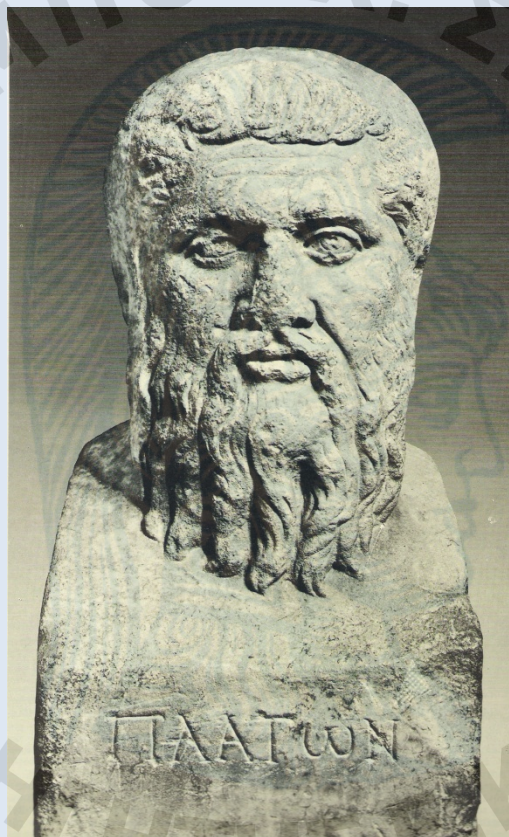


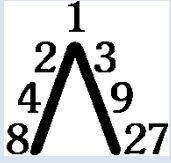
**«Η ΛΑΒΔΟΕΙΔΗΣ ΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΛΑΤΩΝΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ
“ΓΕΝΕΣΙΣ ΨΥΧΗΣ ΚΟΣΜΟΥ” (ΤΙΜΑΙΟΣ, 35a1-36b6)
ΜΕ ΔΩΡΙΑ ΤΕΤΡΑΧΟΡΔΑ (τόνος-τόνος-λείμμα)
ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΚΑΤΙΟΥΣΑ ΔΙΑΔΟΧΗ»**

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης

Καθηγητής Τμήματος Μουσικών Σπουδών Πανεπιστημίου Αθηνών,
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας
210-7277832, hspyridis@music.uoa.gr



Εικόνα 1: Ο Πλάτων



ἡ δὲ τῶν ὑπὸ Πλάτωνος ἐκκειμένων ἀριθμῶν τετρακτὺς ἐντελεστέραν ἔσχηκε τὴν γένεσιν, τῶν μὲν ἀρτίων ἀρτίοις διαστήμασι τῶν δὲ περιττῶν περιττοῖς πολλαπλασιασθέντων· περιέχει δὲ τὴν μὲν μονάδα, κοινήν οὖσαν ἀρχὴν ἀρτίων καὶ περιττῶν, τῶν δ' ὑπ' αὐτῇ τὰ μὲν δύο καὶ τρία πρώτους ἐπιπέδους, τὰ δὲ τέτταρα καὶ ἑννέα πρώτους τετραγώνους, τὰ δ' ὀκτὼ καὶ εἰκοσιεπτὰ πρώτους κύβους ἐν ἀριθμοῖς, ἕξω λόγου τῆς μονάδος τιθεμένης. ἢ καὶ δῆλός ἐστι βουλόμενος οὐκ ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἅπαντας ἀλλ' ἐναλλάξ καὶ ἰδίᾳ τάσσεσθαι τοὺς ἀρτίους μετ' ἀλλήλων καὶ πάλιν τοὺς περισσοὺς, ὡς ὑπογέγραπται. οὕτως αἱ συζυγίαι τῶν ὁμοίων ἔσονται πρὸς τοὺς ὁμοίους καὶ ποιήσουσιν ἀριθμοὺς ἐπιφανεῖς κατὰ τε σύνθεσιν καὶ πολλαπλασιασμὸν ἐξ ἀλλήλων.

Πλούταρχος, *Περὶ τῆς ἐν Τιμαίῳ Ψυχογονίας*,
Stephanus 1017 D4-E7

1. Προλεγόμενα

Αφιέρωσα πολλά έτη της ερευνητικής μου δραστηριότητας εις την μελέτη του «μουσικού χωρίου (35α1-36b6)» του Πλατωνικού Τιμαίου, διότι κατά τον Πλούταρχον είναι ένα από τα πλέον δύσκολα, ως προς την κατανόησή του, μέσα στο συνολικό Πλατωνικό έργο.

Από την εποχή του Πλάτωνος επροτάθησαν δύο διαφορετικοί τρόποι επιλύσεώς του εν λόγω προβλήματος, ο γραμμικός και ο λαβδοειδής.

Κατά τον πρώτον τρόπο ο Θεόδωρος, ο Κηρυναίος, τοποθετεί τους αριθμούς της μεγίστης τετρακτύος του Πλάτωνος (1, 2, 3, 4, 8, 9, 27) επ' ευθείας γραμμής, αναμειγνύοντας αρτίους με περιπτούς αριθμούς και οδηγείται σε μια κατατομή κανόνος 36 όρων (=φθόγγων), η οποία καλύπτει συνολικώς ένα συχνοτικό εύρος δύο διαπασών (=τεσσάρων διαπασών), ενός διαπέντε κι ενός επογδόου τόνου με την εξής διαστηματική αλληλουχία: διαπασών, διαπασών διαπασών, επτόγδοος τόνος, διαπασών, διαπέντε.

Τον τρόπον αυτόν της επιλύσεως του Πλατωνικού προβλήματος εξέθεσα στην εργασία μου με τίτλο “Λύση του προβλήματος «Περί γενέσεως ψυχής κόσμου» (Πλάτωνος Τιμαίος 35α1-36b6)”, η οποία εδημοσιεύθη στον τόμο ΛΗ' (2006-2007) της επιστημονικής επετηρίδος της Φιλοσοφικής Σχολής του Πανεπιστημίου Αθηνών, σσ. 87-136.

Στην παρούσα εργασία για πρώτη φορά εκτίθεται αναλυτικώς η λαβδοειδής λύση του εν λόγω προβλήματος για την οποία πολλοί μελετηταί αναφέρουν ότι πρόκειται για την λαβδοειδή τοποθέτηση των επτά¹ αριθμών της Πλατωνικής τετρακτύος και πέραν τούτου ουδέν. Επέτυχα την λαβδοειδή λύση, αφού προηγουμένως αποκωδικοποίησα μια «Αδράστειο» πληροφορία που μας μεταφέρει ο Πρόκλος (*Εις τον Τιμαίον* Γ [Tim 35B] 197C5-8) και η οποία μέχρι τώρα μας ήταν ακατανόητη: «Αδραστος δέ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδές τὸ σχῆμα ποιεῖ καὶ ἐν τρισὶ τριγώνοις ἐκτίθεται τοὺς ὄρους».

Και η λαβδοειδής λύση οδηγεί ακριβῶς στην ίδια κατατομή κανόνος με την γραμμική λύση και έχει όλα τα προαναφερθέντα μουσικά χαρακτηριστικά με αυτήν, ἤτοι 36 όρους μεταξύ των οποίων σχηματίζονται 35 μουσικά διαστήματα (22 επτόγδοοι τόνοι, 11 λείμματα και 2 αποτομές) και που όλα μαζί καλύπτουν ένα συχνοτικό εύρος τεσσάρων διαπασών, ενός διαπέντε και ενός επογδόου τόνου.

Για την λύση του συγκεκριμένου προβλήματος δεν υπάρχουν οδηγίες. Θα έπρεπε, λέγει ο Πλούταρχος, να σας αφήσω εν είδει ασκήσεως να συμπληρώσετε τα διαστήματα και να εντάξετε ανάμεσά τους τις μεσότητες, ακόμη και εάν ετύγχανε να μην το έχει επιχειρήσει κανείς προηγουμένως. Από τον Πλάτωνα δεν εδόθη πλήρης λύσις του προβλήματος, παρά μόνον εγένοντο υποδείξεις για την συμπλήρωση των μουσικών διαστημάτων με τις μεσότητες και η όλη διαδικασία της επιλύσεως αφέθη υπό μορφήν «εργασίας κατ' οίκον».

Ύστερα από πολλές προσπάθειες και με υποθέσεις επί υποθέσεων, χρησιμοποιώντας την μέθοδο «trial and error» της Φυσικής, κατέληξα εις το συμπέρασμα ότι για την επίλυση του Πλατωνικού προβλήματος «Περί γενέσεως ψυχής κόσμου» και ιδιαιτέρως με τον λαβδοειδή τρόπο, είναι εντελῶς απαραίτητη η ύπαρξη μιας δομής βασισμένης επί ενός συστήματος συντεταγμένων² με καταλλήλως βαθμολογημένους τους άξονές του, επί του οποί-

¹ Διακεκριμένοι φιλόσοφοι της αρχαιότητος εστήριξαν ολόκληρα φιλοσοφικά συστήματα κοσμογονικών, μεταφυσικών και οντολογικών θεωριών επί των αριθμών, δηλαδή την σχέση των και την επίδρασή των επί της δημιουργίας, της λειτουργίας και της αρμονίας του κόσμου. Το γεγονός ότι διάφορα φυσικά φαινόμενα σχετίζονται με τον αριθμό επτά ή αριθμούν σε επτά, διήγειρε τις πρώτες σκέψεις περί των ιδιοτήτων και της ιερότητας αυτού του αριθμού. Πράγματι, η ιερότης του αριθμού επτά και οι επταδικές δοξασίες που ανεπτύχθησαν από τους Βαβυλωνίους, τους Χαλδαίους και τους ανατολικούς λαούς εν γένει, οι οποίες μετεδόθησαν στους Εβραίους, στους αρχαίους Έλληνες και αργότερον στον Χριστιανισμό, έχουν την αρχή των κυρίως εις το ουράνιο στερέωμα λ.χ. «τι έστι κόσμος; Επταπλανές κύκλωμα» (Ι. Ε. Καλιτσουνάκις, 1922, Επταδικαί Έρευναι, Αθήναι, σ. 59).

² Συστήματα συντεταγμένων δισδιάστατα και τρισδιάστατα υπάρχουν πολλά. Κανένα εξ αυτών των συστημάτων συντεταγμένων δεν δύναται να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων της Πυθαγορείου μουσικής, διότι υπακούν στην λογική της γνωστής μας άλγεβρας και όχι στην λογική των πυθαγορείων μαθηματικών της μουσικής εις τα οποία –κατά τα γνωστά– η πρόσθεση των μουσικών διαστημάτων πραγματοποιείται με πολλαπλασιασμό, η αφαίρεση με διαίρεση των αριθμητικών τους σχέσεων.

ου θα πραγματοποιούνται μαθηματικές πράξεις με βάση τα Μαθηματικά, τα οποία διέπουν την Πυθαγόρειο μουσική³. Στην συγκεκριμένη δομή, την οποία εγώ μεν ονομάζω Σπυρίδειο δικτυωτό⁴, ο Πλάτων δε την αποκαλεί ΚΟΣΜΟΝ, ο άξων των x είναι βαθμολογημένος εις μουσικά διαστήματα⁵ διατεσσάρων ($4/3$) και ο άξων των y είναι βαθμολογημένος εις μουσικά διαστήματα διαπέντε ($3/2$). Τον ΚΟΣΜΟ δηλαδή ο Πλάτων τον δομεί με βάση την αριθμητική μεσότητα ($3/2$) και την αρμονική ή υπενάντιον ή ενάντιον μεσότητα ($4/3$) των οντοτήτων 1 (ταυτόν) και 2 (θάτερον), οι οποίες δομούν το μουσικό διάστημα της διαπασών ($2/1$), όπως φαίνεται από τα αποσπάσματα:

PROCL. in Tim. I 176, 27 Diehl
εἷς ἀποτελεῖται κόσμος ἐξ ἐναντίων ἡρμοσμένος,
Φιλόλαος, Testimonia, Fragment 9 line 3

τὸ τοῦ κόσμου σῶμα ἐγεννήθη δι'
ἀναλογίας
Πλ. Τίμ. Stephanus p. 32 section c line 1-2

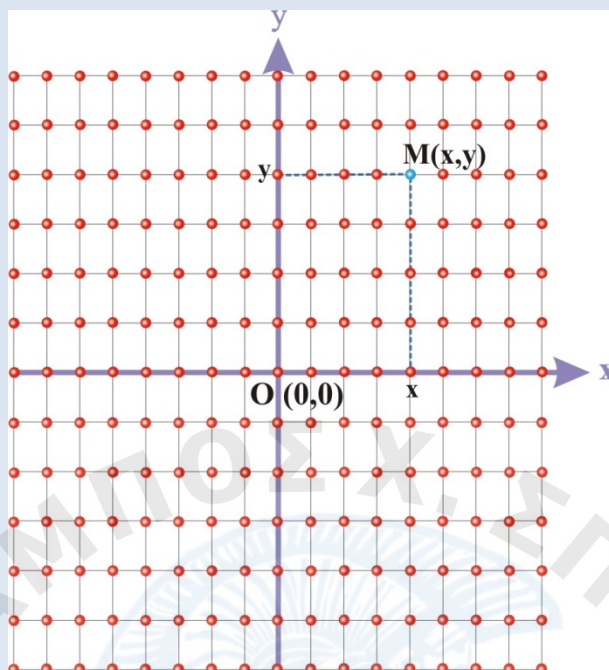
κόσμῳ δὲ πάντα καὶ κατὰ λόγον
ἔχοντα
Πλάτων, Respublica, 500 c4-5.

Ἐστω, λοιπόν μια δομή σημείων (κόμβων), ένα Σπυρίδειο δικτυωτό, ο κατά Πλάτωνα ΚΟΣΜΟΣ (Σχήμα 1.1), στον οποίο κατά τον άξονα x το βήμα (= η μικρότερη επιτρεπτή μετακίνηση) είναι ένα επίτριτο ($4/3$) διάστημα και κατά τον άξονα y το βήμα είναι ένα ημιόλιο ($3/2$) διάστημα. Αυτά σημαίνουν ότι ο ΚΟΣΜΟΣ κατά Πλάτωνα είναι δικτυωτός, αφού οι μετατοπίσεις γίνονται κατά ακέραιον αριθμόν βημάτων και ΜΟΝΟΝ. Το διάστημα του βήματος κατά τον άξονα x και του βήματος κατά τον άξονα y έχουν μέτρα $\left(\frac{4}{3}\right)$ και $\left(\frac{3}{2}\right)$, αντιστοίχως, και τα εκλαμβάνω ως κάθετα μεταξύ τους, χωρίς αυτό να επηρεάζει σε κάτι το πρόβλημα.

³ Διακεκριμένοι φιλόσοφοι της αρχαιότητας εστήριξαν ολόκληρα φιλοσοφικά συστήματα κοσμογονικών, μεταφυσικών και οντολογικών θεωριών επί των αριθμών, δηλαδή την σχέση των και την επίδρασή των επί της δημιουργίας, της λειτουργίας και της αρμονίας του κόσμου.

⁴ Η έννοια απαντάται στην θεωρία των δικτυωτών, την οποία επενόησα για την επίλυση αλληγορικών αριθμητικών Πλατωνικών προβλημάτων, όπως το παρόν. Με την εν λόγω εντελώς πρωτότυπη θεωρία παρέχεται με ασφάλεια μια αυστηρώς μαθηματική θέαση της Πυθαγορείου μουσικής δια της οποίας επιτυγχάνεται η λύση του οποιουδήποτε θεωρητικού μουσικού προβλήματος με την πλέον λεπτή μέθοδο, με την συντομότερη ανάλυση, με την μεγαλύτερη δυνατή σαφήνεια και καλαισθησία και, τέλος, τον μικρότερο πνευματικό κόπο. Κατ' αυτήν την θεωρία ολόκληρη η Πυθαγόρειος Μουσική αντιμετωπίζεται επί των ευθέων και των αντιστρόφων δικτυωτών με μια νέα Επιπεδομετρία βρόχων και όχι συνεχούς επιπέδου, όπως είναι η Ευκλείδειος.

⁵ Τα μουσικά διαστήματα στην εν λόγω δομή εκφράζονται ως λόγοι μηκών δονουμένων τμημάτων χορδής.



Σχήμα 1.1: Ένα μουσικό ύψος $M(x,y)$ σε δικτυωτό, το οποίο σε σχέση με ένα μουσικό ύψος αναφοράς $O(0,0)$ σχηματίζει ένα μουσικό διάστημα.

Ένας κόμβος M του ΚΟΣΜΟΥ με συντεταγμένες x και y (Σχήμα 1.1) συμβολίζεται ως $M(x, y)$ και παριστά το μουσικό ύψος

$$M(x, y) = \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^y \cdot O(0,0)$$

αφού υλοποιείται με την εκτέλεση x επιτρίτων και y ημιολίων μουσικών διαστημάτων σε σχέση με ένα αρχικό μουσικό ύψος $O(0,0)$, το οποίο εκλαμβάνεται ως μουσικό ύψος αναφοράς.

Επί του Σπυριδείου δικτυωτού, αντιστοίχως, ο εν λόγω κόμβος M με συντεταγμένες x , y παριστά ένα μήκος δονούμενου τμήματος χορδής, το οποίο υλοποιεί σε σχέση με ένα αρχικό δονούμενο τμήμα χορδής $L_0(0,0)$, το οποίο εκλαμβάνεται ως δονούμενο τμήμα χορδής αναφοράς, το μουσικό διάστημα⁶

$$L_M(x, y) = \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^y \cdot L_0(0,0)$$

Να σημειωθεί ότι τα αριθμητικά βάρη των κόμβων στον ΚΟΣΜΟ εκφράζονται είτε δι' ακεραίων, είτε δια μη ακεραίων αριθμών.

⁶ Ένα μουσικό διάστημα εκφράζεται ως απόσταση μεταξύ δύο κόμβων του δικτυωτού.

2 Τα μαθηματικά εργαλεία για την λαβδοειδή λύση

2.1 Ειδικοί Βρόχοι

Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το οποίο σχηματίζεται από τις δύο παραμέτρους του Σπυριδείου⁷ δικτυωτού, ονομάζεται *βρόχος*. Το Σπυρίδειο δικτυωτό μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγεται με περιοδική μετατόπιση του βρόχου από τις δύο παραμέτρους του.

Ασχολούμενος με την επίλυση του Πλατωνικού προβλήματος επί του **Σπυριδείου δικτυωτού** ευρίσκεισαι αντιμέτωπος με ένα θαυμάσιο **πρόβλημα της θεωρίας αριθμών**, που είναι εξ ίσου διαχρονικό με ένα αληθινό έργο τέχνης και αισθάνεσαι την ανάγκη να αναφωνήσεις: «*Αυτά δεν είναι Μαθηματικά. Αυτά είναι Θεολογία!*».

Ονομάζουμε **απλό βρόχο διπλασίων αριθμών**, αυτόν στον οποίον την κάτω αριστερή κορυφή κατέχει ένας αριθμός (x) και την αντιδιαγώνιόν του κορυφήν (επάνω δεξιά) κατέχει ο διπλάσιός του αριθμός ($2x$).

Ονομάζουμε **σύνθετο βρόχο τριπλασίων αριθμών**, αυτόν στον οποίον την κάτω αριστερή κορυφή κατέχει ένας αριθμός (x) και την αντιδιαγώνιόν του κορυφήν (επάνω δεξιά) κατέχει ο τριπλάσιός του αριθμός ($3x$).

Ένας σύνθετος βρόχος τριπλασίων αριθμών δομείται με την υπέρθεση δύο απλών βρόχων διπλασίων αριθμών.

2.2 Προτάσεις μεσοτήτων (αριθμητικού και αρμονικού)

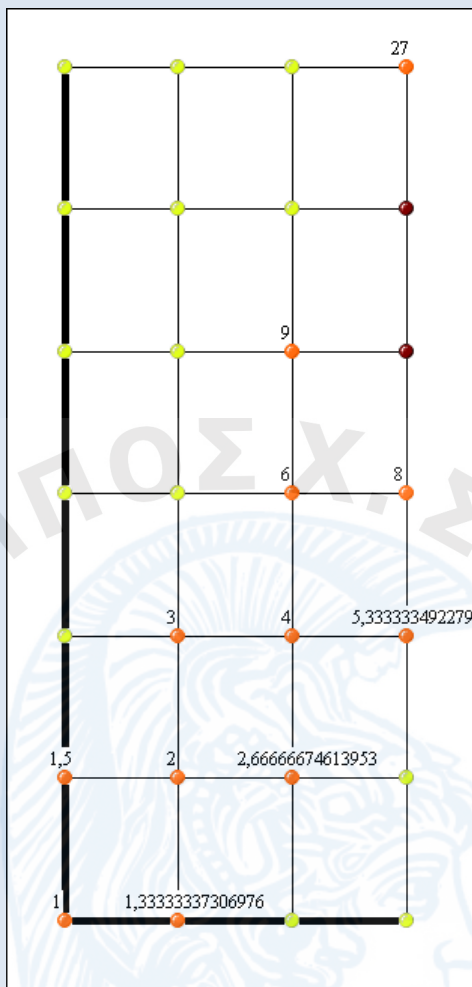
2.2.1 1^η Σπυρίδειος πρόταση των μεσοτήτων

Σε κάθε απλό βρόχο διπλασίων αριθμών την δεξιόθεν της διαγωνίου ($x-2x$) κορυφήν (κάτω δεξιά) κατέχει ο αρμονικός των μέσος $\left(\frac{2 \cdot x \cdot 2x}{x+2x}\right) = \frac{4}{3} \cdot x$ και την αντιδιαγώνιόν αυτής

κορυφήν (επάνω αριστερά) κατέχει ο αριθμητικός των μέσος $\left(\frac{x+2x}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot x$ (Σχήμα

2.2.1.1)

⁷ Βλέπε Σπυρίδεια Δικτυωτά στο Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδη, Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη 2006, σσ. 156-161.



Σχήμα 2.2.1.1: 1^η Σπυρίδειος πρόταση των μεσοτήτων

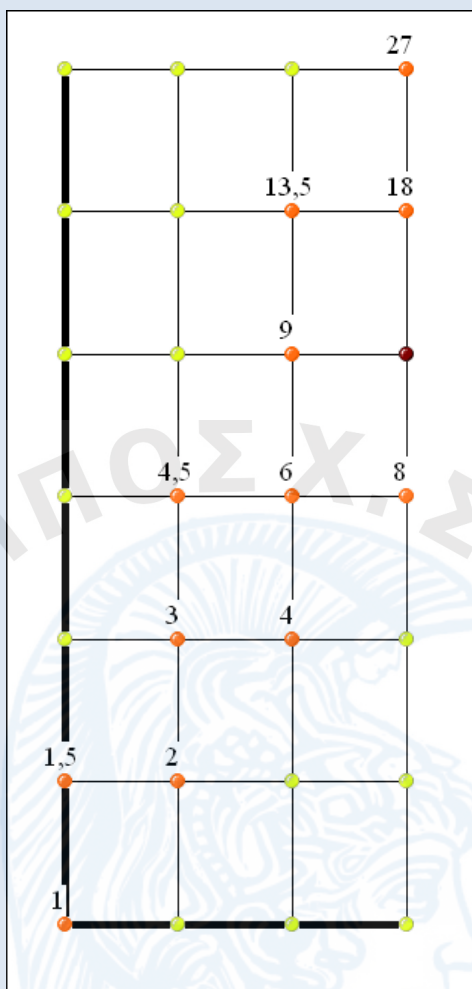
2.2.2 2^η Σπυρίδειος πρόταση των μεσοτήτων

Σε κάθε σύνθετο βρόχο τριπλασίων αριθμών ($x-3x$) οι μέσοι (αρμονικός και αριθμητικός) αυτών ευρίσκονται επί της πλευράς, η οποία τον χωρίζει σε δύο απλούς βρόχους διπλασίων αριθμών και, συγκεκριμένως, επάνω από τον μικρότερο αριθμό (x) ευρίσκεται ο αρμονικός μέσος

$$\left(\frac{2 \cdot x \cdot 3x}{x+3x}\right) = \frac{6 \cdot x^2}{4 \cdot x} = \frac{3}{2} \cdot x$$

και κάτω από τον μεγαλύτερο ($3x$) ευρίσκεται ο αριθμητικός μέσος $\left(\frac{x+3x}{2}\right) = 2 \cdot x$ (Σχήμα

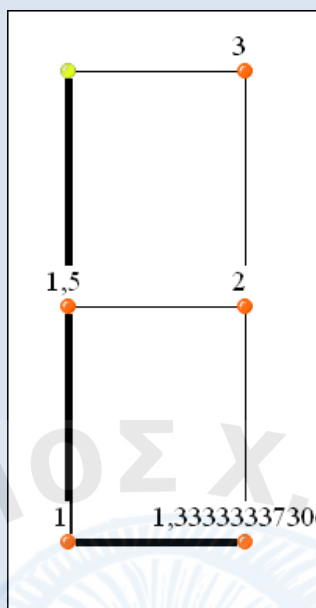
2.2.2.1)



Σχήμα 2.2.2.1: 2^η Σπυρίδειος πρόταση των μεσοτήτων

2.2.3 3^η Σπυρίδειος πρόταση των μεσοτήτων

Σε κάθε σύνθετο βρόχο τριπλασίων αριθμών $(x-3x)$ (που δομείται με την υπέρθεση δύο απλών βρόχων διπλασίων αριθμών $(x-2x)$) ο αρμονικός μέσος αυτών $(x-3x)$ συμπίπτει με τον αριθμητικό μέσο των αριθμών του κάτω απλού βρόχου διπλασίων αριθμών $(x-2x)$ ο αριθμητικός μέσος αυτών $(x-3x)$ συμπίπτει με τον μεγαλύτερο αριθμό του κάτω απλού βρόχου διπλασίων αριθμών $(x-2x)$ (Σχήμα 2.2.3.1).



Σχήμα 2.2.3.1: 3^η Σπυριδείος πρόταση των μεσοτήτων

Αυτή είναι η πρόταση δια της οποίας ο Πλάτων προχωρεί στην επίλυση του προβλήματος «Γένεσις Ψυχής Κόσμου» και την οποία διατυπώνει ως εξής:

Ἐστωσαν δύο αριθμοί, οι οποίοι είναι, αντιστοίχως, ο διπλάσιος και ο τριπλάσιος ενός δοθέντος αριθμού. Εάν στο διπλάσιο διάστημα ληφθεί ο αριθμητικός μέσος των άκρων του, τότε:

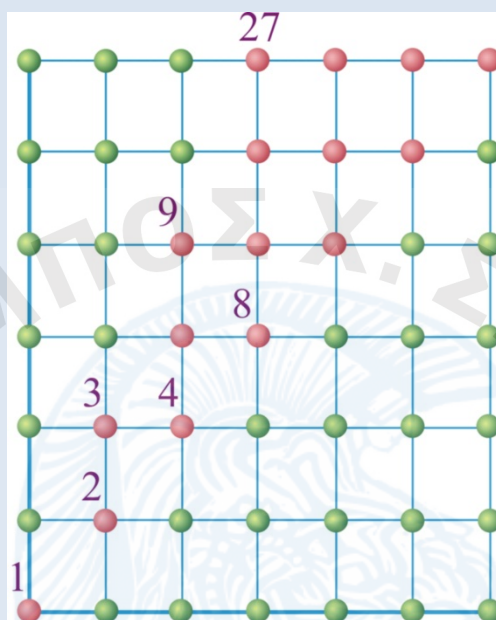
Αυτός ο αριθμητικός μέσος (στο διπλάσιο διάστημα) καθίσταται αρμονικός μέσος για το τριπλάσιο διάστημα.

Ο μεγαλύτερος των ακραίων αριθμών του διπλασίου διαστήματος καθίσταται αριθμητικός μέσος του τριπλασίου διαστήματος.

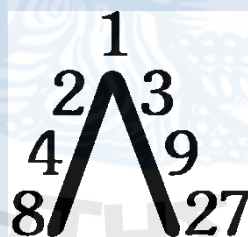
Δια της Ψυχής του Κόσμου επί του Σπυριδείου δικτυωτού παρέχεται μέγιστη ευκολία υπολογισμού του αριθμητικού και του αρμονικού μέσου δύο διπλασίων ή τριπλασίων αριθμών.

2.3. Κόσμος και Ψυχή

Προβληματιζόμενος με το τέλει και απόλυτο γεωμετρικό σχέδιο του Κόσμου, εντός του οποίου, κατά τον ισχυρισμόν του Πλουτάρχου (1027 Ε 9), ο ίδιος ο Πλάτων χρησιμοποίησε τη λαβδοειδή διάταξη των αριθμών (Σχήματα 2.3.1 και 2.3.2) και, βασιζόμενος επί της συμμετρίας, υποστηρίζω ότι το Σπυριδίειο δικτυωτό είναι ο κατά Πλάτωνα ΚΟΣΜΟΣ.



Σχήμα 2.3.1: Οι πρώτες τέσσερις τιμές των συναρτήσεων $\phi(x) = 2^x \quad x = 0, 1, 2, 3$ και $\rho(y) = 3^y \quad y = 0, 1, 2, 3$, οι οποίες δομούν την τετρακτύν του Πλάτωνος, με βάση την οποία αυτός δομεί την Ψυχή του Κόσμου στο «μουσικό χωρίο (35a1-36b6)» του διαλόγου του *Τίμαιος*.



Σχήμα 2.3.2: Το λαβδοειδές διάγραμμα του Αδράστου.

Πράγματι, επί του ΚΟΣΜΟΥ ο Πλάτων προσπαθεί να περιχαρακώσει ένα πεδίο τιμών, εντός του οποίου θα ευρίσκονται οι **ακέραιες** λύσεις του προβλήματός του και οι λύσεις του οποιουδήποτε προβλήματος της Πυθαγορείου μουσικής. Το πεδίο αυτό των ακεραίων τιμών –η κατά Πλάτωνα ΨΥΧΗ- είναι η τριγωνικής μορφής περιοχή του Σπυριδείου δικτυωτού, η οποία έχει κορυφή επί του κόμβου αναφοράς και πλευρές καθοριζόμενες από τις γεννήτριες συναρτήσεις

$$\phi(x) = 2^x \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ και } \rho(y) = 3^y \quad y = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Με δύο τετρακτύες (1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27) –μία εξ εκάστης γεννητρίου συναρτήσεως- ο Πλάτων δομεί την μεγίστη τετρακτύν του 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27 δια της οποίας μας υποδεικνύει τα όρια της Ψυχής του Κόσμου⁸ (Σχήμα 2.3.1).

2.4 Διαστηματική ανάλυση βρόχου

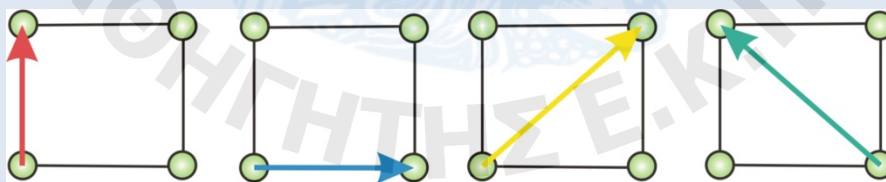
Όπως έχει ήδη λεχθεί, κάθε κόμβος της Ψυχής Κόσμου επί του Σπυριδείου δικτυωτού εκφράζεται δι ενός ακεραίου Πυθαγορείου αριθμού και παριστά ένα μήκος δονουμένου τμήματος χορδής. Μετακίνηση από κόμβου εις κόμβου του Σπυριδείου δικτυωτού εκφράζει ένα μουσικό διάστημα, το οποίο υπολογίζεται από τον λόγο του αριθμού του κόμβου αφίξεως

δια του αριθμού του κόμβου εκκινήσεως $\left(\frac{L_{αφίξεως}}{L_{εκκινήσεως}} \right)$.

Μετακίνηση από κόμβου μικρού αριθμού προς κόμβου μεγαλύτερου αριθμού σημαίνει μετακίνηση από μικρό μήκος δονουμένου τμήματος χορδής προς μεγαλύτερο, δηλαδή εκτέλεση ενός καθοδικού μουσικού διαστήματος⁹.

Οι στοιχειώδεις μετακινήσεις μεταξύ των κόμβων του Σπυριδείου δικτυωτού πραγματοποιούνται εντός ενός απλού βρόχου διπλασίων αριθμών ($x-2x$) και είναι οι:

- ⊗ Μετακίνηση κατακορύφως μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων συνεπάγεται εκτέλεση ενός διαπέντε διαστήματος ανιόντος ή κατιόντος, αναλόγως της σχέσεως των αριθμών του κόμβου εκκινήσεως και του κόμβου αφίξεως.
- ⊗ Μετακίνηση οριζοντίως μεταξύ των δύο διαδοχικών κόμβων συνεπάγεται εκτέλεση ενός διατεσσάρων διαστήματος.
- ⊗ Μετακίνηση μεταξύ των κόμβων των δύο διπλασίων αριθμών συνεπάγεται εκτέλεση ενός διαστήματος διαπασών.
- ⊗ Μετακίνηση μεταξύ των κόμβων της άλλης διαγωνίου του απλού βρόχου διπλασίων αριθμών συνεπάγεται εκτέλεση ενός επογδού διαστήματος.



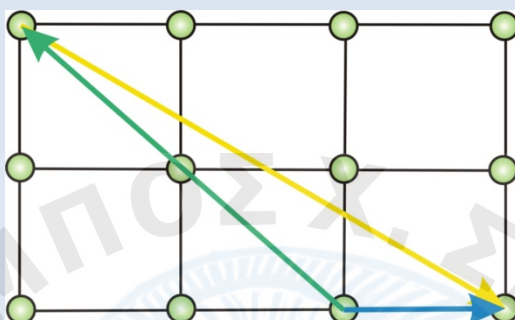
Σχήμα 2.4.1: Η γραφική παρουσίαση των τεσσάρων δυνατών κινήσεων μεταξύ των κόμβων ενός απλού βρόχου διπλασίων αριθμών.

⁸ Ο Πλάτων, ως Πυθαγόρειος (Οί Πυθαγορικοί, οἷς πολλαχῆ ἔπεται Πλάτων, Θέων Σμυρναίος, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων*, 12, 10), πιστεῦει ὅτι ὅλο το σύμπαν εἶναι «αρμονία και αριθμός», ὅτι ἡ ψυχή γίνεται αντιληπτή ὡς «αρμονία», ὡς εὐταξία, δηλαδή ἓνα σύστημα καλῶς συντονισμένο με τὴν συμπαντικὴ ἀρμονία, ἤτοι τὸν «κόσμο».

⁹ Μήκος δονουμένου τμήματος χορδής και συχνότητα παραγομένου ήχου εἶναι μεγέθη ἀντίστροφα.

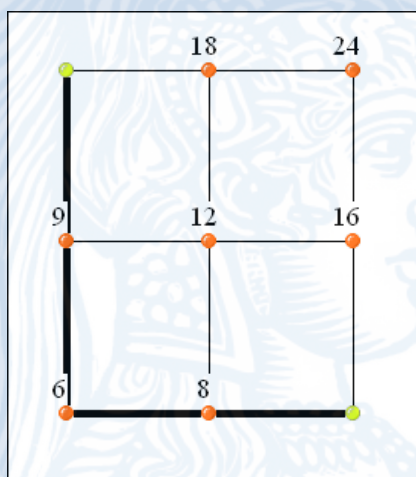
Οι μετακινήσεις μεταξύ κόμβων συνθετωτέρων βρόχων εκφράζουν μουσικά διαστήματα, το μέγεθος των οποίων προκύπτει δια της διανυσματικής συνθέσεως (προσθέσεως) ωρισμένων εκ των στοιχειωδών μετακινήσεως (διανυσμάτων) εντός του Σπυριδείου δικτυωτού.

Παράδειγμα 2.4.1. Του πυθαγορείου διτόνου (πυθαγόρειος τόνος+πυθαγόρειος τόνος, πράσινο διάνυσμα στο σχήμα 2.4.2) προστιθεμένου εις το διατονικόν ημίτονον ή λείμμα (κίτρινο διάνυσμα), γεννάται το διατεσσάρων (μπλε διάνυσμα).



Σχήμα 2.4.2: Διανυσματική πρόσθεση μουσικών διαστημάτων επί του Σπυριδείου δικτυωτού.

Παράδειγμα 2.4.2. Έστω το σχήμα 2.4.3, όπου παρουσιάζεται ένα τμήμα της Ψυχής του Κόσμου.



Σχήμα 2.4.3: Διαστηματική ανάλυση βρόχου.

Η μετακίνηση από τον κόμβο 6 στον κόμβο 24 ισοδυναμεί με ένα κατίον ασύνθετο διάστημα μιας δις διαπασών. Τούτο το διάστημα, εάν αντιμετωπισθεί ως σύνθετο εκ κατιόντων MONON διαστημάτων, θα μπορούσε να εκτελεσθεί με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους, το πλήθος των οποίων μπορεί να υπολογισθεί με βάση την θεμελιώδη αρχή της απαριθμώσεως ή την πολλαπλασιαστική αρχή¹⁰ ως εξής:

Το πλήθος των τρόπων μεταβάσεως από τον κόμβο 6 στον κόμβο 24 μέσω του κόμβου 12 ισούται με το πλήθος των τρόπων μεταβάσεως από τον κόμβο 6 στον κόμβο 12 επί το πλήθος των τρόπων μεταβάσεως από τον κόμβο 12 στον κόμβο 24.

Από τον κόμβο 6 στον κόμβο 12 μπορούμε να μεταβούμε δια κατιόντων μόνο διαστημάτων με τους εξής 3 τρόπους:

- 6-12 διαπασών
- 6-8-12 διατεσσάρων+διαπέντε
- 6-9-12 διαπέντε+διατεσσάρων

¹⁰ Αυτόθι, σελ. 95.

Από τον κόμβο 12 στον κόμβο 24 μπορούμε να μεταβούμε δια κατιόντων μόνο διαστημάτων με τους εξής 3 τρόπους:

12-24 διαπασών

12-16-24 διατεσσάρων+διαπέντε

12-18-24 διαπέντε+διατεσσάρων

Ωστε, από τον κόμβο 6 στον κόμβο 24 μπορούμε να μεταβούμε δια κατιόντων μόνο διαστημάτων με τους εξής $3 \cdot 3 = 9$ τρόπους:

6-12-24

6-12-16-24

6-12-18-24

6-8-12-24

6-8-12-16-24

6-8-12-18-24

6-9-12-24

6-9-12-16-24

6-9-12-18-24

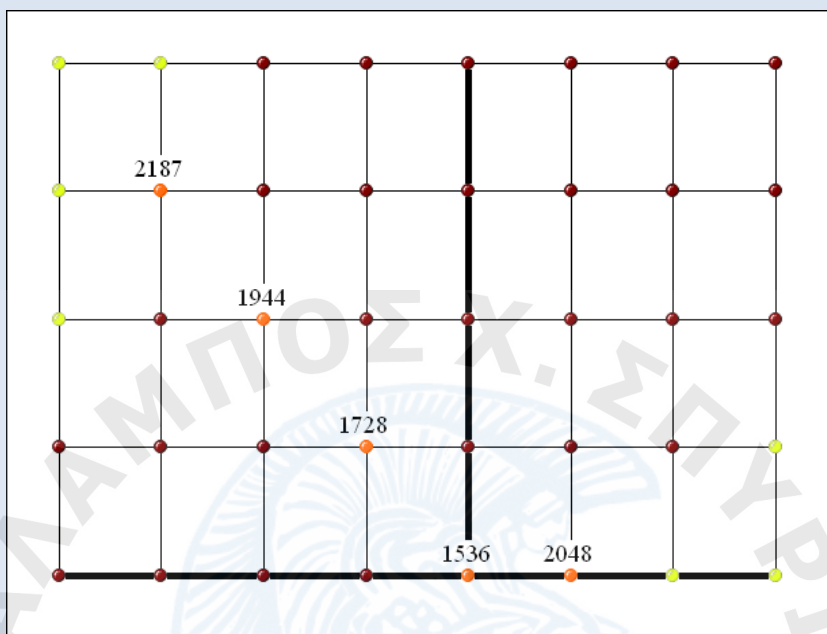
Από τον κόμβο 12 στον κόμβο 24 μπορούμε επίσης να μεταβούμε δια κατιόντων μόνο διαστημάτων χωρίς να διέλθωμε εκ του κόμβου 12 με τους εξής 2 τρόπους:

6-8-16-24 διατεσσάρων+διαπασών+διαπέντε

6-9-18-24 διαπέντε+διαπασών+διατεσσάρων

Εν κατακλείδι, από τον κόμβο 6 στον κόμβο 24 μπορούμε να μεταβούμε δια κατιόντων μόνο διαστημάτων με τους ανωτέρω 11 τρόπους.

Παράδειγμα 2.4.3. Έστω το σχήμα 2.4.4, όπου παρουσιάζεται ένα άλλο τμήμα της Ψυχής του Κόσμου.



Σχήμα 2.4.4: Διαστηματικές κινήσεις εντός της Ψυχής του Κόσμου.

Η μετακίνηση από τον κόμβο 1536 στον κόμβο 2048 ισοδυναμεί με ένα κατιόν διατεσσάρων διάστημα. Τούτο το διάστημα μπορεί να συντεθεί ως 1536-1728-1944-2048, δηλαδή επόγδος τόνος- επόγδος τόνος-λείμμα (δομή Δωρίου τετραχόρδου).

Η μετακίνηση από τον κόμβο 1944 στον κόμβο 2187 ισοδυναμεί με το κατιόν διάστημα ενός επογδού τόνου. Τούτο το διάστημα μπορεί να συντεθεί ως 1944-2048-2187, δηλαδή λείμμα+αποτομή μείζονος τόνου.

3. Το Πλατωνικό Λάβδωμα.

3.1 Η μαθηματική τοποθέτηση του προβλήματος κατά την λαβδοειδή διαδικασία.

Έχει λεχθεί ότι το χωρίο 35a1-36b6 του Τιμαίου, γνωστό και ως «μουσικό χωρίο», αναφέρεται στην δημιουργία και την σύσταση της Ψυχής Κόσμου επί τη βάσει ενός αλγορίθμου, διατυπωμένου με Πυθαγόρειο μουσική ορολογία.

Στην προηγούμενη εργασία μου, η οποία εδημοσιεύθη στην επετηρίδα της Φιλοσοφικής Σχολής, όπως προαναφέρθη, είχα ασχοληθεί με την γραμμική ή Θεοδώρειο λύση του εν λόγω προβλήματος.

Ὁ γὰρ Θεόδωρος, ... , ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἐφεξῆς τοὺς τε διπλασίους ἐκτάτων καὶ τοὺς τριπλασίους

Κράντων, Σπαράγματα, Σπάραγμα 6, γρ. 8-10

Τώρα θα εκτεθεί αναλυτικώς και με την πρέπουσα τεκμηρίωση η Σπυριδίειος λύση του προβλήματος «περί γενέσεως Ψυχῆς Κόσμου» επί του Σπυριδείου δικτυωτού, η οποία οδηγεί αποκλειστικώς στην χρήση Δωρίων τετραχόρδων (τόνος-τόνος-λείμμα) κατά την κατιούσα διαδοχή κατά την λαβδοειδή διαδικασία.

Πρέπει να τονισθεί ότι περί της λαβδοειδούς λύσεως υπάρχουν δύο αναφορές. Η μία από τον Κλέαρχο

τοῖς δὲ περὶ τὸν Κράντορα βοηθοῦσιν αἴ τε θέσεις τῶν ἀριθμῶν, ἐπιπέδων ἐπιπέδοις καὶ τετραγῶνων τετραγῶνοις καὶ κύβων κύβοις ἀντιθέτως συζυγούντων, τῇ τε μὴ κατὰ τάξιν αὐτῶν λήψει, ἀλλ' ἐναλλάξ ἀρτίων καὶ [δευτέρων] περιττῶν

Κλέαρχος, Σπαράγματα, Σπάραγμα 4, γρ. 12-15.

και η άλλη από τον Κράντορα

Τοῖς δὲ περὶ τὸν Κράντορα βοηθοῦσιν αἴ τε θέσεις τῶν ἀριθμῶν, ἐπιπέδων ἐπιπέδοις, καὶ τετραγῶνων τετραγῶνοις, καὶ κύβων κύβοις ἀντιθέτως συζυγούντων, τῇ τε μὴ κατὰ τάξιν αὐτῶν λήψει, ἀλλ' ἐναλλάξ ἀρτίων καὶ ἐπιπέδων ἀρτίοις καὶ ἐπιπέδοις ἀντιθέτω συζυγία.

Περὶ δὲ τῆς τάξεως (ζητεῖται), πότερον ἐφ' ἑνὸς στίχου πάντας ἐκθετέον, ὡς Θεόδωρος· ἢ μᾶλλον, ὡς Κράντωρ, ἐν τῷ Λ σχήματι, τοῦ πρώτου κατὰ κορυφὴν τιθεμένου, καὶ χωρὶς μὲν τῶν διπλασίων, χωρὶς δὲ τῶν τριπλασίων ἐν δυσὶ στίχοις ὑποταττομένων.

Κράντωρ, Σπαράγματα, Σπάραγμα 6, γρ. 17- Σπάραγμα 7, γρ. 6

Λέει, λοιπόν, ο Πλατωνικός αλγόριθμος:

...τῆς ἀμερίστου

καὶ αἰεὶ κατὰ ταῦτὰ ἐχούσης οὐσίας καὶ τῆς αὐτῆς περὶ τὰ σώματα γιγνομένης μεριστῆς τρίτον ἐξ ἀμφοῖν ἐν μέσῳ συνεκεράσατο οὐσίας εἶδος, τῆς τε ταύτου φύσεως [αὐτῆς περὶ] καὶ τῆς τοῦ ἑτέρου, καὶ κατὰ ταῦτὰ συνέστησεν ἐν μέσῳ τοῦ τε ἀμεροῦς αὐτῶν καὶ τοῦ κατὰ τὰ σώματα μεριστοῦ

Πλάτωνος *Τίμαιος* (35a, 1-6)

Κατά το απόσπασμα (35a5-b1) ανέμειξε την ουσία του ταυτού, (αμερούς, αμεταβλήτου) με την ουσία του ετέρου (μεριστού, μεταβλητού) και εδημιούργησε τρίτη ουσία σε σχέση πάλι με την φύση του ταυτού και του θατέρου. Επειδή στα *Θεολογούμενα της Αριθμητικής* του Ιαμβλίου με την έννοια **σύνθεσις** υπονοείται η πράξη της προσθέσεως και με την έννοια **ανάμειξις** υπονοείται η πράξη του πολλαπλασιασμού, πολλαπλασιάζοντας, λοιπόν, ο θεός την ουσία του ταυτού, δηλαδή τον αρμονικό μέσο, επί την ουσίαν του θατέρου, δηλαδή

τον αριθμητικόν μέσο, εδημιούργησε την τρίτη ουσία, η οποία τιθεμένη ανάμεσα στις δύο προηγούμενες ουσίες, δομεί μία συνεχή αναλογία ως ακολούθως:

$$\frac{2 \cdot x \cdot y}{x + y} \cdot \frac{x + y}{2} = x \cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{αρμονικός μέσος}) \cdot (\text{αριθμητικός μέσος}) = x \cdot y$$

Η σχέση αυτή με ωδήγησε στη διατύπωση της θεωρίας των δικτυωτών.

Τώρα ο Πλάτων διαθέτει ένα υλικό, τους αριθμούς, τους οποίους θα ταξινομήσει και θα συσχετίσει με βάση τις αναλογίες, διότι ταξινομών το υλικό του, το καθιστά κτήμα του.

Εν συνεχεία ο Πλάτων παρουσιάζει την κατανομή των μερών του μείγματος βάσει του αλγορίθμου του και θέτει το μαθηματικό – αρμονικό πρόβλημα, το οποίο καλούμεθα να επιλύσουμε λαβδοειδώς.

Αφού ανακάτεψε το μεριστόν με το αμέριστον και με την ουσία και, αφού από τρία έκανε ένα, μοίρασε¹¹ ξανά το σύνολο αυτό στα κατάλληλα μερίδια, που το καθένα τους ήταν μείγμα από το ταυτό, το θάτερο και την ουσία. Άρχισε το μοίρασμα με τις εξής επτά ενέργειες:

ἤρχετο δὲ διαιρεῖν ᾧδε. μίαν ἀφείλεν τὸ πρῶτον ἀπὸ παντὸς μοῖραν, μετὰ δὲ ταύτην ἀφήρει διπλασίαν ταύτης, τὴν δ' αὖ τρίτην ἡμιολίαν μὲν τῆς δευτέρας, τριπλασίαν δὲ τῆς πρώτης, τετάρτην δὲ τῆς δευτέρας διπλὴν, πέμπτην δὲ τριπλὴν τῆς τρίτης, τὴν δ' ἕκτην τῆς πρώτης ὀκταπλασίαν, ἑβδόμην δ' ἑπτακαικεκοσιπλασίαν τῆς πρώτης.

(35 b4-c2)

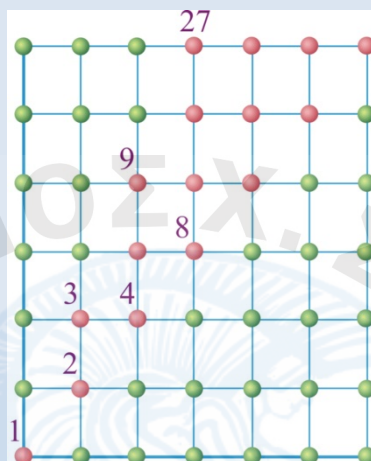
Αφήρεσε (ο Δημιουργός) από το όλον (το μείγμα) ένα μέρος (1), μετά αφήρεσε το διπλάσιο αυτού (2), μετά αφήρεσε ένα κομμάτι μιάμιση φορά το δεύτερο, δηλαδή τριπλάσιο του πρώτου (3), μετά αφήρεσε ένα κομμάτι διπλάσιο του δευτέρου (4), μετά αφήρεσε το τριπλάσιο του τρίτου (9), μετά αφήρεσε ένα κομμάτι οκταπλάσιο του πρώτου (8) και μετά αφήρεσε ένα κομμάτι εικοσιεπταπλάσιο του πρώτου (27).

Από την εκφώνηση του Πλατωνικού προβλήματος προκύπτουν οι αριθμοί του Πίνακα 3.1.1, οι οποίοι ορίζουν την Ψυχή Κόσμου επί του Σπυριδείου δικτυωτού του σχήματος 3.1.1.

¹¹ Ο Πρόκλος γι' αυτήν την ενέργεια διερωτώμενος (Πῶς δὲ μοίρας ἀφαιρεῖν τῆς ἀμερίστου κατ' οὐσίαν;) ἐπισημαίνει: Τούτο σημαίνει ὅτι το υλικό ἀπὸ τὴν ἀνάμειξη τοῦ ταυτοῦ, τοῦ θατέρου καὶ τῆς οὐσίας εἶναι μεριστό. Ὁ δημιουργὸς ἐδόμησε τὴν ψυχή σε ἕνα ὅλον προτοῦ ἀρχίσει νὰ τὴν διαιρεῖ. Ἐτσι, λοιπόν, δὲν χάνεται ἡ ολότητα καθὼς υφίστανται τὰ μέρη τῆς, ἀλλὰ ἐξακολουθεῖ νὰ ὑπάρχει καὶ νὰ προηγείται τῶν μερῶν τῆς. 199 D9-13.

Πίνακας 3.1.1: Οι αριθμοί από την εκφώνηση του Πλατωνικού προβλήματος.

| | | | | | | |
|---|---|---|-------|-------------------------------------|-------|-----------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 9 | 8 | 27 |
| 1 | 2 | 3 | 2^2 | 3^2 | 2^3 | 3^3 |
| | | | | Τετράγωνοι ¹² αριθμοί | | Κύβοι ¹³ αριθμοί |



Σχήμα 3.1.1: Οι αριθμοί από την εκφώνηση του Πλατωνικού προβλήματος τοποθετημένοι επί του Σπυριδείου δικτυωτού.

Πρόκειται για τους επτά αριθμούς της μεγάλης τετρακτύος, που, όπως παρατήρησαν αρχαίοι σχολιαστές με πρώτον τον Κράντορα, δομείται από τη συνένωση της γεωμετρικής σειράς 1, 2, 4, 8 με πρώτον όρο την μονάδα και γενήτορα το 2 και της γεωμετρικής σειράς 1, 3, 9, 27 με πρώτον όρο την μονάδα και γενήτορα το 3. Η παρατήρηση αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική και χαρακτηρίζει από παλιά όλα τα Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα, με την έννοια ότι ένα μουσικό διάστημα χαρακτηρίζεται ως Πυθαγόρειο μόνον, όταν εκφράζεται ως γινόμενο δυνάμεων με βάση το 2 ή/και το 3, δηλαδή με τη μορφή $2^κ \cdot 3^λ$, $κ, λ \in \mathbb{Z}$.

Σχολιάζοντας τη σειρά με την οποία παρουσιάζει ο Πλάτων τους αριθμούς της μεγάλης τετρακτύος, δηλαδή πρώτα τη μονάδα, μετά το 2, μετά το 3, μετά τα τετράγωνα του 2 και του 3 και μετά τους κύβους αυτών – καταλήγομε ότι αυτή συνηγορεί υπέρ:

- ⊗ της ενεργείας των μαθητών του Πλάτωνος, του Αδράστου και του Κράντωρος, οι οποίοι ασχολήθηκαν με τη λύση του συγκεκριμένου προβλήματος, να τοποθετούν λαβδοειδώς τους αριθμούς, δηλαδή να βάζουν επί του ενός σκέλους τους αρτίους και επί του άλλου σκέλους τους περιττούς αριθμούς και εις την κορυφή του Λ τη μονάδα (Σχήμα 3.1.1).
- ⊗ του ισχυρισμού του Πλουτάρχου (1027 E 9) ότι ο ίδιος ο Πλάτων χρησιμοποιούσε τη λαβδοειδή διάταξη των αριθμών για τη λύση του εν λόγω προβλήματος.
- ⊗ της δηλώσεως του Πρόκλου (*Εις τον Τιμαίον* Γ [Tim 35B] 197C5) «Ἄδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ».

¹² Τετράγωνος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ ἰσάκις ἴσος ἢ [ὁ] ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

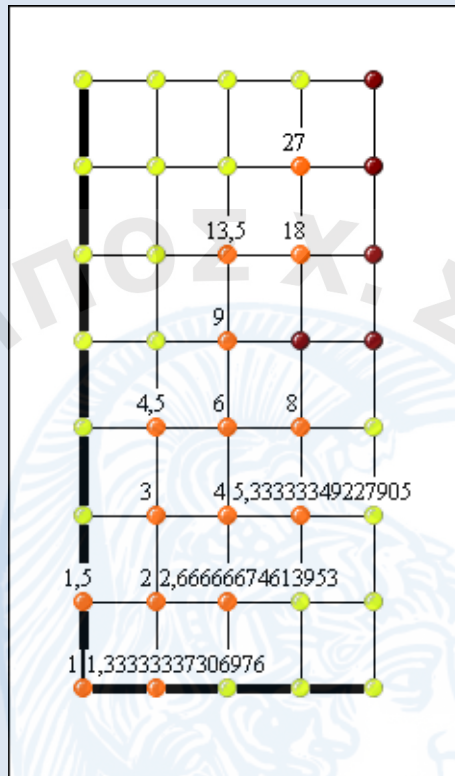
Ευκλείδου, *Στοιχείων* ζ.

¹³ Κύβος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ ἰσάκις ἴσος ἢ [ὁ] ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

Αυτόθι.

Όλα τα ανωτέρω με ωδήγησαν στη διατύπωση της θεωρίας των δικτυωτών.

Στη συνέχεια ο Πλάτων μας παραγγέλλει τα διπλάσια και τα τριπλάσια διαστήματα να τα συμπληρώσουμε με τις αρμονικές και τις αριθμητικές μεσοότητες. Η εντολή εκτελείται με τη χρήση των 1^{ης}, 2^{ης} και 3^{ης} Σπυριδείων προτάσεων των μεσοτήτων (Σχήμα 3.1.2).



Σχήμα 3.1.2: Η ένθεση αρμονικών και αριθμητικών μεσοτήτων στα διπλάσια και τα τριπλάσια διαστήματα.

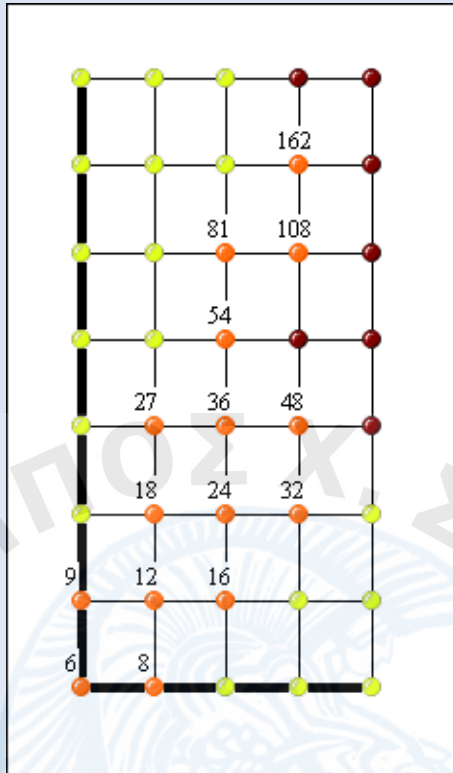
Παρατηρούμε ότι με την ένθεση των αριθμητικών και αρμονικών μεσοτήτων κάποιοι κόμβοι και συγκεκριμένως οι 1,33 1,5 2,66 4,5 5,33 13,5 ευρίσκονται (ως μη έχοντες αριθμητικό βάρος ακέραιο αριθμό) εκτός της Ψυχής του Κόσμου. Μετακινώντας όλους τους κόμβους κατά ένα κατιόν διάστημα ενός δις διαπασών+διαπέντε, καθίστανται για πρώτη φορά και αυτοί οι κόμβοι **κόμβοι της Ψυχής του Κόσμου**. Τώρα έχουμε να διαχειριστούμε τους κόμβους της Ψυχής του Κόσμου που δείχνει το σχήμα 3.1.3.

Ας σχολιάσουμε την σημασία της μετακινήσεως των συγκεκριμένων κόμβων κατά ένα κατιόν διάστημα ενός δις διαπασών+διαπέντε. Τούτο σημαίνει ότι οι αριθμητικές τιμές των

κόμβων πολλαπλασιάζονται επί $\left(\frac{2}{1}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{4}{1}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{6}{1}\right)$, δηλαδή οι αριθμητικές τιμές

των συγκεκριμένων κόμβων εξαπλασιάζονται. Αυτούς τους συγκεκριμένους κόμβους υπονοεί ο Άδραστος κατά την ρήση του Πρόκλου ότι περιέχει το δεύτερο τρίγωνο του τριπλού λαβδοειδούς σχήματος « Άδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ καὶ ἐν τρισὶ τριγῶνις ἐκτίθεται τοὺς ὄρους, ἐπὶ μὲν τοῦ ἐντὸς αὐτοῦ τοὺς ἐν τοῖς μοναδικοῖς ἀριθμοῖς λόγους, ἐπὶ δὲ τοῦ μετὰ τοῦτο τοὺς ἑξαπλασίους τούτων, τοὺς ἔχοντας δύο μεσοτήτας καθ' ἕκαστον διάστημα τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον».

Πρόκλου Εἰς τὸν Τίμαιον Γ [Tim 35B] 197C5-9



Σχήμα 3.1.3: Μετατροπή σε κόμβους της Ψυχής του Κόσμου των εντεθειών αρμονικών και αριθμητικών μεσοτήτων των διπλασίων και τριπλασίων διαστημάτων δια μετακινήσεώς των κατά ένα κατιόν διάστημα δις διαπασών+διαπέντε.

Τώρα θα πρέπει στη σειρά των αριθμών του Σχήματος 2.1.3 τα διαστήματα των όρων, που έχουν λόγο επίτριο, να τα διαιρέσουμε σε επογδούς τόνους και σε λείμματα. Προς τούτοις θα εφαρμόσουμε διαδικασίες από την διαστηματική ανάλυση του βρόχου. Οι κόμβοι που σχηματίζουν μουσικό διάστημα διατεσσάρων ή, ισοδυνάμως, έχουν λόγο επίτριο είναι οι: 6-8, 9-12, 12-16, 18-24, 24-32, 27-36, 36-48 και 81-108.

Ως γνωστόν, ένα επίτριο διάστημα απαρτίζεται από δύο επογδούς τόνους και ένα λείμμα. Πρέπει να τονισθεί με έμφαση ότι ο Πλάτων δεν καθορίζει την αλληλουχία των τριών αυτών διαστημάτων εντός του επιτρίτου διαστήματος. Έτσι, είμεθα υποχρεωμένοι, για την πλήρη λύση του Πλατωνικού προβλήματος, να αντιμετωπίσουμε το επίτριο διάστημα σε όλες του τις διαστηματικές δομές, ήτοι την Δώριο (τ-τ-λ), την Φρύγιο (τ-λ-τ) και την Λύδιο (λ-τ-τ). Η σημειούμενη αλληλουχία των τριών διαστημάτων εντός του επιτρίτου διαστήματος είναι κατά την κατιούσα διαδοχή.

3.1.1 Εντοπισμός των αποτομών μείζονος τόνου

Πιθανώς ο μελετητής να διερωτάται πώς θα γνωρίζει εάν πρέπει να τοποθετήσει διαστήματα αποτομής μείζονος τόνου και σε ποιές θέσεις θα τα τοποθετήσει.

Το διάγραμμα εκ της αναλύσεως των επιτρίτων διαστημάτων καθεαυτων εις επογδούς τόνους και λείμματα ή των επιτρίτων διαστημάτων, τα οποία προέρχονται από την ανάλυση των ημιολίων διαστημάτων (επόγδοος τόνος + επίτριτο διάστημα ή επίτριτο διάστημα + επόγδοος τόνος) θα τον καθοδηγεί ως εξής:

Κάθε αναλελυμένο επίτριτο διάστημα σε δύο επογδούς τόνους και ένα λείμμα (με την πρέπεισα αλληλουχία, αναλόγως του τρόπου στον οποίον ανήκει, δηλαδή Δώριο, Φρύγιο, Λύδιο) παρίσταται ως μια τεθλασμένη γραμμή τριών ευθυγράμμων τμημάτων. (Βλέπε παράδειγμα 2.4.1 Κεφάλαιο 2.4 Διαστηματική ανάλυση βρόχου).

Συνεχής τεθλασμένη γραμμή δύο αναλελυμένων επιτρίτων διαστημάτων παριστά δύο συνημμένα τετράχορδα.

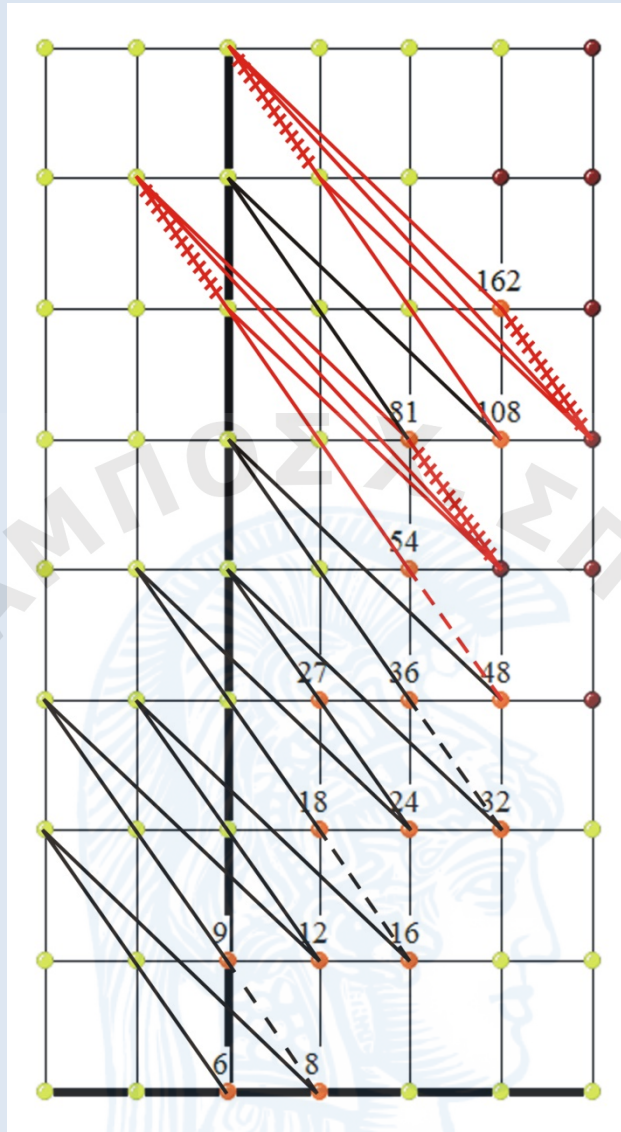
Δύο τεθλασμένες γραμμές, δύο αναλελυμένων επιτρίτων διαστημάτων, διαχωριζόμενες από ένα επόγδοο διάστημα, παριστούν δύο διεζευγμένα τετράχορδα, εις τα οποία το επόγδοο διάστημα του διαχωρισμού παριστά τον διαζευκτικό τόνο. (Βλέπε διακεκομμένες γραμμές στο σχήμα 3.1.1.1).

Από την συνένωση τεθλασμένων γραμμών δύο επιτρίτων διαστημάτων, τα οποία, είτε είναι εμπειπλεγμένα έχοντας ένα κοινό διάστημα ενός τριημιτόνου (επόγδοος τόνος+λείμμα), είτε είναι διεζευγμένα και σχηματίζεται με το χαμηλότερο εξ αυτών ένα συνημμένο επίτριτο διάστημα, δυνατόν να σχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο. Το παραλληλόγραμμο αυτό στο σχήμα πάντοτε έχει μεγάλη πλευρά ίση με ένα λείμμα, μικρή πλευρά ίση με ένα επόγδοο διάστημα και μεγάλη διαγώνιο ίση με μια αποτομή μείζονος τόνου.

Όπου σχηματίζεται παραλληλόγραμμο:

- ⊗ αντικαθιστούμε την επάνω μικρή πλευρά του παραλληλογράμμου (επόγδοος τόνος) από την αλληλουχία της μεγάλης του πλευράς (λείμμα) και της μεγάλης του διαγωνίου (αποτομή μείζονος τόνου), οι οποίες εκκινούν εκ των άκρων της,
- ⊗ αγνοούμε την ύπαρξη και της άλλης μικρής πλευράς του παραλληλογράμμου (επόγδοος τόνος).

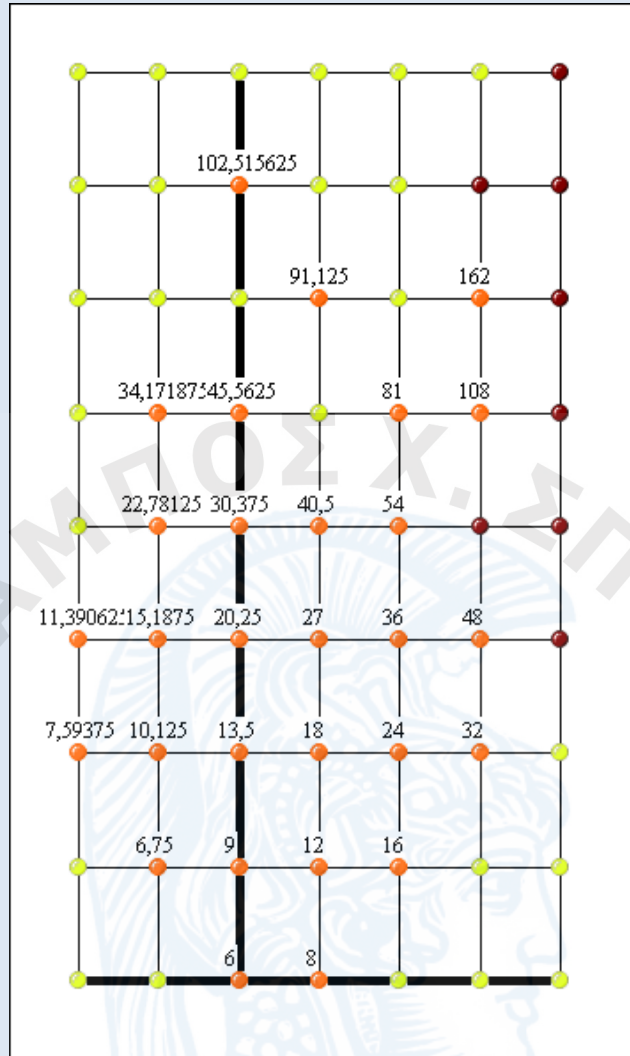
Όλα τα ανωτέρω παρουσιάζονται στο σχήμα 3.1.1.1, το οποίο παριστά την ανάλυση των επιτρίτων διαστημάτων σε επόγδοο τόνο, σε επόγδοο τόνο και σε λείμμα (Δώριο τετράχορδο κατά την κατιούσα διαδοχή).



Σχήμα 3.1.1.1: Ανάλυση των επιτρίτων διαστημάτων σε επόγδοο τόνο, σε επόγδοο τόνο και σε λείμμα (Δώριο τετράχορδο κατά την κατιούσα διαδοχή) για τον εντοπισμό των πιθανών υπάρχουσών αποτομών μείζονος τόνου εις τη δομή της Ψυχής του Κόσμου.

3.2 Λαβδοειδής λύση του Πλατωνικού προβλήματος «Γένεσις Ψυχής Κόσμου» με Δώρια τετράχορδα (τ-τ-λ) κατά την κατιούσα διαδοχή.

Αναλύοντας τα μνημονευθέντα διατεσσάρων μουσικά διαστήματα 6-8, 9-12, 12-16, 18-24, 24-32, 27-36, 36-48 και 81-108 σε δύο επογδούς τόνους και ένα λείμμα κατά το παράδειγμα 2.4.1 και το σχήμα 2.4.2 (Δώρια τετράχορδα κατά την κατιούσα διαδοχή), προκύπτουν οι κόμβοι του Σχήματος 3.2.1.



Σχήμα 3.2.1: Ανάλυση των διαστημάτων διατεσσάρων σε επογδούς τόνους και λείμματα.

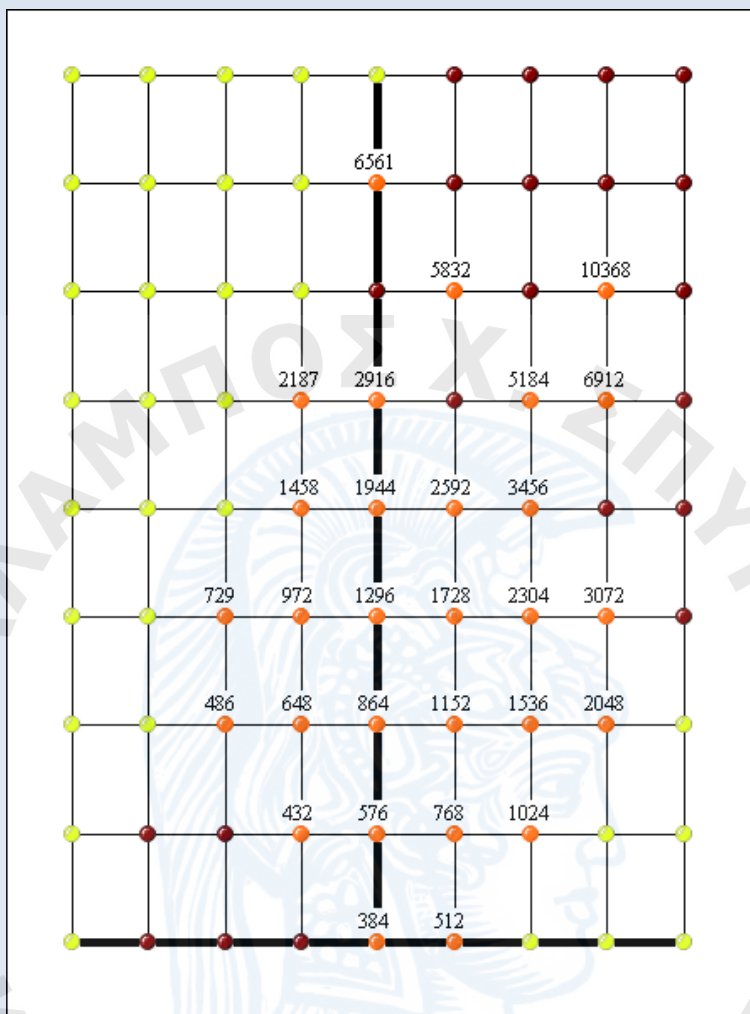
Παρατηρούμε ότι με την ανάλυση όλων των διατεσσάρων μουσικών διαστημάτων σε δύο επογδούς τόνους και ένα λείμμα προκύπτουν πάλι κάποιοι κόμβοι με μη ακεραία τιμή. Αυτοί οι κόμβοι δεν ανήκουν στην Ψυχή του Κόσμου. Μετακινώντας, όμως, όλους τους προκύψαντες κόμβους κατά ένα κατιόν διάστημα έξι (6) διαπασών, καθίστανται για πρώτη φορά και αυτοί οι κόμβοι **κόμβοι της Ψυχής του Κόσμου**.

Ας σχολιάσουμε την σημασία της μετακινήσεως των συγκεκριμένων κόμβων κατά ένα κατιόν διάστημα έξι διαπασών. Τούτο σημαίνει ότι οι αριθμητικές τιμές των κόμβων πολλαπλασιάζονται επί $\left(\frac{2}{1}\right)^6 = 64$, δηλαδή οι αριθμητικές τιμές των συγκεκριμένων κόμβων εξη-

κοντατετραπλασιάζονται. Αυτούς τους συγκεκριμένους κόμβους υπονοεί ο Άδραστος κατά την ρήση του Πρόκλου ότι περιέχει το εξώτατο τρίγωνο του τριπλού λαβδοειδούς σχήματος « Άδραστος δέ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδές τὸ σχῆμα ποιεῖ καὶ ἐν τρισὶ τριγώνοις ἐκτίθεται τοὺς ὅρους, ἐπὶ μὲν τοῦ ἐντὸς αὐτοῦ τοὺς ἐν τοῖς μοναδικοῖς ἀριθμοῖς λόγους, ἐπὶ δὲ τοῦ μετὰ τοῦτο τοὺς ἑξαπλασίους τούτων, τοὺς ἔχοντας δύο μεσότηας καθ' ἕκαστον διάστημα τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον, ἐπὶ δὲ τοῦ ἐξωτάτῳ τοὺς ποιοῦντας ὅλον τὸ διάγραμμα τὸ εἰρημένον».

Πρόκλου Εἰς τὸν Τίμαιον Γ [Tim 35B] 197C5-12

Τώρα έχουμε να διαχειρισθούμε τους κόμβους της Ψυχής του Κόσμου, που δείχνει το σχήμα 3.2.2.



Σχήμα 3.2.2: Μετατροπή όλων των μέχρι στιγμής κόμβων σε κόμβους της Ψυχής του Κόσμου δια της μετακινήσεώς των κατά ένα κατιόν διάστημα έξι διαπασών.

Μεταξύ των κόμβων του σχήματος 3.2.2 σχηματίζονται διαστήματα επογδών τόνων, λειμμάτων, ο επόγδοος τόπος 1944-2187 ανελύθη σε λείμμα 1944-2048 και σε αποτομή μείζονος τόνου 2048-2187. Υπάρχουν ακόμη και δύο διαστήματα διαπέντε (3456-5184 και 6912-10368).

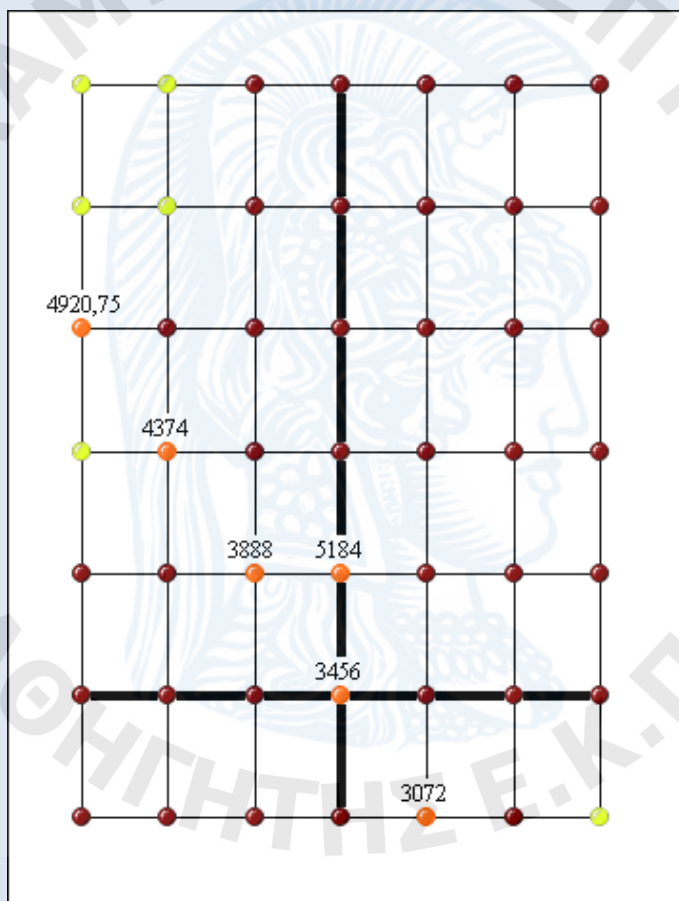
Για τα διαστήματα διαπέντε δεν κάνει μνεία ο Πλάτων. Ο Πλούταρχος στο κεφάλαιο 19 λέει ότι ο Πλάτων τα παρέλειψε. Εγώ ισχυρίζομαι ότι τα παρέλειψε, επειδή είναι ευκολονόητο¹⁴ το τί θα πρέπει να κάνουμε. Πράγματι, το διάστημα διαπέντε ισούται με ένα διάστημα διατεσσάρων συν έναν επόγδοο τόνο ή έναν επόγδοο τόνο συν ένα διάστημα διατεσσάρων.

¹⁴ Και όμως σε αυτό το σημείο συμβαίνουν τα λάθη στους υπολογισμούς όλων των αρχαιοελλήνων, που ασχολήθηκαν με το συγκεκριμένο πρόβλημα, μηδέ του Τιμαίου του Πυθαγορείου εξαιρουμένου.

3.2.1 Μελέτη της δομής του πρώτου ημιολίου διαστήματος μεταξύ των όρων 3456 και 5184

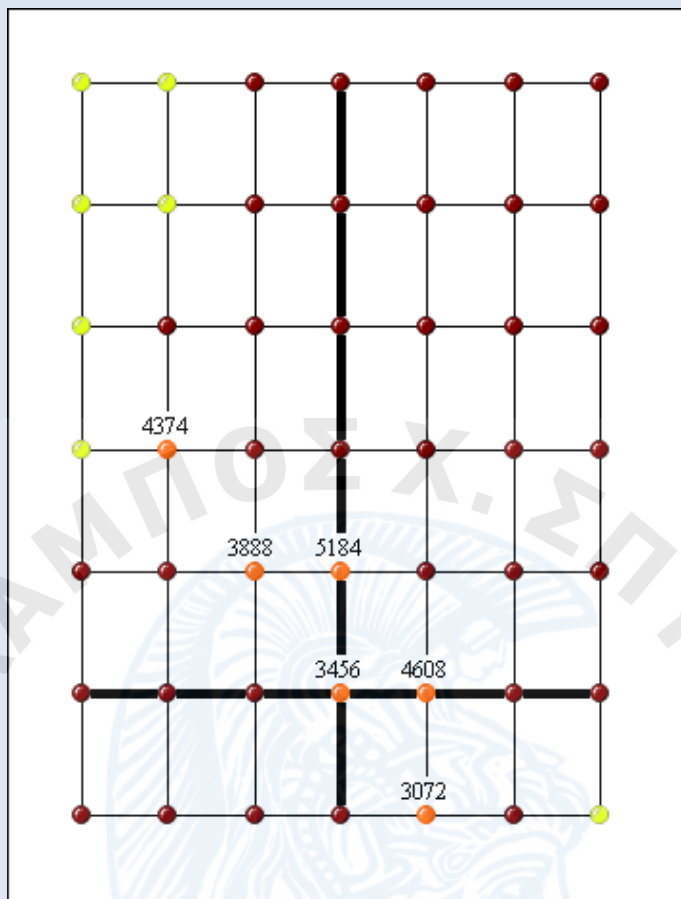
Έστω ότι αυτό το διάστημα διαπέντε (3456-5184) έχει τη δομή επόγδοος τόνος (3456-3888) συν διάστημα διατεσσάρων (3888-5184). Τούτο το διατεσσάρων διάστημα, αναλυόμενο σε δύο επογδούς τόνους (3888-4374 4374-4920,75) και λείμμα (4920,75-5184) (σχήμα 3.2.1.1) δημιουργεί κόμβο εκτός της Ψυχής του Κόσμου. Την υπόθεση αυτήν την απορρίπτουμε.

Εάν δεν απορρίπταμε αυτήν την εκδοχή και με μετατόπιση όλων των κόμβων κατά ένα κατιόν δις διαπασών διάστημα επιτυγχάναμε όλοι οι κόμβοι να είναι εντός της Ψυχής του Κόσμου, τότε θα είχαμε μεταφέρει και την αλληλουχία των τεσσάρων διαδοχικών επογδών τόνων (3072-3456 3456-3888 3888-4374 και 4374-4920,75) (σχήμα 3.2.1.1). Όμως σε κανένα αρχαιοελληνικό μουσικό σύστημα δεν απαντάται αλληλουχία τεσσάρων διαδοχικών επογδών τόνων και δια τούτο απορρίπτουμε αυτήν την εκδοχή.



Σχήμα 3.2.1.1: Ανάλυση του διαστήματος διαπέντε (3456-5184) σε επόγδοο τόνο (3456-3888) συν διάστημα διατεσσάρων (3888-5184).

Έστω τώρα ότι αυτό το διάστημα διαπέντε (3456-5184) έχει τη δομή διάστημα διατεσσάρων (3456-4608) συν επόγδοος τόνος (4608-5184). Τούτο το διατεσσάρων διάστημα, αναλυόμενο σε δύο επογδούς τόνους (3456-3888 3888-4374) και λείμμα (4374-4608) (σχήμα 3.2.1.2), δημιουργεί κόμβους εντός της Ψυχής του Κόσμου. Την υπόθεση αυτήν την αποδεχόμεθα.



Σχήμα 3.2.1.2: Ανάλυση του διαστήματος διαπέντε (3456-5184) σε διάστημα διατεσσάρων (3456-4608) συν επόγδοο τόνο (4608-5184).

Άρα το ημιόλιο αυτό διάστημα υποχρεωτικά θα έχει τη δομή επίτριτο διάστημα συν επόγδοος τόνος και θα υλοποιείται με τους αριθμούς 3456, 3888, 4374, 4608, 5184.

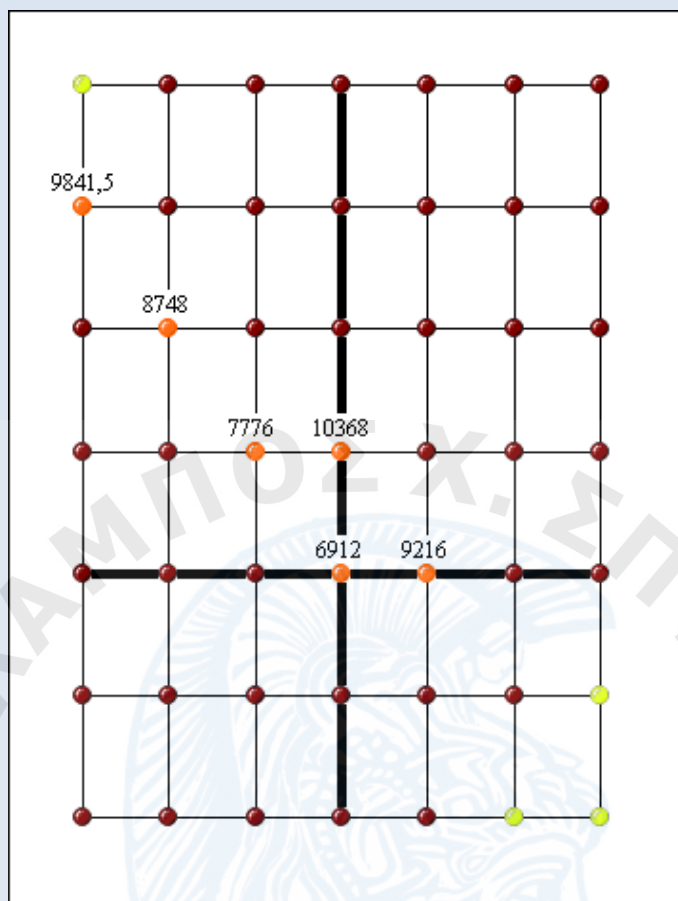
3.2.2 Μελέτη της δομής του δευτέρου ημιολίου διαστήματος μεταξύ των όρων 6912 και 10368

Το ημιόλιο αυτό διάστημα (6912-10368) μπορεί να έχει και τη δομή επόγδοος τόνος συν επίτριτο διάστημα $[\tau+(\tau+\tau(=\lambda+A)+\lambda)]$ και τη δομή επίτριτο διάστημα συν επόγδοος τόνος $[(\tau+\tau+\lambda)+\tau]$. Οι δύο αυτές δομές συνυπάρχουν στη συνισταμένη δομή της μορφής του σχήματος 3.2.2.1.

| | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|--------------------------|
| | | τ | | |
| τ 6912-7776 | τ 7776-8748 | λ 8748-9216 | A 9216-9841,5 | λ 9841,5-10368 |
| | | | τ | |

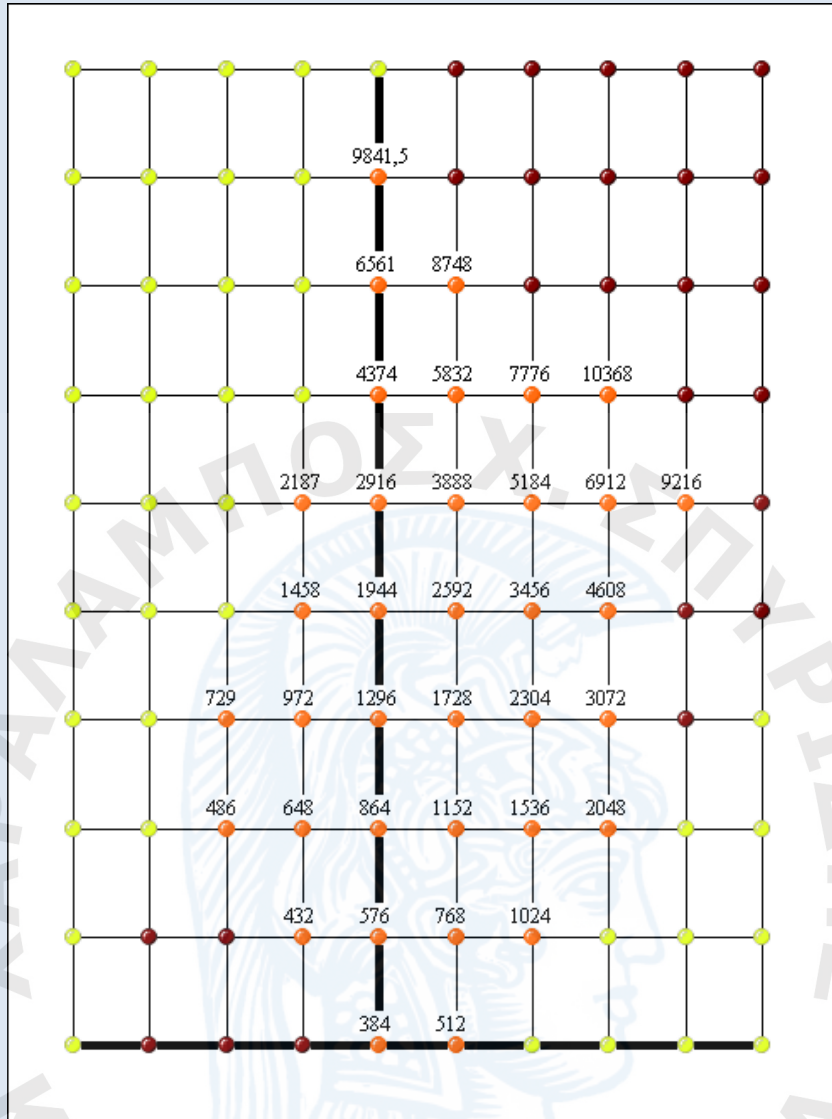
Σχήμα 3.2.2.1: Δομή ημιολίου διαστήματος' επόγδοος τόνος συν επίτριτο διάστημα $[\tau+(\tau+\tau(=\lambda+A)+\lambda)]$ και επίτριτο διάστημα συν επόγδοος τόνος $[(\tau+\tau+\lambda)+\tau]$.

Τα παραπάνω υλοποιούνται από τους κόμβους του σχήματος 3.2.2.2.



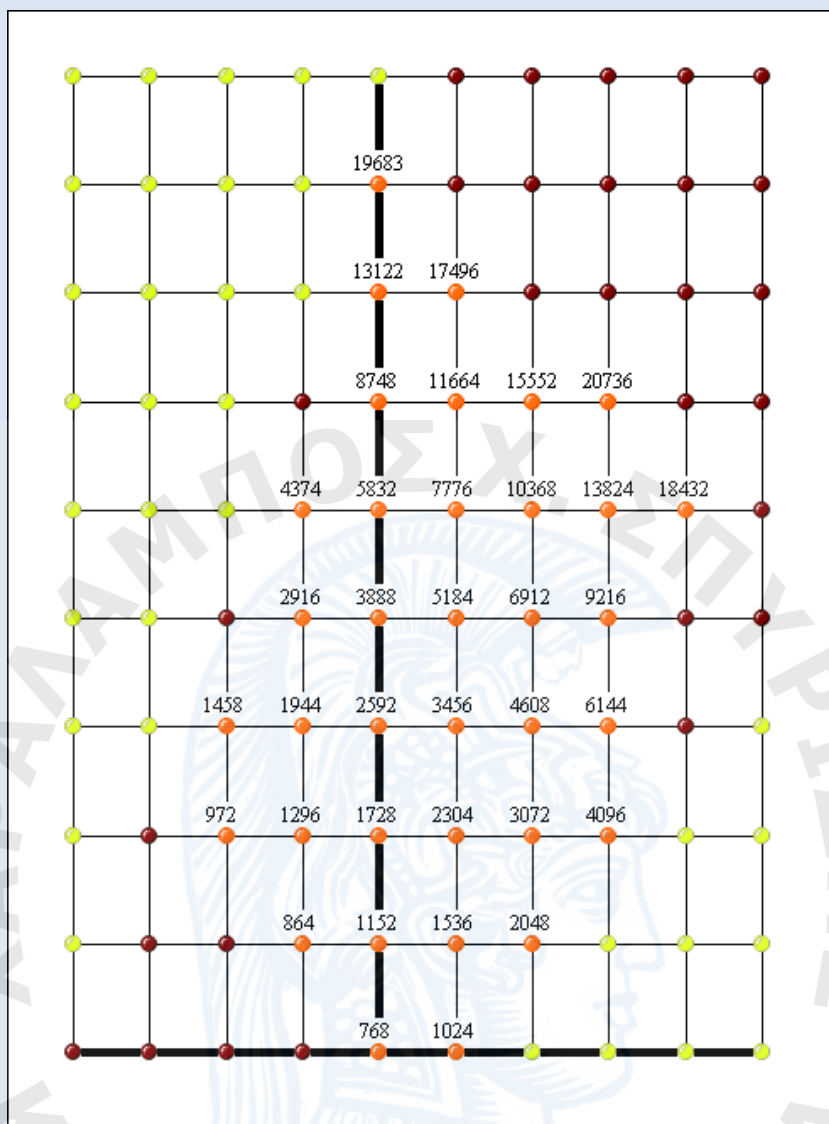
Σχήμα 3.2.2.2: Ανάλυση της δομής του διαστήματος διαπέντε (6912-10368).

Με τις μέχρι στιγμής διαδικασίες προέκυψαν οι 36 κόμβοι του σχήματος 3.2.2.3.



Σχήματος 3.2.2.3: Εκ των 36 κόμβων του Πλατωνικού προβλήματος, που προέκυψαν, οι 35 ανήκουν στην Ψυχή του Κόσμου και ένας (ο 9841,5) δεν ανήκει.

Ένας εξ αυτών των κόμβων -ο 9841,5- ως μη ακέραιος δεν ανήκει στην Ψυχή του Κόσμου. Δια μετατοπίσεως όλων των κόμβων κατά ένα κατιόν διαπασών διάστημα, τους καθιστούμε όλους για πρώτη φορά κόμβους της Ψυχής του Κόσμου, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2.2.4.



Σχήμα 3.2.2.4: Όλοι οι κόμβοι του σχήματος 2.2.2.3 δια της μετατοπίσεως των κατά ένα κατιόν διαπασών διάστημα, καθίστανται κόμβοι της Ψυχής του Κόσμου.

Ο Τίμαιος ο Πυθαγόρειος λέγει¹⁵ ότι οι όροι στο διάγραμμα είναι 36 ή, ισοδυνάμως, τα διαστήματα στο διάγραμμα είναι 35. Πράγματι, έχουμε τοποθετήσει 22 επογδούς τόνους, 11 λείμματα και 2 αποτομές.

Και πάλι θα τονίσουμε το γεγονός ότι οι αριθμοί αυτοί παριστούν μια κατατομή του συμπαντικού μονοχόρδου. Δηλαδή παριστούν τις θέσεις των «τάστων» επάνω στο εν λόγω μονόχορδο ή, με άλλα λόγια, παριστούν μήκη δονουμένων τμημάτων χορδής αυτού του μονοχόρδου, ως κόμβοι του Σπυριδείου δικτυωτού.

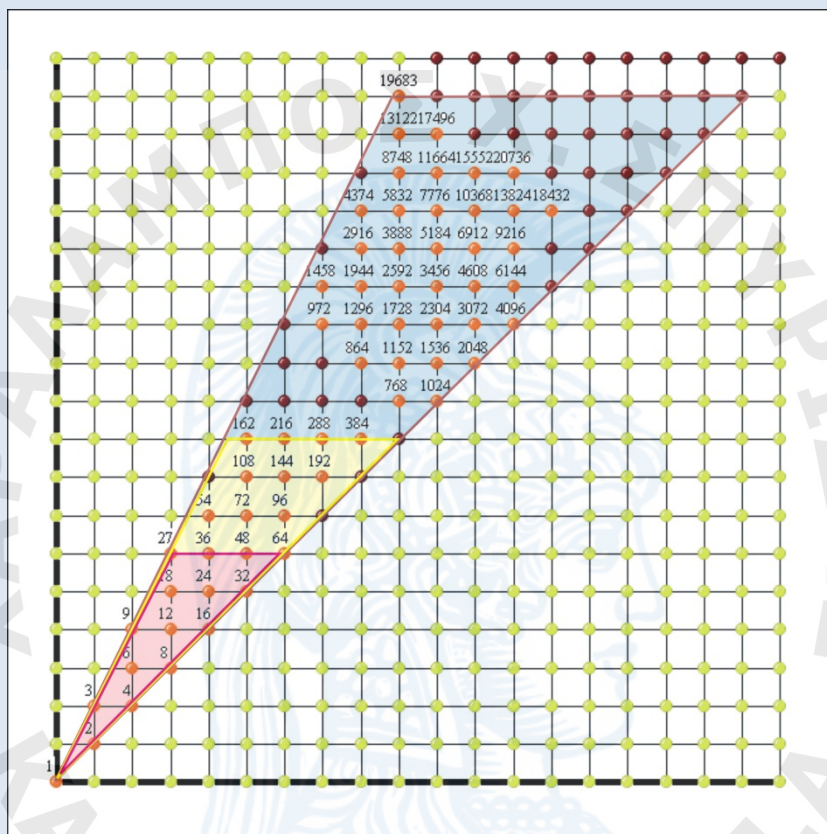
Στο σχήμα 3.2.2.5 οι εν λόγω αριθμοί φαίνονται ως κόμβοι του Σπυριδείου δικτυωτού να εμπεριέχονται σε ένα τμήμα επιφανείας λαβδοειδούς σχήματος στην κορυφή του οποιού

¹⁵ δεῖ δ' εἰμέν πως πάντας σὺν τοῖς συμπληρώμασι καὶ τοῖς ἐπογδοῖς ὄρους ἕξ καὶ τριάκοντα,

Τίμαιος, Fragmenta et titulus, σ. 209, 6-7.

δεσπόζει η «ανθυφαιρική» μονάς και επί του κάθε σκέλους της ευρίσκονται οι δύο τετρακτύες 1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27.

Εφαρμόζοντας και πάλι τη ρήση του Πρόκλου (*Εις τον Τίμαιον* Γ [Tim 35B] 197C5-8) «Ἄδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ καὶ ἐν τρισὶ τρίγωνοις ἐκτίθεται τοὺς ὄρους» ὅλοι οι αριθμοὶ της λύσεως εμπεριέχονται εντὸς τριῶν τριγώνων. Στο πρώτο τρίγωνο (τρίγωνο με κόκκινο χρώμα) τοποθετοῦνται οι αριθμοὶ της Πλατωνικῆς ἢ μεγίστης τετρακτύος, στο εσώτερο τρίγωνο (τρίγωνο με κίτρινο χρώμα) τοποθετοῦνται οι εξαπλασμοί τους, οι οποίοι ἔχουν και αριθμητικὸ και αρμονικὸ μέσο και στο τρίτο τρίγωνο (τρίγωνο με γαλάζιο χρώμα) περικλείονται ὅλοι οι αριθμοὶ της δομῆς.



Σχήμα 3.2.2.5: Λύση του Πλατωνικού προβλήματος «περί γενέσεως Ψυχῆς Κόσμου» ἐπὶ του Σπυριδείου δικτυωτοῦ με Δώρια τετράχορδα (τ-τ-λ) κατὰ την κατιούσα διαδοχὴ σύμφωνα με την αρχαιοελληνικὴ μαθηματικὴ διαδικασία και γεωμετρικὴ ερμηνεία της ρήσεως του Πρόκλου «Ἄδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ καὶ ἐν τρισὶ τρίγωνοις ἐκτίθεται τοὺς ὄρους, ἐπὶ μὲν τοῦ ἐντὸς αὐτοῦ τοὺς ἐν τοῖς μοναδικοῖς ἀριθμοῖς λόγους, ἐπὶ δὲ τοῦ μετὰ τοῦτο τοὺς ἐξαπλασίους τούτων, τοὺς ἔχοντας δύο μεσότητας καθ' ἕκαστον διάστημα τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον, ἐπὶ δὲ τοῦ ἐξωτάτω τοὺς ποιοῦντας ὅλον τὸ διάγραμμα τὸ εἰρημένον».

Πρόκλου *Εἰς τον Τίμαιον* Γ [Tim 35B] 197C5-12

Εάν θα θέλαμε να προσεγγίσουμε την δομὴ εκ της λύσεως του Πλατωνικού προβλήματος «περί γενέσεως Ψυχῆς Κόσμου» με Δώρια τετράχορδα (τ-τ-λ) κατὰ την κατιούσα διαδοχὴ με την σύγχρονη ευρωπαϊκὴ σημειογραφία, θα λαμβάναμε την αλληλουχία νοτῶν του Πίνακα 3.2.2.1.

Πίνακας 3.2.2.1: Η Σπυρίδειος λύση του Πλατωνικού προβλήματος «περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου» με Δώρα τετράχορδα (τ-τ-λ) κατά την κατιούσα διαδοχή αντιστοιχημένη με νότες της ευρωπαϊκής σημειογραφίας.

| | | ττλ |
|----|-------|---------|
| E | 768 | |
| | | τόνος |
| D | 864 | τόνος |
| | | λείμμα |
| C | 972 | |
| B | 1024 | τόνος |
| | | |
| A | 1152 | |
| | | τόνος |
| G | 1296 | τόνος |
| | | τόνος |
| F | 1458 | τόνος |
| E | 1536 | λείμμα |
| | | τόνος |
| D | 1728 | τόνος |
| | | τόνος |
| C | 1944 | τόνος |
| B | 2048 | λείμμα |
| | | τόνος |
| A | 2304 | τόνος |
| | | |
| G | 2592 | τόνος |
| | | τόνος |
| F | 2916 | τόνος |
| E | 3072 | λείμμα |
| | | τόνος |
| D | 3456 | τόνος |
| | | τόνος |
| C | 3888 | τόνος |
| B | 4096 | λείμμα |
| B♭ | 4374 | αποτομή |
| A | 4608 | λείμμα |
| | | |
| G | 5184 | τόνος |
| | | τόνος |
| F | 5832 | τόνος |
| E | 6144 | λείμμα |
| | | τόνος |
| D | 6912 | τόνος |
| | | |
| C | 7776 | τόνος |
| | | τόνος |
| B♭ | 8748 | τόνος |
| A | 9216 | λείμμα |
| | | τόνος |
| G | 10368 | τόνος |
| | | |
| | | τόνος |

| | |
|----|-------|
| F | 11664 |
| | |
| E♭ | 13122 |
| D | 13824 |
| | |
| C | 15552 |
| | |
| B♭ | 17496 |
| A | 18432 |
| A♭ | 19683 |
| G | 20736 |

| | |
|---------|---------|
| τόνος | |
| τόνος | |
| λείμμα | |
| τόνος | |
| τόνος | |
| λείμμα | λείμμα |
| αποτομή | αποτομή |
| | λείμμα |



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ Α΄ ΠΗΓΕΣ

- Ανών. Bell. F. Bellermann, *De Anonymi scriptio de Musica*, Αωνύμου σύγγραμμα περί Μουσικής, Βερολίνο 841. Νέα έκδ. D. Najock, Goettingen 1972.
- Αριστείδης Αριστείδης Κοϊντιλιανός, *Περί Μουσικής*, έκδ. Meibom 1652, A. Jahm 1882 και R. P. Winnington-Ingram, Λιψία 1963.
- Αριστόξ. Αρμ. Αριστόξενος, *Αρμονικά Στοιχεία*, έκδ. Meibom κ.α.
- Αριστοτέλης Bekker, I., *Aristotelis opera omnia*, Berlin, 1831-1870, new edn., O. Gigon ed., 1960-
- Βάκχ. Εισ. Βακχείος Γέρων, *Εισαγωγή Τέχνης Μουσικής*, έκδ. Meibom 1652 και C. v. Jan 1895.
- Βρυέν. Μανουήλ Βρυέννιος, *Αρμονικά*, έκδ. J. Wallis, τόμ III, Οξφόρδη 1699.
- Γαυδ. Εισ. Γαυδέντιος Φιλόσοφος, *Αρμονική Εισαγωγή*, έκδ. Meibom, 1652 και C. v. Jan 1895.
- Ευκλ. Ευκλείδης, *Opera Omnia*, ed. J. L. Heiberer και H. Monge, Leipzig (T.) 1883-1916.
- Θέων Σμυρν. Θέωνος Σμυρναίου, *Περί Μουσικής (Τα κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν)*, B. G. Teubneri, Lipsiae, 1878, έκδ. Ism. Bullialdus, Παρίσι 1644 και ed. Hiller, Λιψία 1878, T.
- C. v. J. Carl v. Jan, *Supplementum melodiarum reliquiae*, Λιψία 1899.
- Κλεον. Εισ. Κλεονείδης (ή Κλεωνίδης), *Εισαγωγή Αρμονική*, έκδ. C. v. Jan 1895.
- Ευκλείδου «Στοιχεία» (τόμοι 4) (επιμέλεια, σχολιασμός, απόδοση στη νεοελληνική Ευαγγέλου Σταμάτη) (Ο.Ε.Δ.Β.), Αθήνα, 1953.
- LSJ Henry G. Liddell and R. Scott, *A Greek-English Lexicon*, revised and augmented by Sir Henry St. Jones, with a Sup-

| | |
|-------------------|--|
| | plement, Οξφόρδη, 1968, ανατύπωση 1973. |
| Macran | Henry S. Macran, <i>The Harmonics of Aristoxenus</i> (Αριστοξένου Αρμονικά Στοιχεία, Οξφόρδη 1902). |
| Mb | Marc Meibom (Marcus Meibomius), <i>Antiquae Musicae Auctores Septem, graece et latine</i> , Amsterdam 1652. |
| Νικόμ. Εγχ. | Νικόμαχος Γερασηνός, <i>Αρμονικής Εγχειρίδιον</i> , έκδ. Meibom, 1652 και C. v. Jan 1895. |
| Παχυμ. | Γεώργιος Παχυμέρης, <i>Περί Αρμονικής</i> (Vincent, Notices), Παρίσι 1847, σσ. 401-552. |
| Πλάτων | Πλάτων, Νόμοι, Πολιτ. (Πολιτεία), Πρωταγ. (Πρωταγόρας), Φίληβος κλπ. |
| Πλούτ. Περί μουσ. | Πλούταρχος, <i>Περί μουσικής</i> . |
| Πορφύρ. Comment. | Πορφύριος, <i>Commentarius in Ptolemaei Harmonica</i> , έκδ. J. Wallis, Οξφόρδη 1699 και I. During Goeteborg 1932. |
| Πρόκλου | Πρόκλος, «Σχόλια εις το α' βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδου» τόμος Α' (Εκδ. Αίθρα), Αθήνα 2001. |
| Πρόκλου | Πρόκλος, «Σχόλια εις το α' βιβλίο των «Στοιχείων» του Ευκλείδου» τόμος Β' (Εκδ. Αίθρα), Αθήνα 2002. |
| Πρόκλου | Πρόκλος, <i>Εις τον Τίμαιον</i> , E. Diehl (ed.), Leipzig, 1903 (tr. By J. Festugiere, 5 vols, Paris, 1966-68. |
| Πρόκλου | Πρόκλος, <i>Περί της κατά Πλάτωνος θεολογίας</i> , στο Proclus, <i>Opera inedita</i> , V. Cousin (ed.), Paris, 1864 (αγγλική έκδοση από τους Morrow και Dillon, Princeton, 1987. |
| Πτολ. Αρμ. | Πτολεμαίος, <i>Αρμονικά</i> , έκδ. J. Wallis, Οξφόρδη 1699 και I. During, Goeteborg 1930. |
| Rein. La us. Gr. | Theodore Reinach, <i>La musique grecque</i> , Παρίσι 1926. |
| Vincent Notices | A. J. H. Vincent, <i>Notices sur divers manuscrits grecs relatifs a la musique</i> , Παρίσι, 1847. |

- Φιλόλαος Philolaus, Notices and fragments in Diels-Kranz 44 (Vol. 1, pp. 398-419); Timpanaro Cardini, Pitagorici 18, Fasc. II, pp. 82-249.
- Μ. Ψελλ. Μιχαήλ Ψελλός, *Μουσικής Σύνοψις η-κριβωμένη*, Παρίσι, 1545.
- TLG *MUSAIOS* version 1.0d-32 By Darl J. Dumont and Randall M. Smith.



Β΄ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΑ

- Baeumker, C. –*Das Problem der Materie in der griechischen Philosophie* [Το πρόβλημα της ύλης στην ελληνική φιλοσοφία], σσ. 115-188.
- Barker, Andrew, 1989, “*The Euclidean Sectio canonis.*” In *Greek Musical Writings*, vol. 2, Harmonic and Acoustic Theory, pp. 190-208. Cambridge: Cambridge University Press.
- Bekker, Immanuel (επιμ.) (1972) *Λεξικόν Σούδα (Σουΐδα). Φιλολογική αποκατάσταση*. I-V. (Βιβλιοθήκη των Ελλήνων, 7-11). Αθήνα: Ελληνικός Εκδοτικός Οργανισμός.
- Bekker, Immanuel (επιμ.) (1960) *Aristotelis opera*. Editio altera quam curavit Olof Gygon. I. Berlin: De Gruyter.
- Belis, Annie, 1985, *Οι πηγές της Αρχαίας Ελληνικής Μουσικής*, περ. *Αρχαιολογία*, τχ. 14 Φεβρουαρίου.
- Belis, Annie, 2004, *Η καθημερινή ζωή των μουσικών στην αρχαιότητα*, Εκδ. Παπαδήμα, Αθήνα.
- Brann, Eva, 1962, *The Cutting of the Canon*, In *The Collegian*, pp 1-63, Annapolis: St. John’s College.
- Burnet, J., *Greek Philosophy*, Μέρος I, σσ. 335-349: Platonism (1928), Κεφ. Vii.
- Conford, F. M., 1937, *Plato’s Cosmology*, Cambridge.
- Da Rios, (επιμ.) (1954) *Aristoxeni Elementa harmonica*. Roma: Typis Publicae Officinae Polygraphicae.
- Davy, Charles, 1787, “*Euclid’s Introduction to the Section of the Canon*” In *Letters*, addressed chiefly to a young gentleman, upon subjects of literature: including a translation of Euclid’s section of the canon; and his treatise on harmonic; with an explanation of the Greek musical modes, according to the doctrine of Ptolemy, 2:264-90. 2 vols. Bury St. Edmonds: Printed for the author by J. Rackham.
- De Falco, V. (ed.), 1922, *Theologumena Arithmeticae*, Teubner, Lipsiae, μετάφραση στη νεοελληνική I. Ιωαννίδης, Α. Φωτόπουλος και Π. Γράβιγγερ (επ.), *Ιδεοθέατρον*, Αθήνα, 1998.
- Deubner, L. (ed.), 1937, *De vita Pythagorica liber*, ανατ. U. Klein, Teubner, Stuttgart, 1975.
- Diels, Hermann & Kranz Walther (επιμ.) (1964) *Die Fragmente der Vorsokratiker. Griechisch und Deutsch*. I-III. Zürich & Berlin: Weidmann.
- Dillon, John (ed.), 1973, *Iamblichi Chalcidensis in Platonis Dialogos: Commentarium Fragmenta*, Leiden, Brill.
- Fowler, D., 1979, *Ratio in early Greek Mathematics*, (Bulletin of American Mathematical Society, pp. 807-846), New York.
- Fowler, H., 1999, *The Mathematics of Plato’s Academy*, Oxford University Press, Oxford.

Friedlein, Godfried (επιμ.) (1867) *Boetii De institutione musica libri quinque*. Leipzig: B. G. Teubner.

Godofredus Stallbaum, *Platonis Opera Omnia, Recensuit et Commentariis Instruxit*, Vol. VII, Continens TIMAEUM ET CRITIAM, Gothae et Erfordiae Sumptibus Guil. Hennings, MDCCCXXXVIII, Londini Apud Black et Armstrong.

Grove's, 1954, "Dictionary of Music & Musicians", 5th ed. Macmillan & Co, Ltd., London.

Heath, T., 1926, *Euclid; the thirteen books of the Elements*, Dover, N. York.

Heath, T., 1949, *Mathematics in Aristotle*, Clarendon Press, Oxford.

Heath, T., 1981, *A History of Greek Mathematics (Vol. I, II)*, Dover, N. York.

Herz – Fischler, R., 1998, *A mathematical history of the Golden number*, Dover Publ., New York.

Hoche, Richard, ed. *Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Arithmeticae Libri II*, Leipzig, 1866.

Isaac Asimov, 2004, *Το χρονικό των επιστημονικών ανακαλύψεων*, Απόδοση στα ελληνικά Γ. Μπαρουξής-Ν. Σταματάκης, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.

Ivor Thomas, 1980, *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, vol. I-II, Cambridge Mass., London.

LOEB CLASSICAL LIBRARY, 1998, *Greek Mathematical Works II– Aristarchus to Pappus*, Transl. Ivor Thomas, Harvard University Press, London.

LOEB CLASSICAL LIBRARY, 2000, *Greek Mathematical Works I– Thales to Euclid*, Transl. Ivor Thomas, Harvard University Press, London.

Martin, T. H., 1841, *Μελέτες για τον Τίμαιο του Πλάτωνα*, Παρίσι.

Mathiesen, Thomas J. "An Annotated Translation of Euclid's Division of a Monochord", *Journal of Music Theory*, 19(1975): 236-58.

Pearson, L., 1990, *ARISTOXENUS: Elementa Rhythmica*, Clarendon Press, Oxford.

Pistelli. H. (ed.), 1894, *In Nicomahi Arithmeticae introductionem*, ανατ. Teubner, Stuttgart, 1975.

Reinach, Theodore, 1999, *Η ελληνική μουσική*, Μτφρ. Αναστασίας-Μαρίας Καραστάθη, σελ. 158, Αθήνα.

Rivaud, A., 1925, *Πλάτων, Τίμαιος, Κριτίας*, Παρίσι.

Spiegel, R. Murray, 1959, *Vector Analysis*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York.

Spyridis, H., C., 1988, *The Delphi musical system, ένα νέο σύστημα μουσικών διαστημάτων*, Ανακοίνωση στη Γ' Διεθνή Μουσικολογική Συνάντηση των Δελφών με θέμα «Ρυθμοί, τρόποι και κλίμακες της Μουσικής της Μεσογείου», Δελφοί.

Szabo, Arpad, 1973, *Απαραίτων Ελληνικών Μαθηματικών*, Εκδόσεις Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδος, Αθήνα.

Taylor, A. E., 1992, *ΠΛΑΤΩΝ (Ο άνθρωπος και το έργο του)*, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, Αθήνα.

Taylor, Thomas, 1994, *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων*, Μτφρ. Μαρία Οικονομοπούλου, Εκδόσεις ΙΑΜΒΛΙΧΟΣ, Αθήνα.

Wallies, Maximilianus (επιμ.) (1891) *Alexandri Aphrodisiensis in Aristotelis Topicorum libros octo commentaria*. Berlin: Georg Reimer.

Wanzloeben, Sigfrid, 1911, *Das Monochord als Instrument und als System*, Halle.

Weyl, Hermann, 1991, *ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ*, Εκδόσεις Τροχαλία, Αθήνα.

West. M., L., 2004, *Αρχαία Ελληνική Μουσική*, Μτφρ. Στ. Κομνηνός, Εκδ. Παπαδήμα, Αθήνα.

Winington, R., P., - Ingram, 1968, *Mode in ancient greek music*, A. M. Hakkert Pub., Amsterdam.

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΑ

Ανδρεαδάκης, Ν., 1999, *Η τετρακτύς της Ιωνίας και ο Ιωνικός λόγος αποκαλύπτουν*, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.

Αρχαίοι Αρμονικοί Συγγραφείς, Τόμος Α΄, 1995, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.

Αρχαίοι Αρμονικοί Συγγραφείς, ΑΡΙΣΤΟΞΕΝΟΥ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ, Τόμος Β΄, 1997, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.

Βασιλειάδης, Στ., 1984, *Για τη Μουσική*, Citibank, Αθήνα.

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΑΡΧΑΙΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ, *Πλάτωνος Τίμαιος*, Εισαγωγή, μετάφραση, Σχόλια Θ. Βλυζιώτης, Χ. Παπαναστασίου, Εκδόσεις Ι. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα.

Γεωργόπουλος, Κ., 1995, *Αρχαίοι Έλληνες Θετικοί Επιστήμονες*, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.

Δημητράκος, Δ., 1964, *Μέγα Λεξικόν όλης της Ελληνικής Γλώσσης*, τόμ. 1-9, Αθήνα.

Δρανδάκης, Π., *Μεγάλη Ελληνική Εγκυκλοπαίδεια*, 2^η έκδοσις, Εκδοτικός Οργανισμός «Ο ΦΟΙΝΙΞ» Ε.Π.Ε.

ΕΚΔΟΤΙΚΗ ΑΘΗΝΩΝ Α.Ε., 1972, *ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΟΥ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ ΕΘΝΟΥΣ* (Κλασσικός Ελληνισμός 2), Τόμος Γ2, Αθήνα, σ.σ.469-472.

Ευστρατιάδης, Π., 1870, *Αρχαιολογική Εφημερίς*, σελ. 371.

Ιάμβλιχος, 1998, *Τα θεολογούμενα της Αριθμητικής*, Εκδ. Ιδεοθέατρον, Αθήνα.

Θεοδωρίκας, Σ. Στέργιος, 1996, *Ορυκτολογία Πετρολογία*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Ιάμβλιχος, 2001, *Περί του Πυθαγορικού Βιου*, Εισαγωγή-Μετάφραση-Σχόλια Αλ. Α. Πέτρου, Πρόλογος Τ. Πεντζοπούλου-Βαλαλά, Εκδ. Ζήτρος, Θεσσαλονίκη.

- Καϊμάκης, Π., 2005, *Φιλοσοφία και Μουσική*, ΜΕΤΑΙΧΜΙΟ, Αθήνα.
- Καλιτσουνάκης, Ιωάννης, 1922, *Επταδικαί Έρευναι*, Αθήναι, σ. 59.
- Κάλφας, Βασίλης, 1997, *ΠΛΑΤΩΝ ΤΙΜΑΙΟΣ*, Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ, Αθήνα.
- Κάλφας, Βασίλης, 2005, *Φιλοσοφία και Επιστήμη στην αρχαία Ελλάδα*, Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ, Αθήνα.
- Καπνισάκη, Κώστα, 1983, *ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*, Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα.
- Καράς Σίμων, 1989, *Αρμονικά*, Ανακοίνωσις εις το Μουσικολογικόν Συνέδριον των Δελφών της 28-30 Οκτωβρίου 1988, Εκδ. Συλλόγου προς διάδοσιν της Εθνικής Μουσικής, Αθήνα.
- Καράς Σίμων, *Τα βασικά γνωρίσματα της Βυζαντινής Εκκλησιαστικής Μουσικής*, εν χγφοις.
- Κοκκόρου, Π., 1966, *Γενική Ορυκτολογία*, Έκδοσις Ζ, Θεσσαλονίκη.
- Λαμπρίδης, Χ. Χ., 1996, *ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΣ*, Βιβλιοπωλείο ΚΛΕΙΩ, Πάτρα.
- Λέκκας, Ε. Δημήτρης, 1995, *Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ – ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ*, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μουσικών Σπουδών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα.
- Λυκούρας, Γ., 1994, *Πυθαγορική Μουσική και Ανατολή*, Εκδ. Συρτός, Αθήνα.
- Μιχαηλίδης, Σ., 1982, *Εγκυκλοπαίδεια της Αρχαίας Ελληνικής Μουσικής*, Μ.Ι.Ε.Τ., Αθήνα.
- Μιχαηλίδης, Σ., 1982, *Εγκυκλοπαίδεια της Αρχαίας Ελληνικής Μουσικής*, Μ.Ι.Ε.Τ., Αθήνα.
- Μπίλλα, Π., 1998, *Μαθήματα Αρχαίας Ελληνικής Γραμματικής*, Εκδ. Σαββάλας, Αθήνα.
- Μπίλλα, Π., 1998, *Μαθήματα Αρχαίας Ελληνικής Γραμματικής*, Εκδόσεις Σαββάλας, Αθήνα.
- Μωυσιάδης, Θ. Χρόνης και Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 1994, *ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Μωυσιάδης, Θ. Χρόνης, 2002, *ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗ Η τέχνη να μετράμε χωρίς μέτρημα*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Μωυσιάδης, Χ., και Σπυρίδης, Χ., 1995, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά στην Επιστήμη της Μουσικής*, Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Μωυσιάδης, Χ., και Σπυρίδης, Χ., 1995, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά στην Επιστήμη της Μουσικής*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Νεγρεπόντης, Στ., 2-4/9/2005, *Η επίδραση των Πυθαγορείων στη διαμόρφωση του ελληνικού πολιτισμού*, Εισήγηση στο Επιστημονικό Συνέδριο «Πυθαγόρεια Σκέψη και Επιστημονικός Λόγος», Πυθαγόρειον Σάμου (Doryssa Bay Hotel, αίθουσα "Sybilla").
- Παπαδοπούλου Μ., Σπυρίδης, Χ., 2004, *Ο Ελικών*, Επιστημονική Ανακοίνωση στο 3^ο Διεθνές Συνέδριο Ακουστικής του ΕΛ.ΙΝ.Α., Θεσσαλονίκη, 27-28/9.

Παπαθανασίου, Μάρω, *Η Πυθαγορική διάνοηση και τα Μαθηματικά*, Ελληνική Φιλοσοφική Επιθεώρηση, τ. 3, τχ. 7, Ιαν. 1986.

Παπανικολάου, Γ., Χ., 1960, *Μαθήματα Άλγεβρας*, 7^η έκδοση, Αθήνα.

Παπανικολάου, Γ., Χ., 1962, *Θεωρητική Γεωμετρία*, Αθήνα.

Παπούλας. Β., Ι., 1907, *Έκθεσις κατατομής του κανόνος, επί τε του αμεταβόλου τόνου και των καθ' έκαστον γενών*, Φόρμιγξ Β', Β', Φ. 6, σ. 2-3.

Αυτόθι, Φ. 7-8, σ. 6-7 (συνέχεια).

Αυτόθι, Φ. 9, σ. 2-3 (συνέχεια).

Αυτόθι, Φ. 19-20, σ. 4-5: *Περί λόγου και αναλογίας, Περί πολλαπλασίων και επιμορίων λόγων, Περί επιμερών*

Αυτόθι, Φ. 23-24, σ. 4-5: *Περί πολλαπλασιεπιμορίων, Περί πολλαπλασιεπιμερών και αριθμού προς αριθμόν.*

Παπούλας. Β., Ι., 1908, *Έκθεσις κατατομής του κανόνος επί του Δωρίου τόνου (του τετάρτου καθ' ημάς ήχου)*, Φόρμιγξ Β', έτος Δ', Φ. 1-2, σ. 4-5.

Πασχαλίδη, Δ., 1998, *ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΗ της αρχαίας ελληνικής γλώσσας*, Θεωρία – Ασκήσεις, Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Πριτανάκη, Χ. Γιάννη, 1999, *Η γλώσσα των Ελλήνων είναι η γλώσσα που ομιλεί η φύση*, Αυτοέκδοση, Αθήνα.

Ρεμάντας, Α., και Ζαχαρίας, Π.Δ., 1917, *Η μουσική των Ελλήνων ως διεσώθη από των αρχαιοτάτων χρόνων μέχρι της σήμερον*, Αρίων, Αθήναι, σ. η' - θ'.

Ρεντζεπέρης, Ι. Παναγιώτης, 1982, *Εισαγωγή στην Κρυσταλλοδομή και τη Φυσική των ακτίων Χ*, Τόμος 1^{ος}, Θεσσαλονίκη.

Σακελλαρίου, Γεώργιος, 1962, *ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ ο διδάσκαλος των αιώνων*, Εκδόσεις ΙΔΕΟΘΕΑΤΡΟΝ, Αθήναι, σ. 174 κ.ε.

Σκαρλάτου Δ. του Βυζαντίου, 1852, *Λεξικόν της Ελληνικής Γλώσσης*, Αθήναι.

Σκιάς. Α., 1894, *Ελληνικά Γραμματικά*, Εν Αθήναις, σ. 120 και εφεξής.

Σουΐδας, Βυζαντινό Λεξικό, Θύραθεν Εκδόσεις, Θεσσαλονίκη.

Σπανδάγου Ευαγ., 2001, *Η Αριθμητική Εισαγωγή του Νικομάχου του Γερασηνού*, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα.

Σπανδάγου Ευαγ., 2003, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν του Θέωνος του Σμυρναίου*, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα.

Σπανδάγου Ευαγ., 2004, *Η Αστρονομία των αρχαίων Ελλήνων*, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα.

Σπανδάγου Ευαγ., Σπανδάγου Ρ., Τραυλού Δ., 2000, *Οι μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδος*, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα.

Σπυρίδης, Χ. Χ., 1988, *Μια εισαγωγή στη Φυσική της Μουσικής*, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη.

Σπυρίδης, Χ. Χ., 1990, *Μουσική Ακουστική*, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη.

- Σπυρίδης, Χ. Χ., 1998, *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ Κατατομή Κανόνος*, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.
- Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2004, *Ο δυΐσμός του μουσικού διαστήματος*, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα.
- Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2005, *Ευκλείδου: Κανόνος Κατατομή*, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα.
- Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2005, *Φυσική και Μουσική Ακουστική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη, σελ. 222.
- Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2006, *ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΜΟΥΣΙΚΗ*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη.
- Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2008, *Πλάτωνος Τίμαιος: ΓΕΝΕΣΙΣ ΨΥΧΗΣ ΚΟΣΜΟΥ (γραμμικές και λαβδοειδείς λύσεις)*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη.
- Σταματάκου, Ιωάν., 1994, *Λεξικόν της Αρχαίας Ελληνικής Γλώσσης*, Αθήνα.
- Σταμάτη, Ε. Σ., 1975, *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ Γεωμετρία, Στοιχείων Βιβλία 1, 2, 3, 4*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήναι.
- Σταμάτη, Ε. Σ., 1953, *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ Γεωμετρία, Θεωρία Αριθμών – Στοιχείων Βιβλία V, VI, VII, VIII, IX.*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήναι.
- Σταμάτη, Ε. Σ., 1975, *Ευκλείδου παρί ασυμμέτρων στοιχεία, Βιβλίον Χ. Εισαγωγή-Αρχαίον Κείμενον, Μετάφρασις-Επεξηγήσεις, Τόμος III*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήναι.
- Σταμάτη, Ε. Σ., 1980, *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, Αριθμητικά – Αι αρχαί της Ελληνικής Γεωμετρίας*, Αυτοέκδοσις, Αθήναι.
- Σταμάτης, Ε., Σ., 1963, *Περί του μαθηματικού Ευκλείδου*, μετάφρασις εκ του γερμανικού μετ' εισαγωγής, Εκδ. Οικονομικής & Λογιστικής Εγκυκλοπαιδείας, Αθήνα.
- Ταίηλορ Νέστωρ, 2000, *Η Αρμονία των Πυθαγορείων*, Εκδ. ΝΕΦΕΛΗ, Αθήνα.
- Φιλολογική Ομάδα Κάκτου (μετ.) (2005) *Αριστόξενος. Άπαντα Μουσικά έργα. Αρμονικά στοιχεία, Ρυθμικά στοιχεία, Αποσπάσματα*. (Οι Έλληνες, 687). Αθήνα: Κάκτος.
- Χατζοπούλου, Ι. Δ., 1965, *Ανώτερα Μαθηματικά δια τους πρωτοετείς φοιτητάς*, Αυτοέκδοσις, Θεσσαλονίκη.