

«Musikalisches Würfelspiel»
[μουσική από το ρίξιμο ζαριών]
του
Wolfgang Amadeus Mozart

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης
Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας,
Τμήματος Μουσικών Σπουδών, Φιλοσοφικής Σχολής, Πανεπιστημίου Αθηνών
hspyridis@music.uoa.gr



Εισαγωγή

Κατά το τέλος του 18^{ου} αιώνας στην Ευρώπη οι μουσικές εκδόσεις ήταν ένας αναπτυσσόμενος κλάδος. Οι εκδότες συναγωνίζοντο μεταξύ τους για το ποιός θα εξέδιδε την τελευταία δουλειά του εκάστοτε πλέον δημοφιλούς συνθέτου. Πολλοί απ' αυτούς κοίταζαν να βρουν νέους τρόπους για να δελεάσουν τους πελάτες, ώστε να μπουν στα μουσικά τους καταστήματα. Ένας από τους νέους τρόπους –πολύ της μόδας- ήταν να δημοσιεύουν συστήματα που θα επέτρεπαν κάθε ερασιτέχνη να συνθέτει μουσική χωρίς καν να κατέχει τις τεχνικές και τους κανόνες συνθέσεως.

Γύρω στο 1775-1800, λοιπόν, ένας μεγάλος αριθμός συνθετών, γνωστών και αγνώστων στο ευρύ κοινό, όπως λ.χ. είναι οι Kirnberger, Stadler, de la Chevardiere, Graf, Fiedler, Fischer, Catrofo, Calegari, C. P. E. Bach, Haydn και Mozart επενόησαν διαφόρους τρόπους να συνθέτουν μουσική με βάση τα τυχερά παιχνίδια και ιδιαιτέρως τα τυχερά παιχνίδια με ζάρια.

Η πλήρως ιστορικά τεκμηριωμένη εργασία είναι του Johann Philipp Kirnberger, η οποία φέρει τον τίτλο «*Ο πάντα έτοιμος συνθέτης των Polonaises και των Menuettes*» (Der allezeit fertige Polonaisen und Menuetten Komponist) και εδημοσιεύθη το έτος 1757.

Ο Josef Haydn απεκάλεσε την συνεισφορά του στην ταχύτατα αναπτυσσομένη βιβλιογραφία της μουσικής «*Φιλαρμονικό Αστείο*» και εξεδόθη το έτος 1790 από τον εκδότη Luigi Marescalchi στη Νεάπολη.

Ο Maximilian Stadler ωνόμασε τη δική του συνεισφορά «*Πίνακες βάσει των οποίων ένας μπορεί να φτιάξει στα γρήγορα μενουέτα και trios*».

Ο de la Chevardiere εβάπτισε τη δική του συνεισφορά «*The Harmonic Top*».

Μία ανώνυμη εργασία εξεδόθη στην Αγγλία και είχε τον κατηγορηματικό τίτλο «*Ένα Σύστημα Πινάκων στους οποίους ο καθένας χωρίς την παραμικρή γνώση μουσικής μπορεί να συνθέσει δέκα χιλιάδες διαφορετικά μενουέτα με τον πιο ευχάριστο και σωστό τρόπο*».

Ο Antonio Calegari εξέδωσε στη Βενετία το έτος 1801 ένα *Μουσικό πυθαγορικό παιχνίδι με το οποίο θα μπορέσει ο καθένας, ακόμα και αν δε γνωρίζει μουσική, να δημιουργήσει μία σειρά, σχεδόν ατελείωτη από αριέτες και μικρά ντουέτα για όλους τους χαρακτήρες...* (*Gioco pitagorico musicale col quale potrai ognuno, anco senza sapere di musica, formarsi una serie quasi infinita di piccole ariette e duettini per tutti li caratteri...*) προφανώς αυτού του είδους και το έτος 1802 μετεκόμισε στο Παρίσι, όπου εξέδωσε το πιθανώς παρόμοιο (*L' Art de composer de la musique sans en connaitre les elements*) -το οποίο πολύ σύντομα πήγε σε δεύτερη έκδοση- αφιερωμένο στη Mme. Josephine Bonaparte.

Τα «*μουσικά παιχνίδια με ζάρια*» των ανωτέρω συνθετών εξεδόθησαν και επανεξεδόθησαν τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο παντού στην Ευρώπη. Αυτή μάλιστα είναι η περίοδος, την οποία συνήθως αποκαλούμε «*κλασική*», δηλαδή είναι η περίοδος που συνετέθη η πλέον σπουδαία μουσική μας.

Σήμερα θεωρείται φημισμένη και επιτυχής η σύνθεση του W. A. Mozart (1756-1791) «*Musikalisches Würfelspiel*». Αυτό το μουσικό παιχνίδι με το ριζισμό ζαριών, επεξηγούμενο από οδηγίες στα Γερμανικά, στα Γαλλικά και στα Αγγλικά πρωτοεδημοσιεύθη στο Βερολίνο το 1792 (δηλαδή ένα έτος μετά το θάνατο του Mozart) από τον N. Simrock και αργότερα, ανάμεσα στα έτη 1793-1801, και από άλλους εκδότες. Παρ' όλο που ούτε το αυθεντικό χειρόγραφο έχει βρεθεί, αλλ' ούτε κάποια απ' ευθείας αναφορά στον Mozart έχει βρεθεί επίσης, το έργο από την πλειονότητα των μουσικολόγων πλέον αποδίδεται στον W. A. Mozart (Köchelverzeichnis KV1 Anh. 294d, KV6-516F).

Ο Mozart στην αρχή της καριέρας του -εντελώς άσημος- επιθυμούσε διακαώς να δείξει πώς κάποιος θα μπορούσε να συνθέσει χωρίς την παραμικρή μουσική γνώση σχετικά με τα γερμανικά βαλς, κάνοντας συγκεκριμένου πλήθους ρίψεις δύο ζαριών. Γιατί δίνει έμφαση ο Mozart στη σχέση αυτής της ποταπής μουσικής με τους αριθμούς μέσω των ζαριών; Ο Mozart δεν ήτο διανοούμενος. Μια φορά δήλωσε πως έγραψε τη μουσική του για όλων των ειδών τα αυτιά εκτός απ' αυτά που είναι μακριά. Σίγουρα δεν ήταν ένας μουντός συνθέτης ή κάποιος που θεωρούσε ότι η μουσική δεν αφορούσε στον κόσμο. Θεωρούσε ότι η μουσική σύνθεση δεν είναι για να την πλησιάζουν μόνον οι της υψηλής διανοήσεως. «Αν τύχει και βρεθούν δύο ζάρια παραδίπλα σου, ρίξ' τα και ξεκίνα», έλεγε.

Τον καιρό που η σύνθεση μουσικής με ζάρια ευρίσκετο στο ζενίθ της, η κοινωνία απαιτούσε ο οποιοσδήποτε με καλή ανατροφή ή και ευκατάστατος να μπορεί να συνθέσει κάτι, όταν οι περιστάσεις το απαιτούσαν. Η ιδέα ότι η μουσική ήτο κάτι, το οποίο κατακτούσες μετά από επίπονες και πολυετείς σπουδές, εφαινότο εξωπραγματικό. Αναμφιβόλως ανεμένετο από τον μέσο λάτρη της μουσικής ότι, δοθείσης ευκαιρίας, θα μπορούσε να γράψει μουσική με έναν αποδεκτό τρόπο –όπως ακριβώς ανεμένετο απ' αυτόν να μπορεί να χορέψει, να κάνει μια ομιλία ή να γράψει επιστολές.

Πιθανώς τα μουσικά αποτελέσματα θα μπορούσαν να χαρακτηρισθούν ανούσια από συνθέτες σαν τον Mozart και τον Haydn. Παρ' όλα ταύτα επρότειναν έναν πρόχειρο και διασκεδαστικό τρόπο με τον οποίον ο οποιοσδήποτε, ακολουθώντας τα πολύ απλά βήματα, που του υπεδείκνυαν, θα μπορούσε να γράψει μια μικρή σύνθεση.

Η ιδέα του μουσικού παιχνιδιού με ζάρια βασίζεται –κατά την ορολογία των H/Y- στη διαδικασία *cut and paste* μουσικών μέτρων συντεθειμένων εκ των προτέρων, που όλα μαζί θα εδημιουργούσαν μια μουσική σύνθεση. Η τυχαιότητα της όλης διαδικασίας εξασφαλίζεται από το ριζίμο ενός ή περισσοτέρων ζαριών. Το άθροισμα των αριθμών στις επάνω επιφάνειες των ριπτομένων ζαριών καθόριζε ποιο μουσικό μέτρο θα παιχθεί, επιλεγόμενο από έναν υπάρχοντα πίνακα προσυντεθειμένων μουσικών μέτρων.

Η θεμελιώδης ιδέα για την εκάστοτε επιλογή των μουσικών μέτρων σε ένα τέτοιο μουσικό παιχνίδι με ζάρια, όπως αυτό του Mozart, είναι αρκετά απλή. Συγκεκριμένα, στο πρώτο μέρος οι πρώτες δύο ρίψεις των ζαριών ουσιαστικά εξασφάλιζαν την επιλογή μουσικών μέτρων, τα οποία περιείχαν την τονική, με την τρίτη ρίψη των ζαριών επελέγετο ένα μουσικό μέτρο με τη δεσπόζουσα κ.ο.κ. και το πρώτο μέρος κατέληγε στην τονική. Το δεύτερο μέρος θα έπρεπε να επιστρέφει από τη δεσπόζουσα στην τονική για φινάλε. Κατ' αυτόν τον τρόπο το προκύπτον μενουέτο ή βάλς είχε μια αρκετά ολοκληρωμένη και αποδεκτή δομή.

Σήμερα, όπως και τον καιρό του Mozart, η αξία αυτού του παιχνιδιού αναφέρεται στη διασκέδαση. Αναμφιβόλως το παιχνίδι αυτό έχει για μας εκπαιδευτική αξία πέραν και υπεράνω της καθαρής αναδημιουργικής του αξίας, την οποία είχε γι' αυτούς που το χρησιμοποιούσαν τότε που πρωτοεμφανίσθη.

Κατά την εισήγηση θα εκτεθεί ο τρόπος συνθέσεως *αλεατορικής* μουσικής με βάση τη *Συνδυαστική Ανάλυση* και τη *Θεωρία των Πιθανοτήτων*. Ο όρος *αλεατορική* προέρχεται από τη λατινική έκφραση «*alea jacta est*¹ -ο κύβος ερρίφθη-» και κατέ-

¹ Την άνοιξη του έτους 49 π.Χ. ο Ιούλιος Καίσαρ, εκκινών εκ της Ραβέννης με 6000 άνδρες, εβάδισε κατά του Πομπηίου και της Συγκλήτου της Ρώμης με αιτιολογικό να αποκαταστήσει τους δημάρχους εις το αξίωμά τους και να ελευθερώσει τον πιεζόμενο λαό. Διαβαίνων τον ποταμό Ρουβίκωνα –όριο της εντεύθεν των Άλπεων Γαλατίας και της ιδίως Ιταλίας-, είπε την ιστορική πλέον φράση «*alea jacta est* -ο κύβος ερρίφθη-» και ακάθεκτος ώρμησε προς κατάληψη των πόλεων μέχρι τη Ρώμη.

στη γνωστός στους Ευρωπαίους συνθέτες από τις διαλέξεις του Ακουστικού Werner Meyer-Eppler στο θερινό σχολείο του Darmstadt στις αρχές της δεκαετίας του πενήντα. Σύμφωνα με τον ορισμό του οι *αλεατορικές διαδικασίες* να μην είναι καθορισμένες ως προς το γενικό τους περίγραμμα, οι λεπτομέρειές τους, όμως, αφήνονται στην τύχη. Η διαδικασία των τυχαίων επιλογών υλοποιείται είτε με τραπουλόχαρτα, είτε με το ρίξιμο ζαριών, είτε με τη μαθηματική θεωρία της τυχαιότητας και στις ημέρες μας με κατάλληλο λογισμικό σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Η σύνθεση *Musikalisches Würfelspiel* του Mozart

Όπως προελέχθη, πρόκειται για ένα μουσικό παιχνίδι με ζάρια με το οποίο συνθέτουμε μουσική. Το έτος 1787 ο Mozart έγραψε $176+96=272$ δομές μουσικών μέτρων από τις οποίες τυχαίως θα πραγματοποιηθούν οι επιλογές με βάση τον Πίνακα των κανόνων, που συνώδευαν το παιχνίδι. Τις $176=16 \times 11$ δομές μουσικών μέτρων ετοποθέτησε ο Mozart σε έναν πίνακα 16 στηλών και 11 γραμμών (Βλέπε Πίνακα 1)

Πίνακας 1: Οι $176=16 \times 11$ προσυντεθειμένες δομές μουσικών μέτρων για το Minuet, ενταγμένες σε 16 στήλες και 11 γραμμές.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	<u>96</u>	<u>22</u>	<u>141</u>	<u>41</u>	<u>105</u>	<u>122</u>	<u>11</u>	<u>30</u>	<u>70</u>	<u>121</u>	<u>26</u>	<u>9</u>	<u>112</u>	<u>49</u>	<u>109</u>	<u>14</u>
2	<u>32</u>	<u>6</u>	<u>128</u>	<u>63</u>	<u>146</u>	<u>46</u>	<u>134</u>	<u>81</u>	<u>117</u>	<u>39</u>	<u>126</u>	<u>56</u>	<u>174</u>	<u>18</u>	<u>116</u>	<u>83</u>
3	<u>69</u>	<u>95</u>	<u>158</u>	<u>13</u>	<u>153</u>	<u>55</u>	<u>110</u>	<u>24</u>	<u>66</u>	<u>139</u>	<u>15</u>	<u>132</u>	<u>73</u>	<u>58</u>	<u>145</u>	<u>79</u>
4	<u>40</u>	<u>17</u>	<u>113</u>	<u>85</u>	<u>161</u>	<u>2</u>	<u>159</u>	<u>100</u>	<u>90</u>	<u>176</u>	<u>7</u>	<u>34</u>	<u>67</u>	<u>160</u>	<u>52</u>	<u>170</u>
5	<u>148</u>	<u>74</u>	<u>163</u>	<u>45</u>	<u>80</u>	<u>97</u>	<u>36</u>	<u>107</u>	<u>25</u>	<u>143</u>	<u>64</u>	<u>125</u>	<u>76</u>	<u>136</u>	<u>1</u>	<u>93</u>
6	<u>104</u>	<u>157</u>	<u>27</u>	<u>167</u>	<u>154</u>	<u>68</u>	<u>118</u>	<u>91</u>	<u>138</u>	<u>71</u>	<u>150</u>	<u>29</u>	<u>101</u>	<u>162</u>	<u>23</u>	<u>151</u>
7	<u>152</u>	<u>60</u>	<u>171</u>	<u>53</u>	<u>99</u>	<u>133</u>	<u>21</u>	<u>127</u>	<u>16</u>	<u>155</u>	<u>57</u>	<u>175</u>	<u>43</u>	<u>168</u>	<u>89</u>	<u>172</u>
8	<u>119</u>	<u>84</u>	<u>114</u>	<u>50</u>	<u>140</u>	<u>86</u>	<u>169</u>	<u>94</u>	<u>120</u>	<u>88</u>	<u>48</u>	<u>166</u>	<u>51</u>	<u>115</u>	<u>72</u>	<u>111</u>
9	<u>98</u>	<u>142</u>	<u>42</u>	<u>156</u>	<u>75</u>	<u>129</u>	<u>62</u>	<u>123</u>	<u>65</u>	<u>77</u>	<u>19</u>	<u>82</u>	<u>137</u>	<u>38</u>	<u>149</u>	<u>8</u>
10	<u>3</u>	<u>87</u>	<u>165</u>	<u>61</u>	<u>135</u>	<u>47</u>	<u>147</u>	<u>33</u>	<u>102</u>	<u>4</u>	<u>31</u>	<u>164</u>	<u>144</u>	<u>59</u>	<u>173</u>	<u>78</u>
11	<u>54</u>	<u>130</u>	<u>10</u>	<u>103</u>	<u>28</u>	<u>37</u>	<u>106</u>	<u>5</u>	<u>35</u>	<u>20</u>	<u>108</u>	<u>92</u>	<u>12</u>	<u>124</u>	<u>44</u>	<u>131</u>

και τις $96=16 \times 6$ δομές μουσικών μέτρων τις ετοποθέτησε σε έναν άλλον πίνακα με 16 στήλες και 6 γραμμές (Βλέπε Πίνακα 2).

Πίνακας 2: Οι $96=16 \times 6$ προσυντεθειμένες δομές μουσικών μέτρων για το Trio, ενταγμένες σε 16 στήλες και 6 γραμμές.

	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	<u>72</u>	<u>6</u>	<u>59</u>	<u>25</u>	<u>81</u>	<u>41</u>	<u>89</u>	<u>13</u>	<u>36</u>	<u>5</u>	<u>46</u>	<u>79</u>	<u>30</u>	<u>95</u>	<u>19</u>	<u>66</u>
2	<u>56</u>	<u>82</u>	<u>42</u>	<u>74</u>	<u>14</u>	<u>7</u>	<u>26</u>	<u>71</u>	<u>76</u>	<u>20</u>	<u>64</u>	<u>84</u>	<u>8</u>	<u>35</u>	<u>47</u>	<u>88</u>
3	<u>75</u>	<u>39</u>	<u>54</u>	<u>1</u>	<u>65</u>	<u>43</u>	<u>15</u>	<u>80</u>	<u>9</u>	<u>34</u>	<u>93</u>	<u>48</u>	<u>69</u>	<u>58</u>	<u>90</u>	<u>21</u>
4	<u>40</u>	<u>73</u>	<u>16</u>	<u>68</u>	<u>29</u>	<u>55</u>	<u>2</u>	<u>61</u>	<u>22</u>	<u>67</u>	<u>49</u>	<u>77</u>	<u>57</u>	<u>87</u>	<u>33</u>	<u>10</u>
5	<u>83</u>	<u>3</u>	<u>28</u>	<u>53</u>	<u>37</u>	<u>17</u>	<u>44</u>	<u>70</u>	<u>63</u>	<u>85</u>	<u>32</u>	<u>96</u>	<u>12</u>	<u>23</u>	<u>50</u>	<u>91</u>
6	<u>18</u>	<u>45</u>	<u>62</u>	<u>38</u>	<u>4</u>	<u>27</u>	<u>52</u>	<u>94</u>	<u>11</u>	<u>92</u>	<u>24</u>	<u>86</u>	<u>51</u>	<u>60</u>	<u>78</u>	<u>31</u>

Η κάθε στήλη των πινάκων αντιστοιχεί σε ένα μουσικό μέτρο είτε του Μενούετου (Πίνακας 1), είτε του Trio (Πίνακας 2) και το κάθε κελί κάτω από την κάθε

στήλη εμπεριέχει μία από τις εν δυνάμει δομικές μορφές, που θα μπορούσε να λάβει το εν λόγω μέτρο. Οι αριθμοί των μουσικών μέτρων φαίνονται στον οριζόντιο άξονα (1, 2, ..., 32) και η ένδειξη του ή των ζαριών –μορφής κύβου- φαίνονται στον κατακόρυφο άξονα (1-11 για το Μενουέτο, 1-6 για το Τριο). Δηλαδή στην περίπτωση ρίψεως δύο ζαριών ελαμβάνετο το άθροισμα των ενδείξεών τους. Το άθροισμα ήτο ένας αριθμός από το 2 μέχρι το 12. Αφαιρώντας τη μονάδα από αυτό το άθροισμα, προέκυπτε ένας αριθμός από το 1 έως το 11, ο οποίος υπεδείκνυε την γραμμή του Πίνακα εις την οποία ευρίσκεται η δομή του επιλεκτέου μουσικού μέτρου.

Ο αριθμός 11 είναι ο ιερός αριθμός των τεκτόνων. Να μη λησμονούμε ότι ο Mozart προσεχώρησε στο κίνημα του Ελευθεροτεκτονισμού και υπήρξε θερμός υποστηρικτής της φιλοσοφίας και της κοσμοθεωρίας του τεκτονισμού. Το συγκεκριμένο έργο κατ' εμέ «υμνεί» τον αριθμό 11 και γι' αυτό το κατατάσσω στα μασονικά έργα² του Mozart³.

Κάλλιστα θα μπορούσε ο Mozart να χρησιμοποιήσει και για το πρώτο μέρος (minuet) ένα ζάρι, όπως έκανε για το trio. Θα είχε να αντιμετωπίσει 6 ισοπίθανα ενδεχόμενα, τα οποία θα του εξασφάλιζαν ανόμοια πλοκή των συνθέσεων και, μάλιστα, με λιγότερα προσυντεθειμένα μουσικά μέτρα ($96=16 \times 6$ αντί $176=16 \times 11$). Θα μπορούσε, βέβαια, να χρησιμοποιήσει τρία ζάρια⁴, γράφοντας περισσότερα προσυντεθειμένα μουσικά μέτρα ($256=16 \times 16$ αντί $176=16 \times 11$)⁵. Θεωρώ, λοιπόν, εσκεμμένη την επιλογή του Mozart όσον αφορά στην ρίψη δύο ζαριών στο πρώτο μέρος, μόνο και μόνο για να χρησιμοποιηθεί ο αριθμός 11.

Η ένταξη μιας εκάστης δομικής μορφής μέτρου σε ένα κελί του πρώτου ή του δευτέρου Πίνακος εγένετο, όπως προελέχθη, βάσει κάποιων αρμονικών κανόνων. Όλες οι εντάξεις των μουσικών μέτρων εγένοντο από τον Mozart με έναν τέτοιο τρόπο, ώστε η οποιαδήποτε επιλογή μέτρων να οδηγεί σε μία εξαιρετικά ωραία σύνθεση, η οποία να ικανοποιεί τις αρμονικές και συνθετικές απαιτήσεις των Wienerse μενουέτων εκείνου του καιρού.

Επί παραδείγματι, προκειμένου να συντεθεί το πρώτο μουσικό μέτρο για το Μενουέτο (στήλη 1 του Πίνακος 1), εάν οι ενδείξεις των ζαριών είχαν άθροισμα 10, τότε $10-1=9$ (γραμμή 9 του Πίνακος 1), επελέγετο το μουσικό μέτρο το οποίο ευρίσκεται στο κελί της τομής των προαναφερθεισών στήλης και γραμμής του Πίνακος 1, ήτοι επελέγετο το προσυντεθειμένο μουσικό μέτρο υπ' αριθμόν 98.

Ερωτήσεις προβληματισμού με το μουσικό παιχνίδι «Musikalisches Würfelspiel»

Τα θέματα, τα οποία σχετίζονται με την εκτεθείσα διαδικασία του μουσικού παιχνιδιού, φυσιολογικά οδηγούν σε πρακτικές ερωτήσεις από τον χώρο της Συνδυαστικής Αναλύσεως και της Θεωρίας των Πιθανοτήτων καθώς επίσης σε θέματα, τα οποία πιθανώς να ανοίξουν εκτεταμένες φιλοσοφικές συζητήσεις σχετικά με την τυχειότητα. Επί παραδείγματι, θα μπορούσα να αναφέρω ερωτήσεις σαν τις ακόλουθες:

1. Πόσες μελωδίες μπορούν συνολικά να συντεθούν με αυτό το μουσικό παιχνίδι;

² Λοΐζου Μαργαρίτα-Ισμήνη, «*Ιδιαιτερότητες και ανάλυση των συνθέσεων του Β. Α. Μοτσαρτ για τον ελευθεροτεκτονισμό*», Πρακτικά Συμποσίου «*Μουσική Θεωρία και Ανάλυση – Μεθοδολογία και Πράξη*», 29/9-1/10/2006, Θέρμη Θεσσαλονίκης, σ. 114-121.

³ Τούτο σημαίνει ότι δέχομαι τον Mozart ως συνθέτη του συγκεκριμένου έργου.

⁴ Το πρόβλημα των ρίψεων τριών ζαριών το είχε λύσει ο Γαλιλαίος από το 1620. Θα μπορούσε ο Mozart να τις χρησιμοποιήσει.

⁵ Ρίχνοντας 3 ζάρια, το άθροισμα των αριθμών στις επάνω επιφάνειές τους θα ήταν από $3=1+1+1$ έως $18=6+6+6$. Αφαιρώντας κάθε φορά από το άθροισμα τον αριθμό 2, θα είχε 16 ενδεχόμενα για το καθένα από τα 16 μέτρα του πρώτου μέρους (minuet).

2. Είναι τόσες πολλές, ώστε να αντιστοιχεί μια διαφορετική μελωδία σε κάθε άνθρωπο του πλανήτη Γη;
3. Πόσο χρόνο θα μας πάρει για να ακούσουμε όλες αυτές τις μελωδίες, εάν υποθέσουμε ότι η ακρόαση εκάστης διαρκεί κατά μέσον όρον 60 sec;
4. Ρίχνοντας τα δύο ζάρια όλες οι δυνατές μελωδίες έχουν την ίδια πιθανότητα να δομηθούν; Ποιό μουσικό μέτρο από τα 11 του minuet έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να επιλεγεί κάθε φορά;
5. Πώς θα μπορούσαμε να καταστήσουμε ισοπίθανες όλες τις δυνατές μελωδίες ως προς το να συντεθούν;
6. Γνώριζε ο Mozart το γεγονός ότι η εμφάνιση του αθροίσματος 7 ή 8 πραγματοποιείται περισσότερες φορές απ' ό,τι του αθροίσματος 2 ή 12 ή λειτουργούσε μηχανικά, όταν έριχνε τα δύο ζάρια; Με άλλα λόγια είχε κάποια γνώση της Θεωρίας των Πιθανοτήτων ή θεωρούσε τις διαδικασίες επιλογής στο μουσικό του παιχνίδι ισοπίθανες;

Απαντήσεις

Οι απαντήσεις μου στις ερωτήσεις προβληματισμού, που ετέθησαν, έχουν ως εξής:

1. Σύμφωνα με τη «*Θεμελιώδη Αρχή της Απαριθμήσεως*⁶» και την «*Συνδυαστική Ανάλυση*» (Διατάξεις μετ' επανάληψεων⁷ αφενός μεν των 11 αντικειμένων ανά 16 για τα μέτρα του Μενουέτου, αφετέρου δε των 6 αντικειμένων ανά 16 για τα μέτρα του Trio), μπορούν να συντεθούν

$$11^{16} \cdot 6^{16} = 1,3 \cdot 10^{29} = 130.000.000.000.000.000.000.000.000$$
 δηλαδή 130 οκτάκις εκατομμύρια Musikalisches Würfelspiel!
2. Ο πληθυσμός της Γης ανέρχεται στους 6,5 δισεκατομμύρια ($6,5 \cdot 10^9$) κατοίκους. Άρα στον καθένα κάτοικο του πλανήτη Γη αντιστοιχούν

$$\frac{1,3 \cdot 10^{29}}{6,5 \cdot 10^9} = 2 \cdot 10^{19} = 20.000.000.000.000.000.000$$
 δηλαδή 20 πεντάκις εκατομμύρια διαφορετικές Musikalisches Würfelspiel!
3. Πάντοτε στο μάθημα «*Μαθηματικά του Μουσικού Ρυθμού*» τονίζω στους φοιτητές μου να είναι εξαιρετικά προσεκτικοί με τα νούμερα που προκύπτουν από τη λύση προβλημάτων απαριθμήσεως, διότι ναι μεν θεωρητικώς τα προβλήματα δεν παρουσιάζουν καμμία δυσκολία, πρακτικώς, όμως, πολλές φορές η απαρίθμηση αυτή δεν είναι υλοποιήσιμη. Θα αντιληφθείτε το τί εννοώ με

⁶ Έστω ότι ζητούμε να απαριθμήσουμε τα στοιχεία ενός πεπερασμένου συνόλου. Θα λέμε ότι εφαρμόζουμε τη θεμελιώδη αρχή της απαριθμήσεως εάν εργαζόμαστε ως εξής: Χωρίζουμε πρώτα το συνολικό έργο της απαριθμήσεως σε m επί μέρους διαδοχικές φάσεις. Βρίσκουμε στη συνέχεια το αποτέλεσμα της απαριθμήσεως σε κάθε φάση ξεχωριστά. Εάν οι φάσεις είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες ή τουλάχιστον έχουν επιλεγεί με τέτοιο τρόπο, ώστε το αποτέλεσμα της μετρήσεως σε κάθε φάση να ορίζεται μονοσημάντως από τα αποτελέσματα των προηγούμενων φάσεων, τότε το αποτέλεσμα της συνολικής απαριθμήσεως είναι το γινόμενο των αποτελεσμάτων των επί μέρους απαριθμήσεων. Δηλαδή εάν είναι n_1 το αποτέλεσμα της απαριθμήσεως στην πρώτη φάση, n_2 στη δεύτερη φάση και n_m στην τελευταία φάση, τότε το αποτέλεσμα της συνολικής απαριθμήσεως θα είναι $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$.

⁷ Διατάξεις με επανάληψη των n αντικειμένων ανά k : $A_n^k = n^k$

την απάντησή μου σε αυτό το ερώτημα. Αφού για την ακρόαση εκάστης συνθέσεως απαιτείται χρόνος 60 sec, τότε για την ακρόαση του συνόλου των Musikalisches Würfelspiel θα απαιτείται χρόνος:

$$\begin{aligned}
 t &= 1,3 \cdot 10^{29} \cdot 60 \text{ SEC} = \\
 &= \frac{1,3 \cdot 10^{29} \cdot 60}{3600} \text{ ΩΡΕΣ} = \\
 &= \frac{1,3 \cdot 10^{29} \cdot 60}{3600 \cdot 24} \text{ ΗΜΕΡΕΣ} = \\
 &= \frac{1,3 \cdot 10^{29} \cdot 60}{3600 \cdot 24 \cdot 365} \text{ ΕΤΗ} = \\
 &= \frac{1,3 \cdot 10^{29} \cdot 60}{3600 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 100} \cong 2.500.000.000.000.000.000.000 \text{ ΑΙΩΝΕΣ}
 \end{aligned}$$

δηλαδή 2,5 εξάκις εκατομμύρια αιώνες!

4. Η θεωρία των πιθανοτήτων είναι ένας σχετικά νέος κλάδος της Μαθηματικής επιστήμης, που τα τελευταία χρόνια έχει πολύ μεγάλη ανάπτυξη με εφαρμογές όχι μόνο στα Μαθηματικά, αλλά και σε όλες τις άλλες επιστήμες Θετικές, Θεωρητικές, Ανθρωπιστικές, Οικονομικές κ.λπ. Αρχικά τα προβλήματα με τα οποία ασχολήθηκε ήσαν προβλήματα τυχερών παιχνιδιών, τα οποία ετέθησαν από ικανούς και συστηματικούς παίκτες. Αυτοί παρατήρησαν παράδοξες, κατά τη γνώμη τους, συμπεριφορές κάποιων παιχνιδιών. Η θεωρία, όμως, που ανεπτύχθη, συμπεριέλαβε όλα τα προβλήματα στα οποία υπεισέρχεται η έννοια της τυχαιότητας, στα οποία δηλαδή η μελλοντική εξέλιξη ενός μεταβλητού μεγέθους δεν μπορεί να προκαθορισθεί από κάποιες αρχικές συνθήκες. Η τυχαιότης αυτών των προβλημάτων δεν είναι χαοτική, δηλαδή ένα μεγάλο πλήθος επαναλήψεών τους εμφανίζει μια στατιστική ομαλότητα. Αυτού του είδους τα προβλήματα ή τα φαινόμενα λέγονται «*τυχαία*» ή «*στοχαστικά*». Η θεωρία των πιθανοτήτων, λοιπόν, ασχολείται με τη μελέτη των τυχαίων ή στοχαστικών φαινομένων και θεωρείται ως η επιστήμη των «*νόμων της τύχης*».

Στοχαστικό φαινόμενο αποτελεί και η ρίψη ενός ή περισσοτέρων ζαριών. Πράγματι, το τελικό αποτέλεσμα στη ρίψη ενός ζαριού επηρεάζεται από τη δύναμη που το ρίχνουμε, από τον τρόπο με τον οποίο ακουμπά για πρώτη φορά στο επίπεδο προσπτώσεως, από την τραχύτητα του επιπέδου στα σημεία επαφής του ζαριού, από τη φορά του ανέμου και διαφόρους άλλους, επίσης μη ελεγχίμους, παράγοντες.

Ρίχνουμε δύο κανονικά ζάρια και καταγράφουμε το άθροισμα των ενδείξεων που εμφανίζονται. Τον δειγματοχώρο⁸ Ω τον αποτελούν τα εξής 11 απλά ενδεχόμενα $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$ εκ των οποίων το καθένα έχει τις εξής πιθανότητες εμφανίσεως⁹:

⁸ Το σύνολο όλων των τυχαίων ενδεχομένων (δηλαδή το άθροισμα των ενδείξεων που εμφανίζονται κατά το ρίξιμο των ζαριών) συμβολίζεται με το γράμμα Ω και ονομάζεται δειγματοχώρος ή δειγματικός χώρος.

⁹ Ο δειγματοχώρος με τα 6 ενδεχόμενα του ενός ριπτομένου ζαριού $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και ο δειγματοχώρος των 6 ενδεχομένων του άλλου ριπτομένου ζαριού $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ δημιουργούν με το

$$P(2) = P((1,1)) = \frac{1}{36}$$

$$P(3) = P((1,2)) + P((2,1)) = \frac{2}{36}$$

$$P(4) = P((1,3)) + P((2,2)) + P((3,1)) = \frac{3}{36}$$

$$P(5) = P((1,4)) + P((2,3)) + P((3,2)) + P((4,1)) = \frac{4}{36}$$

$$P(6) = P((1,5)) + P((2,4)) + P((3,3)) + P((4,2)) + P((5,1)) = \frac{5}{36}$$

$$P(7) = P((1,6)) + P((2,5)) + P((3,4)) + P((4,3)) + P((5,2)) + P((6,1)) = \frac{6}{36}$$

$$P(8) = P((2,6)) + P((3,5)) + P((4,4)) + P((5,3)) + P((6,2)) = \frac{5}{36}$$

$$P(9) = P((3,6)) + P((4,5)) + P((5,4)) + P((6,3)) = \frac{4}{36}$$

$$P(10) = P((4,6)) + P((5,5)) + P((6,4)) = \frac{3}{36}$$

$$P(11) = P((5,6)) + P((6,5)) = \frac{2}{36}$$

$$P(12) = P((6,6)) = \frac{1}{36}$$

Βάσει των ανωτέρω η καθεμία μουσική δομή μέτρου από τις 11 εκάστης στήλης εμφανίζεται με πιθανότητα:

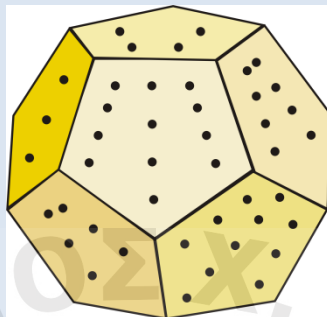
$P(1)^{10}$	$P(2)$	$P(3)$	$P(4)$	$P(5)$	$P(6)$	$P(7)$	$P(8)$	$P(9)$	$P(10)$	$P(11)$
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Από τις ανωτέρω άνισες μεταξύ τους πιθανότητες επιλογής μουσικών μετρικών δομών προκύπτει ότι κάθε φορά που επιλέγουμε μια μετρική δομή από τις 11 εκάστης στήλης ευνοείται πρωτίστως η μετρική δομή υπ' αριθμόν 6, κατόπιν οι μετρικές δομές υπ' αριθμόν 5 και 7 κ.ο.κ. Έτσι, αυτές οι μετρικές δομές εμφανίζονται περισσότερες φορές του δέοντος. Το γεγονός αυτό συντελεί στο να είναι ομοίου δομής κάποια από τα συντιθέμενα μενουέτα, οπότε θα έχουμε απaráλλαχτο άκουσμα. Δυστυχώς, δεν θα μπορέσουμε ΠΟΤΕ να αντιληφθούμε αυτό το απaráλλαχτο άκουσμα των κάποιων μενουέτων, διότι θα πρέπει κατ' ανάγκη προηγουμένως να ακούσουμε ΟΛΑ τα δυνατά μενουέτα και για την υλοποίηση της επιθυμίας μας αυτής, όπως προελέχθη, απαιτούνται 2,5 εξάκις εκατομμύρια αιώνες!!!

καρτεσιανό τους γινόμενο $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ τον δειγματοχώρο των δύο ριπτομένων ζαριών με 36 ενδεχόμενα λ.χ. (1,1), (1,2), ..., (6,6).

¹⁰ Το πρώτο κελί εκάστης στήλης επιλέγεται κάθε φορά που φέρνουμε στα δύο ζάρια άθροισμα ενδείξεων 2. Το γεγονός να έλθει άθροισμα 2 πραγματοποιείται με πιθανότητα 1/36. Άρα με πιθανότητα 1/36 σε κάθε ρίψη θα επιλέγεται το πρώτο κελί εκάστης στήλης.

5. Προκειμένου να επιλέγονται όλες οι 11 μουσικές δομές εκάστου μέτρου με την ίδια πιθανότητα, θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένα ζάρι με 11 έδρες. Σαν τέτοιο ζάρι ΠΡΟΤΕΙΝΩ να χρησιμοποιηθεί το πενταγωνικό δωδεκάεδρο, που είναι ένα από τα πέντε ονομαζόμενα *Πλατωνικά στερεά*.



Σχήμα: Ζάρι υπό μορφήν πενταγωνικού δωδεκαέδρου¹¹.

Κατά κάποια πληροφορία το πενταγωνικό δωδεκάεδρο είχε θρησκευτική σημασία στον πολιτισμό των Ετρούσκων και εχρησιμοποιείτο ως ζάρι στην Ιταλία κατά τα πολύ πρώιμα χρόνια.

Στην περίπτωση χρήσεως του πενταγωνικού δωδεκαέδρου ως ζαριού, εκάστη των 11 εδρών θα φέρει, αντιστοίχως, ένδειξη 1, 2, ..., 11, ενώ η 12^η έδρα δεν θα φέρει καμμία ένδειξη. Στην περίπτωση αυτή θα ξαναρίχνεται το ζάρι.

6. Τα τυχερά παιχνίδια αποτελούν μια αρχαία ανθρώπινη δραστηριότητα. Οι προσπάθειες των ευρωπαϊών φιλοσόφων να κατανοήσουν αυτή τη δραστηριότητα τους ωδήγησαν σε σύγχρονες έννοιες, όπως είναι «τύχη» και «ρίσκο». Συγκεκριμένα, μερικοί Ιταλοί μαθηματικοί του 16^{ου} αιώνας ασχολήθηκαν με ορισμένα προβλήματα, τα οποία ιδιαιτέρως είχαν σχέση με τα τυχερά παιχνίδια ζαριών. Διασώζεται ένα απόσπασμα του Γαλιλαίου, περίπου του 1620, στο οποίο απαριθμούνται με σωστό τρόπο οι ρίψεις τριών ζαριών.

Ο Λογισμός των Πιθανοτήτων, όπως τον γνωρίζουμε σήμερα, έγινε αντικείμενο μαθηματικού ενδιαφέροντος στα μέσα του 17^{ου} αιώνας στη Γαλλία μέσω της αλληλογραφίας του Blaise Pascal¹² (1623-1662) με τον Pierre de Fermat¹³ (1601-1665). Αιτία για την έναρξη αυτής της αλληλογραφίας ήταν προβλήματα που ετέθησαν στον Pascal από τον Antoine Gombaud, Chevalier

¹¹ Σχεδιάστηκε από την Ελένη Χ. Σπυρίδου PhD, BSc (Hons).

¹² Γεννημένος μαθηματικός, είχε από την ηλικία των 16 ετών αποδείξει πλήθος γεωμετρικών θεωρημάτων, μερικά εκ των οποίων φέρουν το όνομά του. Ασχολήθηκε επίσης με την υδροστατική πίεση, όπου είναι γνωστός ο ομώνυμος νόμος. Στα τέλη της ζωής του έγραψε ένα βιβλίο μεταφυσικού περιεχομένου με τίτλο «Σκέψεις».

¹³ Κοινοβουλευτικός σύμβουλος του βασιλέως και ερασιτέχνης ερευνητής των Μαθηματικών. Εργάστηκε στον χώρο της Αναλυτικής Γεωμετρίας για την εύρεση εφαπτομένων των καμπηλών και ακροτάτων τιμών των συναρτήσεων. Θεωρείται πατέρας του Διαφορικού Λογισμού. Στον χώρο της Θεωρίας των Αριθμών εργάστηκε πάνω στους πρώτους αριθμούς και στις Διοφαντικές εξισώσεις. Πολύ γνωστά είναι τα δύο θεωρήματά του για τη διαιρετότητα των αριθμών καθώς και η «εικασία» του, που απεδείχθη εσφαλμένη.

de Mere¹⁴, ο οποίος ήτο επαγγελματίας παίκτης. Το πρώτο βιβλίο επ' αυτού του αντικειμένου εδημοσιεύθη το 1657 από τον Christian Huygens.

Τον καιρό που ζούσε ο Mozart ο εν λόγω κλάδος των μαθηματικών εξελίσσεται και δρούσε συμβουλευτικά στους εραστές των τυχερών παιχνιδιών (χαρτιά, ζάρια κ.λπ.). Πιθανώς, κάποιες γνώσεις θεωρίας πιθανοτήτων να είχε και ο Mozart. Γιατί, όμως, να ζητούμε να γνωρίζει –*αν και δεν το θεωρώ ούτε απαραίτητο να το γνωρίζει, αλλ' ούτε και τόσο δύσκολο, ώστε να μη το γνωρίζει*– ότι ρίχνοντας δύο ζάρια το άθροισμα 7 προκύπτει με τη μεγαλύτερη πιθανότητα; Παρόλα ταύτα γνωρίζουμε ότι ο Mozart διασκέδαζε με μαθηματικά puzzles, είχε λεπτή αίσθηση του χιούμορ και ελάτρευε να παίζει με ονόματα τροποποιώντας με μεταθέσεις τα γράμματά τους.

Εκπαιδευτικό Συμπέρασμα

Στο Τμήμα Μουσικών Σπουδών του Πανεπιστημίου Αθηνών διδάσκω μαθήματα έχοντα σχέση με τη Φυσική, τα Μαθηματικά, τους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές, την Αρχαιοελληνική Γραμματεία και Φιλοσοφία.

Έχω δει χαρισματικούς φοιτητές να λατρεύουν τα Μαθηματικά και φοιτητές που ελάχιστα ενδιαφέρονται να μάθουν Μαθηματικά, διότι δεν τα αγαπούν. Όλοι τους, όμως, όταν τους διδάσκω να δημιουργούν Τέχνη χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα Μαθηματικά λ.χ. Θεωρία Συνόλων, Συνδυαστική Ανάλυση, Θεωρία Πιθανοτήτων, Σειρές Fibonacci και Lucas, Αλυσίδες Markov κ.α. εργάζονται με ενθουσιασμό και συνθέτουν έργα σημαντικής αισθητικής αξίας ή, ακόμη, παρακινούνται για περαιτέρω μαθηματική έρευνα.

¹⁴ Ένα πρόβλημα ήτο το γνωστό σήμερα ως «διαίρεση του στοιχήματος» και συνίσταται στο πώς πρέπει να μοιρασθεί ένα στοίχημα σε ένα παιχνίδι, το οποίο διεκόπη προτού κανείς από τους παίκτες συμπληρώσει τις απαιτούμενες παρτίδες. Με τις σημερινές γνώσεις η απάντηση είναι ότι το στοίχημα θα πρέπει να μοιρασθεί αναλόγως των πιθανοτήτων που έχουν οι παίκτες να κερδίσουν το παιχνίδι τη στιγμή που σταμάτησαν. Ένα ενδιάμεσο αποτέλεσμα από τη λύση αυτού του προβλήματος είναι το αριθμητικό τρίγωνο του Pascal, το οποίο, μάλιστα, δίνει και τη λύση.