειγμα τὰ ἐκ τῆς ὕλης ἀποτελέσματα κοσμεῖ καὶ τοῦ οἰκείου τέλους τυγχάνειν ποιεῖ, ἀλλὰ καὶ ὅτι φύσει προγενεστέρα ὑπάρχει, ὅσῳ συναναιρεῖ μὲν ἑαυτῇ τὰ λοιπὰ, οὐ συναναιρεῖται δὲ ἐκείνοις.

Νικόμαχος Γερασινός, *Αριθμητικὴ Εἰσαγωγή*, 1,4,1,1-1,4,2,1

Το ίδιο πράγμα φαίνεται να συμβαίνει με τη γεωμετρία⁷ και την αριθμητική. Αν δηλαδή αφαιρέσουμε τους αριθμούς, πώς υφίσταται το τρίγωνο ή το τετράγωνο ή ο,τιδήποτε άλλο είναι το υποκείμενο της γεωμετρίας; Όλα ορίζονται με αριθμούς. Ενώ, αν αφαιρέσεις το τρίγωνο και το τετράγωνο και ολόκληρη η γεωμετρία ανατραπεί, το τρία και το τέσσερα και οι επωνυμίες των άλλων αριθμών δεν θα πάψουν να υφίστανται...

Ομοίως η προτεραιότητα των αριθμών σε σχέση με τη μουσική⁸ καταδεικνύεται ιδιαίτερα, επειδή όχι μόνο τα ίδια τα πράγματα, που υφίστανται αφ'εαυτού τους, είναι εκ φύσεως προηγούμενα από εκείνα που αναφέρονται σε κάτι άλλο, αλλά η ίδια η μουσική μετατόνιση αποτυπώνεται με αριθμητικές επωνυμίες. Συμβαίνει δηλαδή το ίδιο πράγμα που έχει ήδη αναφερθεί για τη γεωμετρία. Γιατί οι συμφωνίες δια τεσσάρων, δια πέντε και δια πασών ονομάζονται με βάση τα προγενέστερα ονόματα των αριθμών. Ομοίως η αναλογία των ήχων μεταξύ τους ανακαλύπτεται μόνο με αριθμούς. Γιατί ο ήχος που υπάρχει στη δια πασών συμφωνία εκφράζεται με το λόγο 2:1. Η συμφωνία δια τεσσάρων περιέχει το λόγο 4:3. Και αυτό που αποκαλείται

⁷ ούσης μὲν γὰρ γεωμετρίας ἀνάγκη καὶ τὴν ἀριθμητικὴν συνεπιφέρεσθαι· ἅμα γὰρ ταύτη τρίγωνον ἢ τετράγωνον ἢ ὀκτάεδρον ἢ εἰκοσάεδρον ἢ διπλάσιον ἢ ὀκταπλάσιον ἢ ἡμιόλιον ἢ ἄλλο τι τοιοῦτον, ὃ γεωμετρία λέγει, καὶ οὐκ ἄνευ τῶν ἐκάστω συνεπιφερομένων ἀριθμῶν ἐπινοεῖσθαι τὰ τοιαῦτα δύναται· πῶς γὰρ οἷόν τε τριπλάσιόν τι εἶναι ἢ λέγεσθαι μὴ προυποκειμένου τοῦ γ ἀριθμοῦ ἢ ὀκταπλάσιον μὴ ὑποκειμένου τοῦ η; ἔμπαλιν δὲ εἴη ἂν τὰ γ καὶ τὰ δ καὶ τὰ ἐξῆς μὴ ὄντων τῶν παρωνύμων σχημάτων· συναναιρεῖ ἄρα ἡ ἀριθμητικὴ τὴν γεωμετρίαν, ἀλλ' οὐ συναναιρεῖται ὑπ' αὐτῆς, καὶ συνεπιφέρεται μὲν ἐκείνη, οὐ συνεπιφέρει δὲ αὐτήν.

Νικόμαχος Γερασινός, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 1,4,4,2-1,4,5,3

⁸ Πάλιν δὲ ἐπὶ τῆς μουσικῆς· οὐ γὰρ μόνον ὅτι προγενέστερον τὸ καθ' αὐτὸ τοῦ πρὸς ἄλλο, καθάπερ τὸ μέγα τοῦ μείζονος καὶ τὸ πλούσιον τοῦ πλουσιωτέρου καὶ ὁ ἄνθρωπος τοῦ πατρός, ἀλλ' ὅτι καὶ αἱ μουσικαὶ συμφωνίαι διὰ τεσσάρων, διὰ πέντε, διὰ πασῶν κατὰ ἀριθμὸν εἰσὶν ὀνομασμέναι· ὁμοίως καὶ τοὺς ἀρμονικοὺς λόγους ἀριθμητικοὺς πάντως ἔχουσιν, ἢ μὲν διὰ τεσσάρων ἐπίτριτος, ἢ δὲ διὰ πέντε ἡμιόλιος, ἢ δὲ διὰ πασῶν διπλάσιος, τριπλάσιος δὲ ἢ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ πέντε, τετραπλάσιος δὲ ἢ τελειοτάτη ἢ δις διὰ πασῶν.

Νικόμαχος Γερασινός, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 1,5,1,1-1,5,2,1

συμφωνία δια πέντε συνδέεται με το λόγο 3:2. Αυτό που με αριθμούς είναι επόγδοο είναι στη μουσική ένας τόνος...

Αλλά εφόσον η γεωμετρία και η μουσική είναι προηγούμενες της αστρονομίας, τότε συνάγεται ότι η αστρονομία⁹ είναι σε μεγαλύτερο βαθμό μεταγενέστερη της αριθμητικής. Διότι σε αυτή την επιστήμη ο κύκλος, η σφαίρα, το κέντρο, οι παράλληλοι κύκλοι και οι άξονες εξετάζονται όλα σε σχέση με τη γεωμετρία. Επίσης, η ανώτερη δύναμη της γεωμετρίας αποδεικνύεται από το ότι κάθε κίνηση έπεται της ακινησίας και κάθε σταθερότητα προηγείται πάντοτε εκ φύσεως της κινητικότητας. Αλλά η αστρονομία είναι η θεωρία των κινητών, ενώ η γεωμετρία των ακινήτων φύσεων. Ομοίως η κίνηση των άστρων υμνείται ως συνοδευομένη από αρμονικές μετατονίσεις. Από αυτό επίσης φαίνεται ότι η δύναμη της μουσικής προηγείται σε αρχαιότητα της πορείας των άστρων. Και δεν μπορεί να αμφισβητηθεί ότι η αριθμητική εκ φύσεως υπερέχει της αστρονομίας, εφόσον φαίνεται ότι είναι αρχαιότερη από τη γεωμετρία και τη μουσική, που προηγούνται της αστρονομίας».

Το κείμενο αυτό το παρέθεσα προκειμένου να επισημάνω ότι η Πυθαγόρειος μουσική είναι μία καθαρώς μαθηματική επιστήμη και όχι μια δραστηριότητα αποσκοπούσα στην τέρψη και τη διασκέδαση των ανθρώπων, που, δυστυχώς, έτσι και μόνον έτσι συνηθίσαμε να την αντιμετωπίζουμε ελλείψει της απαραίτητου ιστορικής γνώσεως.

Νομίζω ότι πρέπει να προβληματισθούμε από το γεγονός ότι ο Πλάτων τοποθετεί μετά τη Γεωμετρία και πριν από τη μουσική την Στερεομετρία δια της οποίας καθιστάμεθα γνώστες του τρισδιάστατου χώρου και των στερεών σωμάτων εντός του. Κατά τη θεωρία μου, τη θεωρία των δικτυωτών με δύο, τρεις, τέσσερις, πολλές διαστάσεις για την πλήρη μελέτη της μουσικής χρειάζεται η πλήρης γνώση του επιπέδου χώρου (Πυθαγόρεια και Σπυρίδεια δικτυωτά), του τριδιάστατου κ.λπ. του πολυδιάστατου χώρου. Μέσα σε αυτόν τον συμπαντικό χώρο οι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι μελετούν την κίνηση των πλανητών. Αλλά αυτός ο συμπαντικός χώρος δεν είναι συνεχής, αλλά κυψελωτός και το σπουδαιότερο δεν είναι Ευκλείδειος. Η λογαριθμική ως προς όλους τους άξονες απεικόνιση αυτού του χώρου δια

⁹ ἔκδηλότερόν γε

μὴν ἢ σφαιρικὴ δι' ἀριθμητικῆς τυγχάνει πάντων τῶν προσηκόντων αὐτῇ σκεμμάτων οὐ μόνον, ὅτι γεωμετρίας μεταγενεστέρα ἔστιν (ἢ γὰρ κινήσεις φύσει μετὰ τὴν μονήν), οὐδ' ὅτι ἀρμονίας ἐκ παντὸς ἔμμελοῦς τὰ τῶν ἀστέρων κινήματα τέτευχεν, ἀλλ' ὅτι καὶ ἀριθμῶν περιόδοις καὶ ποσότησιν ἀνατολαί τε καὶ δύσεις καὶ προποδισμοὶ καὶ ἀναποδισμοὶ καὶ ἐπιπροσθήσεις καὶ φάσεις παντοῖαι διαρθροῦνται.

Νικόμαχος Γερασινός, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 1,5,2,1-1,5,2,9

του ανθρωπίνου εγκεφάλου¹⁰ καθίσταται γραμμική δίνοντάς μας την εικόνα του χώρου, που αντιλαμβανόμεθα με τις αισθήσεις μας.

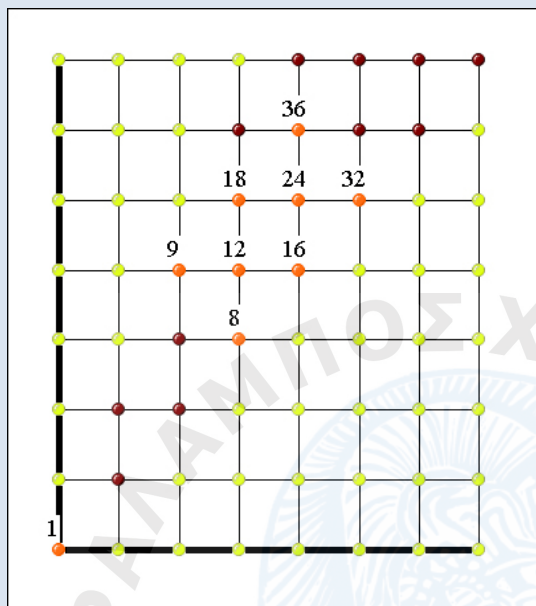
Να μη διαφεύγει της προσοχής μας το γεγονός ότι ωρισμένα Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα λ.χ. το λείμμα και η αποτομή διαφέρουν -κατά το μέγεθος- ελάχιστα μεταξύ τους, ώστε να είναι αδύνατη η διακριτή εκτέλεσή τους με μουσικό όργανο. Τούτο σημαίνει ότι οι υποθετικοί δεσμοί τους επί του μάνικου του μουσικού οργάνου, ως ευρισκόμενοι πολύ εγγύς ο ένας του άλλου, επικαλύπτονται από το δάκτυλο του μουσικού εκτελεστή. Κάποια άλλα μουσικά διαστήματα, όπως λ.χ. το Πυθαγόρειο κόμμα, λόγω του μεγέθους τους είναι ασύλληπτα από το ανθρώπινο αυτί¹¹. Τότε εγείρεται το ερώτημα «γιατί τα είχανε αυτά τα μουσικά διαστήματα, αφού δεν μπορούσαν ούτε να τα εκτελέσουν, ούτε να τα ακούσουν;»

Κατά τη θεωρία μου ολόκληρη η Πυθαγόρεια Μουσική αντιμετωπίζεται επί των ευθέων και των αντιστρόφων δικτυωτών με μια Επιπεδομετρία βρόχων και όχι συνεχούς επιπέδου, όπως είναι η Ευκλείδειος. Η μουσική των Φυσικών διαστημάτων, δηλαδή των διαστημάτων του Φυσικού δομικού μουσικού συστήματος, αντιμετωπίζεται με μια στερεομετρία κυψελών και όχι συνεχούς χώρου, όπως είναι η Ευκλείδειος. Η μουσική όλων των άλλων δομικών μουσικών συστημάτων αντιμετωπίζεται στα πλαίσια μη συνεχών υπερχώρων με περισσότερες των τριών διαστάσεις.

Το προηγούμενο κείμενο του Νικομάχου του Γερασηνού το παρέθεσα προκειμένου να επιστημάνω ότι επί ίδιας ή παρομοίου μαθηματικής θεωρήσεως της μουσικής θα ώφειλαν να στηριχθούν οι επιστήμονες της επομένης αδελφής επιστήμης, της Αστρονομίας, και να μελετήσουν τον ουρανό. Νομίζω ότι δεν λανθάνω, αφού ολόκληρη η Πυθαγόρεια θεωρία περί της Αρμονίας των Σφαιρών αντιμετωπίζεται με τα αντίστροφα δισδιάστατα δικτυωτά και συγκεκριμένα μέσα σε εκείνη την περιοχή τους, στην οποία αντιμετωπίζεται και η Πλατωνική Ψυχογονία. Θα πρέπει οι Πυθαγόρειοι καθ' όμοιον τρόπο να τοποθετούσαν τους πλανήτες και τη σφαίρα των απλανών, ώστε αφενός μεν να έχουν τις σχετικές μεταξύ τους θέσεις και αποστάσεις, αφετέρου δε τις ουράνιες κινήσεις τους ως προς τη Γη (Σχήμα β).

¹⁰ Κατά το νόμο των Weber-Fechner όταν το ερέθισμα αυξάνει κατά γεωμετρική πρόοδο, το αίσθημα αυξάνει κατά αριθμητική πρόοδο ή αλλιώς «το αίσθημα είναι ανάλογο του λογάριθμου του ερεθίσματος» $A = k \cdot \log_x(E)$. Ο συντελεστής k εξαρτάται από το αίσθημα (A) και τη βάση x του λογάριθμου του ερεθίσματος (E).

¹¹ Βλέπε: «Μόλις διακρισίμη διαφορά της συχνότητας των ήχων» στο Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδη, 2005, *Φυσική και Μουσική Ακουστική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη, σ. 618.



Σχήμα β: Το Αντίστροφο δισδιάστατο δικτυωτό με τις σχετικές αποστάσεις όλων των πλανητών και της σφαίρας των απλανών.

Συγκεκριμένα, κατά την Πυθαγόρειο θεωρία περί της Αρμονίας των σφαιρών οι πλανήτες¹², καθώς περιφέρονται στο σύμπαν, παράγουν διαφόρους «ήχους». Αυτοί οι ήχοι των θεϊκών σωμάτων δεν γίνονται ακουστοί από τα «γήινα αυτιά»¹³. Ο Πυθαγόρας, όμως, φαίνεται να είχε πει

ότι άκουε την Ουράνια αρμονία, επειδή είχε κατανοήσει τις αρμονικές αναλογίες στους αριθμούς των ουρανίων σωμάτων και το ηχηρικό αποτέλεσμα, που μπορεί να ακουσθεί από αυτές. Το σύνολο αυτών των «ήχων» συνέθετε κατά τους Πυθαγορείους την «αρμονία των σφαιρών».

Για τον Πυθαγόρα και τη Σχολή του η μουσική ήταν πάνω απ' όλα μια μαθηματική επιστήμη. Ουσία της ήταν ο αριθμός και ομορφιά της η έκφραση των αρμονικών σχέσεων των αριθμών. Η μουσική ήταν, επίσης, η εικόνα της ουρανίου αρμονίας. Οι αρμονικές σχέσεις των αριθμών μετεφέροντο στους πλανήτες. Ο Σιμπλικίος στα Σχολία του στο 2ο βιβλίο της πραγματείας του Αριστοτέλους *Περί Ουρανού* λέει: «Οι Πυθαγόρειοι έλεγαν ότι ένας αρμονικός ήχος παραγόταν από την κίνηση των ουρανίων σωμάτων. Επιστημονικά το στήριζαν από την αναλογία των διαστημάτων τους. Συγκεκριμένα ο λόγος 9:8 είναι επόγδοος και εκφράζει έναν μείζονα τόνο. Απεδίδετο στη Σελήνη (Σχήμα γ).

¹² Αί ζώναι τῶν ἐπτὰ πλανητῶν ἀστέρων.

Πρώτην ζώνην ἐπέχει Κρόνος. Δευτέραν ζώνην ἐπέχει Ζεὺς.

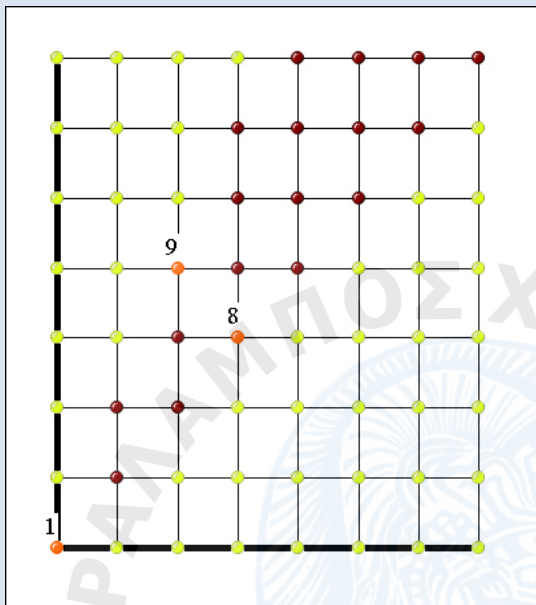
Τρίτην ζώνην ἐπέχει Ἄρης. Τετάρτην ζώνην ἐπέχει Ἥλιος.

Πέμπτην ζώνην ἐπέχει Ἀφροδίτη. Ἑκτην ζώνην ἐπέχει Ἑρμῆς.

Ἑβδόμην ζώνην ἐπέχει Σελήνη.

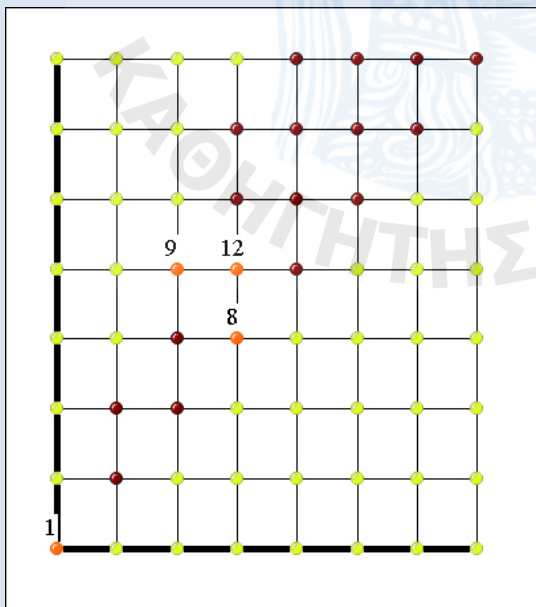
[2 Πυθαγόρας] 2, *Θραύσματα Αστρολογίας*, 11.2, 125, 14-17.

¹³ Στη Μουσική Ακουστική ήχος ονομάζεται το αίτιο που διεγείρει το ανθρώπινο αισθητήριο της ακοής, δηλαδή το αυτί μας. Τούτο σημαίνει ότι ήχος που δεν ακούγεται δεν είναι ήχος.



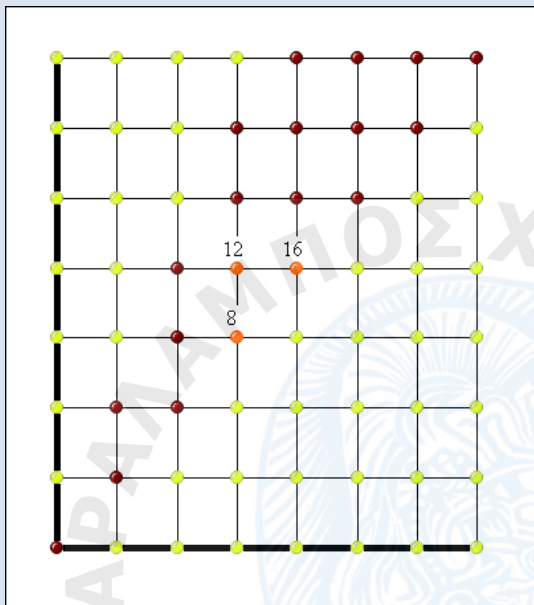
Σχήμα γ: Το Αντίστροφο δισδιάστατο δικτυωτό με τις σχετικές αποστάσεις της Σελήνης ως προς τη Γη.

Ο λόγος 12:9 είναι επίτритος και ο λόγος 12:8 είναι ημιόλιος. Οι λόγοι αυτοί αποδίδονται στον πλανήτη Ερμή (Σχήμα δ).



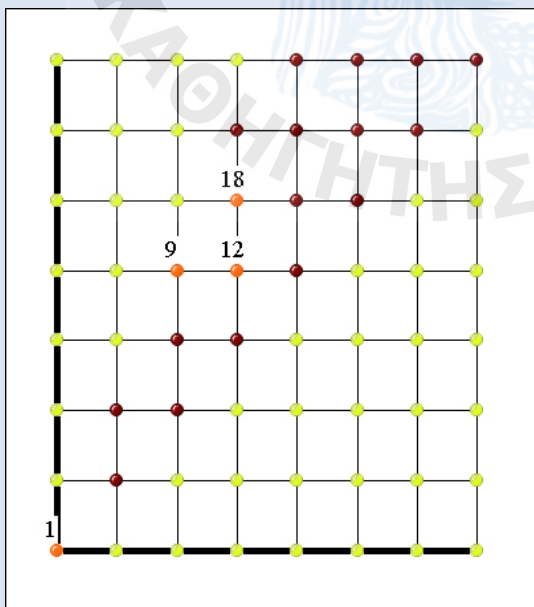
Σχήμα δ: Το Αντίστροφο δισδιάστατο δικτυωτό με τις σχετικές αποστάσεις του Ερμού ως προς τη Γη.

Ο λόγος 16:12 είναι επίτритος και ο λόγος 16:8 είναι διπλάσιος. Και οι δύο λόγοι απεδίδοντο στον πλανήτη Αφροδίτη (Σχήμα ε).



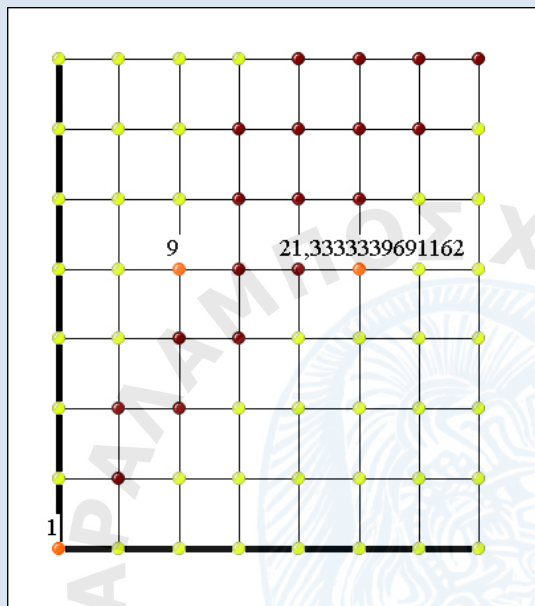
Σχήμα ε: Το Αντίστροφο δισδιάστατο δικτυωτό με τις σχετικές αποστάσεις της Αφροδίτης ως προς τη Γη.

Οι δύο λόγοι 18:12 που είναι ημιόλιος και 18:9 που είναι διπλάσιος απεδίδοντο στον Ήλιο (Σχήμα στ).



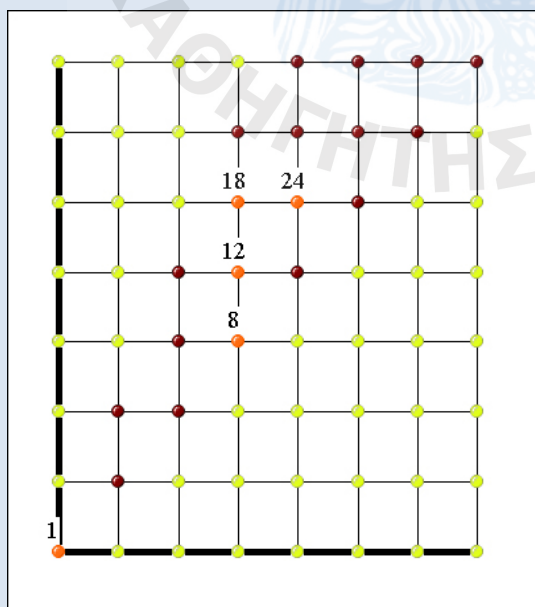
Σχήμα στ: Το Αντίστροφο δισδιάστατο δικτυωτό με τις σχετικές αποστάσεις του Ηλίου ως προς τη Γη.

Ο λόγος 21:9 είναι διπλασιεπίτριτος και απεδίδετο στον πλανήτη Άρη (Σχήμα ζ).



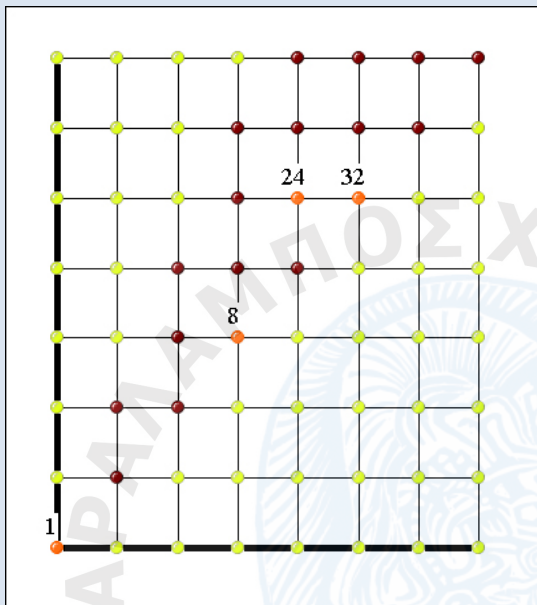
Σχήμα ζ: Το Αντίστροφο δισδιάστατο δικτυωτό με τις σχετικές αποστάσεις του Άρεως ως προς τη Γη. Είναι η μόνη περίπτωση που χρήζει ιδιαίτερας μελέτης, διότι ο ένας αριθμός δεν είναι ακέραιος.

Οι λόγοι 24:18 που είναι επίτριτος, 24:12 που είναι διπλάσιος, 24:8 που είναι τριπλάσιος, 18:12 και 12:8 που είναι ημιόλιοι, απεδίδοντο όλοι στον πλανήτη Δία (Σχήμα η).



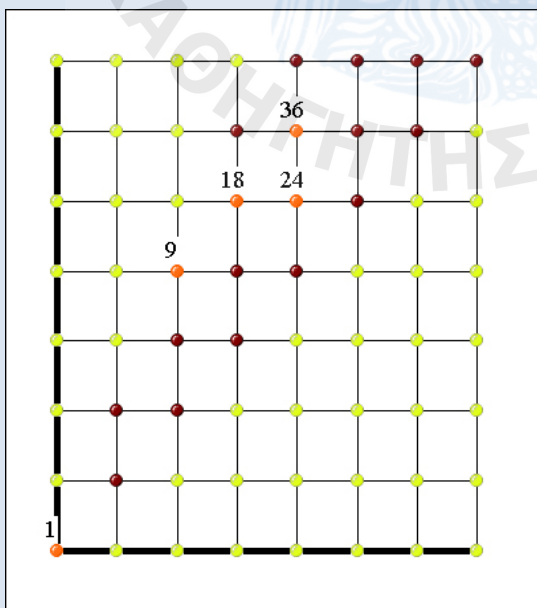
Σχήμα η: Το Αντίστροφο δισδιάστατο δικτυωτό με τις σχετικές αποστάσεις του Διός ως προς τη Γη.

Οι λόγοι 32:24 που είναι επίτритος και 32:8 που είναι τετραπλάσιος, απεδίδοντο στον πλανήτη Κρόνο (Σχήμα θ).



Σχήμα θ: Το Αντίστροφο δισδιάστατο δικτυωτό με τις σχετικές αποστάσεις του Κρόνου ως προς τη Γη.

Οι λόγοι, τέλος, 36:24 που είναι ημίλιος, 36:9 που είναι τετραπλάσιος και 24:18 που είναι επίτритος, απεδίδοντο σε μια ογδόη ή σταθερή σφαίρα που συμπεριελάμβανε όλες τις άλλες (Σχήμα ι).



Σχήμα ι: Το Αντίστροφο δισδιάστατο δικτυωτό με τις σχετικές αποστάσεις της σφαίρας των Απλανών ως προς τη Γη.

Ο Αριστείδης (III, Mb 145) λέει ότι η δια πασών συμφωνία εκφράζει την αρμονική κίνηση των πλανητών («τὸ δὲ διὰ πασῶν τῆν τῶν πλανητῶν ἐμμελὴ κίνησιν»).

Στο Τμήμα Μουσικῶν Σπουδῶν του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνῶν ἀπὸ το ἀκαδημαϊκὸ ἔτος 1995-96 διδάσκω το μάθημα «ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ: Κατατομὴ κανόνος», το ὁποῖο ἀναφέρεται στην ομώνυμη μουσικὴ πραγματεία του στοιχειωτοῦ Εὐκλείδου. Ἀπὸ τη γ' πρόταση κίβλας, προκειμένου να ἐξηγηθεῖ «τὴν μονάδα οὐ διαιρεῖσθαι», πρέπει να διδαχθεῖ ο Εὐκλείδειος¹⁴ ἀλγόριθμος για την Πυθαγόρειο ἀνθυφαίρεση ἢ ἀντανάιρεση και να τονισθεῖ ὅτι ἡ «ἀνθυφαιρετικὴ μονάς» δεν διαιρεῖται.

Συνέπεσε να διαβάσω στο περιοδικὸ Αθηνά του Τμήματος Ἐπικοινωνίας και Μέσων μαζικῆς Ἐνημερώσεως του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνῶν μια συνέντευξη του καθηγητοῦ κ. Στυλιανοῦ Νεγρεπόντη του Τμήματος Μαθηματικῶν του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνῶν στον Διευθυντὴ Συντάξεως του ἐν λόγω περιοδικοῦ κ. Μιχάλη Μειμάρη, καθηγητὴ του Τμήματος Ἐπικοινωνίας και Μέσων μαζικῆς Ἐνημερώσεως του ἰδίου Πανεπιστημίου. Ἡ συνέντευξη ἦτο συναρπαστικὴ, διότι ο καθηγητὴς Νεγρεπόντης υποστήριξε την ἀνθυφαιρετικὴ φύση της διαλεκτικῆς του Πλάτωνος, χρησιμοποιώντας «οξεῖες» ἐκφράσεις ὅπως:

«... Ἀν ἔχω δίκαιο στην ἐρμηνεία μου για την Πλατωνικὴ διαλεκτικὴ, τότε ὅλη ἡ μέχρι σήμερα Πλατωνικὴ γραμματεία ἐλάχιστα ἔχει ἐπιτύχει να διεισδύσει στην οὐσία της Πλατωνικῆς σκέψης. Ἀν ἡ δικὴ μου ἐρμηνεία για την φιλοσοφία του Πλάτωνος εἶναι ἡ ὀρθή (και πρέπει να πω ὅτι δεν ἔχω καμμία ἀμφιβολία γι' αὐτό), τότε ὅλες οἱ μέχρι σήμερα ἐρμηνείες, ἀκόμη και αὐτὲς των διασημοτέρων μελετητῶν, ἐλέγχονται ως ἀνεπαρκεῖς ἢ λανθασμένες, ἢ στην καλύτερη των περιπτώσεων, ως ἐπιφανειακὲς προσεγγίσεις...

... Οἱ μεταφράσεις του Πλάτωνος ἔχουν ἀπονευρώσει και συσκοτίσει τον γεωμετρικὸ πυρήνα της Πλατωνικῆς σκέψης...».

Με τον καθηγητὴ Νεγρεπόντη υπήρξαμε συνεισηγητὲς στο Συνέδριο «Πυθαγόρεια Σκέψη και Ἐπιστημονικὸς λόγος» που διωργάνωσε στις 2-4 Σεπτεμβρίου 2005 το Τμήμα Μαθηματικῶν του Πανεπιστημίου Αιγαίου και το Ἴδρυμα Δημητρίου στη Σάμο (Doryssa Bay Hotel, αἴθουσα "Sybilla"). Τον συναντούσα για πρώτη φορά και μου ἔκανε ἐξαιρετικὴ ἐντύπωση το πάθος με το ὁποῖο παρουσίαζε στην εισηγήσή του «*Ἡ ἐπίδραση των Πυθαγορείων στη διαμόρφωση του ἐλληνικοῦ πολιτισμοῦ*» την ἀνθυφαίρεση ως μαθηματικὴ διαδικασία και τις ἐφαρμογές της, ὅπως αὐτὲς ἐκτίθενται στους Πλατωνικοὺς διαλόγους Θεαίτητος, Μένων, Συμπόσιο, Πολιτικός, Φίληβος, Σοφιστής.

¹⁴ Την Πυθαγόρειο ἀνθυφαίρεση ἢ ἀντανάιρεση διασώζει ο Εὐκλείδης στα *Στοιχεῖα* του (Βιβλία V, VII) και τη διδάσκω στα πλαίσια του μαθήματος Εὐκλείδου Κατατομὴ Κανόνος. (Βλέπε Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, 2005, *Εὐκλείδου Κανόνος Κατατομὴ*, Ἐκδόσεις Γαρταγάνης, σχόλιο VIII, σ. 331).

Η εισήγηση του καθηγητού Νεγρεπόντη υπήρξε μια αποκάλυψη για μένα, στοιχεία της οποίας συμπεριέλαβα στο ενδέκατο κεφάλαιο με τίτλο «Πυθαγόρειος ανθυφαίρεση ή αντανάιρεση» του μετά χείρας συγγράμματός μου, το οποίο εκείνο τον καιρό συνέγραφα. Συνέγραφα, είναι αλήθεια, με μεγάλη συστολή ένα σύγγραμμα, στο οποίο εξέθετα καθαρώς γεωμετρικές λύσεις στα όποια Πυθαγόρεια –και όχι μόνον- μουσικά προβλήματα. Και σε αυτή τη φάση άντλησα κουράγιο από την παρακάτω φράση της προμνημονευθείσης συνεντεύξεως του καθηγητού Νεγρεπόντη «Η έννοια-κλειδί τόσο για την πυθαγόρεια αρμονία, όσο και για τα ασύμμετρα μεγέθη, ήταν η γεωμετρική διαδικασία της ανθυφαίρεσης», διότι άνευ της ανθυφαιρέσεως δεν μπορεί να σταθεί η θεωρία μου περί των αντιστρόφων δικτυωτών.

Καθώς ξεδίπλωνα τις σκέψεις μου σχετικά με τη διατύπωση της θεωρίας των δικτυωτών για τα μουσικά ύψη, έπρεπε οπωσδήποτε να βρω ένα χώρο (μηκών) ισοδύναμο, όσον αφορά στη χρήση του, με τον χώρο των μουσικών υψών. Τότε καθοδηγοί μου υπήρξαν ο Πορφύριος και ο Κλαύδιος Πτολεμαίος, που με «υπέδειξαν» τον Πυθαγόρειο κανόνα (μονόχορδο), το όργανο πειραματισμού των «κανονικών».

Πράγματι, διαβάζομε ότι η σχέση μεταξύ δύο αριθμών στη Πυθαγόρεια θεωρία της Μουσικής εκκαλείτο «διάστημα»¹⁵. Δύο σχόλια του Πορφυρίου στην περί της αρμονίας διδασκαλία του Πτολεμαίου αναφέρουν «καὶ τῶν κανονικῶν»¹⁶ δὲ καὶ πυθαγορείων οἱ πλείους τὰ διαστήματα ἀντὶ τῶν λόγων

¹⁵ Αργότερα η σχέση μεταξύ δύο αριθμών στην Αριθμητική και τη Γεωμετρία πήρε το όνομα «λόγος».

¹⁶ Αυτοὶ που πειραματίζονται χρησιμοποιώντας τον κανόνα. Λέγονται και αρμονικοί.

Τίς πρόθεσις ἀρμονικῶν.

Τὸ μὲν οὖν ὄργανον τῆς τοιαύτης ἐφόδου καλεῖται κανὼν ἀρμονικός, ἀπὸ τῆς κοινῆς κατηγορίας καὶ τοῦ κανονίζειν τὰ ταῖς αἰσθήσεσιν ἐνδέοντα πρὸς τὴν ἀλήθειαν παρελιημμένους. ἀρμονικῶ δ' ἂν εἴη πρόθεσις τὸ διασῶσαι πανταχῆ τὰς λογικὰς ὑποθέσεις τοῦ κανόνος μηδαμῆ μηδαμῶς ταῖς αἰσθήσεσι μαχομένας κατὰ τὴν τῶν πλείστων ὑπόληψιν, ὡς ἀστρολόγου τὸ διασῶσαι τὰς τῶν οὐρανίων κινήσεων ὑποθέσεις συμφώνους ταῖς τηρουμέναις παρόδοις, εἰλημμένας μὲν καὶ αὐτὰς ἀπὸ τῶν ἐναργῶν καὶ ὀλοσχερέστερον φαινομένων, εὐρούσας δὲ τῷ λόγῳ τὰ κατὰ μέρος ἐφ' ὅσον δυνατόν ἀκριβῶς. ἐν ἅπασι γὰρ ἴδιόν ἐστι τοῦ θεωρητικοῦ καὶ ἐπιστήμονος τὸ δεικνύναι τὰ τῆς φύσεως ἔργα μετὰ λόγου τινὸς καὶ τεταγμένης αἰτίας δημιουργούμενα καὶ μηδὲν εἰκῆ, μηδὲ ὡς ἔτυχεν ἀποτελούμενον ὑπ' αὐτῆς καὶ μάλιστα ἐν ταῖς οὕτω καλλίσταις κατασκευαῖς, ὅποια τυγχάνουσιν αἱ τῶν λογικωτέρων αἰσθήσεων, ὕψους καὶ ἀκοῆς. ταύτης δὴ τῆς προθέσεως οἱ μὲν οὐδόλως εἰκόασι πεφροντικένοι μόνῃ τῇ χειρουργικῇ χρήσει καὶ τῇ ψιλῇ καὶ ἀλόγῳ τῆς αἰσθήσεως τριβῇ προσχόντες, οἱ δὲ θεωρητικώτεροι τῷ τέλει προσενεχθέντες. οὗτοι δ' ἂν μάλιστα εἶεν οἱ τε Πυθαγόρειοι καὶ οἱ Ἀριστοξένηι-

λέγουσιν» και «τὸν λόγον καὶ τὴν σχέσιν τῶν πρὸς ἀλλήλους ὄρων τὸ διάστημα καλοῦσι» γεγονός που σημαίνει ότι στην Πυθαγόρειο μουσική θεωρία, η οποία θεμελιούται πειραματικά ἐπὶ του μονοχόρδου, οι ἔννοιες «διάστημα (= διάσταση)» και «λόγος (= αριθμητική σχέση ἢ αναλογία)» εἶναι ταυτόσημες ἢ εναλλάσσονται ἰσοδυνάμως¹⁷.

Οφείλω να καταθέσω ὅτι ἀπὸ το ἔτος 1998 ερευνητικά ασχολούμαι με τη μελέτη 30 στίχων ἐκ του Πλατωνικοῦ Τιμαίου (35a1-36b6). Το χωρίο αὐτὸ του Τιμαίου, γνωστὸ και ως «μουσικὸ χωρίο», ἀναφέρεται στη δημιουργία και στη σύσταση της Ψυχῆς του Κόσμου ἐπὶ τη βάσει ἐνὸς αλγορίθμου, διατυπωμένου με Πυθαγόρειο μουσικὴ ορολογία. Ο Πρόκλος στο *Υπόμνημα εἰς τὸν Πλάτωνος Τιμαίον* ἀναφέρει ὅτι ο Πλούταρχος στο ἔργο του *περὶ τῆς ἐν Τιμαίῳ Ψυχογονίας* σχολιάζει το συγκεκριμένο χωρίο και το χαρακτηρίζει ως ἓνα ἀπὸ τα πλέον δύσκολα ως πρὸς τὴν κατανόησή του μέσα στο συνολικὸ Πλατωνικὸ ἔργο.

Ἡ ἀνάγκη να ἀπαντήσω στα πάρα πολλά ἐρωτηματικά, που ἀντιμετώπισα ἀσχολούμενος με το ἐν λόγω Πλατωνικὸ χωρίο, με ὠδήγησε στη σύλληψη και διατύπωση της θεωρίας των ευθέων και των ἀντιστρόφων δικτυωτῶν και, φυσικά, στη συγγραφή του μετὰ χεῖρας βιβλίου με τίτλο «*Αναλυτικὴ Γεωμετρία για τὴν Πυθαγόρειο Μουσικὴ*».

Ἐνδεικτικὰ παραθέτω ὠρισμένα ἐρωτηματικά, που εἶχα να ἀπαντήσω:

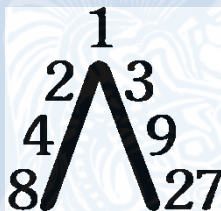
- Τί εἶναι το ταυτὸν και τί το θάτερον;
- Ἡ Ψυχὴ του Κόσμου εἶναι μεριστή;
- Μήπως δὲν κατανοοῦμε το ἐνυπάρχον μαθηματικὸ περιεχόμενο κάποιων ἔργων των ἀρχαίων Ἑλλήνων φιλοσόφων, ἐπειδὴ δὲν γνωρίζουμε το ἀκριβὲς ἢ ἀληθὲς νόημα ὠρισμένων ὄρων;
- Υπήρχε κοινὸ μέτρο για ὅλα τα Πυθαγόρεια διαστήματα;
- Γιατί ἡ μονάδα δὲν διαιρεῖται;
- Γιατί οἱ Πυθαγόρειοι προσθέτουν διαστήματα με πολλαπλασιασμό και ἀφαιρούν με διαίρεση; Γνώριζαν τὴν λογαριθμικότητα;
- Γιατί ἐξελάμβαναν οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες το διάστημα 531441/524288 (Πυθαγόρειον κόμμα) ως κατὰ προσέγγιση κοινὸ μέτρο του ἡμιολίου και του ἐπιτρίτου διαστημάτων;
- Μήπως ο Εὐκλείδης, ἀσχολούμενος με τὴν κατατομὴ του κανόνος, Μαθηματικὰ ἐποίησε και ὄχι Μουσικὴ;
- Γιατί κατέφυγαν στο μονόχορδο, μια διάταξη που ἀναφέρεται στο μάτι, και ὄχι σε μια διάταξη που να ἀναφέρεται στο αὐτί, ἀφού ἤθελαν να ἐκτιμήσουν το μέγεθος μουσικῶν διαστημάτων;

οἱ ἄδιαμαρτεῖν ἑκάτεροι

Κλαύδιος Πτολεμαῖος, *Ἀρμονικά*, 1, 2, 1-19.

¹⁷ Βλέπε: Χαράλαμπος. Χ. Σπυρίδης, 2004, *Ὁ Δυῖσμός του μουσικοῦ διαστήματος*, Ἐκδόσεις Γαρταγάνης, Ἀθήνα.

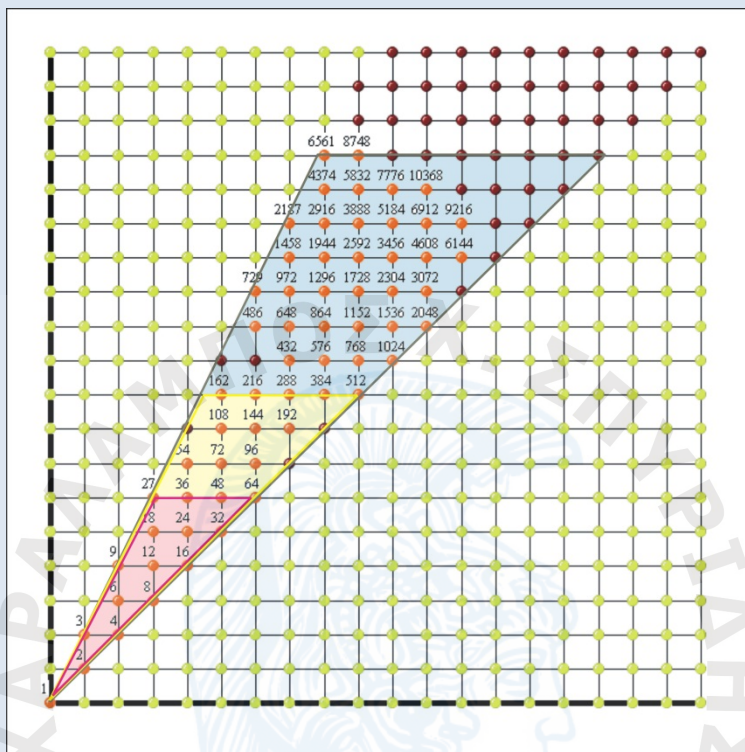
- Γιατί τα μήκη της χορδής στο μονόχορδο ήσαν αυστηρώς καθωρισμένα; Ποιές δυνατότητες έρευνας στη διαστηματική παρέχει το κάθε επιτρεπτό μήκος χορδής;
- Γιατί υπάρχει ο δυΐσμός, όσον αφορά στην κατάστρωση των αριθμών (λαβδοειδής και γραμμική) για τη λύση του Πλατωνικού προβλήματος από ανθρώπους τόσο κοντά στον Πλάτωνα; Συγκεκριμένα, από τους «μαθητές» του Πλάτωνος, που ασχολούνται με τη λύση του προβλήματος, άλλοι τοποθετούν τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος επ' ευθείας γραμμής, όπως λ.χ. κάνει ο Θεόδωρος, ο οποίος αναμειγνύει αρτίους με περιττούς αριθμούς, ενώ άλλοι, όπως λ.χ. κάνουν ο Άδραστος και ο Κράντωρ¹⁸ τους τοποθετούν λαβδοειδώς, βάζοντας επί του ενός σκέλους του Λ τους αρτίους και επί του άλλου σκέλους του τους περιττούς αριθμούς και εις την κορυφή του τη μονάδα (Σχήμα ια).



Σχήμα ια: Το λαβδοειδές διάγραμμα του Αδράστου.

- Ποια είναι τα βήματα εργασίας προκειμένου να λύσουμε το Πλατωνικό πρόβλημα εκκινώντας από το λαβδοειδές διάγραμμα; Δεν έχουμε καμία πληροφορία για τον σχετικό αλγόριθμο –πορεία ενεργειών-. Το μόνο σχετικό που υπάρχει αναφέρεται σε τρία τρίγωνα (Πρόκλειος ρήση), αλλά αυτό δεν επαρκεί (Σχήμα ιβ). Η ζητούμενη πορεία ενεργειών ανευρίσκεται μέσω των επιπέδων αντιστρόφων δικτυωτών και μόνον όταν τον διπλασιασμό, τον εξαπλασιασμό και τον οκταπλασιασμό των αριθμών για τη λύση του Πλατωνικού προβλήματος τους συνδέσουμε με κινήσεις επ' αυτών.

¹⁸ Ο Πλούταρχος (1027 E 9) υπονοεί ότι ο ίδιος ο Πλάτων χρησιμοποιούσε τη λαβδοειδή διάταξη των αριθμών για τη λύση του προβλήματος.



Σχήμα ιβ: Το διάγραμμα προκύπτει από τη θεωρία των αντιστρόφων δικτυωτών αι παρουσιάζεται για πρώτη φορά ως γραφική παράσταση της Προκλείου ρήσεως «Άδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδσειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ καὶ ἐν τρισὶ τριγώνοις ἐκτίθειται τοὺς ὄρους, ἐπὶ μὲν τοῦ ἐντὸς αὐτοῦ τοὺς ἐν τοῖς μοναδικοῖς ἀριθμοῖς λόγους, ἐπὶ δὲ τοῦ μετὰ τοῦτο τοὺς ἐξαπλασίους τούτων, τοὺς ἔχοντας δύο μεσόσπτας καθ’ ἕκαστον διάστημα τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον, ἐπὶ δὲ τοῦ ἔξωτάτῳ τοὺς ποιοῦντας ὅλον τὸ διάγραμμα τὸ εἰρημένον».

Πρόκλου Εἰς τὸν Τίμαιον Γ [Tim 35B] 197C5-12


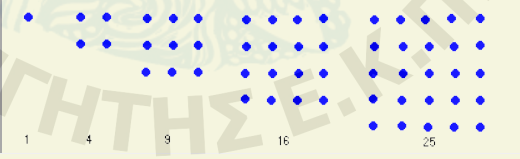
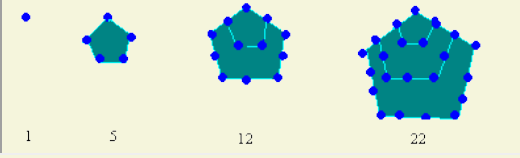
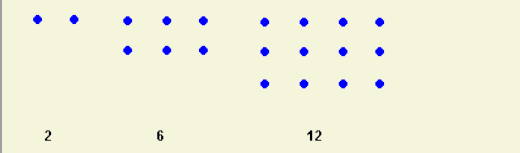
- Μήπως η εύρεση του αριθμητικού και του αρμονικού μέσου στα διπλάσια και στα τριπλάσια διαστήματα δεν ήταν κοπιώδης μαθηματική εργασία, αλλά αυτοί οι μέσοι προέκυπταν από την απλή θέαση ενός επιπέδου αντιστρόφου δικτυωτού;
- Γιατί η μεγίστη τετρακτύς ή τετρακτύς του Πλάτωνος είχε αυτούς τους αριθμούς και όχι κάποιους άλλους –ολιγοτέρους ή περισσότερους-; Στο ερώτημα αυτό δεν μπορεί κανείς να αναζητήσει απάντηση, εάν δεν γνωρίζει τη θεωρητική αριθμητική των Πυθαγορείων¹⁹. Πράγματι, ο Πλάτων σταματάει στις δύο τετρακτύς

¹⁹ Παράσταση μερικών κατηγοριών Πυθαγορείων αριθμών:

ες (1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27) λαμβάνοντας τετραγώνους, δηλαδή επιπέδους αριθμούς, και κύβους, δηλαδή στερεούς τριών διαστάσεων αριθμούς, διότι δεν γνωρίζει χώρους με περισσότερες από τρεις διαστάσεις. Εάν έπαιρνε στην καθε μία τετρακτύ τον επόμενο της όρο, δηλαδή 16 και 81, θα είχε στερεούς αριθμούς των τεσσάρων διαστάσεων, δηλαδή τετράγωνα τετραγώνων, αφού $16 = 4^2 = (2^2)^2 = 2^4$ και $81 = 9^2 = (3^2)^2 = 3^4$.

- Είναι σωστές οι λύσεις του Πλατωνικού προβλήματος περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου, που κατά καιρούς εδόθησαν; Γιατί δεν συμπίπτουν; Γιατί αναφέρονται σε μουσικές δομές με διαφορετική διαστηματική δομή; Γιατί η λύση του εν λόγω προβλήματος να μην είναι μία και μοναδική;

Για την ορθότητα της θεωρίας των δικτυωτών βεβαιούται κανείς βλέποντας να επαληθεύονται βάσει αυτής όλες οι είκοσι Προτάσεις της Ευκλείδειου *Κατατομής του Κανόνος* με τη συντομότερη ανάλυση, με τη μεγαλύτερη δυνατή σαφήνεια και καλαισθησία και, τέλος, τον μικρότερο πνευματικό κόπο. Απόρροια της θεωρίας των δικτυωτών είναι «Ο Μουσικός Διανυσματικός Λογισμός» δια του οποίου επιλύονται τα μουσικά προβλήματα, αντιμετωπίζοντας τα μουσικά διαστήματα ως διανύσματα.

| | |
|---------------------|---|
| Τρίγωνοι αριθμοί |  |
| Τετράγωνοι αριθμοί |  |
| Πεντάγωνοι αριθμοί |  |
| Ετερομήκεις αριθμοί |  |

Το μετά χείρας βιβλίο με τίτλο «Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική» είναι δόκιμος επιστημονική πραγματεία, η οποία αναφέρεται στο γνωστικό αντικείμενο «Μαθηματική δομή της αρχαίας Ελληνικής Μουσικής» του ερευνητικού μου χώρου και είναι το τεσσαρακοστό έκτο σύγγραμμά μου, στα τριάντα χρόνια της Πανεπιστημιακής μου καριέρας.

Την «Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική» συνέγραψα για να δείξω τον τρόπο της μονοσημάντου επιλύσεως του Πλατωνικού προβλήματος *Περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου* βασιζόμενος αποκλειστικώς στις τρεις μαθηματικές Επιστήμες, οι οποίες προηγούνται της Επιστήμης της Μουσικής, δηλαδή την Αριθμητική, τη Γεωμετρία και τη Στερεομετρία -κατά τα γραφόμενα υπό του Νικομάχου του Γερασηνού και του Πλάτωνος-.

Το βιβλίο απευθύνεται σε όσους εκ των φοιτητών του Τμήματος Μουσικών Σπουδών του Πανεπιστημίου Αθηνών επιλέγουν να παρακολουθήσουν το Σεμινάριό μου με θέμα «Μαθηματική δομή της αρχαίας Ελληνικής μουσικής: Πλάτωνος *Τίμαιος*». Απευθύνεται, βεβαίως, και σε όλους τους επιστήμονες των Φιλοσοφικών Σχολών, οι οποίοι «διατριβάς ποιούνται» περί τον Πλάτωνα.

Η ύλη του βιβλίου κατανέμεται στα εξής δεκαπέντε Κεφάλαια:

1. Η έννοια μουσικό «διάστημα»,
2. Αρχαιοελληνικά μουσικά συστήματα,
3. Δομικά μουσικά συστήματα,
4. Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας,
5. Κινήσεις στα τεταρτημόρια,
6. Πράξεις με Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα,
7. Εύρεση της αριθμητικής εκφράσεως (α/β) μουσικών διαστημάτων,
8. Μεταβάσεις σε δικτυωτά,
9. Εφαρμογή της ρήσεως του Φιλολάου,
10. Μεταβάσεις σε μετασχηματισμένα δικτυωτά,
11. Πυθαγόρειος Ανθυφαίρεση ή Ανταναίρεση,
12. Ο μετασχηματιστής που ονομάζεται «Κανών (=μόνοχορδο)»,
13. Αντίστροφα δικτυωτά,
14. Διανυσματικός Λογισμός,
15. Μουσικός Διανυσματικός Λογισμός.

Το βιβλίο «Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική» γράφτηκε με πλήρη τεκμηρίωση, με μαθηματική ορθότητα, με πολλή σαφήνεια, με έναν απλό, λιτό, ευρηματικό και εποπτικό τρόπο, ώστε να κατανοούνται μαθηματικά οι μουσικές ενέργειες ή μουσικά οι μαθηματικές πράξεις.

Γράφτηκε πολύχρωμο, πλασιωμένο από πλήθος σχημάτων, διαγραμμάτων και πινάκων, που όλα μαζί διευκολύνουν τη μετάδοση της απαραίτητης γνώσης. Γράφτηκε εμπλουτισμένο από ένα μεγάλο αριθμό αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων, τα οποία έχουν λυθεί υποδειγματικά.

Σε τέσσερα Παραρτήματα –στο τέλος του βιβλίου- συμπεριελήφθησαν μαθηματικές θεωρίες σύγχρονες ή αρχαιοελληνικές, προκειμένου να βοηθη-

θούν οι μελετητές να κατανοήσουν τον τρόπο που υλοποιούνται συγκεκριμένες ενέργειες επί των δικτυωτών.

Το Παράρτημα I αναφέρεται στη σχετική ποσότητα (=λόγο), το Παράρτημα II αναφέρεται στα Στοιχεία της Συνδυαστικής Αναλύσεως, το Παράρτημα III αναφέρεται στην Αρχή της Συμπεριλήψεως-Εξαιρέσεως και το Παράρτημα IV αναφέρεται στις Πυθαγόρειες Αναλογικότητες ή Αναλογίες ή Μεσότητες.

Όλα τα δικτυωτά, ευθέα ή αντίστροφα, σχεδιάσθηκαν στον ηλεκτρονικό υπολογιστή με λογισμικό, το οποίο επί τούτοις συνέγραψε ο Μουσικολόγος κ. Πέτρος Κ. Μουστάκας. Όλα τα σχήματα επί των δικτυωτών και τα διαγράμματα, καθώς επίσης η διαμόρφωση σελίδος, η μορφοποίηση των χαρακτήρων και η μακέτα του εξωφύλλου, εγένοντο από τη θυγατέρα μου Ελένη Χ. Σπυρίδου PhD, BSc (Hons). Αμφοτέρους ευχαριστώ και τους εύχομαι επίτευξη των επιστημονικών τους στόχων.

Ο συγγραφέας
Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης
Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής

