

Ερμηνεία του κανόνος ή νόμου των Bode - Titius

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης,

Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής,
Διευθυντής Τομέως Τεχνολογίας Ήχου, Μουσικοπαιδαγωγικής
& Βυζαντινής Μουσικολογίας,
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας
Τμήματος Μουσικών Σπουδών
Φιλοσοφικής Σχολής
Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

hspyridis@music.uoa.gr



Εικόνα 1: Johann Elert Bode (1747–1826). Γερμανός Αστρονόμος, διευθυντής του Αστεροσκοπείου του Βερολίνου. Εικοσιπενταετής ενέδυσεν μετά μαθηματικού ιματίου την σειράν των αριθμών Titius, διατυπώσας τον ομώνυμον κανόνα (1772) δια του οποίου υπεδεικνύετο η ύπαρξις ενός ετέρου πλανήτου μεταξύ Άρεως και Διός, ένθα σήμερον υπάρχει η γνωστή ζώνη των αστεροειδών, προελθούσα πιθανώς εκ της διασπάσεως υπάρξαντος πλανήτου.



Εικόνα 2: Johann Daniel von Tietz ή Titius (1729-1796) μετά τον εκλατινισμόν του ονόματος Tietz. Γερμανός Φυσικός, Μαθηματικός και Αστρονόμος, καθηγητής εις το Πανεπιστήμιον της Βιττεμβέργης. Το έτος 1766 ωμίλησεν περί μιας εμπειρικής σειράς αριθμών καθοριζόντων την μέσην απόστασιν των γνωστών εις αυτόν έξι πλανητών Ερμού, Αφροδίτης, Γης, Άρεως, Διός, Κρόνου και προέβη εις σχετικήν δημοσίευσιν.

Γενικά

Πρόκειται περί μιας σπουδαίας εμπειρικής ανακαλύψεως κατά το έτος 1772, ανερμηνεύτου έως σήμερον, γενομένης υπό του Γερμανού Αστρονόμου Johann Elert Bode, διευθυντού του Αστεροσκοπείου του Βερολίνου επί τη βάσει παλαιότερων αστρονομικών παρατηρήσεων του

Γερμανού Φυσικού, Μαθηματικού και Αστρονόμου Daniel von Tietz ή Titius, μετά τον εκλατινισμόν του ονόματος Tietz.

Ο κανών ή νόμος των Bode-Titius εκφράζει μίαν σειράν αριθμών εκ της οποίας προκύπτουν προσεγγιστικώς εις αστρονομικές μονάδες (Α.Υ.) οι μέσες αποστάσεις των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος εκ του γεννήτορος αυτών, του Ηλίου.

Μία σειρά αριθμών, παρομοίων προς τους αριθμούς των Bode-Titius, μνημονεύεται το πρώτον εις το σύγγραμμα του David Gregory «Στοιχεία Αστρονομίας», δημοσιευθέν το έτος 1715 δια της προτάσεως: «Υποθεθείσθω ότι η απόστασις Γης Ηλίου υποδιαιρείται εις δέκα ίσα τμήματα, τότε ο Ερμής θα απέχει του Ηλίου περίπου τέσσερα, η Αφροδίτη επτά, ο Άρης δεκαπέντε, ο Ζευς πενήντα δύο και ο Κρόνος ενενήντα έξι τμήματα».

Παρομοία πρότασις, ίσως παράφρασις της ανωτέρω προτάσεως του Gregory, εμφανίζεται εις μίαν εργασίαν, δημοσιευθείσα το έτος 1724 υπό του Christian Wolff.

Ο Johann Daniel Titius διετύπωσεν το έτος 1766 την πρότασιν: Υποθεθείσθω ότι η απόστασις Ηλίου-Κρόνου υποδιαιρείται εις εκατό ίσα τμήματα, τότε ο Ερμής θα απέχει του Ηλίου 4 τοιαύτα τμήματα, η Αφροδίτη $4+3=7$, η Γη $4+6=10$, ο Άρης $4+12=16$. Για την απόστασιν Άρεως-Διός σημειώνει μίαν απόκλινσιν εκ της εν λόγω ακριβούς διαδοχής των διπλασιασμών. Εις απόστασιν $4+24=28$ τοιούτων τμημάτων, ένθα ανεμένετο η παρουσία πλανήτου, ουδείς εκ των γνωστών πλανητών ενεφανίζετο, γεγονός, το οποίον τον έκανε να διερωτηθεί «γιατί ο δημιουργός Θεός κατέλιπεν κενήν την θέσιν ταύτην;». Ο Ζευς, συνεχίζει ο Johann Daniel Titius, απέχει του Ηλίου $4+48=52$ τοιαύτα τμήματα και ο Κρόνος $4+96=100$.

Εκ των ανωτέρω καταδεικνύεται ότι δια μιας συγκεκριμένης σειράς ακεραίων αριθμών εκφράζονται οι μέσες αποστάσεις εις αστρονομικές μονάδες των γνωστών τότε έξι πλανητών, ήτοι του Ερμού, της Αφροδίτης, της Γης, του Άρεως, του Διός και του Κρόνου.

Το έτος 1772, ο εικοσιπενταετής τότε Johann Elert Bode μόλις είχαν ολοκληρώσει την δεύτερη έκδοσιν της αστρονομικής του επιτομής υπό τον τίτλον Γενικόν πλαίσιον οδηγιών για τον έναστρον ουρανόν, εις την οποίαν προσέθεσεν την προμνημονευθείσαν σειράν αριθμών του Titius, άνευ οιασδήποτε μνείας του ονόματος του ευρετού επιστήμονος επανορθώσας εις κατοπινές εκδόσεις, απέδωσεν εις τον Titius την πατρότητα της σειράς.

Ο Johann Elert Bode ενέδυσεν μετά του μαθηματικού ιματίου $D = \frac{4+3 \cdot 2^n}{10}$ την σειράν των

αριθμών Titius, διατυπώσας τον φερόνυμον κανόνα, ένθα D η μέση απόστασις εκάστου των πλανητών εκ του Ηλίου εις αστρονομικές μονάδες και n μία παράμετρος «τάξεως» των πλανητών, οι τιμές της οποίας παρουσιάζονται εις τον Πίνακα 1

Πίναξ 1: Τιμές της παραμέτρου n εις τον τύπον του νόμου Bode.

Πλανήτης	n
Ερμής	$-\infty$
Αφροδίτη	0
Γη	1
Άρης	2
Αστεροειδείς	3
Δίας	4
Κρόνος	5
Ουρανός	6
Ποσειδών	7



Εικόνα 3: Οι ενδοπλανητικές αποστάσεις του ηλιακού μας συστήματος με την δομήν, την οποίαν αποδεχόμεθα σήμερα (άνευ Πλούτωνος).

Προς κατανόησιν του κανόνος Bode-Titius, θεωρούμεν γεννήτορες αριθμούς τους 0 και 3¹· ακολούθως, δια διπλασιασμού πάντοτε του προηγούμενου αριθμού, δημιουργούμεν μίαν σειράν αριθμών, ήτοι 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768. Εις τους αριθμούς αυτής της σειράς προσθέτομεν τον αριθμόν 4 και άπαντα τα προκύπτοντα αθροίσματα τα διαιρούμεν δια του αριθμού 10, προκειμένου ταύτα να εκφράζουν αστρονομικές¹ μονάδες, ως εμφανίζεται εις τον Πίνακα 2.

Πίναξ 2: Παρουσίασις του κανόνος ή νόμου του Bode.

Πλανήτης	Απόστασις εκ του Ηλίου κατά Bode ως A.U.	Πραγματική απόστασις εκ του Ηλίου ως A.U.
Ερμής	$\frac{0+4}{10} = 0,4$	0,39
Αφροδίτη	$\frac{3+4}{10} = 0,7$	0,72
Γη	$\frac{6+4}{10} = 1,0$	1,00 ± 0,02
Αρης	$\frac{12+4}{10} = 1,6$	1,52
Αστεροειδείς	$\frac{24+4}{10} = 2,8$	
Δίας	$\frac{48+4}{10} = 5,2$	5,20
Κρόνος	$\frac{96+4}{10} = 10,0$	9,54
Ουρανός	$\frac{192+4}{10} = 19,6$	19,18
Ποσειδών	$\frac{384+4}{10} = 38,8$	30,06

Όταν ο «πολύς» Bode ανεκοίνωνε τον περιώνυμον κανόνα του, δεν είχαν εισέτι ανακαλυφθεί ούτε οι Αστεροειδείς, ούτε οι δύο εξώτατοι πλανήτες του ηλιακού μας συστήματος ο Ουρανός και ο Ποσειδών. Σημειωτέον ότι με τα σύγχρονα δεδομένα ο Πλούτων δεν θεωρείται πλέον ηλιακός πλανήτης. Βεβαίως, ο ανακοινούμενος κανών «υπεδείκνυε» την θέσιν ενός

¹ Η απόστασις ουρανίου σώματος, μετρούμενη με μονάδα την απόστασιν Γης-Ηλίου, εκφράζεται εις αστρονομικές μονάδες. Επειδή εις τον εν λόγω αλγόριθμον το 10 εκφράζει την απόστασιν Γης-Ηλίου, διαιρούντες δι' αυτού, εκφράζομεν τις αποστάσεις όλων των πλανητών εις αστρονομικές μονάδες.

ετέρου πλανήτη του μεταξύ Άρεως και Διός, ένθα σήμερον είναι γνωστή η υπάρχουσα ζώνη των αστεροειδών, προελθούσα, πιθανώς, εκ της διασπάσεως άλλοτε υπάρξαντος πλανήτη. Πρέπει να παρατηρηθεί ότι μεταξύ της πραγματικής μέσης αποστάσεως του πλανήτη Ποσειδώνος εκ του Ηλίου και της αντιστοίχου αποστάσεως, της προκυπτούσης εκ του κανόνος Bode–Titius, παρατηρείται σημαντική απόκλισις. Επίσης πρέπει να λεχθεί ότι η μεταγενεστέρα διαπίστωσις ότι η ανακαλυφθείσα ζώνη Kuiper και συγκεκριμένως η Έρις, ένα εξέχον μέλος της ζώνης μεγαλύτερον του Πλούτωνος, δεν ευρίσκεται εις απόστασιν υποδεικνυομένην υπό του κανόνος Bode–Titius. Τοιαύται αποκλίσεις εστέρησαν από τον κανόνα Bode–Titius την αξιοπιστίαν και τον ωδήγησαν εις την αφάνειαν.

Περί των θείων γεννητών²

Οι απαντήσεις εις ένα πλήθος αλληλοσυνδεδεμένων «ποιός;», «πώς;» και «γιατί;» γεννούν εκ της αρχαιότητος την επιστημονικήν γνώσιν. Ανέκαθεν ο έλλογος άνθρωπος διερωτάτο πώς εδημιουργήθη το Σύμπαν. Έχων ο άνθρωπος πρωτεύουσες αισθήσεις την ακοήν και την όρασιν, εμφαντάσθη μίαν μεγάλην έκρηξιν περιελουσμένην υπό εκτυφλωτικού φωτός ως γενεσιουργών αιτιών του Σύμπαντος. Ενός Σύμπαντος σφαιρικού εκ λόγων φιλοσοφικών, θρησκευτικών και αισθητικής τελειότητος, άνευ ουδεμίας αποδείξεως.

Ο έλλογος άνθρωπος επίσης διερωτάτο περί της ενυπαρχούσης τάξεως εις το Σύμπαν, θεωρήσας την τελειότητα των κινήσεων των ουρανίων σωμάτων ως ταυτόσημον μετά των εννοιών της τάξεως και της αρμονίας³. Επεχειρήθη, λοιπόν, αυτή η Συμπαντική τάξις να περιγραφεί ευγλώττως δι' ενός αυστηρώς οργανωμένου «λόγου», ο οποίος ανεπτύχθη εξελικτικώς υπό του ανθρώπου, ήτοι του «λόγου» της Μουσικής. Η Μουσική ως η Επιστήμη και η Τέχνη περί του Ηρμωσμένου, δηλαδή περί της οργανώσεως και της συσχετίσεως των ήχων προς μίαν διάστασιν ως μελωδία, προς δύο διαστάσεις ως εναρμονισμένη μουσική σύνθεσις και προς τρεις διαστάσεις ως μουσικοτοπία, θεωρείται ότι συνέβαλεν μεγίστως εις την γέννησιν της επιστήμης καθ' εαυτής.

Οι αρχιτέκτονες του Σύμπαντος, οι επιχειρήσαντες την συστηματοποίησιν της εννοίας του διαστήματος εν συμφωνία προς τον πολιτισμόν, την θρησκείαν και τις παραδόσεις των, εξ αρχαιοτάτων χρόνων ήσαν συγχρόνως Μουσικοί και Αστρονόμοι. Ο Πυθαγόρας και οι οπαδοί του λ.χ. δια μιας θεωρίας, η οποία συνδυάζει την κοσμικήν αρμονίαν μετά της μουσικής αρμονίας, επεχειρούν να εξηγήσουν την θέσιν και την κίνησιν των πλανητών εις τον ουράνιον θόλον⁴. Ορμώμενοι εκ της θρησκείας, αναγνωρίζουν τον Θεόν ως τέλειον Ον. Ορμώμενοι

² Δια του όρου «θείον γεννητόν» ο Πλάτων πρέπει να εννοεί παν ό,τι υλικόν κινείται κυκλικώς –τουτέστιν περιοδικώς και αενάως– τόσο εις τους ουρανούς, όσον και εις τον υποσελήνιον χώρον.

³ Εις τον ταοϊσμόν το ταό είναι η ενέργεια, η παρέχουσα ζωήν εις πάντα τα όντα και η αρχέγονη δύναμις, η διέπουσα την τάξιν του σύμπαντος. Η ενυπάρχουσα εις το σύμπαν τάξις εκδηλούται εις τις κανονικότητες των κύκλων των θείων γεννητών – απλανών αστέρων και πλανητών – καθώς επίσης και των εποχών.

⁴ Πρόκειται περί της θεωρίας της Αρμονίας των σφαιρών δια την οποίαν ελέχθησαν και εγράφησαν πολλά από την εποχήν των Πυθαγορείων. Εθεωρήθη απαραίτητον να παρατεθούν οι περιεκτικές απόψεις του Ηρακλείτου ή Ηρακλείδου του Ποντικού, όπως αυτές έχουν διατυπωθεί εις το έργον του *Ομηρικά Προβλήματα* (12, 2, 1 – 13, 1, 4).

«Καί πρωτήν γε φυσικήν ύπεστήσατο την φερομένην από τών όιστων φωνήν, ού μὰ Δί' ού μυθικῶς βέλη φθεγγόμενα τερατευόμενος, ἀλλ' ἔστιν ἐν τῷ στίχῳ θεωρία φιλόσοφος·

Ἐκλαγξαν δ' ἄρ' όιστοί ἐπ' ὤμων χωρόμενοιο αὐτοῦ κινηθέντος.

Εἰσὶ γάρ, εἰσὶ τινες οὐράνιοι μεθ' ἁρμονίας ἐμμελεῖς ἦχοι κατὰ τὴν αἰδίου φορὰν ἀποπαλλόμενοι, μάλιστα δὲ τῆς ἡλιακῆς περιόδου συντόνως φερομένης. Οὐ γάρ δήπου ράβδῳ μὲν ὑγρᾷ πλήξας τις εἰκὴ τὸν ἄερα καὶ λίθον ἀπὸ σφενδόνης ἄφεις ροίζους ἀποτελεῖ καὶ συριγμοὺς οὕτω βαρύφθογγον, τηλικούτων δὲ σωμάτων ἢ κυκλοπό-

ρος βία δρόμοις ἀπ' ἀνατολῆς εἰς δύσιν ἀρματηλατουμένη μεθ' ἡσυχίας τὸν σφοδρὸν ὁδοιοπορεῖ νόμον. Τούτους δὲ τοὺς διηνεκῶς οὐρανῷ τελουμένους φθόγγους ἀγνοοῦμεν ἢ διὰ τὴν ἀπὸ πρώτης γονῆς συνήθειαν ἐνδεδεχῶς ἐνοικοῦσαν ἡμῖν, ἢ διὰ τὴν ἄμετρον ὑπερβολὴν τοῦ διαστήματος ἐκλυομένου τοῦ ψόφου τῷ διείργοντι μέτρῳ. Καὶ τοῦθ' ὅτι τοιοῦτόν ἐστιν, ὁ φυγαδεύων Ὅμηρον ἐκ τῆς ἰδίας πολιτείας συγκαταίνει Πλάτων οὕτω λέγων·

Ἔτι δὲ τῶν κύκλων αὐτοῦ ἄνωθεν ἐφ' ἐκάστου βεβηκέναι Σειρήνα συμπεριφερομένην φωνὴν μίαν ἰεῖσαν ἓνα τόνον· ἀπασῶν δ' ὁκτῶ οὐσῶν μίαν ἁρμονίαν συμφωνεῖν. (Πολιτεία, 617b)

Ὅμοιως δὲ καὶ ὁ Ἐφέσιος Ἀλέξανδρος ἐπεξεληθὼν ὅπως κατὰ τάξιν οἱ πλάνητες ἀστέρες ὁδεύουσιν, ἐπάγει περὶ τῶν ἐκάστου φθόγγων·

Πάντες δ' ἐπτατόνιο λύρης φθόγγοισι συνφθὸν ἁρμονίην προσέχουσι, διαστάς ἄλλος ἐπ' ἄλλου. Δι' ὃν ἂν εἴη γνώριμον, ὥς οὐ κωφὸς οὐδ' ἄφθογγός ἐστιν ὁ κόσμος. Ἀρχὴ δὲ ταύτης τῆς δόξης Ὅμηρος, εἰπὼν τὰς ἡλιακὰς ἀκτῖνας ἀλληγορικῶς βέλη, προσθεὶς δ' ὅτι φερόμεναι διὰ τοῦ ἀέρος ἔκλαξαν ἰδίαν ἑνθεὸν τινα φωνήν.

Ἡράκλειτος, *Ομηρικά Προβλήματα*, 12, 2, 1 – 13, 1, 4.

[Νεοελληνικὴ ἀπόδοσις: Κατὰ πρότον αὐτὴ ἡ φωνή, ἡ παραγομένη ὑπὸ των βελών, ἀποτελεῖ φυσικὸν φαινόμενον. Δεν τερατολογεῖ, μα τον Δία, ομιλῶν περὶ μαγικῶν βελῶν παραγόντων ἤχον, ἀλλ' ὁ στίχος «Καθὼς κατήρχετο, εβρόντουν τα βέλη εἰς τοὺς ὠμούς του οργισμένου θεοῦ, ὅταν αὐτὸς ἐκινήθη» (Α, 46) ἐμπεριέχει φιλοσοφικὸ νόημα.

Διότι ὑπάρχουν, ὑπάρχουν ὄντως κάποιοι ουράνιοι ἤχοι ἀρμονικοὶ καὶ μελωδικοί, παραγόμενοι ὑπὸ τῆς αἰωνίου κινήσεως των ουρανίων σφαιρῶν, κυρίως ὅταν ἡ ἡλιακὴ περιφορὰ τυγχάνει ἐντονος. Ἀφ' ἧς στιγμῆς κτυπῶν κάποιος με εὐλύγιστὴ βέργα τον αέρα καὶ ρίπτων δια τῆς σφενδόνης ἓναν λίθον παράγονται τόσο ἐντονοὶ ἤχοι καὶ συριγμοί, δεν εἶναι δυνατόν τόσο μεγάλες μάζες νὰ κινούνται ἀθορύβως κατὰ τὴν περιφορὰν τοὺς ἐξ Ἀνατολῶν πρὸς Δυσμὰς προκειμένου νὰ καλύψουν τὴν ἐξαισίαν διαδρομὴν γιὰ τὴν ὁποίαν εἶναι προορισμένες. Αὐτοὺς τοὺς ἤχους, τοὺς παραγομένους συνεχῶς εἰς τον ουρανὸν τοὺς ἀγνοοῦμε (=δεν τοὺς ἀκούμε) εἴτε λόγῳ τῆς ὑπαρχούσης ἐντὸς μας σταθερὰς συνηθείας ἀφ' ἧς στιγμῆς ἐγεννήθημεν, εἴτε λόγῳ τῆς ὑπερβολικῆς μεγάλῃς ἀποστάσεως, ἡ ὁποία μας χωρίζει ἀπὸ τις μάζες αὐτές, οἱ ἤχοι αὐτοὶ διαχέονται εἰς τὸ διάστημα. Καὶ τὸ ὅτι τὸ γεγονὸς αὐτὸ ἐστὶ συμβαίνει τὸ παραδέχεται καὶ ὁ Πλάτων, ὁ ἐκδιῶζας τον Ὅμηρον ἐκ τῆς Πολιτείας του, ἀναφέρων τὰ ἀκόλουθα (ὁ μῦθος του Ἡρός): Ἐπὶ ἐκάστου ἐξ αὐτῶν των κύκλων ἐκάθητο καὶ ἀπὸ μία σειρήν, ἡ ὁποία περιεφέρετο μαζὶ τοὺς καὶ παρήγε μίαν φωνὴν ἐνός μουσικοῦ ὕψους. Καὶ ἐκ των οκτῶ φωνῶν προέκυπτον οἱ συμφωνίες ἐνός διαπασῶν (=ἀρμονία).

Καθ' ὅμοιον τρόπον καὶ ὁ Ἀλέξανδρος ὁ Εφέσιος (κατ' ἄλλους Αἰτωλός) προσπαθὼν νὰ ἐξηγήσῃ τὴν καθορισμένην τροχίαν, τὴν ὁποίαν διανύουν οἱ πλανώμενοι ἀστέρες (=πλανήτες) ἀναφέρει γιὰ τον ἥχο ἐκάστου:

Πάντες συνηχοῦν με τοὺς φθόγγους ἐπταχόρδου λύρας, ἀπέχοντες κατὰ διάστημα ὁ εἰς του ἄλλου.

Ἐξ αὐτῶν ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι ὁ κόσμος δεν εἶναι οὔτε κωφός, οὔτε βωβός. Ὁ Ὅμηρος ἦτο ὁ πρώτος, ὁ ὁποῖος διετύπωσε τὴν ἐν λόγῳ ἀπόψη, ὀνομάζων τις ἡλιακὰς ἀκτῖνες βέλη, προσθέτων ὅτι διασχίζουσες τον αέρα παράγουν κάποια δική τους θεϊκὴ φωνή.]

Επίσης, εθεωρήθη ἐξαιρετικὸς ἐνδιαφέρον το νὰ παρατεθοῦν οἱ περὶ τῆς Ἀρμονίας των Σφαιρῶν ἀπόψεις του Ἀλεξάνδρου του Εφεσίου ἢ Αἰτωλοῦ δια των ὁποίων περιγράφεται λεπτομερῶς δια μουσικῶν ὁρων τὸ πλανητικὸ σύστημα κατὰ τον 4^{ον} π.Χ. αἰ.

Ὁ Ἀλέξανδρος ὁ Αἰτωλὸς υπήρξεν ποιητὴς, καταγόμενος ἐκ τῆς Πλευρώνος τῆς Αἰτωλίας. Δια τοῦτο ἀποκαλεῖται καὶ Πλευρώνιος. Εἶναι γνωστός καὶ ὡς Ἀλέξανδρος ὁ Σατύρου. Ἐγεννήθηκε εἰς τὴν Πλευρῶνα τῆς Αἰτωλίας περίπου τὸ 320 π.Χ. Νέος μετέβη εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν, τότε που ὁ Πτολεμαῖος ὁ Φιλάδελφος κατήρτιζε τὴν μεγάλην βιβλιοθήκην, τὴν ὁποίαν ὁ πατέρας του ὁ Πτολεμαῖος ὁ Σωτήρ εἶχεν ἀρχίσει νὰ συγκεντρώνει. Ὁ Ζηνόδοτος καὶ ὁ Λυκόφρων ἦσαν ἐπιφορτισμένοι με τὴν συλλογὴν καὶ τὴν ταξινόμησιν των βιβλίων. Ὁ Πτολεμαῖος ὁ Φιλάδελφος ἀνέθεσε εἰς τον Ἀλέξανδρον τὴν ταξινόμησιν των τραγωδιῶν τῆς κλασικῆς ἐποχῆς καθὼς ἐπίσης καὶ των σατυρικῶν δραμάτων. Ὁ Ἀλέξανδρος διέμεινε εἰς τὴν Ἀλεξάνδρειαν ἐπὶ δέκα ἔτη. Κατόπιν μετέβη εἰς τὴν αὐλήν του βασιλέως τῆς Μακεδονίας, του Ἀντιγόνου του Γονατά.

Ὁ Ἀλέξανδρος ὁ Αἰτωλὸς δεν μὰς εἶναι γνωστός μόνον ὡς κριτικός. Ὅταν εἰργάζετο εἰς τὴν Βιβλιοθήκην τῆς Ἀλεξάνδρειας, ἔγραψε καὶ ὁ ἴδιος τραγωδίες, οἱ ὁποῖες τον κατέταξαν μεταξὺ τῆς πλειάδος των Ἀλεξανδρινῶν τραγωδῶν, τὴν ὁποίαν ἀπετέλουν λ.χ. ὁ Λυκόφρων, ὁ Σωσιφάνης, ὁ Σωσίθεος, ὁ Διονυσιάδης, ὁ Ὅμηρος Βυζάντιος, ὁ Φίλισκος ὁ Κερκυραῖος κ.α. «Ἀστραγαλισταί» εἶναι ὁ τίτλος ἐνός δράματός του, τὸ ὁποῖον πραγματεύεται τὰ τῆς νεανικῆς ἡλικίας του Πατρόκλου. Μὰς ἔχουν διασωθεῖ καὶ ἀποσπάσματα ἀπὸ δύο ἐλεγείες του, οἱ ὁποῖες φέρουν τοὺς τίτλους «Ἀπόλλων» καὶ «Μοῦσαι».

Συγκεκριμένως, περὶ τῆς ἀρμονίας των σφαιρῶν ἀναφέρει:

εκ της Αριθμητικής και της Γεωμετρίας, αναγνωρίζουν τον μεν κύκλον⁵ ως το τελειότερον των σχημάτων, την δε σφαίραν ως το τελειότερον των στερεών σωμάτων. Ορμώμενοι εκ της Φιλοσοφίας και εκ της Αστρονομίας θεωρούν τα ουράνια σώματα ως θεία γεννητά (Πλάτων, *Πολιτεία*, 546, b, 4) και ως θεοκίνητα (Πλάτων, *Επινομίς*, 983, b, 3). Τα ουράνια σώματα, ως θεία γεννητά, θα πρέπει να είναι τέλεια, προσομοιάζοντα την τελειότητα του δημιουργού των Θεού. Συνεπώς, πρέπει να είναι σφαίρες. Αυτό είναι ένα συμπέρασμα εις το οποίον οδηγήθη φιλοσοφών ο έλλογος άνθρωπος δύο και ημίσειαν χιλιάδες έτη προ της ανακαλύψεως του τηλεσκοπίου!

γαῖα μὲν οὖν ὑπάτη τε βαρεῖα τε μεσσόθι ναίει· ἀπλανέων δὲ σφαῖρα συνημμένη ἔπλετο νήτη· μέσσην δ' ἥελιος πλαγκτῶν θέσιν ἔσχεθεν ἄστρον· τοῦ δ' ἀπὸ δὴ ψυχρὸς μὲν ἔχει διὰ τέσσαρα κύκλος· κείνου δ' ἡμίτονον φαίνων ἀνήσι χαλασθεῖς, τοῦ δὲ τόσον φαέθων ὅσον ὄβριμος Ἄρεος ἀστήρ· ἥελιος δ' ὑπὸ τοῖσι τόνον τερψίμβροτος ἴσχει, αἴγλης δ' ἡελίοιο τριημίτονον Κυθέρεια· ἡμίτονον δ' ὑπὸ τῷ στίλβων φέρεθ' Ἑρμείας, τόσσον δὲ χρωσθεῖσα φύσιν πολυκαμπέα μήνη· κέντρον δ' ἡελίοιο θέσιν διὰ (πέντ') ἔλαχε χθόν· αὕτη πεντάζωνος ἀπ' ἡέρος εἰς φλογόεν πῦρ ἄρμωσθεῖς· ἀκτῖσι πυρὸς κρυερῇσί τε πάχυναι οὐρανοῦ ἐξάτονον τόνον ἔσχεθε τὸν διὰ πασῶν. τοίην τοι σειρήνα Διὸς παῖς ἤρμωσεν Ἑρμῆς, ἐπτάτονον κίθαριν, θεομήτορος εἰκόνα κόσμου.

[Νεοελληνική απόδοσις: Η μεν Γη λοιπόν, ως προσλαμβανόμενος, τοποθετείται εις το κέντρον, η δε σφαίρα των απλανών αστέρων ήτο πάντοτε η νήτη συνημμένων, ο δε Ἡλιος κατείχε την Μέση των περιπλανομένων άστρον, κι από εκείνον (τον Ἡλιον) η γυάλινη σφαίρα (των απλανών) σχηματίζει το διάστημα του διατεσσάρων, κι από εκείνη (τη γυάλινη σφαίρα των απλανών) ο Κρόνος χαλαρούμενος κατέρχεται εν ημιτόνιον, κι από αυτόν (τον Κρόνον) ο Δίας απέχει όσο κι από τον ισχυρόν αστέρα του Ἀρεως, έναν τόνον πιο κάτω από αυτούς είναι ο Ἡλιος, η χαρά των θνητών, και από την αἴγλη του Ηλίου ένα τριημιτόνιον μακριά η Αφροδίτη, ένα ημιτόνιον χαμηλότερα κυλά ακτινοβόλος ο Ερμής, τόσο λοιπόν (δηλαδή ένα ημιτόνιον) έπειτα η Σελήνη, η οποία χλιοποιούκιλες αποχρώσεις δίνει εις την φύση, από το κέντρο, δηλαδή την θέση του Ηλίου, έλαχε η Γη σε διάστημα διαπέντε, πέντε είναι οι ζώνες της, από τον ομιχλώδη αέρα (τους πόλους) έως το φλογερό πυρ (τους τροπικούς), και είναι προσαρμοσμένη εις τις διαπύρους ακτίνες και εις τις παγετώδεις πάχυνες. Με έξι τόνους ο ουρανός βρίσκεται εις διάστημα διαπασών. Τοιούτου είδους πράγματι σειρήνα συνεταίριασε ο Ερμής, ο υιός του Διός, δηλαδή επτάχορδη λύρα, εικόνα του θεοπνεύστου κόσμου.]

Με τους στίχους αυτούς ο Αλέξανδρος μας παρουσιάζει τη διάταξη των ουράνιων σφαιρών, που έχει καθορίσει. Τις ουράνιες σφαίρες τις τοποθετεί επάνω σε τρία τετράχορδα και έναν προσλαμβανόμενο (Γη). Με το πρώτο τετράχορδο τα άλλα δύο ενώνονται το ένα με συναφή και το άλλο με διάζευξη. Το πρώτο τετράχορδο (Σελήνη, Ερμής, Αφροδίτη, Ἡλιος) είναι του χρωματικού γένους με δομή από την υπάτη προς τη νήτη ημιτόνιο-ημιτόνιο-τριημιτόνιο. Το συνημμένο τετράχορδο (Ἡλιος, Ἀρης, Κρόνος, Απλανείς αστέρες) είναι και αυτό του χρωματικού γένους με δομή από τη μέση προς τη νήτη συνημμένων τριημιτόνιο-ημιτόνιο-ημιτόνιο. Από το διεζευγμένο τετράχορδο (Ἀρης, Κρόνος, Απλανείς αστέρες) δεν χρησιμοποιεί τη νήτη, παρά μόνον τις άλλες τρεις βαθμίδες, διότι του αρκούν για να συμπληρώσει τη διαπασών (οκτάβα). Το τετράχορδο αυτό είναι του διατονικού γένους με δομή από την παραμέση προς τη νήτη τόνος-ημιτόνιο-τόνος.

Ο προσλαμβανόμενος με πλήρη τα δύο συνημμένα τετράχορδα δομούν την οκτάβα:

E^h# F^h## G^h# A^h B^h# C^h## D^h# E^h#

Ο προσλαμβανόμενος, το πρώτο τετράχορδον και το ελλειπές διεζευγμένον τετράχορδον δομούν την οκτάβα:

E# F## G^h# A^h B# C## D## E#

Ίσως ο Χαίντελ, επηρεασμένος εκ της θεωρίας περί την αρμονίαν των σφαιρών, να θεωρεί όλες τις μουσικές κλίμακες με περισσότερες των επτά διέσεων ως υπερουράνιες.

⁵ Εκ των πραγματειών του Ἡρωνος, του Αλεξανδρέως, (1^{ος} μ.Χ. αι.) πληροφορούμεθα ότι κατά την εποχήν του Πυθαγόρου και των Πυθαγορείων κατείχε για τα Μαθηματικά μεγίστην σημασίαν το θεοσεβές και το μυστηριακόν. Γι' αυτούς ο κύκλος ήτο μία κλειστή καμπύλη γραμμή, άνευ αρχής και τέλους, συμβολίζουσα το θείον. Η ευθεία γραμμή, ως ένα σύνολο αδιαστάτων σημείων, η οποία έχει αρχήν, μέσην και τέλος, παριστά την γέννηση, την ζωήν και τον θάνατον. Η ευθεία γραμμή συμβολίζει, επίσης, την ύλην, το φθειρόμενον, το πέρας και το άπειρον.

Εν άλλοις λόγοις δι' ευθειών γραμμών και κύκλων συνεβολίζετο η επικοινωνία των ανθρώπων μετά του Θεού.

πᾶν σφαιροειδὲς σχῆμα καὶ ἄπειρόν ἐστι καὶ πεπερασμένον· τῷ μὲν γὰρ ὄρον τινὰ καὶ περιγραφὴν ἔχειν εὐλόγως αὐτὸ πεπεράσθαι νομιστέον, ἄπειρον δ' ἂν ὁ κύκλος ὀνομάζοιτο δικαίως, ἐπειδὴ περ ἀμήχανόν ἐστι δεῖξαι πέρας ἐν αὐτῷ τι· τὸ γὰρ νομισθὲν εἶναι τέλος ἐξ ἴσου γένοιτ' ἂν ἀρχή.

Ηράκλειτος, *Ομηρικά Προβλήματα*, 47, 5,2-6,5.

[Παν σφαιροειδὲς σχῆμα εἶναι καὶ ἄπειρον καὶ πεπερασμένον· ἐπειδὴ ἔχει κάποια ὅρια καὶ περιγράμματα εἶναι λογικόν να θεωρεῖται πεπερασμένον, ἀλλ' ὁμως, δικαίως θα ελέγετο ὁ κύκλος ἄπειρος, ἀφοῦ εἶναι ἀδύνατον να δείξει κανεὶς κάποιο πέρας του, δεδομένου ὅτι το θεωρούμενο πέρας θα ἠδύνατο ἐξ ἴσου να θεωρηθεῖ καὶ ἀρχή.]

σφαιροειδῆ τὸν κόσμον εἶναι παρ' Ὀμήρῳ
Ηράκλειτος, *Ομηρικά Προβλήματα*, 48, 1, 1-2.

[Για τὸν Ὀμηρὸ το σύμπαν εἶναι σφαιροειδές.]

Το σφαιρικόν σχῆμα τοῦ Κόσμου καὶ τὴν γεωκεντρικότητα αὐτοῦ τα περιέγραψεν δι' ενός καὶ μόνον στίχου τοῦ Ὀμηροῦ εἰς τὸ ἔπος τῆς *Ιλιάδος* ὡς ἐξῆς:

τόσσον ἔνερθ' Αἶδεω ὅσον οὐρανός ἐστ' ἀπὸ γαίης

Ὀμηρος, *Ιλιάς*, Θ, 16.

[Τόσο πιο κάτω ἀπὸ τὸν Ἄδη, ὅσο πιο πάνω εἶναι ὁ οὐρανὸς ἀπὸ τὴν γῆ]

Ἡ κατασκευασθεῖσα γέφυρα, ἡ συνδέουσα τὸν κόσμον τῶν ἀστρονόμων μετὰ τοῦ κόσμου τῶν μουσικῶν⁶, διασφαλίζει τὴν αἰωνιότητα μιᾶς συμπαντικῆς ἀρμονίας ἐν πλήρει ἐξελίξει, ἡ ὁποία θα προσδιορίσει τὸν χωροχρόνον μέσω τῶν γνώσεων τῆς Ἀστρονομίας καὶ τῆς Μουσικῆς εἰς τὴν ἐκάστοτε ἐποχὴν.

Ἡ ἐνυπάρχουσα τάξις εἰς τὸ Σύμπαν, λόγῳ τῆς περιοδικότητος τῶν κινήσεων τῶν οὐρανίων σφαιρῶν, τῶν θείων γεννητῶν, ὠδήγησεν τὸν ἄνθρωπον να διατυπώσῃ τὴν θεωρίαν περὶ τῆς «μουσικῆς τῶν σφαιρῶν». Αὐτὴ ἡ περιοδικότης τῶν κινήσεων τῶν θείων γεννητῶν, ἀφ' ἧς στιγμῆς τὸ πρῶτον ἐνεφανίσθη, ἔθεσεν εἰς λειτουργίαν τὸ συμπαντικόν χρονόμετρον, ἀφοῦ ἡ μέτρησις τοῦ χρόνου προϋποθέτει τὴν ὑπαρξίν περιοδικοῦ φαινομένου⁷.

⁶ τὸ μὲν διὰ τεσσάρων τὴν ὑλικὴν ἐμφαίνει τετρακτύν, τὸ δὲ διὰ πέντε καὶ τὸ αἰθέριον προσσημαίνει σῶμα, τὸ δὲ διὰ πασῶν τὴν τῶν πλανητῶν ἐμμελῆ κίνησιν.

Αριστείδης Κοϊντιλιανός, *Περὶ Μουσικῆς*, 3, 20, 2-5.

[Τὸ διατεσσάρων διάστημα συμβολίζει τὴν ὑλικὴν τετρακτύν (πυρ, αἴρ, ὕδωρ, γαία), τὸ διαπέντε διάστημα δὲ λοιπὸν προσέτι καὶ τὸν αἰθέρα, τὸ δὲ διαπασῶν διάστημα συμβολίζει τὴν ἐμμελῆ κίνησιν τῶν πλάνητων].

⁷ πᾶν τὸ ἀεικίνητον καὶ περιφερόμενον εἴτε ἐν οὐρανῷ εἴθ' ὑπὸ σελήνην, ὡς μὲν σωματικὸν γεννητὸν καλούμενον (οὐδὲν γὰρ σῶμα αὐθυπόστατον), ὡς δὲ ἀεικίνητον θεῖον· μιμεῖται γὰρ τὰ θεϊότατα τῶν ὄντων ἄγρυπνον ἔχοντα ζώην.

Πρόκλος, *Σχόλια εἰς τὴν Πλατωνικὴν Πολιτείαν*, 2, 15, 10-14.

Ψυχὴ πᾶσα ἀθάνατος. τὸ γὰρ ἀεικίνητον ἀθάνατον
Πλάτων, *Φαῖδρος*, 245c, 5.

ἀπὸ τῶν αὐτῶν ἄρα ἐπὶ τὰ αὐτὰ πάλιν ἤξει τὸ ἀεὶ κινούμενον, ὥστε ποιῆσαι περίοδον.
Πρόκλος, *Θεολογικὴ Στοιχείωσις*, 198, 10-11.

Περί του ηρμωσμένου των θείων γεννητών κατά τον Πυθαγόραν και τους Πυθαγορείους

Ο Πυθαγόρας είναι ο πρώτος φιλόσοφος, όστις συνδέει την Αστρονομίαν μετά της Μουσικής, υποστηρίζων ότι εις το εὐτακτον, αρμονικόν και σφαιρικόν σύμπαν τα πάντα διέπονται υπό απλών νόμων, δυναμένων να εκφρασθούν δι' ακεραίων και ρητών αριθμών.

Εις την σχολήν του Πυθαγόρου η Γη, ως σφαίρα, τοποθετείται ακίνητος εις το κέντρον του Σύμπαντος. Την απειρίαν των ακινήτων αστερών την καθηλώνουν επί μιας σφαιρικής επιφανείας, της σφαίρας των απλανών, η οποία μετέχει της κινήσεως του ουρανού. Κατ' αυτόν τον τρόπον ελύθη το πρόβλημα της μη μεταβολής των μεσοαστρικών αποστάσεων και η φαινόμενη μεταξύ των αστερών σχετική ακινησία. Επτά ουράνια σώματα διαφεύγουν εκ των νόμων της κινήσεως των απλανών αστερών, μη διαγράφοντα καθημερινώς τον ίδιον κύκλον μετ' αυτών, αλλά έκαστον τον ιδικόν του κύκλον και μάλιστα εις ίδιον χρόνον, διαφορετικόν του της ουρανίου σφαίρας.

Τα εν λόγω επτά ουράνια σώματα ονομάσθησαν πλανήτες, φέρουν ίδιον όνομα - Σελήνη, Ήλιος, Αφροδίτη, Ερμής, Άρης, Ζεύς, Κρόνος - και έκαστον εξ αυτών εκαθελώθη επί της επιφανείας αποκλειστικώς ιδικής του σφαίρας, περιστρεφομένης αφ' ενός περί το κέντρον του Σύμπαντος, αφ' ετέρου πέριξ ιδίων σταθερών αξόνων περιστροφής. Η κινήσεις εκάστου των πλανητών αναλύεται εις μίαν ιδίαν περιστροφήν και εις την ουράνιον περιστροφήν. Τοιούτοτρόπως, το στερέωμα εκ κινήσεως «απειρών» ουρανίων σφαιρών απλοποιείται εις πρόβλημα κινήσεως οκτώ ουρανίων σφαιρών, ήτοι των επτά σφαιρών των πλανητών κατά την προαναφερθείσαν σειράν και της σφαίρας των απλανών.

Οι Πυθαγόρειοι προέβησαν και εις μετρήσεις των περιόδων περιφοράς εκάστου των πλανητών (θείου γεννητού), διαπιστώσαντες ότι όλες εκφράζονται δι' ευπροσηγόρων και ρητών αριθμών, ως αναφέρει ο Πλάτων εις το Η' Βιβλίον της *Πολιτείας*.

Χρησιμοποιών ο Πυθαγόρας μουσικούς όρους, καθώρισεν τις μεσοπλανητικές αποστάσεις ως ακολούθως: Έκαστος των πλανητων, λόγω της ιδίας αποστάσεώς του εκ της Γης, λόγω της ιδίας μάξης του και της ιδίας ταχύτητος περιφοράς του περί την Γην παράγει έναν μουσικόν ήχον. Ισοδυνάμως, λέγομεν ότι η σφαίρα εκάστου πλανήτου λόγω της ακτίνος της εκ του κέντρου του Κόσμου, λόγω της ιδίας μάξης του επικεκολλημένου επ' αυτής πλανήτου και λόγω της ιδίας ταχύτητος περιστροφής της περί την Γην, παράγει έναν μουσικόν ήχον. Η μουσική απόστασις μεταξύ δύο ήχων, παραγομένων υπό δύο συγκεκριμένων θείων γεννητών, εκφράζεται δι' ενός μουσικού διαστήματος⁸ λ.χ. ημίτονον, τόνος, τριημίτονον κ.α.

νῦν δὲ τὸ πέρας αὐτῶν ἀρχὴ ἄλλης γίνεται περιόδου· καὶ ἡ συναποκατάστασις, οὐκ οὔσα στάσις ἀλλ' ἀφετηρία τῆς ἐξῆς περιόδου, τηρεῖ τὴν κοσμικὴν τάξιν.

Πρόκλος, *Σχόλια εις την Πλατωνικὴν Πολιτείαν*, 2, 22, 12-15.

οὐκέτι μίαν ἔχον ζωὴν καὶ ἀριθμῷ τὴν αὐτὴν οὐδὲ ἀπαράλλακτον τὴν περίοδον.

Πρόκλος, *Σχόλια εις την Πλατωνικὴν Πολιτείαν*, 2, 15, 7-9.

⁸ Ο Σιμπλίκιος εις τα Σχόλιά του αναφορικώς προς το 2ον βιβλίον της πραγματείας του Αριστοτέλους *Περί Ουρανού* αναφέρει: «Οι Πυθαγόρειοι ἔλεγον ότι ἕνας αρμονικός ήχος παρήγετο κατά την κίνηση των ουρανίων σωμάτων. Επιστημονικώς το εστήριζον επί των αναλογιών των διαστημάτων των. Συγκεκριμένως, ο λόγος 9:8 είναι επόγδοος και εκφράζει έναν μείζονα τόνον. Απεδίδετο εις την Σελήνην. Ο λόγος 12:9 είναι επίτριτος και ο λόγος 12:8 είναι ημιόλιος. Οι λόγοι αυτοί απεδίδοντο εις τον πλανήτην Ερμήν. Ο λόγος 16:12 είναι επίτριτος και ο λόγος 16:8 είναι διπλάσιος. Αμφότεροι οι λόγοι απεδίδοντο εις τον πλανήτην Αφροδίτην. Οι δύο λόγοι 18:12, όστις είναι ημιόλιος, και 18:9, όστις είναι διπλάσιος, απεδίδοντο εις τον Ήλιον. Ο λόγος 21:9 είναι διπλασιεπίτριτος και απεδίδετο εις τον πλανήτην Άρην. Οι λόγοι 24:18, όστις είναι επίτριτος, 24:12, όστις είναι διπλάσιος, 24:8, όστις είναι τριπλάσιος, 18:12 και 12:8, οίτινες είναι ημιόλιοι, απεδίδοντο άπαντες εις τον πλανήτην Δίαν. Οι λόγοι 32:24, όστις είναι επίτριτος, και 32:8, όστις είναι τετραπλάσιος, απεδίδοντο εις τον πλανήτην Κρόνον.

Επενόησεν οκτάφθογγον μουσικήν κλίμακα εκ δύο συνημμένων κατιόντων Δωρίων τετραχόρδων με οξύτερον τον ήχον του πλησιεστέρου προς την Γην θείου γεννητού, ήτοι της Σελήνης, και με βαρύτερον τον ήχον του απωτέρου θείου γεννητού, ήτοι του Κρόνου με την ακόλουθον αλληλουχίαν θείων γεννητών και μουσικών διαστημάτων: Σελήνη (*Νήτη*), τόνος, Αφροδίτη (*Παρανήτη*), τόνος, Ερμής (*Τρίτη*), ημίτονον, Ήλιος (*Μέση*), τόνος, Άρης (*Λιχανός*), τόνος, Ζεύς (*Παρυπάτη*), ημίτονον, Κρόνος (*Υπάτη*) και εις απόστασιν τόνου εκ του ήχου του Κρόνου ηχεί ο ήχος των απλανών αστέρων (*Προσλαμβανόμενος*) (Πίναξ 3).

Πίναξ 3: Η Πυθαγόρειος οκτάφθογγος μουσική κλίμαξ εκ δύο συνημμένων κατιόντων Δωρίων τετραχόρδων.

Πλανήτης	Ονομασία φθόγγου	Μουσικό διάστημα
Σελήνη	Νήτη	τόνος
Αφροδίτη	Παρανήτη	τόνος
Ερμής	Τρίτη	ημίτονον
Ήλιος	Μέση	τόνος
Άρης	Λιχανός	τόνος
Ζεύς	Παρυπάτη	ημίτονον
Κρόνος	Υπάτη	τόνος
Απλανείς Αστέρες	Προσλαμβανόμενος	

Καθιερώσας μίαν αντιστοιχισιν μεταξύ μουσικών αποστάσεων, ήτοι μουσικών διαστημάτων και μετρικών αποστάσεων, ήτο εις θέσιν να εύρει πόσον απέχει ένα θείον γεννητόν εκ τινος άλλου, ήτοι τις μεσοσφαιρικές αποστάσεις των ουρανίων γεννητών. Προς επίτευξιν τούτου του Πυθαγορείου στόχου, εγένετο αποδεκτόν ότι η μουσική απόστασις μεταξύ Γης και Σελήνης⁹ είναι ένας τόνος και η μετρική απόστασις μεταξύ αυτών είναι 126.000 Δελφικά στάδια, ήτοι $126.000 \times 177,55 \text{ m} = 22.371.300 \text{ m}$.

Εκ των μέχρι τούδε εκτεθέντων προκύπτει ότι δια του αστρονομικού μεγέθους *περίοδος* των θείων γεννητών αισθητοποιήθη ο χρόνος και δια του μουσικού μεγέθους *διάστημα* μεταξύ δύο ήχων εμετρήθη ο ήδη αισθητοποιηθείς χώρος του Σύμπαντος. Εν άλλαις λέξεσιν *η θεωρία της αρμονίας των σφαιρών κατέστησεν αισθητόν και μετρητόν τον χωροχρόνον* και τούτο για τον Πυθαγόρα απετέλει το μυστικόν του Κόσμου.

Οι λόγοι, τέλος, 36:24, όστις είναι ημιόλιος, 36:9, όστις είναι τετραπλάσιος, και 24:18, όστις είναι επίτριτος, απεδίδοντο εις μίαν ογδόην ή σταθερά σφαίραν, ήτις συμπεριελάμβανε όλες τις άλλες.

Αυτός ο ήχος των θεικών σωμάτων δεν καθίστατο ακουστός υπό των «γηίνων ώτων». Ο Πυθαγόρας, όμως, φαίνεται να είχε είπει ότι άκουσε την Ουράνιον αρμονίαν, επειδή κατενόησεν τις αρμονικές αναλογίες εις τους αριθμούς των ουρανίων σωμάτων και το ηχητικό αποτέλεσμα, το οποίον δύναται να ακουσθεί υπ' αυτών.

⁹ Η απόστασις Γης-Σελήνης είναι 384.403 Km, ήτοι 17 περίπου φορές μεγαλυτέρα της υπό τον Πυθαγόρα υπολογισθείσης.

Πυθαγόρειος ιερά τετρακτύς

Η φιλοσοφία του Πυθαγόρου υπήρξεν κράμα θρησκευτικής πίστεως και φιλοσοφίας. Ούτος εχρησιμοποίησεν τα Μαθηματικά προκειμένου να κατορθώσει να διεισδύσει εντός των πλέον υψηλών περιοχών του νου, επιτυγχάνων την θεμελίωσιν της Μαθηματικής επιστήμης, την αναγωγήν αυτής εις φιλοσοφικήν θεωρίαν και την ανάδειξιν της εις πρωτοπόρον του μαθηματικού στοχασμού.

Ο Πυθαγόρας και οι Πυθαγόρειοι εθεώρουν την αρμονίαν των ήχων και αυτήν ταύτην την αρμονίαν του σύμπαντος, σχετιζομένην μετά της ιεράς τετρακτύος¹⁰, της οποίας ενσαρκωτές ήσαν οι φυσικοί αριθμοί 1, 2, 3, 4¹¹. Ανεκάλυψαν ότι οι τέλειες μουσικές συμφωνίες ή μουσικά συστήματα εξεφράζοντο ως σχέσεις μεταξύ των αριθμών, των ενσαρκωτών της ιεράς τετρακτύος. Όντως,

- 4:1 είναι ο τετραπλάσιος λόγος, εκφράζων την συμφωνίαν του δις διαπασών (δύο οκτάβες),
- 3:2 είναι ο ημιόλιος λόγος, εκφράζων την διαπέντε συμφωνίαν ή διοξειάν (διάστημα πέμπτης καθαρής),

¹⁰ Οι Πυθαγόρειοι εθεώρουν αναγκαίον το να πλάθουν λέξεις εσωτερικής σημασίας, όπως λ.χ. φιλοσοφία, κόσμος, τετρακτύς (εκ του τέτταρα και άγω), κάθαρσις, εχεμύθια, κατάρτυσις κ.α., εις τις οποίες απέδιδον ιδιαίτερον σημασίαν.



Η ιερά τετρακτύς συμβολικώς παριστάνεται δια δέκα κουκίδων εν τριγωνική διατάξει.

Την τετρακτύν εγνώρισεν ο Πυθαγόρας εις την Βαβυλώνα. Έχει βρεθεί έντυπος η τετρακτύς επί χρυσής λαβής ξίφους (2700 π.Χ.) εις την πόλιν Ουρ. Έκαστον των μερών της τετρακτύος απετέλει και ένα σπουδαιότατον σύμβολον. Η μία στιγμή ήτο σύμβολον του ενεργού στοιχείου ή του Δημιουργού. Οι δύο στιγμές συνεβόλιζον την ύλην, το παθητικόν στοιχείον. Οι τρεις στιγμές συνεβόλιζον τον Κόσμον, δηλαδή την ένωση του ενεργού και του παθητικού στοιχείου. Οι τέσσαρις στιγμές συνεβόλιζον τις ελεύθερες τέχνες, δια των οποίων συμπληρούται και τελειοποιείται ο Κόσμος.

Ο Dacier υποστηρίζει ότι δια της τετρακτύος παρεστάνετο η θεότης, η πηγή της Φύσεως, η οποία συνεχώς ρέει. Επίσης η τετρακτύς εταυτίζετο με το Απολλώνιον ΕΙ. Η τριγωνική δομή της τετρακτύος απετέλει την σφραγίδα της Πυθαγορείου Στοάς και το πλήθος των στιγμών της παρίστανε τον αριθμόν των μελών της Στοάς (ομάδος).

Ο Vander Warden αναφέρει ότι η τετρακτύς γεωμετρικώς εκφράζεται δια του «τελείου τριγώνου» -του ισοσκελούς- αριθμητικώς δε εκφράζεται δια του «τριγωνικού» αριθμού $10=1+2+3+4$ (4 κατά δύναμιν δηλ. οι τέσσαρις πρώτοι φυσικοί αριθμοί και 10 κατ' αριθμόν δηλ. το άθροισμα των μονάδων αυτών των πρώτων τεσσάρων φυσικών αριθμών, όπως αναφέρει εις την Μαθηματικήν του Εισαγωγήν ο Νικόμαχος ο Γερασινός).

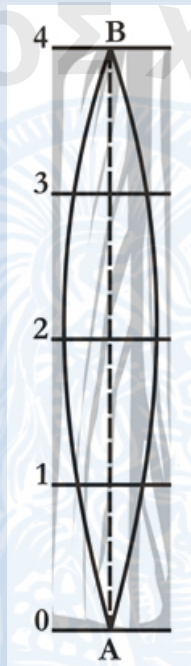
Κατά τον Πυθαγόρα η τετρακτύς εξέφραζεν την λειτουργίαν της Δημιουργίας υπό της Μονάδος, διότι η τετρακτύς απετέλει εσωτερικήν παράστασιν της δημιουργικής ενώσεως των αρχών του Σύμπαντος, Άρρενος και Θήλεος, (των αριθμών 1 και 2) εντός της χειρός του Δημιουργού, (συμβολιζομένων δια των αριθμών 1 και 4), ενώ ταυτοχρόνως οι αριθμοί αυτοί καταδεικνύουν την Μουσικήν αρμονίαν παντός δημιουργήματος. Κατά την τελετήν της μνήσεως των Πυθαγορείων οι νεόφυτοι ήσαν υποχρεωμένοι να δίνουν τον περίφημον Πυθαγόρειον όρκον εις την ιεράν τετρακτύν «Ού, μὰ τὸν ἀμετέρα ψυχὰ παραδόντα τετρακτύν, παγὰν ἀέναν φῦσις ριζώματ' ἔχουσιν».

¹¹ τοιαύτης δὲ οὔσης ἐπώμνουν δι' αὐτῆς τὸν Πυθαγόραν οἱ ἄνδρες, θαυμάζοντες δηλονότι καὶ ἀνευφημοῦντες ἐπὶ τῇ εὐρέσει, καθά που καὶ Ἐμπεδοκλῆς: *οὔ, μὰ τὸν ἀμετέρα γενεᾷ παραδόντα τετρακτύν, παγὰν ἀέναν φῦσεως ριζώματ' ἔχουσιν.* ἀέναν γὰρ φύσιν τὴν δεκάδα ἠνίττοντο τὴν οἶονεϊ ἄϊδιον καὶ αἰώνιον τῶν ὅλων φύσιν καὶ εἰδὼν ὑπάρχουσιν, καθ' ἣν συνεπληρώθη καὶ πέρας τὸ ἀρμόζον καὶ περικαλλέστατον ἔσχε τὰ ἐν κόσμῳ. ριζώματα δ' αὐτῆς τὰ μέχρι τετράδος, α' β' γ' δ'. πέρατα γὰρ ταῦτα καὶ οἶονεϊ ἀρχαί τινες τῶν ἀριθμοῦ ιδιωμάτων, μονὰς μὲν ταῦτο καθ' αὐτὸ νοουμένου, δυὰς δὲ θατέρου καὶ τοῦ ἤδη πρὸς ἄλλο, τριάς δὲ ἐκάστου τε καὶ περισσοῦ τοῦ κατ' ἐνέργειαν, τετράς δὲ τοῦ ἐνεργείᾳ ἀρτίου.

Νικόμαχον, *Θεολογούμενα Αριθμητικῆς*, 22, 18 – 23, 9

- 4:3 είναι ο επίτριτος λόγος, εκφράζων την διατεσσάρων συμφωνίαν ή συλλαβάν (διάστημα τετάρτης καθαρής),
- 4:2 και 2:1 είναι οι διπλάσιοι λόγοι, έκαστος εκφράζων την αρμονίαν ή την διαπασών συμφωνίαν (διάστημα οκτάβας),
- 3:1 είναι ο τριπλάσιος λόγος, ήτοι ο διαπασών και διαπέντε (διάστημα οκτάβας και πέμπτης καθαρής).

Ακουστικώς τα ανωτέρω σύμφωνα διαστήματα υλοποιούνται δια του τετραχί διαιρετού κανόνος.



Εικόν 4: Ο τετραχί διαιρετός κανών.

Ο Λουκιανός εις το έργον του *Πράσις Βίων* αναφέρει ότι η τετρακτύς¹² γεωμετρικώς εκφράζεται δια του «τελείου τριγώνου» -του ισοσκελούς-, ως «τριγωνικός¹³» αριθμός $10=1+2+3+4$ (4 κατά δύναμιν, ήτοι οι τέσσερις πρώτοι φυσικοί αριθμοί και 10 κατ' αριθμόν, ήτοι το ά-

¹² Ιεράν και δυνάμει δεκάδα εθεώρουν οι πυθαγόρειοι.

¹³ Οι τρίγωνοι αριθμοί προκύπτουν από το άθροισμα $1+2+3+4+\dots+n$. Έτσι, $1+2=3$ και $1+2+3=6$.

Τρίγωνος μὲν οὖν ἔστιν ἀριθμὸς ὁ διαλυόμενος εἰς μονάδας καὶ τὴν κατ' ἐπίπεδον θέσιν τῶν μορίων ἰσόπλευρον σχηματογραφῶν εἰς τριγωνισμόν, οὗ ὑποδείγματα ὁ γ, ζ, ι, ιε, κα, κη καὶ οἱ ἐφεξῆς· σχηματογραφίαι γάρ αὐτῶν εὐτακτοὶ ἔσονται τρίγωνοι τε ἅμα καὶ ἰσόπλευροι, καὶ τὸ τοιοῦτον, μέχρις οὗ βούλει, προκόπτων τριγωνιζόμενον εὐρήσεις πρὸ πάντων στοιχειωδέστατον τάττων τὸ ἐκ μονάδος γινόμενον, ἵνα καὶ τρίγωνος δυνάμει φαίνεται ἡ μονάς, ἐνεργεία δὲ πρῶτος ὁ γ. πλευραὶ δὲ παραυξηθήσονται τῷ συνεχεῖ ἀριθμῷ, τοῦ μὲν γὰρ δυνάμει πρῶτου πλευρὰ μονάς, τοῦ δὲ ἐνεργείᾳ πρῶτου πλευρὰ δυάς, τουτέστι τοῦ γ, τοῦ δὲ ἐνεργείᾳ δευτέρου πλευρὰ τριάς, τουτέστι τοῦ ζ, τοῦ δὲ τρίτου πλευρὰ τετράς καὶ τοῦ τετάρτου πεντάς καὶ τοῦ πέμπτου ἑξάς καὶ αἰεὶ οὕτως. γεννᾶται δὲ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ στοιχηδὸν ἐκτεθέντος καὶ αἰεὶ ἀπ' ἀρχῆς τῶν συνεχῶν κατὰ ἓνα συντιθεμένων, κατὰ γὰρ ἐκάστην σύνθεσιν καὶ προσσώρευσιν οἱ εὐτακτοὶ τρίγωνοι συντελοῦνται·

Νικόμαχος Γερρασηνός, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 8, 1, 1 – 2, 8, 3, 5.

θροισμα των μονάδων αυτών των πρώτων τεσσάρων φυσικών αριθμών, όπως αναφέρει εις

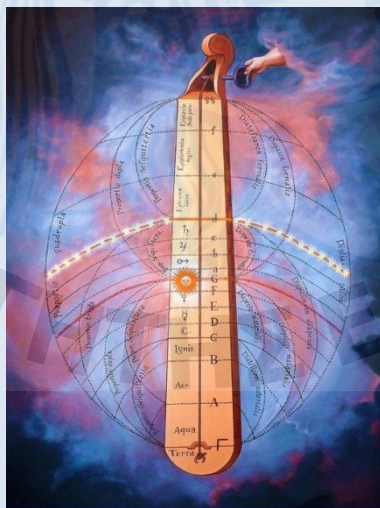
την *Αριθμητικήν του Εισαγωγήν* ο Νικόμαχος ο Γερασηνός) .

Ο Πλάτων εθεώρει τα Μαθηματικά προπαρασκευαστικά μαθήματα για την φιλοσοφία, προσθέσας την Στερεομετρίαν μεταξύ των τεσσάρων αδελφών της Μαθηματικής επιστήμης: ήτοι Αριθμητικής, Γεωμετρίας, Αρμονικής, Σφαιρικής κατά τον Πυθαγόραν, ως μας διασώζει ο Νικόμαχος ο Γερασηνός, ή μεταξύ των τεσσάρων «ελευθερίων τεχνών», ως μας διασώζει ο Βοήθιος). Επίστευεν ότι η αναζήτησις της αληθείας μέσω της επιστημονικής ερεύνης γεννά ολοέν και περισσότερο βαθέα και πολυσύνθετα ερωτήματα, άτινα, αντιμετωπιζόμενα, οδηγούν εις την φιλοσοφίαν.

Δόμησις της σειράς αριθμών των Bode-Titius

Προσωπικώς, από πολλού χρόνου ασχολούμενος μετά του προβλήματος του Γεωμετρικού αριθμού εκ του Η' βιβλίου της Πολιτείας του Πλάτωνος, αντιμετώπισα το θέμα των θείων και των ανθρωπείων γεννητών εις βάθος. Εις τα πλαίσια αυτών των ερευνητικών μου ενδιαφερόντων ησχολήθην επισταμένως μετά του νόμου ή κανόνος των Bode-Titius και, συγκεκριμένως, μετά του σκεπτικού επί τη βάσει του οποίου αυτή η σπουδαία εμπειρική ανακάλυψις, η ανερμήνευτος έως σήμερον, προέκυψεν.

Κατά την προσωπικήν μου εκδοχήν, ο νόμος ή κανών των Bode-Titius αποτελεί απόρροίαν της απολύτου τάξεως μεταξύ των θείων –κατά Πλάτωνα– γεννητών, παρέχων μίαν μαθηματικήν έκφρασιν της Πυθαγορείου μουσικής των σφαιρών. Εν άλλαις λέξεσιν, δια του νόμου ή του κανόνος αυτού μία κοσμολογική θεωρία μετουσιούται εις μίαν μορφήν θεολογίας του σύμπαντος δια της οποίας χορδίζεται το συμπαντικόν μονόχορδον, κατά τον τρόπον, τον οποίον αναπτύσσω εν συνεχεία.



Εικόν 4: Δια του κατατετμημένου συμπαντικού μονοχόρδου εκφράζεται η αρμονία των σφαιρών, η «ηχούσα» εις το σύμπαν.

Βεβαίως, δεν θα εδυνάμην ποτέ να ισχυρισθώ ότι οι αστρονόμοι, τα ονόματα των οποίων μνημονεύονται εις τον εν λόγω νόμον ή κανόνα, ανεκάλυψαν τυχαίως την συγκεκριμένην σειράν αριθμών.

Αλλ' ένας Γερμανός αριστοκράτης, ως ο Johann Daniel von Tietz, πολυεπιστήμων Φυσικός, Μαθηματικός, Αστρονόμος και μάλιστα καθηγητής εις την Βιττεμβέργην, ο οποίος εκλατινίζει το όνομά του Tietz εις Titius, θεωρώ αδύνατον να μην διαθέτει κλασικήν μόρφωσιν, εδραζομένην επί της αρχαιοελληνικής και της λατινικής γραμματολογίας. Εξ αυτής θα εγνώριζεν την Πυθαγόρειον φιλοσοφίαν, κορωνίς της οποίας αναγνωρίζεται η Σφαιρική, ήτοι η Αστρονομία. Η Σφαιρική απετέλει τρόπον τινά την εφηρμοσμένην Αρμονίαν των Σφαιρών της Αρμονικής, μέσω των μουσικών διαστημάτων της οποίας ετοποθετούντο τα θεία γεννητά εις το στερέωμα, υπελογίζοντο οι διαπλανητικές αποστάσεις και εμελετώντο οι κινήσεις των πλανητών εν τοις ουρανοίς. Γνωρίζων ο Titius την Αρμονίαν των Σφαιρών και την Πυθαγόρειον Μουσικήν, εγνώριζεν την ιεράν τετρακτύν. Τούτο είναι κραυγαλέως αληθές· αρκεί να

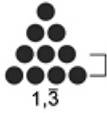
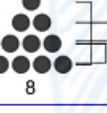
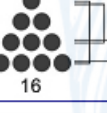
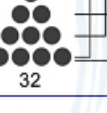
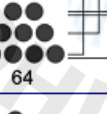
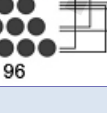
παρατηρήσει κανείς εις την μαθηματικήν έκφρασιν του εν λόγω κανόνος $D = \frac{4 + 3 \cdot 2^n}{10}$ τους

εμφανιζομένους εις αυτήν ακεραίους αριθμούς. Είναι οι αριθμοί της ιεράς πυθαγορείου τετρακτύος 2, 3, 4 μετά του αθροίσματός των, ήτοι του αριθμού 10. Εάν επισημάνετε ότι λείπει η μονάς, τοποθετείστε την άνευ ουδενός μαθηματικού σφάλματος, ως ουδέτερον στοιχείον

του πολλαπλασιασμού, παραπλεύρως του αριθμού 4, ήτοι $D = \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 2^n}{10}$

Ένας παρατηρησιακός Αστρονόμος του 18^{ου} αιώνα, μεμνημένος εις τα Μαθηματικά και την πρακτικήν της Πυθαγορείου μουσικής, θα ήτο εις θέσιν, κατά την μέθοδον των Πυθαγορείων να τοποθετήσει τους γνωστούς εις αυτόν πλανήτες εις τον ουρανόν, δεχόμενος ότι μεταξύ των σχηματίζονται θεμελιώδη Πυθαγόρεια εύφωνα μουσικά διαστήματα. Λέγοντες εύφωνα πυθαγόρεια διαστήματα εννοούμεν αυτά των οποίων η αριθμητική σχέσις εκφράζεται κατά την «θεμελιώδη αρχήν της Πυθαγορείου Αρμονίας» δια των αριθμών (1:2:3:4), των ενσαρκωτών της ιεράς τετρακτύος και μόνον, ήτοι το διατεσσάρων (4:3), το διαπέντε (3:2), το διαπασών (2:1) και (4:2), το διαπασών και διαπέντε (3:1) και το δις διαπασών (4:1)· αποκλεισμένου του διαπασών και διατεσσάρων (8:3), επί τω λόγω ότι ο αριθμός 8 δεν εμπεριέχεται εις την ιεράν τετρακτύν (Πίναξ 4).

Πίναξ 4: Τα σύμφωνα πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα, τα σχηματιζόμενα -κατά την εμίν εικασίαν- μεταξύ εκάστου των πλανητών και του Ηλίου, προκειμένου να προκύψει σειρά αριθμών παρομοία με την του Titius.

Πλανήτης	Μουσικόν διάστημα μεταξύ Ηλίου Πλανήτου	Ονομασία μουσικού διαστήματος	Αριθμητική σχέσις μουσικού διαστήματος	Αριθμητική τιμή μουσικού διαστήματος
Ερμής		Διατεσσάρων	$(4/3)$	1,33
Αφροδίτη		Διαπασών	$(4/2)$	2
Γη		Διαπασών και διαπέντε	$(3/1)$	3
Αρης		Διαπασών και δις διαπέντε	$(3/1) * (3/2)$	4,5
Αστεροειδείς		Τρις διαπασών	$(4/1) * (3/2) * (4/3)$	8
Δίας		Τετράκις διαπασών	$(4/1) * (3/1) * (4/3)$	16
Κρόνος		Πεντάκις διαπασών	$(4/1) * (3/1) * (4/3) * (4/2)$	32
Ουρανός		Εξάκις διαπασών	$(4/1) * (3/1) * (4/3) * (4/2) * (2/1)$	64
Ποσειδών		Εξάκις διαπασών και διαπέντε	$(4/1) * (3/1) * (4/3) * (4/2) * (2/1) * (3/2)$	96

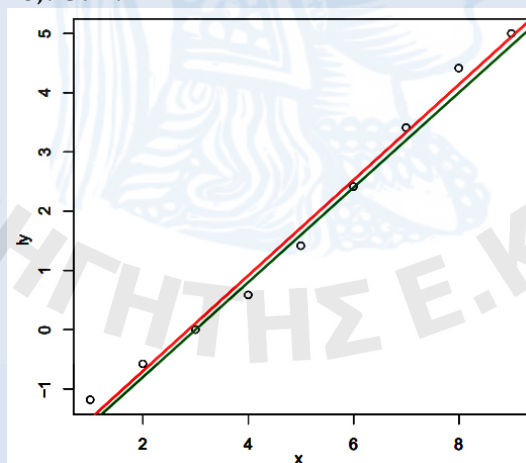
Εκ ταύτης της τοποθετήσεως των πλανητών προκύπτει με μεγάλην ακρίβειαν ο τύπος για τον νόμον ή κανόνα των Bode-Titius, ως καταδεικνύται υπό των εις τον Πίνακα 5 αναγραφόμενων αποτελεσμάτων.

Πίναξ 5: Ακριβεστέρα τοποθέτησις των θείων γεννητών εις τον ουρανόν επί τη βάσει της νέας σειράς αριθμών, παρεμφερούς με την του Titius.

Πλανήτης	Διαστηματική απόστασις πλανήτων-Ήλιου	Ονομασία μουσικού διαστήματος	Απόστασις πλανήτου-Ήλιου	Ανηγμένη απόστασις ως προς την απόστασι Γη-Ήλιου	Ανηγμένη απόστασις ως προς την απόστασι Γη-Ήλιου εκ του νόμου Bode	Λατοφείς	Προσημασμένη απόστασις ως προς την απόστασι Γη-Ήλιου	Λατοφείς
Ερμής	(4/3)	Διατεσσάρων	1.33	0.44	0.40	0.04	0.39	0.05
Αφροδίτη	(4/2)	Διαπασών	2.00	0.67	0.70	-0.03	0.72	-0.05
Γη	(3/1)	Διαπασών και διαπέντε	3.00	1.00	1.00	0.00	1	0.00
Αρης	(3/1)*(3/2)	Δις διαπασών	4.50	1.50	1.60	-0.10	1.52	-0.02
Αστεροειδείς	(4/1)*(3/2)*(4/3)	Τρις διαπασών	8.00	2.67	2.80	-0.13	2.8	-0.13
Δίας	(4/1)*(3/1)*(4/3)	Τετράκις διαπασών	16.00	5.33	5.20	0.13	5.2	0.13
Κρόνος	(4/1)*(3/1)*(4/3)*(4/2)	Πεντάκις διαπασών	32.00	10.67	10.00	0.67	9.55	1.12
Ουρανός	(4/1)*(3/1)*(4/3)*(4/2)*(2/1)	Εξάκις διαπασών	64	21.3333	19.60	1.73333	19.2	2.13
Ποσειδών	(4/1)*(3/1)*(4/3)*(4/2)*(2/1)*(3/2)	Εξάκις διαπασών και διαπέντε	96	32	38.80	-6.8	30.1	1.90

Αξιοσημείωτον τυγχάνει το γεγονός ότι όλα τα ενδοπλανητικά μουσικά διαστήματα ή είναι επιμόρια καθεαυτά ή δομούνται εκ περισσοτέρων του ενός επιμορίων μουσικών διαστημάτων.

Ενέδυσα την ευρεθείσα υπ' εμού σειράν αριθμών επί τη βάσει της αρμονίας των σφαιρών με το μαθηματικόν ιμάτιον $D = 2^{0.806(n-2.8664)}$, το οποίον κατά την ρήσιν του Πλάτωνος δι' ευπροσηγόρων και ρητών αριθμών δύναται να γραφεί ως $D = 2^{0.8(n-3)} = 2^{\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (n-3)}{10}}$. Για αμφοτέρα τα μαθηματικά μοντέλα παρατίθενται οι ευθείες παλινδρομήσεως εις το διάγραμμα 1 για τις οποίες ευρέθη $r^2 = 0,9892$.



Διάγραμμα 1: Οι ευθείες παλινδρομήσεως για τα μαθηματικά μοντέλα, τα προτεινόμενα υπό του καθηγητού Χαρ. Χ. Σπυρίδη.

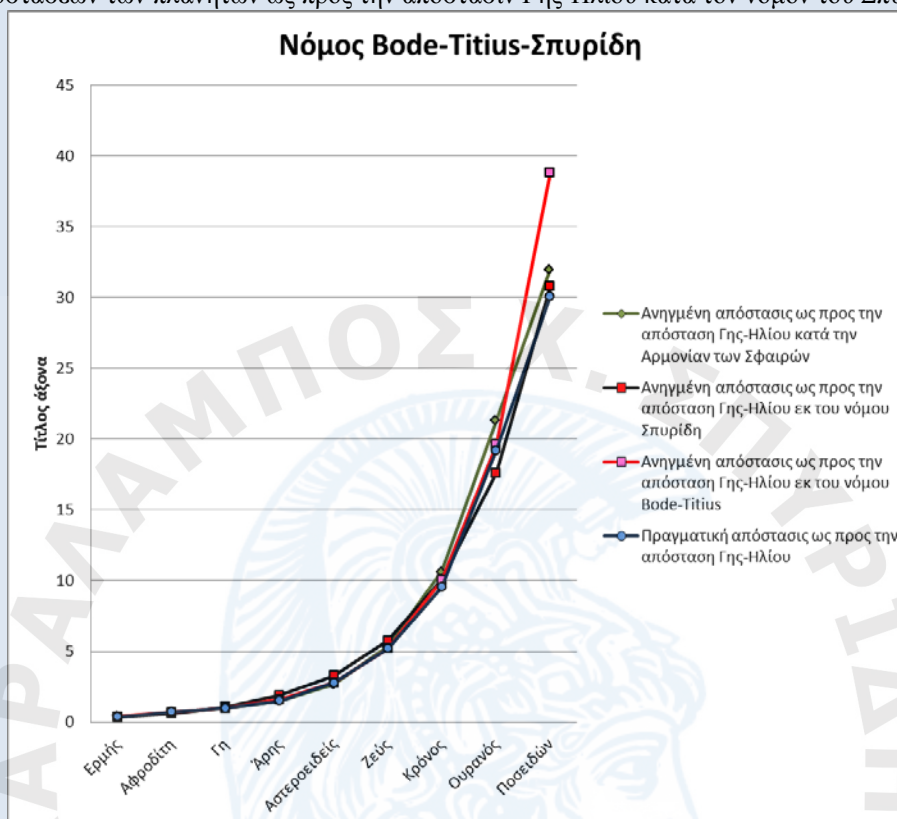
Εις το εν λόγω μαθηματικόν ιμάτιον, ως συμβαίνει και εις το μαθηματικόν ιμάτιον του Bode, οι εμπλεκόμενοι αριθμοί είναι οι αριθμοί της ιεράς πυθαγορείου τετρακτύος 1, 2, 3, 4 μετά του αθροίσματός των, ήτοι του αριθμού 10.

Εις τον Πίνακα 6 εμφανίζονται και εις το διάγραμμα 2 παρίστανται προς σύγκρισιν της ακριβείας των οι ανηγμένες αποστάσεις των πλανητών ως προς την απόστασιν Γης-Ηλίου κατά την θεωρίαν της Αρμονίας των Σφαιρών, κατά τον νόμον των Bode-Titius, οι πραγματικές των πλανητών αποστάσεις εις αστρονομικές μονάδες και, τέλος, οι ανηγμένες αποστάσεις των πλανητών ως προς την απόστασιν Γης-Ηλίου κατά τον νόμον του Σπυρίδη.

Πίναξ 6: Οι ανηγμένες αποστάσεις των πλανητών ως προς την απόστασιν Γης-Ηλίου κατά την θεωρίαν της Αρμονίας των Σφαιρών, κατά τον νόμον των Bode-Titius, οι πραγματικές αποστάσεις των πλανητών εις αστρονομικές μονάδες και, τέλος, οι ανηγμένες αποστάσεις των πλανητών ως προς την απόστασιν Γης-Ηλίου κατά τον νόμον του Σπυρίδη.

Αριθμός κατατάξεως πλανητών	Ανηγμένη απόστασις ως προς την απόστασιν Γης-Ηλίου κατά την Αρμονίαν των Σφαιρών	Ανηγμένη απόστασις ως προς την απόστασιν Γης-Ηλίου εκ του νόμου Bode-Titius	Πραγματική απόστασις ως προς την απόστασιν Γης-Ηλίου	Ανηγμένη απόστασις ως προς την απόστασιν Γης-Ηλίου εκ του νόμου Σπυρίδη
1	0.44	0.40	0.39	0.33
2	0.67	0.70	0.72	0.57
3	1.00	1.00	1	1.00
4	1.50	1.60	1.52	1.74
5	2.67	2.80	2.8	3.03
6	5.33	5.20	5.2	5.28
7	10.63	10.00	9.55	9.19
8	21.33	19.60	19.2	16.00
9	32	38.80	30.1	27.86

Διάγραμμα 2: Γραφική παράσταση των ανηγμένων αποστάσεων των πλανητών ως προς την απόστασιν Γης-Ηλίου κατά την θεωρίαν της Αρμονίας των Σφαιρών, κατά τον νόμον των Bode-Titius, των πραγματικών αποστάσεων των πλανητών εις αστρονομικές μονάδες και, τέλος, των ανηγμένων αποστάσεων των πλανητών ως προς την απόστασιν Γης-Ηλίου κατά τον νόμον του Σπυρίδη.



Εκ του νόμου Σπυρίδη για τιμές $n=11, 12, 13, 14, 15$, ήτοι εις αποστάσεις 84,449 147,033 256,000 445,722 και 776,047 A.U. προβλέπεται η ύπαρξις πλανητικών σωμάτων. Ανατρέχοντες εις Πίνακες των πέραν του Πλούτωνος πλανητικών αντικειμένων (Trans-Neptunian Objects), όντως ανευρίσκομεν τοιαύτα πλανητικά αντικείμενα έχοντα το αφήλιόν των εις την στενήν γειτονίαν αυτών των αποστάσεων (διάγραμμα 3). Περισσότερα στοιχεία περί των συγκεκριμένων πλανητικών αντικειμένων παρουσιάζονται εις τον Πίνακα 7. Πάντα ταύτα προσδίδουν αξιοπιστίαν εις τον νόμον Σπυρίδη.

Διάγραμμα 3: Προβλεφθείσα ύπαρξις «πλανητικών» αντικειμένων μετά τον Πλούτωνα επιβεβαιούται εκ της ανακαλύψεως των αναγραφόμενων Trans-Neptunian Objects εις την στενήν γειτονίαν των συγκεκριμένων θέσεων.



Πίναξ 7: Περιγραφή των πέραν του Πλούτωνος πλανητικών αντικειμένων (Trans-Neptunian Objects), των ανευρισκομένων εις την στενήν γειτονίαν των προβλεπομένων υπό του νόμου Σπυρίδη αποστάσεων.

Ταξινόνησις	Προσωρινή Επωνυμία	Ημερομηνία ανακαλύψεως	Περίηλιον (Α.Υ.)	Αφήλιον (Α.Υ.)
60458	2000C10114M ή 2000 CM114	5 Φεβρουαρίου 2000	35,415	82,903
145451	(145451) 2005 RM ₄₃ ή (145451) 2005 RM43	9 Σεπτεμβρίου 2005	35,097	147,647
54520	2000P10030J ή 2000 PJ30	5 Αυγούστου 2000	28,745	221,364
82158	2001F10185P ή 2001 FP185	26 Μαρτίου 2001	34,257	393,924
20041106	2004 VN ₁₁₂ ή 2004 VN112	6 Νοεμβρίου 2004	47,323	636,312

Επί τη βάσει αυτής της μουσικής διαστηματικής αλληλουχίας μεταξύ των πλανητών, εκκινών εκ της νότας Α₇¹⁴ της ευρωπαϊκής μουσικής, την οποίαν τοποθετώ επί του Ηλίου, ήτοι της αναφοράς του ηλιακού πλανητικού συστήματος, οι ανωτέρω πλανήτες θα ηχούν κατά την ευρωπαϊκήν εκδοχή της Αρμονίας των Σφαιρών, και παρακαλώ να μου συγχωρεθεί η ιεροσυλία αυτή, εις τις νότες της Ευρωπαϊκής μουσικής, τις σημειούμενες εις τον Πίνακα 8. Η νότα Α₇ επελέγη δι' έναν και μόνον λόγον να αποκτήσουν φωνήν και να ηχούν όλοι οι πλανήτες. Τούτο σημαίνει ότι η συχνότης και του εσχάτου εκ των γνωστών σήμερον πλανητών να ευρίσκεται εντός των ακουστών για τα ανθρώπινα ώτα συχνοτικών ορίων (από 16 Hz έως 16.000 Hz). Επί τη βάσει των δεδομένων του Πίνακος 8 οι σύγχρονοι σειρήνες των εν λόγω πλανητών, καθημένες επί του αντιστοίχου σφονδύλου της συμπαντικής ατράκτου (Πλάτων,

¹⁴ Εκ του Α εκκινεί η μουσική αλληλουχία των φθόγγων εις την Γένεσιν Ψυχής Κόσμου εις τον Πλατωνικόν *Τίμαιον* με δώριον κατιούσα δομήν τετραχόρδων, εξασφαλίζουσα ούτω τον ελαχιστότατον αριθμόν σημείων αλλοιώσεως εις την αλληλουχίαν των φθόγγων αυτής.

Πολιτεία, 616 c, 5 – 617, b, 7, περί του μύθου του Ηρόδ¹⁵) θα άδει εκάστη την νότα, ήτις της αντιστοιχεί. Πάντα τα ανωτέρω αφορούν εις το ηλιακόν μας σύστημα υπό την σήμερον αποδεκτὴν δομήν του. Σημειωτέον ὅτι τα μουσικά ὕψη των φθόγγων των πλανητῶν μειούνται καθὼς απομακρυνόμεθα εκ του Ηλίου, αφού τα ταλαντούμενα μήκη χορδῶν του συμπαντικού μονοχόρδου καθίστανται ολοέν επιμηκέστερα.

Πίναξ 8: Οι νότες οι αδόμενες υπό των σειρήνων των καθημένων επί των σφονδύλων της συμπαντικής Ατράκτου κατά τον μύθον του του Πλατωνικού Ηρόδ (*Πολιτεία*, 616 c, 5 – 617, b, 7).

Διαστηματική Σχέσις	Συχνότης (Hz)	Νότα Ενωρπιτικής Μουσικής	Θείον Γεννητόν
	3520.002	A7	Ήλιος
1.33	2646.618045	E7	Ερμής
2	1760.001	A6	Αφροδίτη
3	1173.334	D6	Γη
4.5	782.2226667	G5	Αρης
8	440.00025	A4	Αστεροειδείς
16	220.000125	A3	Ζεύς
32	110.0000625	A2	Κρόνος
64	55.00003125	A1	Ουρανός
96	36.6666875	D1	Ποσειδών

Οι νότες της Πλατωνικής ηλακάτης, αναγόμενες εντός του μουσικού διαστήματος του ενός διαπασών, παρέχουν ένα κατιόν χρωματικών πεντάχορδον A-G-E-D με δομήν τόνος, τριημιτόνιον, τόνος. Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός (*Αρμονικόν Εγχειρίδιον*, 9) μας πληροφορεί ὅτι αὐτή εἶναι ἡ δομή της διοξειάς (πενταχόρδου) κατά τον Φιλόλαον, τον πρώτον Πυθαγόρειον

¹⁵ οὗ τὴν μὲν ἡλακάτην τε καὶ τὸ ἄγκιστρον εἶναι ἐξ ἀδάμαντος, τὸν δὲ σφόνδυλον μεικτὸν ἐκ τε τούτου καὶ ἄλλων γενῶν. τὴν δὲ τοῦ σφονδύλου φύσιν εἶναι τοιάνδε· τὸ μὲν σχῆμα οἷαπερ ἡ τοῦ ἐνθάδε, νοῆσαι δὲ δεῖ ἐξ ὧν ἔλεγεν τοιόνδε αὐτὸν εἶναι, ὥσπερ ἂν εἰ ἐν ἐνὶ μεγάλῳ σφονδύλῳ κοίλῳ καὶ ἐξεγλυμμένῳ διαμπερὲς ἄλλος τοιοῦτος ἐλάττων ἐγκέοιτο ἀρμόττων, καθάπερ οἱ κάδοι οἱ εἰς ἀλλήλους ἀρμόττοντες, καὶ οὕτω δὴ τρίτον ἄλλον καὶ τέταρτον καὶ ἄλλους τέτταρας. ὁκτὼ γὰρ εἶναι τοὺς σύμπαντας σφονδύλους, ἐν ἀλλήλοις ἐγκειμένους, κύκλους ἄνωθεν τὰ χεῖλη φαίνοντας, νῶτον συνεχὲς ἐνὸς σφονδύλου ἀπεργαζομένους περὶ τὴν ἡλακάτην· ἐκείνην δὲ διὰ μέσου τοῦ ὀγδοῦ διαμπερὲς ἐληλάσθαι. τὸν μὲν οὖν πρῶτόν τε καὶ ἐξωτάτῳ σφόνδυλον πλατύτατον τὸν τοῦ χεῖλους κύκλον ἔχειν, τὸν δὲ τοῦ ἔκτου δεῦτερον, τρίτον δὲ τὸν τοῦ τετάρτου, τέταρτον δὲ τὸν τοῦ ὀγδοῦ, πέμπτον δὲ τὸν τοῦ ἐβδόμου, ἕκτον δὲ τὸν τοῦ πέμπτου, ἑβδομον δὲ τὸν τοῦ τρίτου, ὀγδοον δὲ τὸν τοῦ δευτέρου. καὶ τὸν μὲν τοῦ μεγίστου ποικίλον, τὸν δὲ τοῦ ἐβδόμου λαμπρότατον, τὸν δὲ τοῦ ὀγδοῦ τὸ χρῶμα ἀπὸ τοῦ ἐβδόμου ἔχειν προσλάμποντος, τὸν δὲ τοῦ δευτέρου καὶ πέμπτου παραπλήσια ἀλλήλοις, ξανθότερα ἐκείνων, τρίτον δὲ λευκότατον χρῶμα ἔχειν, τέταρτον δὲ ὑπέρυθρον, δεῦτερον δὲ λευκότητι τὸν ἕκτον. κυκλεῖσθαι δὲ δὴ στρεφόμενον τὸν ἄτρακτον ὅλον μὲν τὴν αὐτὴν φορὰν, ἐν δὲ τῷ ὅλῳ περιφερομένῳ τοὺς μὲν ἐντὸς ἐπτὰ κύκλους τὴν ἐναντίαν τῷ ὅλῳ ἡρέμα περιφέρεισθαι, αὐτῶν δὲ τούτων τάχιστα μὲν ἰέναι τὸν ὀγδοον, δευτέρους δὲ καὶ ἅμα ἀλλήλοις τὸν τε ἑβδομον καὶ ἕκτον καὶ πέμπτον· [τὸν] τρίτον δὲ φορᾷ ἰέναι, ὥς σφίσι φαίνεσθαι, ἐπανακυκλούμενον τὸν τέταρτον, τέταρτον δὲ τὸν τρίτον καὶ πέμπτον τὸν δεῦτερον. στρέφεσθαι δὲ αὐτὸν ἐν τοῖς τῆς Ἀνάγκης γόνασιν. ἐπὶ δὲ τῶν κύκλων αὐτοῦ ἄνωθεν ἐφ' ἐκάστου βεβηκέναι Σειρῆνα συμπεριφερομένην, φωνὴν μίαν ἰεῖσαν, ἓνα τόνον· ἐκ πασῶν δὲ ὁκτὼ οὐσῶν μίαν ἀρμονίαν συμφωνεῖν.

Πλάτωνος, *Πολιτεία*, 616 c, 5 – 617, b, 7.

μετά τον έναν. Ο Φιλόλαος εις το έκτον απόσπασμα¹⁶ χρησιμοποιεί ορολογίαν επταχόρδου συστήματος (δύο συνημμένα τετράχορδα) μολοντί αναφέρεται εις σύστημα αρμονίας (πεντάχορδον εν συναφή προς τετράχορδον). Συγκεκριμένως, λαμβάνει τις χορδές: παρανήτην εις διαστηματικήν απόστασιν τόνου εκ της νήτης, την τρίτην εις απόστασιν τριημιτόνου εκ της παρανήτης (τουτέστιν πεντάχορδον χρωματικού χαρακτήρος), την Μέσσην εις απόστασιν τόνου εκ της τρίτης, τον λιχανόν εις απόστασιν τόνου εκ της Μέσσης, την παρυπάτην εις απόστασιν τόνου εκ του λιχανού και, τέλος, την υπάτην εις απόστασιν ημιτόνου εκ της παρυπάτης.

Επειδή ουδέν είναι τυχαίον ή προερχόμενον εκ παρθενογενεσίας, να μην λανθάνει της προσοχής μας το γεγονός ότι ο Πλάτων εις το Θ' βιβλίον της *Πολιτείας*, αλληγορικώς ομιλών, παρουσιάζει δύο συνημμένα μουσικά τρίχορδα δομούντα ένα εναρμόνιον πεντάχορδον.

Κατακλιῖς

Η ακρίβεια των παρεχομένων αποτελεσμάτων υπό του νόμου ή κανόνος των Bode-Titius για τους πλανήτες μέχρι τον πλανήτην Κρόνον είναι λίαν ικανοποιητική. Αυτούς τους πλανήτες εγνώριζον τότε και γι' αυτούς τους πλανήτες εδόμησεν ο μεν Titius την σειράν των αριθμών, ο δε Bode έρραψεν το μαθηματικόν ένδυμα της σειράς αυτών των αριθμών, χρησιμοποιών μόνον τους αριθμούς της ιεράς τετρακτύος των Πυθαγορείων. Αμφότεροι εμμέσως συνέβαλον εις την ανακάλυψη αφενός της ζώνης των αστεροειδών, αφετέρου του πλανήτη Ουρανού. Η προσπάθεια εφαρμογής του νόμου ή κανόνος των Bode-Titius υπό των μεταγενεστέρων εκτός των προμνημονευθέντων ορίων εγκυμονεί κινδύνους ανακριβειών.

Ο προσωπικός μου στόχος εις την παρούσα εισήγησιν υπήρξεν διττός: αφενός να υποδείξω ότι το σκεπτικόν των ενεργειών του Γερμανού πολυεπιστήμονος Johann Daniel von Tietz ή Titius, προκειμένου να παραγάγει την συγκεκριμένην σειράν αριθμών, την ανερμήνευτον έως σήμερον, εδράζεται επί της Πυθαγορείου θεωρίας της Αρμονίας των Σφαιρών και επ' αυτής κατόπιν εργαζόμενος ο επίσης Γερμανός Αστρονόμος Johann Elert Bode να διατυπώσῃ την εξαιρετικώς κομψήν και απλήν φερώνυμον σχέσιν τη χρήσει των αριθμών της ιεράς τετρακτύος των Πυθαγορείων, αφετέρου, επεκτείνων και εφαρμόζων την Πυθαγόρειον θεωρίαν της Αρμονίας των Σφαιρών εις όλους τους γνωστούς εις ημάς πλανήτες σήμερον, να διατυπώσω μίαν καθολικήν, επίσης εξαιρετικώς απλήν, κομψήν και ακριβή σχέσιν, εμπεριέχουσα μόνον τους αριθμούς της ιεράς τετρακτύος των Πυθαγορείων.

Πάντα ταύτα υποδεικνύουν μίαν εκ των πολυαριθμών και θαυμασίων συμβολών της Πυθαγορείου Φιλοσοφίας περί την Ακουστικήν εις την Κοσμολογίαν.

Η εν λόγω έρευνα επεκτείνεται εις την μελέτην των συστημάτων Πλανήτης – δορυφόροι αυτού και εις τα νεοευρεθέντα άλλα ηλιακά συστήματα.

¹⁶ ἄρμονίᾳ δὲ μέγεθός ἐστι συλλαβὰ καὶ δι' ὀξειᾶν· τὸ δὲ δι' ὀξειᾶν μείζον τᾶς συλλαβᾶς ἐπογδόωι. ἔστι γὰρ ἀπὸ ὑπάτας ἐπὶ μέσσαν συλλαβὰ, ἀπὸ δὲ μέσσης ἐπὶ νεάταν δι' ὀξειᾶν, ἀπὸ δὲ νεάτας ἐς τρίταν συλλαβὰ, ἀπὸ δὲ τρίτας ἐς ὑπάταν δι' ὀξειᾶν· τὸ δ' ἐν μέσσωι μέσσης καὶ τρίτας ἐπόγδοον· ἃ δὲ συλλαβὰ ἐπίτритον, τὸ δὲ δι' ὀξειᾶν ἡμιόλιον, τὸ διὰ πασᾶν δὲ διπλόον. οὕτως ἄρμονία πέντε ἐπόγδοα καὶ δύο διέσεις, δι' ὀξειᾶν δὲ τρία ἐπόγδοα καὶ διέσεις, συλλαβὰ δὲ δύο ἐπόγδοα καὶ διέσεις.