

Μουσικολογική αλληγορία της Πλατωνικής Πολιτειολογίας

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης
Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής
Τμήματος Μουσικών Σπουδών Πανεπιστημίου Αθηνών

Προλεγόμενα

Θα ήθελα να εκκινήσω με ένα προσωπικό σχόλιο. Το ενδιαφέρον μου για τον πλατωνισμό ήταν κατ' αρχάς το ενδιαφέρον του επιστήμονος που ασχολείται με τον πυθαγορισμό, στοχεύοντας στην κατανόηση του τρόπου μελέτης από τους πυθαγορείους των ακουστικών φαινομένων, τα οποία ακολουθούν νόμους αρμονικούς και φθάνουν επί αιώνες κατ' αυτόν ή εκείνον τον τρόπο στην ανθρώπινη αίσθηση. Έτσι ο άνθρωπος από της αρχαιότητας μέχρι της σημερινής εποχής δεν κάνει τίποτ' άλλο από το να προσπαθεί ν' ανακαλύψει και διατυπώσει με την επιστημονική γνώση, που εκάστοτε διαθέτει, τη φύση και τη μορφή αυτών των φαινομένων κατά την Πλατωνική φιλοσοφική κι επιστημονική άποψη «*σώζειν τα φαινόμενα*».

Στην προσπάθειά μου αυτή εντυπωσιάσθηκα εξαιρετικά από τον μυστικισμό, που διέκρινε τη μετάδοση της επιστημονικής γνώσεως μεταξύ των μεμνημένων οπαδών του πυθαγορισμού, αλλά σύντομα διεπίστωσα ότι ανέκαθεν οι κοσμοθεωρίες των κατ' έθνη ιερατείων εβασίζοντο στον συμβολισμό. Για τον λόγο αυτό τα ιερά κείμενά τους είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με σημεία, σύμβολα, αριθμούς κι αστερισμούς, προκειμένου να προστατευθούν αλήθειες και ιδανικά που, διαφορετικώς, με το πέρασμα των χρόνων θα υφίσταντο διαστρέβλωση (McClain E. G., 2006).

Διεπίστωσα ότι υπάρχουν κρίσιμες περικοπές ιερών κειμένων και κειμένων της παγκοσμίου λογοτεχνίας -Βέδες, Αιγυπτιακό βιβλίο των Νεκρών, Βίβλος, Πλάτων- που πραγματεύονται αριθμούς. Επί πλέον συνειδητοποίησα ότι η επανάληψη ταυτοσήμων και ομοίων αριθμών στη Βαβυλώνα, την Αίγυπτο, την Ελλάδα και την Παλαιστίνη επιβεβαιώνουν τις κάποτε αναπτυχθείσες θεωρήσεις, οι οποίες είχαν ιστορική συνέχεια και προσανατολισμό μιας βασικής πνευματικής παραδόσεως.

Μελετώντας την πορεία των μουσικών ιδεών από τον Πυθαγόρα στον Πλάτωνα, ασχολήθηκα επί πολύν καιρό με το «*μουσικό χωρίο*» του Πλατωνικού Τιμαίου (35 a1 - 36 b6), το οποίο αναφέρεται στη δημιουργία και τη σύσταση της Ψυχής του Κόσμου επί τη βάσει ενός αλγορίθμου διατυπωμένου με Πυθαγόρειο μουσική ορολογία.

Σύντομα αντελήφθηκα ότι ο πλατωνισμός αντιμετωπίζει τη μουσική με μια νέα οπτική. Μια οπτική, η οποία αναγνωρίζει τη μουσική ως μία δύναμη ικανή να προβάλλει μια φιλοσοφική σύνθεση μόνο που ο μελετητής θα πρέπει ν' ασχοληθεί με ένα απόθεμα αριθμολογίας και να συσχετίσει μια μυθολογία με μαθηματικές αλληγορίες.

Κατάλαβα ότι ο μελετητής θα πρέπει να χρησιμοποιήσει τον Πλάτωνα ως την πολύτιμη στήλη της Ροζέττης για να μπορέσει να εισχωρήσει στην περισσότερο δυσνόητη επιστήμη των πρωιμοτέρων πολιτισμών αφενός και αφετέρου να συσχετίσει την τότε με τη σημερινή επιστημονική ορολογία.

Καρπός αυτής της ενασχολήσεώς μου με το «*μουσικό χωρίο*» υπήρξαν τα δύο σύγγραμμά μου με τίτλο «*Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*» (Εικόνα 1) και «*Πλάτωνος Τιμαίος: Γένεση Ψυχής Κόσμου*», (Εικόνα 2), εις τα οποία αποκαλύπτε-

ται πλήρως η όποια μουσική αλληγορία κάτω από τις προεκτάσεις της μεγίστης Πλατωνικής τετρακτύος 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27 εις το εν λόγω Πλατωνικό χωρίο.



Εικόνα 1: Το σύγγραμμά του καθηγητού Χ. Χ. Σπυρίδη με τίτλο «Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική» 425 σελίδων.



Εικόνα 2: Το σύγγραμμά του καθηγητού Χ. Χ. Σπυρίδη με τίτλο «Πλάτωνος Τίμαιος: Γένεση Ψυχής Κόσμου».

Με την *Πολιτεία*, το σημαντικότερο ίσως έργο της Πλατωνικής γραμματολογίας ξεκίνησα ν' ασχολούμαι από τοπικιστικά κίνητρα και μόνον. Τυχάνω ως προς την καταγωγήν Θραξ εκ Θρακός πατρός και Θράσσης μητρός. Ο εν λόγω Πλατωνικός διάλογος αναφέρεται στη συμμετοχή των πρωταγωνιστών στην εορτή των Βενδιδίων, προς τιμήν της Βενδίδος ή Βέντιδος, μιας Θρακικής σεληνιακής θεότητας, η οποία εταυτίσθη προς την Εκάτη ή την Άρτεμι ή και την Περσεφόνη. Στη Θράκη τα Βενδίδεια ήσαν εορταί με οργιαστικόν χαρακτήρα και διεδόθησαν στο Βυζάντιο, στις ελληνικές αποικίες επί της θρακικής χερσονήσου, στη Λήμνο, στην Αμφίπολη και δια των Θρακών εμπόρων στον Πειραιά.

Πυθαγόρεια αριθμολογία και δίκαιο

Με την έννοια δίκαιο οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν την παροχή αμοιβαίων υπηρεσιών, δηλαδή την κατ' αμοιβαιότητα δικαιοσύνη, η οποία ασκείται εκουσίως από όλα τα μέλη της κοινωνίας και κατ' αυτόν τον τρόπο συνεχεται η πολιτική Κοινωνία.

Το πολίτευμα των Πυθαγορείων (Σακελλαρίου, Γ. Θ. 1962) προέβλεπε την ύπαρξη ισορροπίας μεταξύ των διακριτών εξουσιών του κράτους. Όπως μας αναφέρουν οι Πολύβιος, Κικέρων και Πλούταρχος, το διακριτό είχε την αρχή του στη Λυκούργειο νομοθεσία και στο Σπαρτιατικό πολίτευμα. Να θυμηθούμε ότι οι Σπαρτιάτες θεωρούσαν ότι οι νόμοι τους εδόθησαν από τον θεό Απόλλωνα (Πλ. Νόμ. 624Α), εξασφάλιζαν δικαιοσύνη για όλους τους πολίτες και απαγορεύετο αυτηρώς η κριτική των νόμων από τους νέους (Πλ. Νόμ. 634 D).

Οι Πυθαγόρειοι, ως γνωστόν, θεωρούσαν τους αριθμούς ως ουσία των πραγμάτων κι επίστευαν ότι τα πάντα εγίνοντο επί τη βάσει σχεδίου ενός αριθμού. Την αρετή της δικαιοσύνης την παριστούσαν με τον αριθμό πέντε (5) με βάση το παρακάτω σκεπτικό.

Για τους Πυθαγορείους η έννοια της δικαιοσύνης καθορίζεται ως η δύναμη της διανομής του ίσου, που ανήκει στον καθένα. Αυτό είναι το λεγόμενο «αναλογούν δίκαιον». Το «αναλογούν δίκαιον» για τους φυσικούς αριθμούς της δεκάδος είναι ο μέσος όρος αυτών, δηλαδή

$$\frac{\sum_{i=1}^9 x_i}{i} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

Για τους Πυθαγορείους το θεμέλιο και η φύση της δικαιοσύνης εμφανίζονται σε όλα τα τετράγωνα των αριθμών (αριθμοί ισάκις ίσοι), διότι είναι το γινόμενο δύο ίσων αριθμών, αλλά ιδιαίτερος η φύση της δικαιοσύνης αποκαλύπτεται στα τετράγωνα των περιττών αριθμών, επειδή έχουν ένα μέσον:

$$3^2 = 9 = 4 + 1 + 4$$

$$5^2 = 25 = 12 + 1 + 12$$

$$7^2 = 49 = 24 + 1 + 24$$

.....

.....

$$27^2 = 729 = 364 + 1 + 364$$

Το τετράγωνο του πρώτου περιττού αριθμού, δηλαδή το $3^2 = 9$, είναι ο πλέον αντιπροσωπευτικός αριθμός.

Ο Αρχύτας, ο Πυθαγόρειος, (Μαθηματικός, Μηχανικός, Στρατηγός και Πολιτικός ηγέτης του Τάραντος) μας αναφέρει ότι το Σύνταγμα ενός Κράτους μπορεί να καθορισθεί κατά τρεις διαφορετικούς τύπους του πολιτικού δικαίου. Ο κάθε τύπος περιγράφεται από συγκεκριμένη μαθηματική αναλογία τέτοιας, ώστε μεταξύ των αριθμών της να αναφέρονται ωρισμένες σχέσεις βάσει των οποίων το Σύνταγμα κατανέμει εξουσίες και δικαιώματα στις πολιτικές υπηρεσίες και ανάμεσα στις τάξεις των πολιτών.

Έτσι, λοιπόν, το Ολιγαρχικό Δίκαιο και το Τυραννικό Δίκαιο θεμελιούνται επάνω στην αριθμητική αναλογία (1, 2, 3), η οποία εγκαθιστά μια μεγάλη ανισότητα μεταξύ του λόγου των μικρών σε σχέση με το λόγο των μεγάλων όρων της $\left(\frac{2}{1} > \frac{3}{2}\right)$, αφού ο διπλάσιος λόγος είναι μεγαλύτερος του ημιολίου. Στο Ολιγαρχικό Δίκαιο οι λίγοι και στο Τυραννικό Δίκαιο ο ένας κυβερνούν την πολιτεία, επιδιώκοντας το δικό τους καλό και όχι αυτό της πολιτείας. (Σπυρίδης, Χ. Χ. 2005).

Ονομασία αναλογίας	Μαθηματικός Ορισμός	Παράδειγμα αριθμητικό
Αριθμητική	Εάν $\alpha > \beta > \gamma$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, τότε ισχύει: $\alpha - \beta = \beta - \gamma$	3, 2, 1

Πρέπει να τονισθεί ότι στην Αριθμητική αναλογία «αγνοείται η ταυτότητα του λόγου και εξετάζεται μόνον η διαφορά των όρων» ή, με άλλα λόγια, «διατηρεί τις σχέσεις των όρων σύμφωνα με την ισότητα της ποσότητας, αρνούμενη την ομοιότητα του λόγου»¹, γι' αυτό ονομάζεται «αναλογία κατά ποσότητα».

Το Δημοκρατικό Δίκαιο θεμελιούται επάνω στην γεωμετρική αναλογία (1, 2, 4), η οποία εγκαθιστά ισότητα σχέσεων μεταξύ των λόγων των μεγάλων και των μικρών όρων της $\left(\frac{2}{1} = \frac{4}{2}\right)$ (αναλογία κατά ποιότητα). Στο Δημοκρατικό Δίκαιο τόσο ο φτωχός, όσο και ο πλούσιος συμμετέχουν ισότιμα στη διακυβέρνηση της Πολιτείας.

Ονομασία αναλογίας	Μαθηματικός Ορισμός	Παράδειγμα αριθμητικό
Γεωμετρική	Εάν $\alpha > \beta > \gamma$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, τότε ισχύει: $\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$	4, 2, 1

Η αναλογία την οποία ο Αρχύτας ονομάζει Αρμονική (3, 4, 6), χρησιμεύει ως το υπόδειγμα για το Αριστοκρατικό και το Βασιλικό Δίκαιο και τούτο διότι αυτή εγκαθιστά μια μικρή ανισότητα μεταξύ των λόγων των μικρών σε σχέση με το λόγο των μεγάλων όρων της $\left(\frac{4}{3} < \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\right)$, αφού ο επίτριτος λόγος είναι μικρότερος του ημιολίου. Για το λόγο αυτό η αρμονική πρόοδος ονομάζεται *υπεναντία* της αριθμητικής πρόοδου.

Το δίκαιο της αριστοκρατίας αναγνωρίζει στους άξιους πολίτες περισσότερα δικαιώματα απ' ό,τι αναγνωρίζει το δίκαιο της ολιγαρχίας. Το δίκαιο της δημοκρατίας, όπως προαναφέρθη, δεν κάμνει καμμία διάκριση ανάμεσα στους πολίτες. Κατά τον Στοβαίο (Στοβαίος IV.1. 131) το αριστοκρατικό δίκαιο είναι από ιδεολογικής απόψεως το καλύτερο, διότι μιμείται το δίκαιο της φύσεως, το οποίο κατ' αναλογία παρέχει στον καθέναν ό,τι του αξίζει.

¹ Σύμφωνα με την ορολογία που χρησιμοποιεί ο Νικόμαχος ο Γερασηνός δύο ζεύγη αριθμών έχουν μια όμοια ποιοτική σχέση, όταν παρουσιάζουν τον ίδιο λόγο και έχουν μια όμοια ποσοτική σχέση, όταν παρουσιάζουν την ίδια διαφορά.

Όνομασία αναλογίας	Μαθηματικός Ορισμός	Παράδειγμα αριθμητικό
Αρμονική ή Υπενάντιος	Εάν $\alpha > \beta > \gamma$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, τότε ισχύει: $\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$ ή $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\beta}$	6, 4, 3

Η αρχή της αμοιβαιότητας και ισορροπίας υφίσταται σε όλη την Πυθαγόρειο φιλοσοφία, η οποία διακηρύσσει ότι στις αντινομίες των όντων και των φυσικών φαινομένων υπάρχουν τρόποι εναρμονίσεως, που συνιστούν και διατηρούν τον κόσμο.

Η ίδια αρχή της αμοιβαιότητας και ισορροπίας εφαρμόζεται και στον κοινωνικό και πολιτικό βίο, όπου οι αντιθέσεις οδηγούνται στην εναρμόνιση και στην ανάπτυξη πολιτισμού. Κατά τον Φιλόλαο (*Θραύσμα 10, γρ. 2-3*)

«ἔστι γὰρ ἄρμονία πολυμιγέων ἔνωσις καὶ δίχα φρονεόντων συμφρόνησις»

(Πολυμιγής σημαίνει σύμμικτος, μεμιγμένος από πολλά και διάφορα είδη, πολυσύνθετος, πολυποίκιλος. Η αρμονία, άρα, αφορά στο πλήθος των εναντιοτήτων και αντιθέσεων, δηλαδή αυτών που φρονούν ενάντια, αντίθετα).

Πλατωνική Πολιτειολογία

Στην Πλατωνική γραμματολογία η *Πολιτεία* θεωρείται το σημαντικότερο ίσως έργο. Σ' αυτό ο Πλάτων προσπαθεί να μας δώσει την εικόνα του τελείου πολιτεύματος. (Σημαιοφορίδης, Ηρ. 2002). Η πολιτική εμπειρία, που διέθετε ο Πλάτων, ήτο πολύ μεγάλη, αφού εκάλυπτε όλον τον ελληνικό και τον γνωστό βαρβαρικό κόσμο. Η πολιτική του σκέψη, όμως, ήταν επηρεασμένη από την Αθήνα, που στην ιστορία της είχε γνωρίσει 10 πολιτειακές μεταβολές, και οι Συρακούσες, που ε γνώρισαν όλα τα πολιτεύματα κυρίως δε την τυραννίδα. (Μικρογιαννάκης, Εμ. 2002)

Στην ιδανική Πολιτεία του Πλάτωνος ο κάθε πολίτης, αναλόγως των φυσικών του προδιαθέσεων και ικανοτήτων, αναλαμβάνει έναν συγκεκριμένο και αυστηρά καθορισμένο ρόλο, ο οποίος συνεπάγεται και έναν αντίστοιχο τρόπο ζωής.

Τα δικαιώματα και οι υποχρεώσεις του κάθε πολίτη, αναλόγως της τάξεώς του, οριοθετούνται βάσει δύο γνωμώνων: την ευνομία και την ενότητα της Πολιτείας. Άρα το κύριο μέλημα είναι να καθορισθεί η μορφή της πολιτειακής οργανώσεως που θα εξασφαλίζει σε μια πόλη αυτές τις δύο αρχές. Αυτό το πολιτειακό μοντέλο δεν είναι ούτε το μοναδικό σύστημα πολιτικής και κοινωνικής οργάνωσης που υπάρχει, ούτε είναι αμετάβλητο. Σ' αυτό το πολιτειακό μοντέλο ζει το πρότυπο του αριστοκρατικού ανθρώπου.

Ο Πλάτων στην *Πολιτεία* του δίδει το ακόλουθο πενταμερές πολιτειακό σχήμα:

1. **Πλατωνική πολιτεία, αριστοκρατία** (κυβερνούν περισσότερα του ενός πρόσωπα, που ανήκουν στην τάξη των αρίστων)
2. **Κρητικολακωνική, τιμοκρατία ή φιλαρχία** (Η λέξη τιμή σημαίνει δόξα, διάκριση, αξίωμα).

3. **Ολιγαρχία** (κυβερνούν οι πλούσιοι, ενώ οι φτωχοί δεν έχουν μερίδιο στην εξουσία)
4. **Δημοκρατία** (το ανώτατο όργανο είναι το σύνολο των πολιτών)
5. **Τυραννίδα**, το «έσχατον νόσημα της πόλεως».

Στην παρούσα εισήγηση μ' ενδιαφέρει η πυθαγόρειος συμπεριφορά του Πλάτωνος. Συγκεκριμένα, ασπασζόμενος ο Πλάτων την πυθαγόρειον ρήση «τα πάντα κατ' αριθμόν γίνονται», συμπεριφέρεται ως πυθαγόρειος (Οί Πυθαγορικοί, οἷς πολλαχῆ ἔπεται Πλάτων, Θέων Σμυρναίος, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων*, 12, 10), χρησιμοποιεί αριθμούς, προκειμένου να αισθητοποιήσει τα λεγόμενά του και δηλώνει ότι ο τύραννος είναι 729 φορές χειρότερος από τον βασιλέα (Stephanus 587 b11 - 588 a2). Η συγκεκριμένη περικοπή περιλαμβάνει έναν διάλογο μεταξύ του Σωκράτους και του φίλου του Γλαύκωνος, αδελφού του Πλάτωνος, και έχει ως ακολούθως:

Οἶσθ' οὖν, ἦν δ' ἐγώ, ὅσῳ ἀηδέστερον ζῆ τυραννος βασιλέως;

Ἄν εἴπης, ἔφη.

Τριῶν ἡδονῶν, ὡς ἔοικεν, οὐσῶν, μιᾶς μὲν γνησίας, δυοῖν δὲ νόθαιν, τῶν νόθων εἰς τὸ ἐπέκεινα ὑπερβάς ὁ τυραννος, φυγῶν νόμον τε καὶ λόγον, δούλαις τισὶ δορυφόροις ἡδοναῖς συνοικεῖ, καὶ ὅπόσῳ ἐλαττοῦται οὐδὲ πάνυ ῥάδιον εἰπεῖν, πλὴν ἴσως ᾧδε.

Πῶς; ἔφη.

Ἄπὸ τοῦ ὀλιγαρχικοῦ τρίτος που ὁ τυραννος ἀφειστήκει· ἐν μέσῳ γὰρ αὐτῶν ὁ δημοτικὸς ἦν.

Ναί.

Οὐκοῦν καὶ ἡδονῆς τρίτῳ εἰδώλω πρὸς ἀλήθειαν ἀπ' ἐκείνου συνοικοῖ ἄν, εἰ τὰ πρόσθεν ἀληθῆ;

Οὔτω.

Ὁ δὲ γε ὀλιγαρχικὸς ἀπὸ τοῦ βασιλικοῦ αὖ τρίτος, ἐὰν εἰς ταῦτὸν ἀριστοκρατικὸν καὶ βασιλικὸν τιθῶμεν.

Τρίτος γάρ.

Τριπλασίου ἄρα, ἦν δ' ἐγώ, τριπλάσιον ἀριθμῷ ἀληθοῦς ἡδονῆς ἀφέστηκεν τυραννος.

Φαίνεται.

Ἐπίπεδον ἄρ', ἔφην, ὡς ἔοικεν, τὸ εἶδωλον κατὰ τὸν τοῦ μήκους ἀριθμὸν ἡδονῆς τυραννικῆς ἂν εἴη.

Κομιδῆ γε.

Κατὰ δὲ δύναμιν καὶ τρίτην αὐξὴν δῆλον δὴ ἀπόστασιν ὅσῃν ἀφεστηκῶς γίνεταί.

Δῆλον, ἔφη, τῷ γε λογιστικῷ.

Οὐκοῦν ἐὰν τις μεταστρέψας ἀληθεία ἡδονῆς τὸν βασιλέα τοῦ τυράννου ἀφεστηκότα λέγῃ ὅσον ἀφέστηκεν, ἐννεακαϊκοσικαιεπτακοσιοπλασιᾶκις ἥδιον αὐτὸν ζῶντα εὐρήσει τελειωθείση τῇ πολλαπλασιᾶσει, τὸν δὲ τυράννον ἀνιαρότερον τῇ αὐτῇ ταύτῃ ἀποστάσει.

Ἄμῃχανον, ἔφη, λογισμὸν καταπεφόρηκας τῆς διαφορότητος τοῖν ἀνδροῖν, τοῦ τε δικαίου καὶ τοῦ ἀδίκου, πρὸς ἡδονὴν τε καὶ λύπην.

Η νεοελληνική απόδοση της ανωτέρω περικοπής κατά τους Α. Παπαθεοδώρου και Φ. Παππά (ΠΑΠΥΡΟΣ. 1939) έχει ως εξής:

- Ξέρεις, λοιπόν, είπα, πόσο αηδέστερα ζη ο τύραννος από το βασιλιά;
- Αν μου το ειπής, απήντησε, θα το μάθω.
- Υπάρχουν, καθώς φαίνεται, τρεις ηδονές, η μία γνήσια και οι άλλες δύο νόθες. Ο τύραννος ξεπερνώντας και το τελευταίο ακόμα σύνορο των νόθων ηδονών, και ξεφεύγοντας πολύ μακριά από το νόμο και τον ορθό λόγο, ζη πάντοτε με κάτι δουλικές ηδονές, που τις χρησιμοποιεί σαν δορυφόρους, και δεν είναι καθόλου εύκολο να ορίσει κανείς πόσο είναι κατώτερος από το βασιλιά, παρά μόνο, ίσως, κατά τον ακόλουθο τρόπο.
- Πώς; είπε.
- Ας πάρουμε τον ολιγαρχικό σαν αφετηρία, ο τύραννος νομίζω πως είναι τρίτος στη σειρά, γιατί ανάμεσά τους στέκει ο δημοκρατικός.
- Ναι.
- Αν λοιπόν αυτά που είπαμε είναι αληθινά, το είδωλο της ηδονής, που συγκατοικεί με τον τύραννο, δεν θάναί κατά τρεις φορές μακρύτερα από την αλήθεια, από όσο είναι το είδωλο που συγκατοικεί με τον ολιγαρχικό;
- Έτσι είναι.
- Ο ολιγαρχικός πάλι είναι τρίτος στη σειρά μετά το βασιλικό, αν ταυτίσουμε τον αριστοκρατικό και το βασιλικό.
- Ασφαλώς τρίτος.
- Όστε ο τύραννος, είπα εγώ, απέχει από την αληθινή ηδονή, για να εκφρασθώ με αριθμό, το τριπλάσιο του τριπλασίου.
- Φαίνεται.
- Καθώς φαίνεται λοιπόν, είπα, θα μπορούσε το είδωλο της ηδονής του τυράννου, ως προς το μήκος, ίσως να παρασταθί με ένα επίπεδο αριθμό.
- Βεβαίωτατα.
- Αν τον αριθμό αυτό τον υψώσουμε στο τετράγωνο και κατόπιν στον κύβο, θα δείξη καθαρά την απόσταση που χωρίζει τον τύραννο από το βασιλιά.
- Αυτό είναι φανερό, είπε, σε ένα άνθρωπο που ξαίρει λογιστικά.
- Εάν λοιπόν κανείς αναστρέφοντας την αναλογία θελήσει να δείξη πόσο αληθινώτερη είναι η ηδονή του βασιλιά από την ηδονή του τυράννου, θα βρη άμα κάμη όλους τους πολλαπλασιασμούς, ότι αυτός ζη επτακόσιες είκοσι εννέα φορές ευχαριστότερα, ενώ ο τύραννος ζη δυστυχέστερα άλλες τόσες.
- Τι καταπληκτικό αριθμό, εφώναξε, μας έρριξες κατακέφαλα, για να μας δείξης τη διαφορά των δύο ανθρωπίνων τύπων, του δικαίου και του αδίκου, ως προς την ηδονή και τη λύπη.

Η Μουσικολογική αλληγορία της περικοπής

Όπως έχω ήδη αναφέρει, οι αλληγορικές πλατωνικές περικοπές με μαθηματικές εκφράσεις, όπως η συγκεκριμένη, αντιμετωπίζονται σήμερα με μια νέα οπτική, η οποία αναγνωρίζει τη μουσική ως μία δύναμη ικανή να προβάλλει μια φιλοσοφική σύνθεση. Η οπτική αυτή δεν πρόκειται να κερδίσει την άμεση αποδοχή και υποστήριξη των θεολόγων, των φιλοσόφων, των φιλολόγων, των μαθηματικών και των άλλων επιστημόνων, οι οποίοι έχουν καταστεί εξαιρετικά ειδικοί εις το να βλέπουν το σύνολο παρά τη λεπτο-

μέρεια. Επίσης δεν θα κερδίσει ούτε τους μουσικούς, οι οποίοι θεωρούν τη μουσική σαν έναν κλάδο διασκεδάσεως, ούτε και τους μουσικολόγους, οι οποίοι εξ ενστίκτου φοβούνται τους αριθμούς.

Διαβάζοντας πλατωνικά χωρία που περιλαμβάνουν είτε αριθμούς, είτε μαθηματικούς όρους, οι μεν φιλόλογοι αποφεύγουν την εμβάθυνση σ' αυτά «*απλουστεύοντας το κείμενο*», οι δε μαθηματικοί τα αντιμετωπίζουν επιδερμικώς θεωρώντας τα ως διατυπώσεις «*ποιητική αδεία*». (Σπυρίδης, Χ. Χ. 17-21/10/2006).

Ο πεπαιδευμένος μουσικός, όμως, γνωρίζει ότι κάθε φθόγγος χαρακτηρίζεται από μια ποσότητα, δηλαδή μια αριθμητική τιμή (συχνότητα) ή μια αριθμητική σχέση (λόγο συχνοτήτων ή λόγο μηκών ταλαντουμένων τμημάτων χορδής) και από μία ποιότητα, δηλαδή ένα μουσικό ύψος ή ένα ηχόχρωμα. Μόνη της είτε η ποσότητα, είτε η ποιότητα, χαρακτηρίζει τον φθόγγο μονοπλευρώς, δεδομένου ότι αμφοτέρως αποτελούν τις δύο όψεις του αυτού νομίσματος κι αμοιβαίως η μία φωτίζει την άλλη. (Σπυρίδης, Χ. Χ. 2005).

Στο σημείο αυτό ως αρχίσω να ξεδιπλώνω τις σκέψεις μου.

1. *«Υπάρχουν, καθώς φαίνεται, τρεις ηδονές, η μία γνήσια και οι άλλες δύο νόθες».*

Εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι εκ των τριών αναλογιών (αριθμητική, γεωμετρική, αρμονική) η μία, η πρώτη, είναι νόθος, διότι «*αγνοείται η ταυτότητα του λόγου και εξετάζεται μόνον η διαφορά των όρων (αναλογία κατά ποσότητα)*» και οι δύο άλλες είναι γνήσιες (αναλογίες κατά ποιότητα). (Σπυρίδης, Χ. Χ. 2005).

Στην περικοπή τα νούμερα, που αφορούν στις ηδονές, πάνε αντίστροφα, δηλαδή μία ηδονή γνήσια και δύο νόθες.

Περί νόθων και γνησίων ηδονών θα επανέλθω αργότερα, διότι πρέπει να παραχθεί εν συνεχεία πρόσθετη πληροφορία.

2. *«Ο τύραννος ξεπερνώντας και το τελευταίο ακόμα σύνορο των νόθων ηδονών, και ξεφεύγοντας πολύ μακριά από το νόμο και τον ορθό λόγο, ζη πάντοτε με κάτι δουλικές ηδονές, που τις χρησιμοποιεί σαν δορυφόρους, και δεν είναι καθόλου εύκολο να ορίση κανείς πόσο είναι κατώτερος από το βασιλιά, παρά μόνο, ίσως, κατά τον ακόλουθο τρόπο.
Πώς; είπε».*

Η ηδονή που δοκιμάζει ο βασιλικός άνδρας είναι η μόνη γνήσια. Οι ηδονές που δοκιμάζουν ο τιμοκρατικός και ο ολιγαρχικός είναι οι δύο νόθες. Η ηδονή που απολαμβάνει ο τύραννος είναι πιο νόθα και απ' αυτήν του ολιγαρχικού. Η υπέρτατη ηδονή για έναν φιλόσοφο είναι το Αγαθό, που είναι Ιδέα και μάλιστα η Υψίστη Ιδέα. Το Αγαθό ταυτίζεται με τη γνώση.

Όλη η δομή της Πολιτείας του Σωκράτους, όπως περιγράφεται στο διάλογο, προσομοιάζει με το Αριστοκρατικό πολίτευμα. (Σουκισιάν Τ. Μάρτιος 2006).

Όλες οι ποιοτικές εκφράσεις, που εμφανίζονται στο συγκεκριμένο απόσπασμα, με κάποιον αλγόριθμο, τον οποίον ο Πλάτων θα εκθέσει με τον τρόπο του παρακάτω και ο οποίος αναμένεται εναγωνίως, θα ποσοτικοποιηθούν.

3. «Ας πάρουμε τον ολιγαρχικό σαν αφετηρία, ο τύραννος νομίζω πως είναι τρίτος στη σειρά, γιατί ανάμεσά τους στέκει ο δημοκρατικός».
 «Αν λοιπόν αυτά που είπαμε είναι αληθινά, το είδωλο της ηδονής, που συγκατοικεί με τον τύραννο, δεν θάναί κατά τρεις φορές μακρύτερα από την αλήθεια, από όσο είναι το είδωλο που συγκατοικεί με τον ολιγαρχικό;»

Επειδή όλοι θεωρούν ότι με αλχημείες ο Πλάτων παρήγαγε τον αριθμό 729, θεωρώ ότι πρέπει να ευρεθεί ο αναλυτικός αλγόριθμος, που χρησιμοποιεί.

Η τριάδα των ανθρώπων των πολιτευμάτων με αναφορά στον ολιγαρχικό είναι:

1	Ολιγαρχικός
2	Δημοκρατικός
3	Τύραννος

Θεωρώ προς στιγμήν ότι η απόσταση του ολιγαρχικού από μια απόλυτη αφετηρία είναι x . Τότε, των επομένων δύο οι αποστάσεις από αυτήν την απόλυτη αφετηρία θα είναι $2x$ και $3x$, αντιστοίχως.

Για να προχωρήσει σωστά το μοντέλο, θα πρέπει η έννοια «είδωλο ηδονής» να εκφράζεται μαθηματικά με δύναμη η οποία έχει ως βάση την απόσταση του τύπου πολιτικού ανθρώπου από την απόλυτη αφετηρία και εκθέτη την τάξη του τύπου πολιτικού ανθρώπου. Με μουσικούς όρους αυτό σημαίνει ότι η απόσταση από μια απόλυτη αφετηρία για τον Πλάτωνα εκφράζει ένα πυθαγόρειο μουσικό διάστημα και το σχετικό είδωλο ηδονής εκφράζει το πυθαγόρειο γινόμενο ενός ακεραίου αριθμού, που ταυτίζεται με την τάξη του τύπου πολιτικού ανθρώπου, επί ένα μουσικό διάστημα, που εκφράζει την απόσταση του τύπου πολιτικού ανθρώπου από μια απόλυτη αφετηρία.

Τύπος ανθρώπου	Απόσταση από μια απόλυτη αφετηρία	Σχετικό είδωλο ηδονής
Ολιγαρχικός	$y_1 = x$	$y_1^1 = (x)^1$
Δημοκρατικός	$y_2 = 2x$	$y_2^2 = (2x)^2$
Τύραννος	$y_3 = 3x$	$y_3^3 = (3x)^3$

4. «Ο ολιγαρχικός πάλι είναι τρίτος στη σειρά μετά το βασιλικό, αν ταυτίσουμε τον αριστοκρατικό και το βασιλικό».

Με τη νέα τριάδα πολιτικών τύπων ανθρώπου προσδιορίζει την απόσταση του τύπου πολιτικού ανθρώπου από την απόλυτη αφετηρία, που δεν είναι άλλη από τον βασιλικό, τον οποίο στη συνέχεια τον ταυτίζει με τον αριστοκρατικό.

Κανονικά θα έπρεπε να είχε θέσει $x=0$, αφού ως απόλυτη αφετηρία εκλαμβάνει τον βασιλικό άνθρωπο. Αλλά κατά πρώτον συμφώνως προς τα λεγόμενα των μαθηματικών, που συνέγραψαν τις ιστορίες των Μαθηματικών, το μηδέν δεν το ε γνώριζαν τότε, κατά δεύτερον το μηδέν θα κατέστρεφε τα είδωλα ηδονής όλων των τύπων πολιτικών ανθρώπων, αφού ως δυνάμεις με μηδενική βάση θα ισούντο όλες με το μηδέν και κατά τρίτον αρχίζει από τη μονάδα, διότι η Ψυχή του Κόσμου επί του αντιστρόφου δικτυωτού αρχίζει από τη μονάδα.

Τοποθετεί, λοιπόν, για την απόλυτη αφετηρία τον μικρότερο φυσικό αριθμό, το ένα (1), οπότε αβίαστα προκύπτουν τα ακόλουθα:

Τύπος ανθρώπου	Απόσταση
Βασιλικός	Για $x=1$ $y_1 = x = 1$
Αριστοκρατικός	$y_2 = 2x = 2$
Ολιγαρχικός	$y_3 = 3x = 3$

Τύπος ανθρώπου	Απόσταση	Σχετικό είδωλο ηδονής	Απόλυτο είδωλο ηδονής
Ολιγαρχικός	$z_1 = y_3$	$z_1^1 = (y_3)^1$	$3^1 = 3$
Δημοκρατικός	$z_2 = 2y_3$	$z_2^2 = (2y_3)^2$	$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$
Τύραννος	$z_3 = 3y_3$	$z_3^3 = (3y_3)^3$	$(3 \cdot 3)^3 = (3^2)^3 = 3^6 = 729$

5. «Ασφαλώς τρίτος.

Ωστε ο τύραννος, είπα εγώ, απέχει από την αληθινή ηδονή, για να εκφρασθώ με αριθμό, το τριπλάσιο του τριπλασίου.

Φαίνεται.

Καθώς φαίνεται λοιπόν, είπα, θα μπορούσε το είδωλο της ηδονής του τυράννου, ως προς το μήκος, ίσως να παρασταθί με ένα επίπεδο αριθμό.

Βεβαιότατα.

Αν τον αριθμό αυτό τον υψώσουμε στο τετράγωνο και κατόπιν στον κύβο, θα δείξη καθαρά την απόσταση που χωρίζει τον τύραννο από το βασιλιά.

Αυτό είναι φανερό, είπε, σε ένα άνθρωπο που ξαίρει λογιστικά.

Εάν λοιπόν κανείς αναστρέφοντας την αναλογία θελήση να δείξη πόσο αληθινότερη είναι η ηδονή του βασιλιά από την ηδονή του τυράννου, θα βρη άμα κάμη όλους τους πολλαπλασιασμούς, ότι αυτός ζη επτακόσιες είκοσι εννέα φορές ευχαριστότερα, ενώ ο τύραννος ζη δυστυχέστερα άλλες τόσες.

Τι καταπληκτικό αριθμό, εφώναξε, μας έρριξες κατακέφαλα, για να μας δείξης τη διαφορά των δύο ανθρωπίνων τύπων, του δικαίου και του αδίκου, ως προς την ηδονή και τη λύπη».

Η έννοια του επιπέδου αριθμού ανάγεται στον τέλειο αριθμό των Πυθαγορείων, την ιερά τετρακτύ², της οποίας ενσάρκωτες είναι οι αριθμοί 1, 2, 3, 4. Η τετρακτύς ήταν πρωτίστως τιμωμένη από τους Πυθαγορείους, διότι περιείχε όλες τις μουσικές συμφωνίες. Πράγματι, 4:1 είναι ο τετραπλάσιος λόγος και εκφράζει τη συμφωνία (το εύφωνο μουσικό διάστημα) της δις διαπασών, 3:2 είναι ο ημιόλι-

² Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν αναγκαίο το να πλάθουν λέξεις εσωτερικής σημασίας όπως π.χ. φιλοσοφία, κόσμος, τετρακτύς (εκ του τέτταρα και άγω), κάθαρισις, εχεμύθια, κατάρτυσις κ.α., στις οποίες απέδιδαν ιδιαίτερη σημασία.

ος λόγος και εκφράζει τη διαπέντε συμφωνία ή διοξεία, ο 4:3 είναι ο επίτριτος λόγος και εκφράζει τη διατεσσάρων συμφωνία ή συλλαβά, 2:1 είναι ο διπλάσιος λόγος και εκφράζει τη διαπασών συμφωνία.

Η ιερά τετρακτύς συμβολικά παριστάνεται με δέκα κουκίδες, οι οποίες έχουν τριγωνική διάταξη, αριθμητικώς εκφράζεται δια του «τριγωνικού» αριθμού $10=1+2+3+4$ και το πλήθος των κουκίδων εκάστης σειράς της τριγωνικής διατάξεως εκφράζει αυτό που δείχνει το σχήμα 1.

Ο αριθμός 3 εκφράζει το επίπεδο, αφού τρία σημεία ορίζουν ένα επίπεδο.



Σχήμα 1: Η τριγωνική δομή των δέκα κουκίδων της ιεράς τετρακτύος.

Αναφορικώς με τον αριθμό 729, τον οποίον επέλεξε και αναφέρει ο Πλάτων. Αυτός ο αριθμός από τη σκοπιά της μουσικής ως προς ένα μοναδιαίο μήκος ταλαντουμένης χορδής αντιστοιχεί στο μουσικό διάστημα:

$$729 = 9^3 = \frac{9^3}{8^3} \cdot 8^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot (2^3)^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^9$$

το οποίο είναι ένα πυθαγόρειο τρίτονο συν εννέα διαπασών.

Το πυθαγόρειο τρίτονο ήτο το πλέον διάφωνο μουσικό διάστημα του μουσικού συστήματος, το οποίο ε γνώριζε ο Πλάτων. Εξακολουθεί και σήμερα να φέρει τον ίδιο οικτρώς διάφωνο χαρακτήρα (*diabolo in musica*) στο δυτικό τονικό σύστημα 2.500 χρόνια μετά απ' αυτόν.

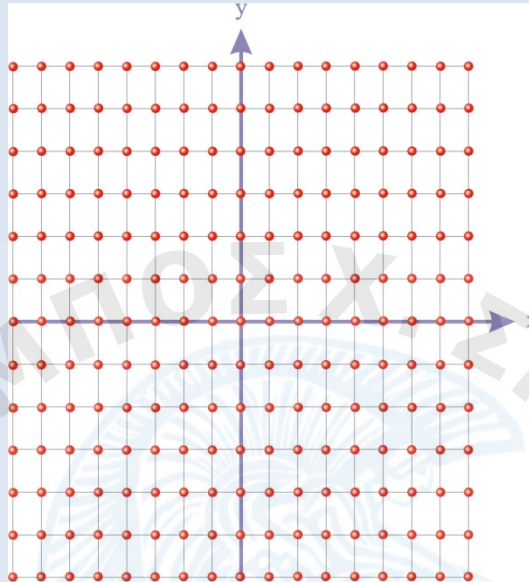
Αυτό το οποίο ο Πλάτων εξετίμησε με τον αριθμό 729 ήτο η σχέση μεταξύ του βασιλέως και του τυράννου και τη σχέση αυτή τη θεωρεί ως τη μεγίστη δυνατή ένταση μέσα σε ένα πολιτισμένο σύστημα.

Όπως έχω ήδη αναφέρει, μπορούμε να συμμερισθούμε την αμηχανία, την οποία αισθάνεται κάποιος μη μουσικός αντικρύζοντας τέτοιους αριθμούς. Για ν' αντιληφθεί κανείς το ενυπάρχον ανάλογο, πρέπει να καταλάβει (όπως ο Πλάτων το είχε ως δεδομένο) ότι στην αρχαιότητα ο μουσικός συμβολισμός εγένετο άμεσα καταληπτός από όλους τους μεμνημένους και γι' αυτό ο Πλάτων τον χρησιμοποιεί συχνά. Όταν κατά τον ρούν της Ιστορίας ο ρόλος της μουσικής από πνευματική ή ψυχική δύναμη εθυσιάσθη εις τον βωμό της ατομικής εκφράσεως και απολαύσεως, η ερμηνεία των άλλοτε ξεκάθαρων κειμένων κατέστη δύσκολη και ακατόρθωτη.

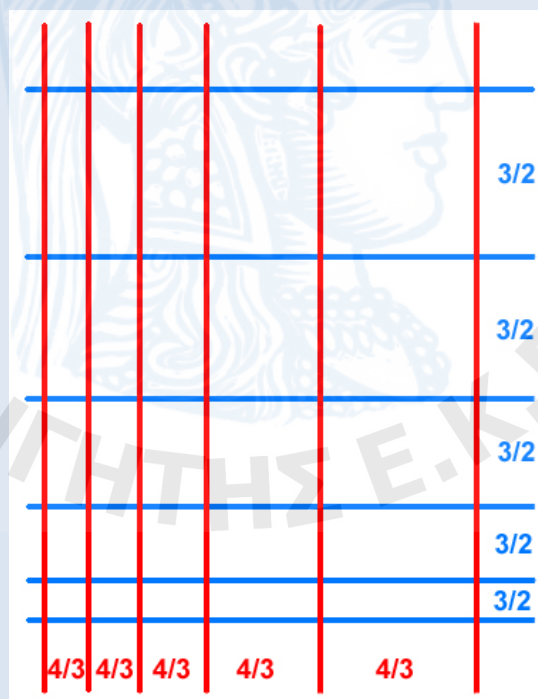
Εις τα κείμενα των Βεδών, τα οποία εγράφησαν το 4000 π.Χ. περίπου, υπάρχει θεμελιωμένη μια πρωτοεπιστήμη αριθμών και φθόγγων. Ο άνθρωπος του καιρού εκείνου εφρόντισε με τους αριθμούς να προσδιορίσει εναλλακτικά χορδίσματα ή εναλλακτικές δομές μουσικών κλιμάκων. (McClain E. G. 2006). Επειδή οι ποιητές περιορίζοντο στους ακεραίους θετικούς ή στους λεγομένους φυσικούς αριθμούς και χρησιμοποιούσαν τους κατά το δυνατόν μικρότερους ακεραίους αριθμούς σε κάθε τονικό γενικό πλαίσιο, μας κατέστησαν ικανούς να ανακαλύψουμε τις μουσικές δομές τους με μαθηματικές μεθόδους, όπως είναι τα εύφωνα διαστήματα (συμφωνίες) του Πυθαγόρου.

Θα αναφερθώ στο σύγγραμμά μου «Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική» και συγκεκριμένα στη θεωρία περί των αντιστρόφων δικτυωτών, που διατυπώνω σ' αυτό.

Με τον όρο *αντίστροφο δικτυωτό* (Σχήμα 2) θα εννοούμε το σύνολο των σημείων που ορίζονται από τις τομές των ευθειών δύο συνεπιπέδων δεσμών παραλλήλων ευθειών ορθογωνίων μεταξύ τους. Στην πρώτη δέσμη οι ευθείες ισαπέχουν κατά διαστήματα δια τεσσάρων και στη δεύτερα κατά διαστήματα δια πέντε (Σχήμα 3).



Σχήμα 2: Το αντίστροφο δικτυωτό σε log-log διάγραμμα.



Σχήμα 3: Οι δύο δέσμες των συνεπιπέδων παραλλήλων ευθειών που δια της τομής των ορίζουν τους κόμβους του αντιστρόφου δικτυωτού.

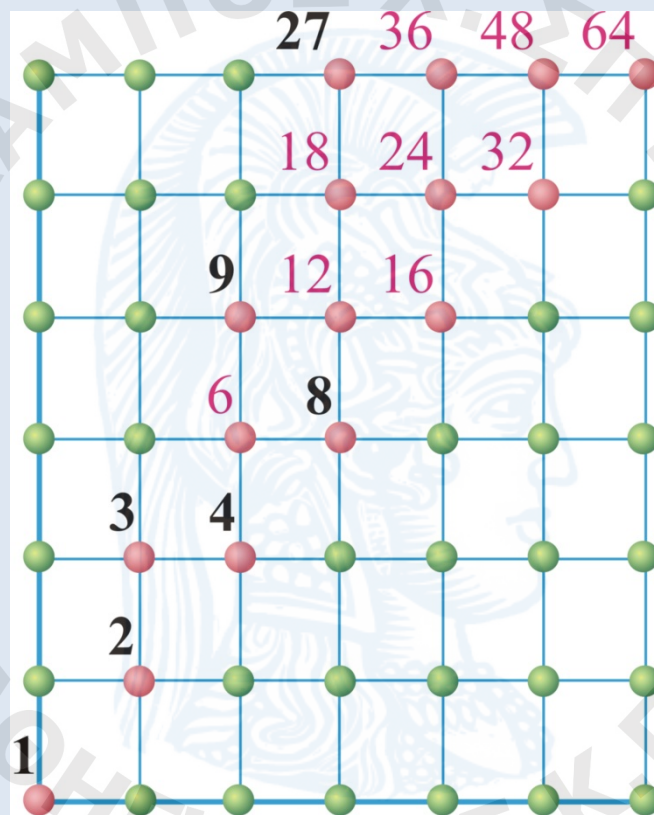
Λόγω της Ευκλείδειου μεθόδου της ανθυφαιρέσεως ή της ανταναιρέσεως εκ του συνόλου των κόμβων του αντιστρόφου δικτυωτού φυσική σημασία έχουν μόνον οι κόμβοι, οι οποίοι αντιστοιχούν σε δονούμενα τμήματα χορδής με μήκη εκφραζόμενα δι' **ακέραιων** αριθμών. Η μικρότερη αριθμητική τιμή αποδεκτού κόμβου είναι αυτή της μο-

νάδος και εκφράζει το μήκος της «ανθυφαιρετικής» μονάδος, η οποία δια τούτο είναι και αδιαίρετος.

Εκεί ισχυρίζομαι ότι ο Πλάτων με τις δύο τετρακτύες αριθμών (1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27) που δομούν τη μεγίστη τετρακτύ του (1, 2, 3, 4, 8, 9, 27) προσπαθεί να περιχαρακώσει ένα πεδίο τιμών, την *Ψυχή του Κόσμου*, εντός του οποίου θα ευρίσκονται οι λύσεις του προβλήματός του περί Ψυχογονίας. Το πεδίο αυτό των τιμών, όπως αποδεικνύω, είναι μια τριγωνικής μορφής περιοχή του αντιστρόφου δικτυωτού (Σχήμα 4), η οποία έχει κορυφή επί του κόμβου αναφοράς και πλευρές καθοριζόμενες από τις γεννήτριες συναρτήσεις

$$\phi(x) = 2^x \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{και} \quad \rho(y) = 3^y \quad y = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Όλοι δε οι ενδιαμέσοι αριθμοί της Ψυχής του Κόσμου είναι της μορφής $\sigma(x, y) = 2^x \cdot 3^y \quad x, y = 0, 1, 2, 3, \dots$



Σχήμα 4: Η Ψυχή του Κόσμου επί του αντιστρόφου δικτυωτού.

Με τον εκθετικό χαρακτήρα, λοιπόν, των εννοιών σχετικό και απόλυτο είδωλο ηδονής εις τον αλγόριθμό του ο Πλάτων προσπαθεί να μας καθοδηγήσει να κατασκευάσουμε σωστά το «αντίστροφο δικτυωτό» -κάτι τέτοιο υποψιάζομαι ότι είχε στο μυαλό του- και να τοποθετήσουμε επ' αυτού τους αριθμούς της Ψυχής του Κόσμου.

Πράγματι, λεπτολογούντες θα λέγαμε ότι με τον όρο σχετικό είδωλο ηδονής ο Πλάτων ορίζει κατ' αλγεβρικών τρόπον –θα λέγαμε σήμερα (!)- τις γεννητρίους συναρτήσεις $\phi(x) = 2^x \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots$ και $\rho(y) = 3^y \quad y = 0, 1, 2, 3, \dots$ οι οποίες καθορίζουν τις θέσεις των κόμβων του άνω και κάτω ορίου της Ψυχής Κόσμου καθώς επίσης την συνάρτηση $\sigma(x, y) = 2^x \cdot 3^y \quad x, y = 0, 1, 2, 3, \dots$ που καθορίζει τις θέσεις των ενδιαμέσων κόμβων της Ψυχής Κόσμου.

Με τον όρο δε απόλυτο είδωλο ηδονής ορίζει επακριβώς την τιμή εκάστου κόμβου, δηλαδή το μήκος του ταλαντουμένου τμήματος χορδής που αυτός αντιπροσωπεύει, οπουδήποτε εντός της Ψυχής Κόσμου.

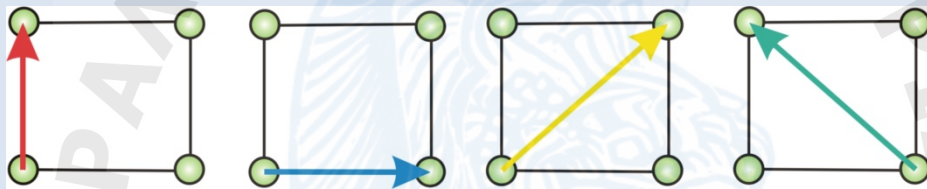
Πράγματι, το απόλυτο είδωλο ηδονής του Δημοκρατικού πολιτικού ανδρός είναι κατά Πλάτωνα ο αριθμός 36 ήτοι:

$$36 = (2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = \sigma(x, y) = 2 \text{ διαπασών} + 2(\text{διαπασών και διαπέντε}) =$$

$$= \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

Το αντίστροφο δικτυωτό είναι ένας ανισότροπος χώρος ως προς τη μετατόπιση, αφού η κίνηση μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων

- ⊗ κατά την κατακόρυφο διεύθυνση εκφράζει διάστημα διαπέντε
- ⊗ κατά την οριζόντιο διεύθυνση εκφράζει διάστημα διατεσσάρων
- ⊗ κατά την διαγώνιο διεύθυνση (από κάτω αριστερά προς άνω δεξιά) εκφράζει διάστημα διαπασών
- ⊗ κατά την διαγώνιο διεύθυνση (από κάτω δεξιά προς άνω αριστερά) εκφράζει διάστημα επογδούς τόνου.



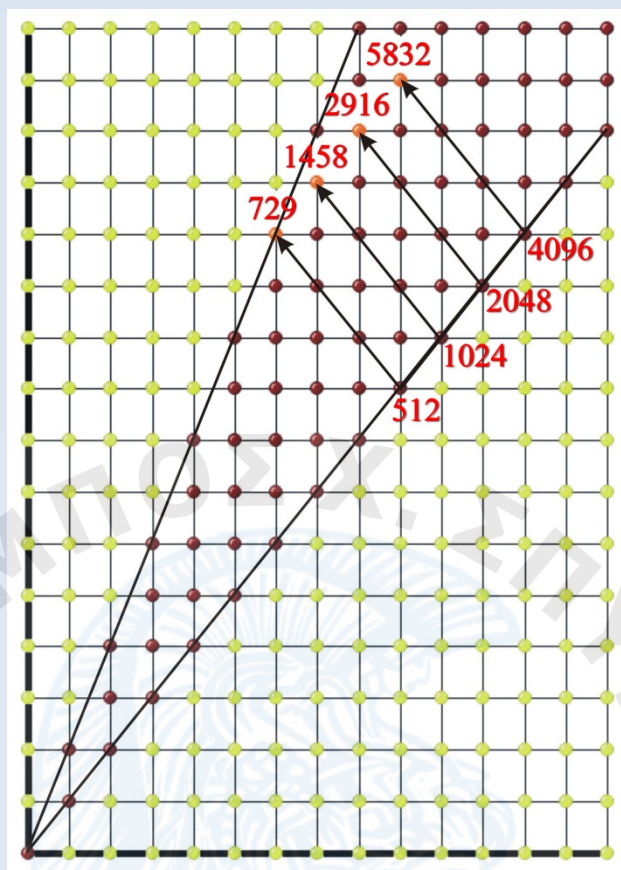
Διαπιστώνει κανείς ότι υπάρχουν δύο και μοναδικοί κόμβοι ο 512 επί της πρώτης γεννητριάς συναρτήσεως και ο 729 επί της δευτέρας, οι οποίοι απέχουν ακριβώς τρεις επογδούς τόνους μεταξύ τους. Υπάρχουν, βέβαια, και οι κόμβοι

$$1458 \left[\left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^{10} = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot 1024 \right],$$

$$2916 \left[\left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^{11} = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot 2048 \right] \text{ και}$$

$$5832 \left[\left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^{12} = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot 4096 \right],$$

οι οποίοι δεν κείνται επί της δευτέρας γεννητριάς συναρτήσεως, που απέχουν και αυτοί τρεις επογδούς τόνους από τους κόμβους 1024, 2048 και 4096 της πρώτης γεννητριάς συναρτήσεως και οι οποίοι θα μπορούσαν να ενταχθούν σε μία κλάση κόμβων σε απόσταση ενός διαπασών ο ένας από τον άλλον με πρώτον τον κόμβο 729, δηλαδή (729, 1458, 2916, 5832) (Σχήμα 5).



Σχήμα 5: Η κλάση των κόμβων (729, 1458, 2916, 5832) επί της Ψυχής του Κόσμου.

Γιατί επέλεξε ο Πλάτων να αναφέρει τον αριθμό 729 και δεν ανέφερε κάποιον από τους τρεις άλλους αριθμούς της κλάσεως; Θεωρώ λογικοφανείς τους εξής τέσσερις λόγους:

1. Είναι ο μόνος από τους τέσσερις, που εκφράζεται μονολεκτικά. Το αριθμητικό επίρρημα «έννεακαιεικοσικαιεπτακοσιοπλασιάκις» που εκφράζει αρχαϊστί «729 φορές» είναι η μακροσκελέστερη λέξη μέσα σε ολόκληρη την Πλατωνική γραμματεία και δομείται από 35 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου. (Σπυριδής, Χ. Χ. 2004).
2. Όπως έχω προαναφέρει, για τους Πυθαγορείους το θεμέλιο και η φύση της δικαιοσύνης εμφανίζονται σε όλα τα τετράγωνα των αριθμών (αριθμοί ισάκις ίσοι), διότι είναι το γινόμενο δύο ίσων αριθμών, αλλά ιδιαίτερως η φύση της δικαιοσύνης αποκαλύπτεται στα τετράγωνα των περιπτόων αριθμών, επειδή έχουν ένα μέσον. Το τετράγωνο του πρώτου περιπτού αριθμού, δηλαδή το $3^2 = 9$, είναι ο πλέον αντιπροσωπευτικός, τον οποίον ο Πλάτων επεδίωκε και στηρίχθηκε σ' αυτόν.
3. Οι πυθαγόρειοι προτιμούσαν από την πληθώρα των δυνατών λύσεων, αυτές που εκφραζόντουσαν με τους μικρότερους φυσικούς αριθμούς.
4. Αυτόν τον λειτουργικό αλγόριθμο σκέφθηκε ο Πλάτων, αυτόν και εφάρμοσε, διότι με τον αριθμό 729 και μόνον ωδηγείτο στον στόχο του.

Ο αριθμός 729 πιστεύω ότι είναι ένας αριθμός παγίδα, ο οποίος επαγίδευσε πολλούς ερευνητές των μαθηματικο-μουσικών Πλατωνικών προβλημάτων. Στο σύγγραμμά μου «Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο μουσική» αναλυτικά αναφέρω ότι η λύση του προβλήματος της Ψυχογονίας, που αρχίζει από την τιμή 384 και την ο-

ποία έδωσε ο Τίμαιος, ο φιλόσοφος, είναι λανθασμένη. Δικαιολογώ τη λύση του Σευήρου, που αρχίζει από την τιμή 768, με την οποία συμφωνεί και η δική μου λύση.

Θεωρώ ότι, προκειμένου να περιέχεται ο αριθμός 729 στη λύση του πλατωνικού προβλήματος περί Ψυχογονίας, ωδηγήθηκε ο Τίμαιος σε λάθος αποτέλεσμα. Στη λύση, που έδωσε ο Σευήρος, ο αριθμός 729 δεν υπάρχει, αφού αυτή ξεκινά από τον αριθμό 768. Το γεγονός αυτό δεν θεωρώ ότι παίζει κάποιο ρόλο, δεδομένου ότι ο αριθμός 729 αναφέρεται σε πρόβλημα της πλατωνικής Πολιτείας και όχι του πλατωνικού Τιμαίου.

Τώρα θεωρώ ότι μπορούμε να επανέλθουμε στο θέμα των γνήσιων και των νόθων ηδονών.

«Υπάρχουν, καθώς φαίνεται, τρεις ηδονές, η μία γνήσια και οι άλλες δύο νόθες».

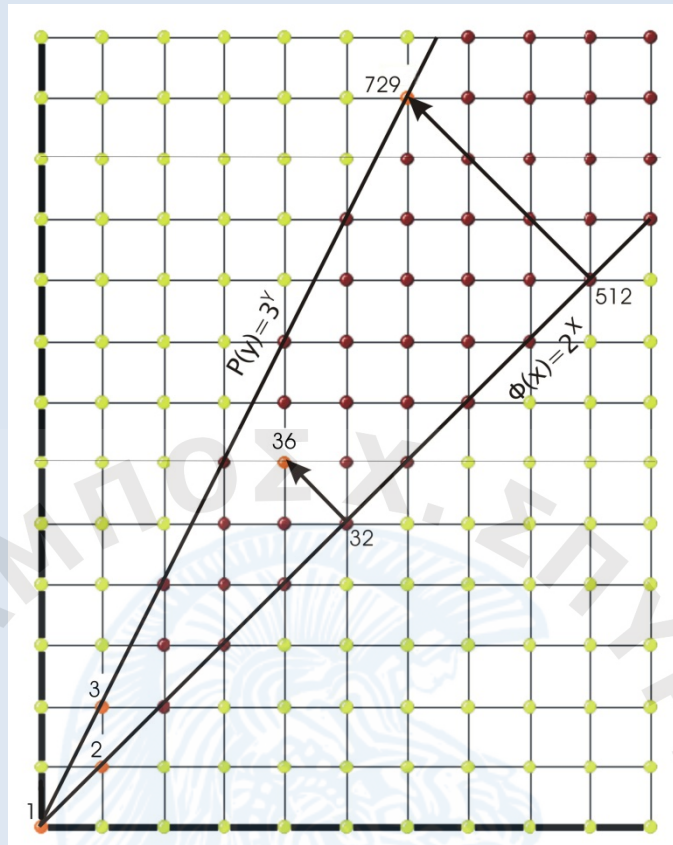
Τη δήλωση αυτή την κάνει ο Πλάτων, όταν ομιλεί για τον Βασιλικό (1), τον Αριστοκρατικό (2) και τον Ολιγαρχικό (3) τύπο ανθρώπων.

«Ο ολιγαρχικός πάλι είναι τρίτος στη σειρά μετά το βασιλικό, αν **ταυτίσουμε** τον αριστοκρατικό και το βασιλικό».

Αυτή η δήλωση είναι εξαιρετικά σημαντική για τον εξής λόγο:

Τοποθετώντας τους αριθμούς 1, 2 και 3 επί των αντιστοίχων κόμβων της Ψυχής του Κόσμου του αντιστρόφου πλέγματος, παρατηρούμε ότι δύο εξ αυτών, οι 1 και 2, κείνται επί διαστήματος ενός διαπασών. Και μάλιστα αυτοί είναι οι ονομαζόμενοι «νόθες ηδονές». Ο τρίτος, ο 3, κείται από τον 2 σε διάστημα δια πέντε και από τον 1 σε διάστημα διαπασών και δια πέντε. Και μάλιστα αυτός είναι η γνήσια ηδονή.

Με μουσικούς όρους αυτό σημαίνει ότι ο φθόγγος του κόμβου 3, αναγόμενος εντός ενός διαπασών με αφαίρεση ενός διαπασών, απέχει από τον φθόγγο του κόμβου 1 και από τον φθόγγο του κόμβου 2 διάστημα δια πέντε (Σχήμα 6). Να σημειωθεί ότι με την αναγωγή ενός διαστήματος εντός ενός διαπασών δεν αλλοιούται ο εύφωνος ή ο διάφωνος χαρακτήρα του μουσικού διαστήματος, αφού η μετατόπιση κατ' οκτάβες ενός φθόγγου τίποτα δεν μεταβάλλει στο αρμονικό του περιεχόμενο.



Σχήμα 6: Τα είδωλα ηδονής των πολιτικών ανδρών επί του αντιστρόφου πλέγματος.

Βάσει αυτών θεωρώ ότι όλοι οι κόμβοι του αντιστρόφου πλέγματος, οι οποίοι κείνται σε αποστάσεις ακεραίου πλήθους διαπασών από τις «νόθες ηδονές», δηλαδή επί της γεννητριάς συναρτήσεως $\phi(x) = 2^x$ $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ αποτελούν και αυτοί «νόθες ηδονές» με την έννοια ότι σχηματίζουν μια ευθεία αναφοράς για τη μέτρηση των ειδώλων ηδονής όλων των δυνατών «γνησίων ηδονών».

Έτσι, λοιπόν, ο αριθμός $36 = \left(\frac{9}{8}\right) \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^5$, που αντιπροσωπεύει το είδωλο ηδονής

του δημοκρατικού άνδρα, απέχει από τον κόμβο 32, δηλαδή την ευθεία αναφοράς, κατά ένα επόγδοο διάστημα, διάφωνο μεν, αλλά αρμονικό κύτταρο όλων των μουσικών συστημάτων της αρχαιοελληνικής μουσικής. Με μουσικούς όρους αυτό σημαίνει ότι ο φθόγγος του 36, αναγόμενος εντός ενός διαπασών με αφαίρεση πέντε διαπασών, απέχει από τον φθόγγο αναφοράς, δηλαδή τον 1, κατά ένα επόγδοο διάστημα.

Αναφορικώς με το αρμονικό περιεχόμενο του αριθμού 729, τον οποίον επέλεξε να μνημονεύσει ο Πλάτων και ο οποίος αντιπροσωπεύει το είδωλο ηδονής του τυραννικού άνδρα, ωμίλησα προηγουμένως. Αυτός ο αριθμός απέχει από τον κόμβο του 512, δηλαδή την ευθεία αναφοράς, κατά ένα πυθαγόρειο τρίτονο.

Με μουσικούς όρους αυτό σημαίνει ότι ο φθόγγος του 729, αναγόμενος εντός ενός διαπασών με αφαίρεση εννέα διαπασών, απέχει από τον φθόγγο αναφοράς, δηλαδή τον 1, κατά ένα πυθαγόρειο τρίτονο.

Όπως λέει ο καθηγητής Εμμανουήλ Μικρογιαννάκης, η εκτροπή των πολιτευμάτων προχωρεί ολοένα προς κατώτερα διαζώματα. Συγκεκριμένα από την τιμοκρατία προχωρεί σε νοσηρότερες μορφές και φθάνει με κατακόρυφη καθοδική πορεία στην τυραννίδα. Οι μεταβάσεις είναι μονοσήμαντες. Κάθε μεταβολή γίνεται προς συγκεκριμένο πολιτειακό τύπο, που είναι υποδεέστερος, και η κατάληξη είναι η τυραννίς. Η τυραννίς

νίς προέρχεται μόνον από τη δημοκρατία. Το χειρότερο με την τυραννίδα είναι ότι περιερχόμεθα σε αδιέξοδο, σε απορία. Κατά τον Πλάτωνα ο τύραννος είναι όχι απλώς δούλος, αλλά ο δουλικώτερος πάντων. (Μικρογιαννάκης, Εμ. 2002).

Το μουσικολογικό περιεχόμενο των ανωτέρω, που αναφέρει ο καθηγητής Εμμανουήλ Μικρογιαννάκης, είναι το εξής. Η δυσαρμονία προχωρεί από το σύμφωνο διάστημα της ταυτοφωνίας και του διαπασών προς όλο και περισσότερο διάφωνα μουσικά διαστήματα και φθάνει με κατακόρυφη καθοδική πορεία στην αυξημένη τετάρτη, το πυθαγόρειο τρίτονο $\left(\frac{9}{8}\right)^3$. Η αυξημένη τετάρτη, το πυθαγόρειο τρίτονο, προέρχεται μόνον

από τον επόγδοο τόνο $\left(\frac{9}{8}\right)$, αφού δομείται αποκλειστικώς από τρεις επογδούς τόνους. Το χειρότερο με την αυξημένη τετάρτη, το πυθαγόρειο τρίτονο, είναι ότι αισθανόμεθα στ' αυτιά μας τον οικτρώς διάφωνο χαρακτήρα του (*diabolo in musica*). Κατά τον Πλάτωνα η αυξημένη τετάρτη, το πυθαγόρειο τρίτονο, δεν είναι απλώς διάφωνο διάστημα, αλλά το διαφωνέστερο πάντων των διαστημάτων.

Ο καθηγητής κ. Εμμανουήλ Μικρογιαννάκης, ερμηνεύοντας με άλλο σκεπτικό τον Πλατωνικό αλγόριθμο, αναφέρει ότι οι τύραννοι θα έχουν βαθμό ευδαιμονίας στην κλίμακα 0-3, ο δημοκρατικός ανήρ 3-9, ο ολιγαρχικός 9-27, ο τιμοκρατικός 27-81, ο αριστοκρατικός 81-243 και ο φιλόσοφος-βασιλεύς 243-729. (Μικρογιαννάκης, Εμ. 2002).

Οι ανωτέρω αναφερόμενες τιμές κλίμακος αποτελούν αποκλειστικώς τιμές της δεύτερης γεννήτριας συναρτήσεως $\rho(y) = 3^y$ $y = 0, 1, 2, 3, \dots$ της Ψυχής του Κόσμου.

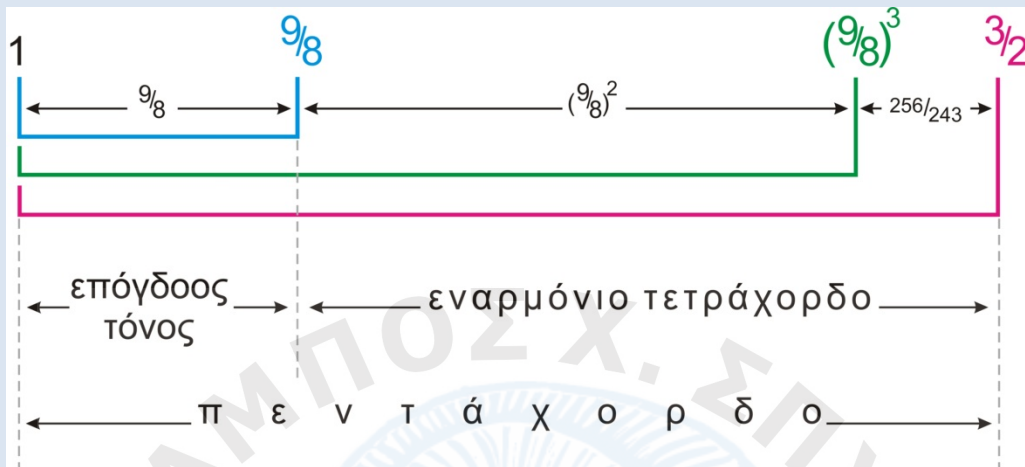
Κατά την δική μου ερμηνεία του Πλατωνικού αλγορίθμου, δίνοντας για τους δύο πρώτους τύπους πολιτικού ανδρός τιμές για το απόλυτο είδωλο ηδονής τους ίσες με τις τιμές της απόστασής τους από το απόλυτο σημείο αναφοράς, έχουμε τους εξής βαθμούς ευδαιμονίας:

Τύπος ανθρώπου	Απόλυτο είδωλο ηδονής
Βασιλικός	1
Αριστοκρατικός	2
Ολιγαρχικός	$3^1 = 3$
Δημοκρατικός	$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$
Τύραννος	$(3 \cdot 3)^3 = (3^2)^3 = 3^6 = 729$

Οι τιμές αυτές των απολύτων ειδώλων ηδονής, αναγόμενες εντός του ενός διαπασών με αρχή τον φθόγγο αναφοράς, δηλαδή τον 1, σχηματίζουν τα εξής μουσικά διαστήματα $\left[1, \frac{9}{8}, \left(\frac{9}{8}\right)^3, \frac{3}{2}\right]$ (επόγδοος τόνος, πυθαγόρειον τρίτονον, δια πέντε), τα ο-

ποία δομούν ένα πεντάχορδο με διαστηματική δομή $\left[1, \frac{9}{8}, \left(\frac{9}{8}\right)^2, \frac{256}{243}\right]$ (επόγδοος τόνος, πυθαγόρειον δίτονον, λείμμα). Τούτο σημαίνει ότι το εν λόγω πεντάχορδο δομείται από έναν επόγδοο τόνο $\left(\frac{9}{8}\right)$ συν ένα τετράχορδο $\left[\left(\frac{9}{8}\right)^2, \frac{256}{243}\right]$. Το τετράχορδο αυτό

δομείται από ένα ασύνθετο δίτονο και από πυκνό μεγέθους λείμματος. Άρα πρόκειται για τη δομή ενός εναρμονίου τετραχόρδου, για το οποίο ήθελε, κατά τη γνώμη μου, να μιλήσει αλληγορικά ο Πλάτων (Σχήμα 7).



Σχήμα 7: Οι τιμές των απολύτων ειδώλων ηδονής, αναγόμενες εντός του ενός διαπασών με αρχή τον φθόγγο αναφοράς, δηλαδή τον 1, σχηματίζουν μουσικά διαστήματα που δομούν ένα εναρμόνιο πεντάχορδο.

Το δίτονον είναι το χαρακτηριστικό διάστημα ενός τετραχόρδου με δομή εναρμονίου γένους. Το υπόλοιπο διάστημα του εναρμονίου τετραχόρδου, το ονομαζόμενον πυκνόν, δηλαδή το διάστημα λιχανός-υπάτη έχει μέγεθος ενός λείμματος (256:243). Για τη διαίρεση αυτού του διαστήματος, του πυκνού, δεν μας αναφέρει τίποτα ο Πλάτων, αλλά, ως Πυθαγόρειος, θα ασπάζεται, εικάζω, τα όσα αναφέρονται στην 1η Πρόταση της μουσικής πραγματείας *Κατατομή Κανόνος* του Ευκλείδου, δηλαδή «Αί παρυπάται καὶ αἱ τρίται οὐ διαιροῦσι τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα». Με άλλα λόγια το πυκνόν διαιρείται από τις παρυπάτες στα τετράχορδα υπατών και μέσων και από τις τρίτες στα τετράχορδα συνημμένων, διεζευγμένων και υπερβολαίων σε δύο διαστήματα. Στην Πυθαγόρειο θεωρία τα δύο αυτά διαστήματα είναι άνισα, αλλά στην Αριστοξένειο θεωρία τα δύο αυτά διαστήματα είναι ίσα μεταξύ τους. Ίσως λόγω αυτού του συγκερασμού ο Αριστοξένος (Αρμονικά 1.22-26) ασχολείται διεξοδικά με τις θέσεις των λιχανών και των παρρητών σε σχέση με αυτό που κάνει για τις θέσεις των παρυπατών και των τριτών (Αρμονικά 1. 26-27).

Σχόλια

Η μουσικολογική αλληγορία της Πλατωνικής Πολιτειολογίας κρίνεται ως εξαιρετικά ενδιαφέρουσα και αποκαλυπτική για τις γνώσεις του Πλάτωνος –και των μουσικών της εποχής του- όσον αφορά στο αρμονικό περιεχόμενο των μουσικών διαστημάτων. Πράγματι αξιολογεί και κατατάσσει τα μουσικά διαστήματα της ταυτοφωνίας, του διαπασών, του διαπέντε, του επογδού και του τριτόνου με βάση τη δυσαρμονία (παραφωνία) που προκαλούν κατά την ακρόασή τους.

Η Μουσική Ακουστική διδάσκει ότι ένας σύνθετος ήχος χαρακτηρίζεται από την αρμονική του δομή, δηλαδή από τον θεμέλιό του και το πλήθος των αρμονικών του και ότι όταν δύο σύνθετοι ήχοι συνηχούν, ο θεμέλιος και οι αρμονικοί εκάστου ήχου συμμετέχουν στο ερέθισμα, που φθάνει στο αυτί του ακροατού. Βάσει αυτών σήμερα εξηγούμε

τη δυσαρμονία είτε με το πλήθος των διακροτημάτων που συμβαίνουν ανάμεσα στους μη κοινούς αρμονικούς των συνακρωμένων ήχων, είτε με τους φθόγγους συνδυασμού [πρώτοι ($f_1 - f_2$, $f_1 > f_2$) και δεύτεροι ($2 \cdot f_2 - f_1$) τόνοι διαφοράς] των θεμελίων συχνοτήτων (f_1) και (f_2) των συνακρωμένων ήχων, λόγω της μη γραμμικής συμπεριφοράς του ακουστικού μας οργάνου. Έτσι, κατατάσσουμε ακριβώς με την ίδια σειρά δυσαρμονίας τα εν λόγω μουσικά διαστήματα (Σπυριδής, 1996). Στην εποχή του Πυθαγόρου και του Πλάτωνος πώς γινόταν η κατάταξη; Απλώς δια της ακρόασης των μουσικών διαστημάτων; Δεν ε γνώριζαν τα περί διακροτημάτων; Τότε ποιος ο ρόλος των αριθμών 1, 2, 3, 4 της ιεράς τετρακτύος, αφού σήμερα γνωρίζουμε ότι όσο μικρότεροι είναι οι αριθμοί που εκφράζουν το λόγο των θεμελίων των δύο συνθέτων ήχων, τόσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός της συμφωνίας του διαστήματός των, διότι κατά τη θεωρία των διακροτημάτων οι μικροί αριθμοί συνεπάγονται την απουσία των ενοχλητικών διακροτημάτων μεταξύ των υψηλότερας τάξεως αρμονικών;

Πρέπει να σημειωθεί ότι μέχρι στιγμής μόνον οι Προτάσεις ιζ και ιη της Ευκλείδειου πραγματείας Κατατομή κανόνος γνωρίζαμε ότι αναφέρονται στο εναρμόνιο γένος των αρχαίων Ελλήνων, διότι οι εν λόγω προτάσεις δεν αναφέρονται από τον Πορφύριο. Επειδή, βεβαίως, ο Ευκλείδης πουθενά προηγουμένως δεν κάνει ονομαστικά μνεία των γενών, υπάρχει η άποψη ότι αυτές οι Προτάσεις δεν είναι μέρος της αρχικής πραγματείας, αλλά ότι είναι κατοπινά ενθέματα –κατά την άποψή μου ευτυχώς-.

Το δίτονον είναι το χαρακτηριστικό διάστημα ενός τετραχόρδου με δομή εναρμονίου γένους. Το δίτονο εμφανίζεται μεταξύ του λιχανού και του φθόγγου κορυφής του τετραχόρδου π.χ. μεταξύ λιχανού μέσων και της μέσης. Βλέπε και 7 Αριστοξ. Στοιχ. Αρμον. 22.27-23.22, 50.22-25. Στον Αρχύτα 1.21 και Πτολ. Αρμον. 30.9ff αναφέρεται αντί διτόνου $(9:8) \times (9:8) = 81:64$, το διάστημα $80:64 = 5:4$, το οποίο είναι κατά $(81:64):(80:64) = (81:80)$ –ένα κόμμα- μικρότερο του διτόνου. Το υπόλοιπο διάστημα του εναρμονίου τετραχόρδου, το ονομαζόμενον πυκνόν, δηλαδή το διάστημα λιχανός-υπάτη έχει μέγεθος ενός λείμματος ($256:243$), βλέπε Φιλόλαο (1.12 αποσπ. 6), Πλάτωνα (2.3 Τίμ. 35b-36c) και την Πρόταση 20 στην Ευκλείδου κατατομή κανόνος.

Η δομή του εν λόγω εναρμονίου πενταχόρδου (επόγδοος τόνος + εναρμόνιο τετραχόρδο) είναι κατά την κατιούσα διαδοχή, αφού το πυκνόν πάντοτε καταλαμβάνει τη χαμηλότερη συχνοτική περιοχή της δομής. Απ' εδώ βλέπουμε ότι ο Πλάτων προσλαμβάνει άνωθεν, δηλαδή ο επόγδοος τόνος –ως προσλαμβανόμενος- είναι στην υψηλότερη συχνοτική περιοχή της δομής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Σπυριδής, Χαράλαμπος Χ. (2006) «Αντίστροφα δικτυωτά», στο *Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*. Σελ. 157 κ.ε. Θεσσαλονίκη: Grapholine.
- _____ (2006) «Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα», στο *Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*. Σελ. 47-57. Θεσσαλονίκη: Grapholine.
- _____ (2005) «Πυθαγόρειες Αναλογικότητες ή Αναλογίες ή Μεσότητες», στο *Ευκλείδου Κανόνος κατατομή*. Σελ. 309 κ.ε. Αθήνα: Γαρταγάνης.
- _____ (2004) *Ο δυΐσμός του μουσικού διαστήματος*. Αθήνα: Γαρταγάνης.
- _____ (2005) *Φυσική και Μουσική Ακουστική*. Θεσσαλονίκη: Grapholine.
- _____ (2005) *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ κανόνος κατατομή*. Αθήνα: Γαρταγάνης.
- _____ (2006) *Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*. Θεσσαλονίκη: Grapholine.
- _____ (17-21/10/2006) Οί Πυθαγορικοί, οίς πολλαχῆ ἔπεται Πλάτων, τὴν μουσικὴν φασιν ἐναντίων συναρμογὴν καὶ τῶν πολλῶν ἔνωσιν καὶ τῶν δίχα φρονούντων συμφρόνησιν· Θέων Σμυρναῖος, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων*, 12, 10-12. Εισήγηση στο Γ' Διεθνές Συνέδριο «Θεωρία και Πράξη της Ψαλτικής Τέχνης. Η Οκταηχία». Αθήνα: Μέγαρο Μουσικής.
- _____ (2004) «ΤΑ ΟΜΗΡΙΚΑ ΕΠΗ (ΙΛΙΑΣ ΚΑΙ ΟΔΥΣΣΕΙΑ) ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΥΛΩΝΑ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ», στο *Επιστημονική Επετηρίς της Φιλοσοφικής Σχολής του Πανεπιστημίου Αθηνών Τόμος ΛΕ' (2003-2004)*. Σελ. 81-107, Αθήνα.
- _____ (1996) «Τόνοι συνδυασμού – Διακροτήματα», στο *Μουσική Ακουστική*. Σελ. 141 κ.ε. Θεσσαλονίκη: Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.
- Σουκισιάν Τακβόρ (Μάρτιος 2006) Τα πολιτεύματα στην Πολιτεία του Πλάτωνα. Εισήγηση στα μέλη του Ομίλου Μελετών.
- Σακελλαρίου, Γεώργιος Θ. (1962) Πυθαγόρας ο Διδάσκαλος των αιώνων: Ιδεοθέατρον.
- Μικρογιαννάκης, Εμμανουήλ. (2002) «Πολιτειακή παθολογία κατά τον Πλάτωνα της Πολιτείας», στο ΠΛΑΤΩΝ, Τόμος Α', Αφιέρωμα στον Δημήτρη Ζ. Ανδριόπουλο. Σελ. 245 κ.ε. Αθήνα: Παπαδήμας.
- Σημαιοφορίδης, Ηρ. (2002) «Πλατωνική πολιτειολογία», στο ΠΛΑΤΩΝ, Τόμος Α', Αφιέρωμα στον Δημήτρη Ζ. Ανδριόπουλο. Σελ. 261 κ.ε. Αθήνα: Παπαδήμας.
- McClain Ernest G. (2006) *The myth of invariance*. New York: Patrick A. Heelan, Editor, Nicolas Hays, Nicolas Hays, Ltd.
- Παπαθεοδώρου, Α. – Παππά, Φ. (μετ.) (1939) *Πλάτωνος Πολιτεία (ή περί δικαίου πολιτικός)*. Αθήνα: Επιστημονική Εταιρεία των Ελληνικών Γραμμάτων ΠΑΠΥΡΟΣ.