



ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΟΥΣΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΣΧΟΛΗ,
ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ Τ.Κ. 157 84
email: rspyridis@music.uoa.gr
tel/fax: 210-72.77.832

ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ,
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ
ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΕΝΩΣΗ ΕΛΛΗΝΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ 11^Ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ

«ΟΙ ΝΕΟΙ ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΣΤΟΝ ΑΙΩΝΑ ΜΑΣ
ΣΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ, ΣΤΗΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ»

30-31 ΜΑΡΤΙΟΥ, 1-2 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2006-02-25 ΛΑΡΙΣΑ, HOTEL DIVANI PALACE

**Σπυρίδειος εκδοχή περί γενέσεως της Πυθαγορείου κλίμακος με Δώρα τε-
τράχορδα (τ-τ-λ) κατά την κατιούσα διαδοχή συμφώνως προς την αρχαι-
οελληνική μαθηματική διαδικασία.**

Περίληψη

Ο Πυθαγόρας κατασκεύασε την πρώτη οκτάφθογγη μουσική κλίμακα. Δυστυχώς μέχρι σήμερα δεν έχουμε πληροφορίες από πηγές για το πώς ακριβώς και με ποιά μαθηματική διαδικασία οδηγήθη στην κατασκευή αυτής της μουσικής κλίμακος, που φέρει το όνομά του. Λέγεται ότι δεν μας έχουν διασωθεί γραπτά του Πυθαγόρου, διότι άλλοι υποστηρίζουν ότι ο ίδιος δεν έγραψε κάποιο έργο –σαν τον Σωκράτη- και άλλοι ισχυρίζονται πως έγραψε μεν, αλλά δεν μας διεσώθησαν. Ο Ηράκλειτος λ.χ. ο μέγας φιλόσοφος του 500 π.Χ., σύγχρονος του Πυθαγόρου, ρητώς αναφέρει ότι ο Πυθαγόρας έγραψε τα εξής τρία συγγράμματα: παιδευτικόν, πολιτικόν, φυσικόν και επί πλέον τον Ιερόν λόγον.

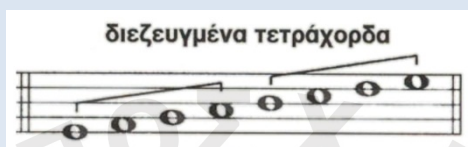
Διάφοροι ερευνητές, υποθέτοντες, προτείνουν διάφορα σκεπτικά, στηριζόμενα στην ημιόλιο σχέσις (3/2), για τον τρόπο που ο Πυθαγόρας εδόμησε την ομώνυμη μουσική κλίμακα.

Το σκεπτικό, το οποίο θα αναπτυχθεί στην εισήγηση, βασίζεται αποκλειστικά στον αλγόριθμο του μουσικού χωρίου του Πλατωνικού Τιμαίου (35a1-36b6) δια του οποίου ο Θεός εδόμησε την Ψυχή του Κόσμου. Θα μπορούσε να υποθέσει κανείς για ευλογοφανείς λόγους –που αναφέρονται- ότι έτσι ενήργησε ο Πυθαγόρας και εδόμησε την μουσική κλίμακά του, εύρους ενός διαπασών, την οποία –ξανά δυστυχώς- οι μη γνωρίζοντες την αρχαιοελληνική φιλοσοφία και θεωρία της μουσικής- θεμελιωτές της ευρωπαϊκής μουσικής -εκόντες άκοντες κατέστρεψαν και ως δομή και ως ήθος ακούσματος.

Ο Μέγας Σάμιος Φιλόσοφος, Μύστης, Πειραματικός, Φυσικός, Μαθηματικός, Αστρονόμος, Μουσικός, Ιατρός, αλλά και Αναμορφωτής και Ρυθμιστής κοινωνιών Πυθαγόρας (586-490 π.Χ.) κατεσκεύασε μία μουσική κλίμακα, η οποία μέχρι σήμερα φέρει το όνομά του.

Δεν έχουμε πληροφορίες από πηγές για το πώς ακριβώς και με ποιά μαθηματική διαδικασία ο Πυθαγόρας οδηγήθη στην κατασκευή αυτής της μουσικής κλίμακος. Διάφοροι ερευνητές, υποθέτοντες, προτείνουν διάφορα σκεπτικά για τον τρόπο που ο Πυθαγόρας εδόμησε την ομώνυμη μουσική κλίμακα, τα οποία βασίζονται στην ημιόλιο σχέσις (3/2), δηλαδή στο «δια πέντε» διάστημα, με τη φιλοσοφία του κύκλου των πεμπτών της συγχρόνου ευρωπαϊκής μουσικής.

Έχομε τη ρήση του Νικομάχου (*Εγχειρίδιον*, 5): «ὅτι τῆ ἑπταχόρδῳ λύρα τὴν οὐδὴν ὁ Πυθαγόρας προσθεῖς τὴν διὰ πασῶν συνεστήσατο ἀρμονίας». Δηλαδή ο Πυθαγόρας δια προσθέσεως της ογδῆς χορδῆς (=φθόγγου) στην επτάχορδο λύρα, συνέστησε την αρμονία, που ἔτσι την εποχή του Πυθαγόρου ωνομάζετο το διαπασῶν ἢ ἡ οκτάβα, κατά τη σημερινή ορολογία. Πηγές αναφέρουν ὅτι τούτο επέτυχε ο Πυθαγόρας συνδέων δύο τετράχορδα με μία ἐνδιάμεση διάζευξη ἐνός ἐπογδῶν τόνου (9/8) (Σχῆμα 1).



Σχῆμα 1: Δύο διεζευγμένα τετράχορδα, τα οποία δομοῦν το διάστημα ἐνός διαπασῶν.

Στόχος της εισηγήσεως εἶναι να προταθεῖ μια μαθηματική, Πυθαγόρειος στον χαρακτήρα, διαδικασία δια της ὁποίας να δομεῖται ἡ Πυθαγόρειος κλίμακα. Ὁ εισηγητής, μελετητής του «μουσικῶν χωρίων» ἐκ του Πλατωνικοῦ Τιμαίου, θεωρεῖ ὅτι ο Πυθαγορείου χαρακτήρας Πλατωνικός αλγόριθμος «Περὶ γενέσεως Ψυχῆς Κόσμου» (35a1-36b6) μπορεῖ, τροποποιούμενος, να ὁδηγήσει στη δομή της Πυθαγορείου μουσικῆς κλίμακος.

Ὁ εισηγητής κάνει τις ἐξῆς δύο υποθέσεις:

- 1) Ὁ Πλατωνικός αλγόριθμος εἶναι πράγματι προϊόν σκέψεως του χωρὶς ἀμφιβολία μεγάλου μαθηματικοῦ Πλάτωνος. Ὁ αλγόριθμος αὐτός ὁδηγεῖ στη γένεση της Ψυχῆς του Κόσμου, δηλαδή στη δόμηση μιας ἀλληλουχίας νοτῶν - Δωρίου χαρακτήρος- που καλύπτουν ἓνα μουσικῶν εὔρος δύο δις διαπασῶν, ἐνός δια πέντε και ἐνός ἐπογδῶν, δηλαδή με ὄρους της συγχρόνου ἐυρωπαϊκῆς μουσικῆς εὔρος τεσσάρων οκτάβων, μιας πέμπτης και ἐνός τόνου. Ὁ αλγόριθμος αὐτός, τροποποιούμενος, ὁδηγεῖ κάλλιστα στην κατασκευή της Πυθαγορείου κλίμακος.
- 2) Ὁ Πλατωνικός αλγόριθμος πιθανόν να εἶναι προϊόν σκέψεως του Πυθαγόρου, δια του ὁποίου ο Πυθαγόρας κατεσκεύασε τὴν ὁμώνυμη μουσικῆ κλίμακα και, 150 ἔτη ἀργότερα, ο Πλάτων, τροποποιώντας τον, να ὁδηγήθη στη γένεση της Ψυχῆς του Κόσμου, ἐπιτυγχάνοντας δι' αὐτοῦ να διδάξει στους ἀκοατῆς του Μαθηματικά και συγκεκριμένως, ὅπως αναφέρει ὁ Πρόκλος (*Πρόκλου εἰς τὸν Τιμαίον* Γ 174D 23- 175D 5), τους πολλαπλασίους λόγους, τις μεσότητες ἀνάμεσά τους, τους ἐπιπίτους και τους ἡμιολίους λόγους, που ἐμφανίζονται ἀνάμεσα σε αὐτῆς τις μεσότητες και τὸν τρόπο που αὐτοὶ οἱ λόγοι συμπληροῦνται με ἐπόγδῶν διαστήματα και λείμματα,

Ἡ πρώτη ὑπόθεσίς μου δεν θίγει κανέναν. Δέχομαι τὸν αλγόριθμο ὡς νοητικῶν δημιουργία του Πλάτωνος, τὸν τροποποιῶ καταλλήλως και δομῶ τὴν Πυθαγόρειο κλίμακα.

Ἡ δεύτερη ὑπόθεσίς μου θίγει τὸν Μέγα Φιλόσοφο και Μαθηματικῶν Πλάτωνα, ἀφού του ἀφαιρεῖ τὴν πατρότητα της λογικῆς του αλγορίθμου και τὴν ἀποδίδει στον Πυθαγόρα. Δηλαδή δεν τὸν θεωρῶ ἐυρετῆ του αλγορίθμου, ἀλλὰ μεταβολέα του αλγορίθμου. Ἀπολογούμενος, θα ἔλεγα ὅτι αὐτῆς μου ἡ ἐνέργεια δεν εἶναι ἐντελῶς αυθαίρετη, ἀλλὰ ἐδράζεται ἐπὶ γραπτῶν ἀρχαίων πληροφοριῶν ἢ, κατ' ἄλλους, ἐπὶ γραπτῶν ἀρχαίων «κακοβούλων» φημῶν.

Κυρίες και Κύριοι σύνεδροι, μέχρι σήμερα είναι γνωστό ότι δεν μας έχουν διασωθεί γραπτά του Πυθαγόρου. Άλλοι υποστηρίζουν ότι ο ίδιος δεν έγραψε κάποιο έργο και άλλοι ισχυρίζονται πως έγραψε μεν, αλλά δεν μας διεσώθη.

Όσον αφορά στα υποτιθέμενα γραπτά έργα του Πυθαγόρου, με μεγάλη αμηχανία αντιμετωπίζονται οι πολλές και αντιφατικές μαρτυρίες τόσο, ώστε δεν μπορεί να αποφανθεί κανείς μετά βεβαιότητας υπέρ της μιας ή της άλλης εκδοχής.

Ο Γαληνός, ο Φλάβιος Ιώσηπος, ο Κλαυδιανός Μαμέρτιος, ο Λουκιανός, ο Αρκεσίλαος και ο Καρνεάδης (*Περί της Αλεξ. τύχης* I, 4, 328) υποστηρίζουν ότι ο Πυθαγόρας δεν άφησε κανένα γραπτό κείμενο. Μάλιστα ο Πλούταρχος τον παρομοιάζει με τον Σωκράτη, που κι αυτός δεν άφησε κανένα γραπτό κείμενο.

Αντιθέτως, ο μέγας προσωκρατικός φιλόσοφος Ηράκλειτος (540-480 π.Χ.), σύγχρονος του Πυθαγόρου, λέγεται ότι αναφέρει τον Πυθαγόρα ως συγγραφέα των τριών συγγραμμάτων **παιδευτικού, πολιτικού, φυσικού** και επί πλέον του **Ιερού λόγου**. Επίσης, ο Αλέξανδρος Πολυΐστωρ, τον οποίο παραθέτει εκτενώς ο Διογένης Λαέρτιος (*Βίοι VIII, 2533*), ισχυρίζεται ότι ο Πυθαγόρας άφησε **Πυθαγορικά Υπομνήματα** (σημειώσεις σκελετού μαθημάτων).

Ο Διογένης Λαέρτιος χρησιμοποιεί τον Ηράκλειτο, προκειμένου να ανασκευάσει τους ισχυρισμούς κάποιων ότι ο Πυθαγόρας δεν άφησε γραπτά έργα (*Βίοι VIII, 6-7*). Συμφώνως προς τον Διογένη Λαέρτιο (III, 9)¹ ο Σάτυρος εβεβαίωσε ότι ο Φιλόλαος είχε υπό την φύλαξη του τα τρία «πυθαγορικά βιβλία» και με την διαμεσο-

¹ Λέγουσι δέ τινες, ὧν ἔστι καὶ Σάτυρος (FHG iii. `163 sq.), ὅτι Δίῳνι ἐπέστειλεν εἰς Σικελίαν ἀνήσασθαι τρία βιβλία Πυθαγορικά παρὰ Φιλολάου μνῶν ἑκατόν. Διογένης Λαέρτιος, 3, 9, 1-3.

Φιλόλαος Κροτωνιάτης Πυθαγορικός. παρὰ τούτου Πλάτων ἀνήσασθαι τὰ βιβλία τὰ Πυθαγορικά Δίῳνι γράφει. Διογένης Λαέρτιος, 8, 84, 9-10.

DIOG. VIII 84. 85 Φιλόλαος Κροτωνιάτης Πυθαγορικός. παρὰ τούτου Πλάτων ἀνήσασθαι τὰ βιβλία τὰ Πυθαγορικά Δίῳνι γράφει Φιλόλαος, *Testimonia*, θραύσμα 1, 1-2.

Diog. III 9 λέγουσι δέ τινες, ὧν ἔστι καὶ Σάτυρος [fr. 16 FHG III 163], ὅτι Δίῳνι ἐπέστειλεν εἰς Σικελίαν ἀνήσασθαι τρία βιβλία Πυθαγορικά παρὰ Φιλολάου μνῶν ἑκατόν. EUSEBIUS adv. Hierocl. p. 64 (`380, 8 Kayser) καὶ μὴν οὐδ' ὁ περιβόητος Πλάτων πάντων γε μᾶλλον τῆς Πυθαγόρου κεκοινωνηκῶς φιλοσοφίας οὐτ' Ἀρχύτας οὐτ' αὐτὸς ἐκεῖνος ὁ τὰς Πυθαγόρου γραφῆι παραδοῦς ὀμιλίας Φιλόλαος.

Φιλόλαος, *Testimonia*, θραύσμα 8, 9-14.

Diog. L. III, 9, de Platone: Λέγουσι δέ τινες (ὧν ἔστι καὶ Σάτυρος) ὅτι Δίῳνι ἐπέστειλεν εἰς Σικελίαν, ἀνήσασθαι τρία βιβλία Πυθαγορικά παρὰ Φιλολάου μνῶν ἑκατόν.

Σάτυρος βιογρ., *Θραύσματα*, θραύσμα 16, 1-4.

λάβηση του Δίωνος, του γυναικαδέλφου του τυράννου της πόλεως των Συρακουσών του Διονυσίου του Α', τα αγόρασε αντί του μυθικού ποσού των 100 μυνων.

Ο Πλάτων, ως γνωστόν, ήτο Πυθαγόρειος. Μάλιστα εμαθήτευσε κοντά στον περίφημο Πυθαγόρειο Αρχύτα τον Ταραντίνο επί διετίαν, όταν επεσκέφθη την Σικελία. Συνεπώς, κατείχε την Πυθαγόρειο γνώση. Εάν ισχύει, επί πλέον και η πληροφορία του Διογένους του Λαερτίου και του Σατύρου, «Πλάτων, Δίωني ώνήσασθαι τρία βιβλία Πυθαγορικά παρὰ Φιλολάου μινών έκατόν», τότε ο Πλάτων, ως κάτοχος και των Πυθαγορείων χειρογράφων, ήτο κάτοχος της Πυθαγορείου γνώσεως με έναν αμεσότατο και μοναδικό τρόπο!

Είτε ισχύει η πρώτη μου υπόθεση, είτε ισχύει η δεύτερη –δεν χρειάζεται να λάβω θέση- το σκεπτικό, το οποίο θα αναπτυχθεί παρακάτω για την κατασκευή της Πυθαγορείου μουσικής κλίμακος, βασίζεται αποκλειστικώς στον αλγόριθμο του μουσικού χωρίου του Πλατωνικού *Τιμαίου* (35a1-36b6), ο οποίος λειτουργεί με βάση το **ταυτόν**, το **θάτερον** και την **ουσίαν** δηλαδή βασίζεται αφενός στους γεννήτορες αριθμούς **1, 2 και 3** της πυθαγορείου αριθμοσοφίας² και αφετέρου στους **αρμονικό μέσο, αριθμητικό μέσο και γεωμετρικό μέσο** της Πυθαγορείου θεωρίας περί των αναλογιών, αντιστοίχως.

Ο αλγόριθμος για τη δόμηση της Πυθαγορείου μουσικής κλίμακος θα μπορούσε να έχει διατυπωθεί σε Πλατωνικό ύφος γραφής ως ακολούθως:

τῆς ἀμερίστου

καὶ ἀεὶ κατὰ ταῦτὰ ἐχούσης οὐσίας καὶ τῆς αὐτῆς περὶ τὰ σώματα γιγνομένης μεριστῆς τρίτον ἐξ ἀμφοῖν ἐν μέσῳ συνεκεράσατο οὐσίας εἶδος, τῆς τε ταύτου φύσεως [αὐτῆς περὶ] καὶ τῆς τοῦ ἑτέρου, καὶ κατὰ ταῦτὰ συνέστησεν ἐν μέσῳ τοῦ τε ἀμεροῦς αὐτῶν καὶ τοῦ κατὰ τὰ σώματα μεριστοῦρ καὶ τρία λαβὼν αὐτὰ ὄντα συνεκεράσατο εἰς μίαν πάντα ἰδέαν, τὴν θατέρου φύσιν δύσμεικτον οὖσαν εἰς ταῦτον συναρμόττων βίαν.

μειγνύς δὲ μετὰ τῆς οὐσίας καὶ ἐκ τριῶν ποιησάμενος ἕν, πάλιν ὅλον τοῦτο μοίρας ὅσας προσήκεν διένειμεν, ἑκάστην δὲ ἐκ τῆς ταύτου καὶ θατέρου καὶ τῆς οὐσίας μεμειγμένην. ἤρχετο δὲ διαμεῖναι ὧδε. μίαν ἀφείλεν τὸ πρῶτον ἀπὸ παντὸς μοίραν, μετὰ δὲ ταύτην ἀφήρει διπλασίαν ταύτης.

μετὰ δὲ ταῦτα συνε-

πληροῦτο τὸ διπλάσιον διάστημα, μοίρας

ἔτι ἐκεῖθεν ἀποτέμων καὶ τιθεὶς εἰς τὸ μεταξὺ τούτου, ὥστε ἐν τῷ διαστήματι δύο εἶναι μεσότητος, τὴν μὲν ταύτῳ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην, τὴν

² Όλα τα πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα εκφράζονται ως γινόμενο δυνάμεων των αριθμών 2 και 3, είτε με θετικούς, είτε με αρνητικούς εκθέτες. Κατά τα γνωστά, οι αριθμοί 1, 2, 3, 4 δομούσαν την ιερά τετρακτύ των Πυθαγορείων, ενώ οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27 δομούσαν τη μείζονα τετρακτύ του Πλάτωνος. Όλα συμμετέχουν σε μια θεολογία. Μια θεολογία που γοητεύεται να ανακαλύπτει τη θεία πρόνοια στους λόγους των ακεραίων αριθμών που διέπουν, κατά την αντίληψή της, τα φαινόμενα. Οι Πυθαγόρειοι ήσαν κυρίως θεολόγοι. Οι επιστημονικοί τομείς των Πυθαγορείων είναι όψεις ενός θεολογικού συστήματος. Δεν εφαρμόζουν τα μαθηματικά στη μουσική. Χρησιμοποιούν τη μουσική κλίμακα για να τεκμηριώσουν τη μυστική τους αριθμοσοφία. Αναζητούν την επαλήθευση της θείας πρόνοιας στην παγκόσμια αρμονία, την οποία επιδιώκουν να εκφράσουν με τους ίδιους λόγους ακεραίων αριθμών, που χρησιμοποιούν για τον καθορισμό των μουσικών διαστημάτων στο μονόχορδο. Και το σπουδαιότερο, αυτή η κάπως απλοϊκή, αλλά γοητευτική για τον θρησκευόμενο θεώρηση του κόσμου, στηρίζεται σε μια θεολογία μονοθεϊστική.

δὲ ἴσῳ μὲν κατ' ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην. ἐπιτρίτων δὲ διαστάσεων καὶ ἐπογδοῦ γενομένων ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν, τῷ τοῦ ἐπογδοῦ διαστήματι τὰ ἐπίτριτα συνεπληροῦτο, λείπων αὐτῶν ἐκάστου μόριον, τῆς τοῦ μορίου ταύτης διαστάσεως λειψθείσης ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἐχούσης τοὺς ὄρους ἐξ καὶ πεντήκοντα καὶ διακοσίων πρὸς τρία καὶ τετταράκοντα καὶ διακόσια. καὶ δὴ καὶ τὸ μειχθέν, ἐξ οὗ ταῦτα κατέτεμνεν, οὕτως ἤδη πᾶν κατανηλώκει.

«Από την αδιαίρετη και πάντοτε αμετάβλητη Ουσία (το ταυτόν) και από τη διαιρετή και μεταβαλλόμενη στα φυσικά σώματα Ουσία (το θάτερον) συνέθεσε ένα τρίτο είδος Ουσίας, ενδιάμεσο, αποτελούμενο και από τις δύο. Στην περίπτωση πάλι της Ταυτότητας και της Διαφοράς, ακολουθώντας την ίδια αρχή, συνέθεσε ενδιάμεσα μείγματα, που αποτελούνται από το αδιαίρετο και από το διαιρετό στα σώματα τμήμα τους. Παίρνοντας έπειτα τα τρία αυτά συστατικά τα συνέπτυξε σε μια μορφή, αναγκάζοντας τη Διαφορά, που είναι από τη φύση της δύσμεικτη, να ενωθεί με την Ταυτότητα και, στη συνέχεια, το μείγμα των δύο να ενωθεί με την Ουσία.

Έχοντας φτιάξει, λοιπόν, ένα μείγμα από τρία συστατικά, το διένειμε ξανά σε δύο κομμάτια –το καθένα από αυτά τα κομμάτια απτελείτο και από την Ταυτότητα και από τη Διαφορά και από την Ουσία-. Από τα δύο κομμάτια το δεύτερο κομμάτι ήταν διπλάσιο [2] από το πρώτο [1].

Έπειτα συμπλήρωσε αυτό το διπλάσιο διάστημα κόβοντας και άλλα κομμάτια από το αρχικό μείγμα και τοποθετώντας τα ανάμεσα στα δύο κομμάτια της πρώτης διαιρέσεως, με τέτοιο τρόπο, ώστε να υπάρχουν δύο μέσοι σε αυτό το διάστημα. Ο πρώτος [αρμονικός μέσος] χωρίζει το διάστημα σε δύο μέρη, τα οποία έχουν τον ίδιο λόγο με τον λόγο των δύο ακραίων αριθμών του διαστήματος, και ο δεύτερος [αριθμητικός μέσος] απέχει εξ ίσου από τους δύο ακραίους αριθμούς. Αυτοί οι δεσμοί εδημιούργησαν δύο τμήματα $4/3$ (επίτριτα) και ένα τμήμα $9/8$ (επόγδοο) με τα δύο αρχικά κομμάτια. Συμπλήρωσε όλα τα επίτριτα διαστήματα ($4/3$) με επόγδοα διαστήματα ($9/8$), αφήνοντας υπόλοιπο ένα τμήμα, το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί με το κλάσμα $256/243$ (λείμμα ή έλασσον ημιτόνιο). Έτσι εξαντλήθηκε όλο το αρχικό μείγμα από το οποίο είχε αρχίσει να κόβει τα κομμάτια αυτά».

Ας ξεκινήσουμε με την εις βάθος μελέτη αυτού του αλγορίθμου.

Κατ' εμέ, ο επινοήσας τον αλγόριθμο Μαθηματικός –όποιος κι αν είναι αυτός- ρητά αναφέρει:

τῆς ἀμερίστου

καὶ ἀεὶ κατὰ ταῦτὰ ἐχούσης οὐσίας καὶ τῆς αὐτῆς περὶ τὰ σώματα

γιγνομένης μεριστῆς τρίτον ἐξ ἁμοῖν ἐν μέσῳ συνεκεράσατο

οὐσίας εἶδος, τῆς τε ταυτοῦ φύσεως [αὐτῆς] καὶ τῆς τοῦ

έτέρου,

(Στίχοι 1 - 5)

[Από την αδιαίρετη και πάντοτε αμετάβλητη Ουσία και από τη διαιρετή και μεταβαλλόμενη στα φυσικά σώματα Ουσία συνέθεσε ένα τρίτο είδος Ουσίας, ενδιάμεσο, αποτελούμενο και από τις δύο].

καὶ κατὰ ταῦτὰ συνέστησεν ἐν μέσῳ τοῦ τε ἡμεροῦς
αὐτῶν καὶ τοῦ κατὰ τὰ σώματα μεριστοῦ· καὶ τρία λαβῶν
αὐτὰ ὄντα συνεκεράσατο εἰς μίαν πάντα ἰδέαν, τὴν θατέρου
φύσιν δύσμεικτον οὖσαν εἰς ταῦτὸν συναρμόττων βία.
μειγνὺς δὲ μετὰ τῆς οὐσίας καὶ ἐκ τριῶν ποιησάμενος ἕν
(Στίχοι 5 - 9)

[Στην περίπτωση πάλι της Ταυτότητας και της Διαφοράς, ακολουθώντας την ίδια αρχή, συνέθεσε ενδιάμεσα μείγματα, που αποτελούνται από το αδιαίρετο και από το διαιρητό στα σώματα τμήμα τους. Παίρνοντας έπειτα τα τρία αυτά συστατικά τα συνέπτυξε σε μια μορφή, αναγκάζοντας τη Διαφορά, που είναι από τη φύση της δύσμεικτη, να ενωθεί με την Ταυτότητα και, στη συνέχεια, το μείγμα των δύο να ενωθεί με την Ουσία].

Τα λόγια αυτά του Πλάτωνος –διότι από τον διάλογό του Τίμαιος έχουν ληφθεί- ωδήγησαν τους ερμηνευτές του σε πάρα πολλές διαφορετικές ερμηνευτικές εκδοχές. Εκείνο που εγώ επισημαίνω είναι ότι στα αποσπάσματα του ανωτέρω χωρίου (στίχοι 1-5) και (στίχοι 5 - 9) παρουσιάζονται δύο πανομοιότυπες διαδικασίες αναμείξεως δύο πραγμάτων, προκειμένου να προκύψει κάποιο τρίτο. Γιατί;

Μελετώντας την Αριθμητική των Πυθαγορείων βρίσκουμε στην Αριθμητική Εισαγωγή του Νικομάχου του Γερασηνού το εξής απόσπασμα:

Πάλιν δὲ ἐξ ἀρχῆς, ἐπεὶ τοῦ ποσοῦ τὸ μὲν ὁράται καθ' ἑαυτό, μηδεμίαν πρὸς ἄλλο σχέσιν ἔχον, οἷον ἄρτιον, περιττόν, τέλειον, τὰ ἑοικότα, τὸ δὲ πρὸς ἄλλο πως ἤδη ἔχον καὶ σὺν τῇ πρὸς ἕτερον σχέσει ἐπινοούμενον, οἷον διπλάσιον, μείζον, ἔλαττον, ἡμισυ, ἡμιόλιον, ἐπίτριτον, τὰ ἑοικότα, δῆλον ὅτι ἄρα δύο μέθοδοι ἐπιλήσονται ἐπιστημονικαὶ καὶ διευκρινήσουσι πᾶν τὸ περὶ τοῦ ποσοῦ σκέμμα, ἀριθμητικὴ μὲν τὸ περὶ τοῦ καθ' ἑαυτό, μουσικὴ δὲ τὸ περὶ τοῦ πρὸς ἄλλο.

Νικομάχου του Γερασηνού, Αριθμητική εισαγωγή, 1, 3, 1, 1-9 και 1, 3, 2, 1.

[Πάλι για να ξεκινήσουμε από την αρχή, επειδή του ποσοῦ το μὲν ἓνα μέρος παρατηρεῖται καθεαυτό και δεν ἔχει καμία σχέση με το ἄλλο, ὅπως ἄρτιο³, περιττό⁴, τέλειο και τα ὅμοια, το δε ἄλλο μέρος είναι σχετικό με κάτι και νοεῖται μαζί με τη σχέση του με κάποιο ἄλλο πράγμα, ὅπως διπλάσιο, μεγαλύτερο, μικρότερο, μισό, ημιόλιο (3/2), ἐπίτριτο (4/3) και τα ὅμοια, είναι φανερό ὅτι δύο επιστημονικές μέθοδοι θα επιληφθούν και θα διευκρινίσουν με ὅλη την ἔρευνα σχετικά με το ποσόν. Η αριθμητικὴ μεν για το ἀπόλυτο ποσόν και η μουσικὴ για το σχετικό].

Ευάγγελος Σπανδάγος, Αριθμητική Εισαγωγή του Νικομάχου του Γερασηνού, Εκδόσεις Αίθρα, σελ. 172.

Βασίζόμενος στο απόσπασμα αυτό, δέχομαι ὅτι η μία ανάμειξη αφορά στην Αριθμητική και η ἄλλη στη Μουσική, την επιστήμη των λόγων.

³ Ἄρτιος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ δίχα διαιρούμενος.
Ευκλείδου, Στοιχείων ζ.

⁴ Περισοδὸς ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα ἢ [ὁ] μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.
Αυτόθι.

Όσον αφορά στην Αριθμητική, από τους Πυθαγορείους γνωρίζουμε ότι:

1. Αριθμός⁵ είναι η οντότης της οποίας το γινόμενον με τον εαυτόν της δίδει αποτέλεσμα μεγαλύτερο του αθροίσματος με τον εαυτόν της, δηλαδή

$$x \cdot x > x + x \Rightarrow x^2 > 2x.$$

2. Ο Θέων ο Σμυρναίος στο έργο του «*Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν*» αναφέρει: «*Η μονάδα είναι η αρχή όλων των πραγμάτων και κυρίαρχη όλων... Από αυτήν όλα εκπορεύονται και η ίδια δεν απορρέει από τίποτα. Είναι αδιαίρετη και είναι σε πλήρη ισχύ. Είναι αναλλοίωτη και δεν εξέρχεται ποτέ από την καθαρή φύση της με πολλαπλασιασμό, δηλαδή $1 \times 1 = 1$* ».

Η μονάς είναι γεννήτωρ των περιπτών αριθμών. Στη Γεωμετρία η μονάς εκφράζει το σημείο και στη Φιλοσοφία αντιστοιχεί στο «**ταυτόν**» (αμερές, αμετάβλητο), δηλαδή την ομοιότητα – ταυτότητα⁶.

Η **δυάς** είναι το μέσον ανάμεσα στο **πλήθος**, δηλαδή τον αριθμό και στη **μονάδα**, διότι, είτε πολλαπλασιαζομένη επί τον εαυτόν της, είτε προστιθεμένη εις αυτόν, παράγει ίδια ποσότητα, δηλαδή $2 \times 2 = 2 + 2$.

Για τους Πυθαγορείους η δυάς είναι αιτία της ανομοιότητας, στερείται μορφής, γι' αυτό και χαρακτηρίζεται «**δυάς απροσδιόριστος**». Είναι γεννήτωρ των αρτίων αριθμών. Στη Γεωμετρία η δυάς είναι η φύση της ευθείας (ή πλευράς), η αρχή του μήκους. Στη Φιλοσοφία εκφράζει το «**θάτερον**» (μεριστό) δηλ. την ετερότητα, διαφορετικότητα⁷.

Η **τριάς** είναι για τους Πυθαγορείους ο πρώτος αριθμός, επειδή $3 \times 3 > 3 + 3$.

Ο Θέων γράφει: «*Είναι ο πρώτος αριθμός που έχει αρχή, μέση και τέλος... και στον οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε τη λέξη πλήθος*». Η τριάς είναι επίσης ο πρώτος εν ενεργεία περιπτός αριθμός και προκαλεί τη δύναμη της μονάδος να προχωρήσει σε ενέργεια και επέκταση.

Στη Γεωμετρία η τριάς εκφράζει τη φύση του επιπέδου, αφού τρία σημεία ορίζουν ένα επίπεδο και το τρίγωνο είναι η αρχή όλων των σχημάτων. Στον *Τίμαιο* η τριάς αντιστοιχεί στην «**ουσία**», την ανάμειξη δηλαδή του «**ταυτού**» με το «**θάτερον**».

Με αυτήν την ανάμειξη του ταυτού, του θατέρου και της ουσίας, δηλαδή της μονάδος, της δυάδος και της τριάδος ο Πλάτων κατασκευάζει τα κύρια εργαλεία για τη δημιουργία της Ψυχής του Κόσμου, που είναι οι αριθμοί⁸, οι εκφραστές της ποσότητας.

⁵ Αριθμός δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος. Αυτόθι.

⁶ Νικόμαχος ο Γερασηνός «*Αριθμητική Εισαγωγή*», σελ. 267 (μτφ) και Πλούταρχος «*Περί της εν Τιμαίω ψυχογονίας*» 1024D, σελ. 147 (μτφ)].

⁷ ἑτερότητος γὰρ πρωτίστη ἔννοια ἐν δυάδι. Νικομάχου, *Τα θεολογούμενα της Αριθμητικής* 21, 22

⁸ Αρίστανδρος και Νουμήνιος (ανάμειξη του 1, ως αμερίστου, και του 2, ως μεριστής, προέκυψε ο αριθμός, το 3, κ.λπ.)

ὁ γὰ μὲν ἀριθμὸς ἔχει δύο μὲν ἴδια εἶδη, περισσὸν καὶ ἄρτιον, τρίτον δὲ ἀπ' ἄμ-

Τῶν δὲ μεσοτήτων τριῶν οὐσῶν ἢ μὲν γεωμετρικὴ τὸ οὐσιῶδες πῶς συνδεῖ τῶν ψυχῶν, ἢ δὲ ἀρμονικὴ τὴν ταυτότητα, ἢ δὲ ἀριθμητικὴ τὴν ἑτερότητα

Μιχαὴλ Ψελλός, Γεωργίου του Κεδρηνοῦ Σύνοψις Ἱστοριῶν, τόμος XI, ἔτος 1058.

Ἡ ἄλλη ἀνάμειξη υποστηρίζω, στηριζόμενος στα γραφόμενα ὑπὸ του Μιχαὴλ Ψελλοῦ, ἀναφέρεται στη μουσικὴ, τὴν ἐπιστήμη των λόγων, με τὴν ἔννοια των ἀναλογιών, δια τῆς οὐσίας ο τεχνικός Νους, κατὰ τον Πλάτωνα, θα συσχετίσει μεταξύ τους τὰ μέρη του συνόλου και θα ἐγκαταστήσει εἰς αὐτὸ μαθηματικὴ τάξη δια των ἀναλογιών, μειώνοντας τὴν ἐντροπία του κατὰ τὴν ἀκόλουθο ρῆση των Πυθαγορείων:

«Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ λόγος
καὶ ὁ λόγος ἦν πρὸς τὴν συμμετρίαν
καὶ συμμετρία ἦν ὁ λόγος»

Αὐτὴ ἡ ἀνάμειξη γίνεται με τον ἀκόλουθο τρόπο:

...τῆς ἀμερίστου
καὶ αἰεὶ κατὰ ταῦτὰ ἐχούσης οὐσίας καὶ τῆς αἰὲς περὶ τὰ σώματα
γινομένης μεριστῆς τρίτον ἐξ ἀμφοῖν ἐν μέσῳ συνεκεράσατο
οὐσίας εἶδος, τῆς τε ταυτοῦ φύσεως [αἰὲς περὶ] καὶ τῆς τοῦ
ἑτέρου, καὶ κατὰ ταῦτὰ συνέστησεν ἐν μέσῳ τοῦ τε ἀμεροῦς
αὐτῶν καὶ τοῦ κατὰ τὰ σώματα μεριστοῦ
(Στίχοι 1 - 6)

Κατὰ τὸ ἀπόσπασμα (στίχοι 1 - 6) ἀνέμειξε τὴν οὐσία του ταυτοῦ, (ἀμεροῦς, ἀμεταβλήτου) με τὴν οὐσία του θατέρου (μεριστοῦ, μεταβλητοῦ) και ἐδημιούργησε τρίτη οὐσία ἀνάμεσά τους.

$$\frac{2xy}{x+y} < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} \Rightarrow \text{TAYTON} < \text{ΟΥΣΙΑ} < \text{ΘΑΤΕΡΟΝ}$$

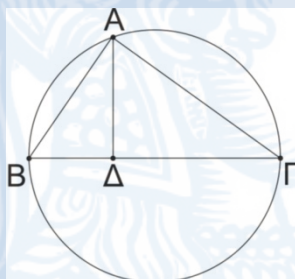
Ἐπειδὴ στα Θεολογούμενα τῆς Ἀριθμητικῆς του Ἰαμβλίου με τὴν ἔννοια **σύνθεσις** ὑπονοεῖται ἡ πράξη τῆς προσθέσεως και με τὴν ἔννοια **ἀνάμειξις** ὑπονοεῖται ἡ πράξη του πολλαπλασιασμοῦ, πολλαπλασιάζοντας, λοιπόν, ο θεός τὴν οὐσία του ταυτοῦ, δηλαδή τον ἀρμονικὸ μέσο, ἐπὶ τὴν οὐσίαν του θατέρου, δηλαδή τον ἀριθμητικὸν μέσο, ἐδημιούργησε τὴν τρίτη οὐσία, ἡ ὁποία τιθεμένη ἀνάμεσα στις δύο προηγούμενες οὐσίες, δομεῖ μία συνεχὴ ἀναλογία ὡς ἀκολουθῶς:

$$\frac{2xy}{x+y} \cdot \frac{x+y}{2} = xy = (\sqrt{xy})^2 \Rightarrow \frac{2xy}{x+y} = \frac{\sqrt{xy}}{\frac{x+y}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{αρμονικός μέσος}}{\text{γεωμετρικός μέσος}} = \frac{\text{γεωμετρικός μέσος}}{\text{αριθμητικός μέσος}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ}}{\text{ΟΥΣΙΩΔΕΣ}} = \frac{\text{ΟΥΣΙΩΔΕΣ}}{\text{ΕΤΕΡΟΤΗΤΑ}}$$

Ποιά είναι η τρίτη ουσία και τί σημαίνει η ανωτέρω μαθηματική διαδικασία; Η τρίτη ουσία είναι ο γεωμετρικός μέσος (\sqrt{xy}) κατά τον Μιχαήλ Ψελλό. Ο γεωμετρικός μέσος είναι υψωμένος εις το τετράγωνο και μπορεί να υπολογισθεί γεωμετρικώς – ακόμη κι αν είναι ασύμμετρος αριθμός- με τη βοήθεια των ομοίων τριγώνων (Βλέπε σχήμα 2). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, όπου Δ είναι η προβολή της κορυφής Α επί της υποτεινούσας ΒΓ, ισχύει η σχέση $(ΑΔ)^2 = (ΒΔ) \cdot (ΔΓ)$. Εάν, λοιπόν, ληφθεί το μήκος ΒΔ ίσο προς τον αρμονικό μέσο (ταυτόν) των δύο δοθέντων φυσικών αριθμών, το μήκος ΔΓ ίσο προς τον αριθμητικό μέσο (θάτερον) αυτών, τότε το μήκος ΑΔ θα είναι ίσο προς τον γεωμετρικό μέσο (ουσία) τους. Κατόπιν όλων αυτών είναι δυνατόν σε μία διαδικασία κατατομής κανόνος επί του μάνικου εγχόρδου οργάνου να τεθούν τάστα στις πρέπουσες θέσεις και για το ταυτόν και για το θάτερον και για την ουσία.



Σχήμα 2: Γεωμετρικός τρόπος υπολογισμού του μεγέθους της ουσίας δύο δοθέντων φυσικών αριθμών, γνωστών όντων του ταυτού και του θατέρου αυτών.

Τώρα ο Πυθαγόρας ή ο Πλάτων, 25 αιώνες πριν από τον Ρεαπο, διαθέτει ένα υλικό θεμελιωμένο με το αξίωμα του «επομένου»⁹ (=ουσία), τους φυσικούς αριθμούς, τους οποίους θα ταξινομήσει και θα συσχετίσει με βάση τις αναλογίες, διότι ταξινομών το υλικό του, το καθιστά κτήμα του.

Εν συνεχεία ο Πλάτων παρουσιάζει την κατανομή των μερών του μείγματος.

πάλιν όλον τοῦτο μοίρας ὅσας προσήκεν διένειμεν, ἐκάστην

⁹ Με βάση το ταυτόν (=1) που δεν έχει προηγούμενο, και το θάτερον (=2), που έχει προηγούμενο το ταυτόν και επόμενο (=ουσία) το 3, δομείται το σύνολον των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, ... ως μία ακολουθία με πρώτο στοιχείο –θεμελιώδη τελεστή γενήτορα- τη μονάδα (1), δεύτερο στοιχείο –θεμελιώδη τελεστή γενήτορα- το 2, επόμενο στοιχείο (=ουσία) το ε(2)=3 κ.ο.κ.

δὲ ἕκ τε ταύτου καὶ θατέρου καὶ τῆς οὐσίας μεμειγμένην.
(Στίχοι 10-11)

Αφού ανακάτεψε το μεριστόν με το ἀμέριστον και με την ουσία και, αφού από τρία έκανε ένα, μοίρασε¹⁰ ξανά το σύνολο αυτό ως εξής σε δύο μερίδια, που το καθένα τους ήταν μείγμα από το ταυτό, το θάτερο και την ουσία.

ἤρχετο δὲ διαιρεῖν ᾧδε. μίαν ἀφείλεν τὸ πρῶτον ἀπὸ παντὸς μοῖραν, μετὰ δὲ ταύτην ἀφήρει διπλασίαν ταύτης.
(Στίχοι 12-13)

Προ της αναλύσεως του Πλατωνικού ή του Πυθαγορείου αλγορίθμου, κρίνεται απαραίτητο να αναλυθούν δύο έννοιες εκ της Πυθαγορείου Θεωρητικής Αριθμητικής, ήτοι η έννοια των πολλαπλασίων και η έννοια των επιμορίων αριθμών καθώς επίσης και η έννοια του μέσου εκ της Πυθαγορείου θεωρίας των αναλογιών.

Ο **πολλαπλάσιος** αριθμός α είναι τέτοιος που, συγκρινόμενος με έναν άλλον αριθμό β , μικρότερόν του, τον περιέχει περισσότερο από μια φορά, δηλαδή $\alpha = k\beta$, $k \in \mathbb{N}$.

Επί παραδείγματι διπλάσιος σημαίνει $\alpha = 2\beta$.

Όταν ένας αριθμός α εμπεριέχει ολόκληρον έναν άλλον αριθμό β , μικρότερόν του, και επί πλέον ένα μόνον μέρος του αριθμού β , τότε ο α ονομάζεται **επιμόριος** του β .

Δηλαδή $\alpha = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \cdot \beta = \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) \cdot \beta$ $\alpha, \beta, \nu \in \mathbb{N}$ & $\alpha > \beta$.

Η ονομασία των επιμορίων αριθμών επιτυγχάνεται με τη χρήση της προθέσεως **επί** και το τακτικό αριθμητικό του παρονομαστού του συμμετέχοντος μέρους του αριθμού β .

Εάν $\nu = 3$, τότε: απόλυτο αριθμητικό είναι το τρία (3), τακτικό αριθμητικό είναι τρίτος και ο επιμόριος αριθμός λέγεται επίτριτος $\alpha = \left(1 + \frac{1}{3} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}\right)\beta$.

Εάν $\nu = 8$, τότε: απόλυτο αριθμητικό είναι το οκτώ (8), τακτικό αριθμητικό είναι όγδοος και ο επιμόριος αριθμός λέγεται επόγδοος $\alpha = \left(1 + \frac{1}{8} = \frac{8+1}{8} = \frac{9}{8}\right)\beta$.

μετὰ δὲ ταῦτα συνε-
πληροῦτο τὸ διπλάσιον διάστημα, μοίρας
ἔτι ἐκεῖθεν ἀποτέμνων καὶ τιθεὶς εἰς τὸ μεταξὺ τούτου, ὥστε
ἐν τῷ διαστήματι δύο εἶναι μεσότητας,
(Στίχοι 14-17)

τὴν μὲν ταυτῶ
μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην,

¹⁰ Ο Πρόκλος γι' αυτήν την ενέργεια διερωτώμενος (Πῶς δὲ μοίρας ἀφαιρεῖν τῆς ἀμερίστου κατ' οὐσίαν;) επισημαίνει: Τούτο σημαίνει ότι το υλικό από την ανάμειξη του ταυτού, του θατέρου και της ουσίας είναι μεριστό. Ο δημιουργός εδότησε την ψυχή σε ένα όλον προτού αρχίσει να τη διαιρεί. Έτσι, λοιπόν, δεν χάνεται η ολόκληρα καθώς υφίστανται τα μέρη της, αλλά εξακολουθεί να υπάρχει και να προηγείται των μερών της. 199 D9-13.

(Στίχοι 17-18)

Πρόκειται για την αρμονικήν ή υπενάντιον μεσότητα, αφού γι' αυτήν ισχύει

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad (\alpha > \beta > \gamma)$$

τήν

δὲ ἴσῳ μὲν κατ' ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην.

(Στίχοι 18-19)

Πρόκειται για την αριθμητική μεσότητα, αφού γι' αυτήν ισχύει

$$\alpha - \beta = \beta - \gamma, \quad (\alpha > \beta > \gamma)$$

Ο Πυθαγόρας, λοιπόν, παραγγέλλει να συμπληρώσουμε το διπλάσιο διάστημα, δηλαδή το διάστημα του διαπασών, με την αρμονική και την αριθμητική μεσότητα.

Ανάλογες πληροφορίες αντλούμε και από τον Αριστοτέλη και από τον Νικόμαχο τον Γερασηνό:

τήν ἀρμο-

νίαν κρᾶσιν καὶ σύνθεσιν ἐναντίων εἶναι

Αριστοτέλης, *Περί Ψυχῆς*, Bekker p. 407b, 30-31.

ἀρμονία δὲ πάντως ἐξ ἐναντίων γίνεται·

Νικόμαχος Γερασηνός, *Αριθμητικὴ Εἰσαγωγή*, 2, 19, 1, 4.

Ο Πλούταρχος στο κεφάλαιο 15 (*Περί της εν Τιμαίω Ψυχογονίας*) αναφέρεται στην αριθμητική και την αρμονική αναλογία, οι οποίες συνδέονται με τις μουσικές συμφωνίες και τους μουσικούς φθόγγους. Επίσης στο κεφάλαιο 16 αναφέρει τον τρόπο υπολογισμού του αριθμητικού και του αρμονικού μέσου.

Κατά τον Εύδωρο, το άθροισμα των ημίσεων δύο ακεραίων αριθμών, οι οποίοι εκφράζουν ένα μουσικό διάστημα, δίδει τον αριθμητικό μέσο.

Τούτο σημαίνει ότι οι όροι 1 και 2 του διπλασίου διαστήματος, προκειμένου να ενθέσουμε εις αυτό τον αριθμητικό τους μέσο (Πίνακας 1), πρέπει να έχουν ημίση ακεραίους αριθμούς. Γι' αυτό διπλασιάζουμε τους όρους του διπλασίου διαστήματος.

Πίνακας 1: Ένθεση του αριθμητικού μέσου στο διπλάσιο διάστημα.

		2	4
αριθμητικός μέσος	$\beta = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} \right)$		3

Κατά τον Πλούταρχο, στο διπλάσιο διάστημα το άθροισμα του ενός τρίτου του μικροτέρου όρου και του ημίσεος του μεγαλύτερου όρου δίδει τον αρμονικό μέσο (Πίνακας 2).

Η νέα απαίτηση σημαίνει ότι, προκειμένου να ενθέσουμε τον αρμονικό μέσο, πρέπει οι δύο αριθμοί του διπλασίου διαστήματος να διαιρούνται και δια του 2 και δια του 3. Ήδη έχουν καταστεί διαιρετοί δια του 2. Γι' αυτό, τριπλασιάζουμε τους αριθμούς του διπλασίου διαστήματος καθώς επίσης και τον ευρεθέντα αριθμητικό τους μέσο.

Πίνακας 2: Ένθεση αρμονικού μέσου στο διπλάσιο διάστημα.

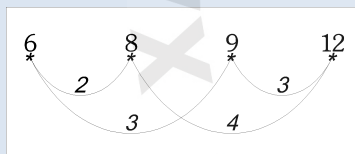
		6		12
αρμονικός μέσος	$\alpha = 2\gamma \Rightarrow \beta = \frac{\gamma}{3} + \frac{\alpha}{2}$		8¹¹	

Άρα διηρέθη το διπλάσιο διάστημα με τις συγκεκριμένες δύο μεσότητες (αρμονική και αριθμητική) και προέκυψε η σειρά αριθμών, η οποία φαίνεται στον Πίνακα 3. Αυτή η σειρά των τεσσάρων αριθμών δεν είναι τίποτα άλλο, παρά οι όροι της μουσικής αναλογίας¹² και αυτός είναι ο μοναδικός τρόπος της γενέσεώς των.

¹¹ Ας πάρουμε, λοιπόν, τον αριθμό 6 και τον διπλάσιό του, τον 12. Οι αριθμοί αυτοί έχουν τον ίδιο λόγο, τον οποίον έχουν η δυάς με τη μονάδα. Ανάμεσα σ' αυτούς τους αριθμούς, που είναι εξαπλάσιοι της μονάδος και της δυάδος, παρεμβάλλονται οι αριθμοί 8 και 9, που είναι οι προαναφερθείσες μεσότητες (αρμονική και αριθμητική). Πράγματι, ο μεν αριθμός 8 κατά τον ίδιο λόγο υπερέχει και υπερέχεται με τους δύο ακραίους αριθμούς

$$\left(\frac{12-8}{8-6} = \frac{12}{6}\right)$$

ο δε αριθμός 9 κατά το αυτό πλήθος μονάδων υπερέχει και υπερέχεται των δύο ακραίων αριθμών (12-9=9-6). Εξαπλασιάζοντας, λοιπόν, τη μονάδα και τη δυάδα βρήκαμε αριθμούς που να επιδέχονται τις προαναφερθείσες μεσότητες.



¹² Σχετικά με τα «...περὶ τῆς τελειοτάτης ἀναλογίας, τῆς ἐν τέσσαρσιν ὄροις ὑπαρχούσης καὶ ἰδίως μουσικῆς ἐπικληθείσης...» κατά τον Ιάμβλιχο στο «Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς» έχουμε να πούμε ότι πρόκειται περί μιας σειράς τεσσάρων ακεραίων αριθμών εκ των οποίων οι δύο ενδιάμεσοι είναι, αντιστοίχως, ο αρμονικός και αριθμητικός μέσος των δύο άκρων.

Τη μουσική αναλογία στην αρχαία ελληνική αρμονική δομούν οι αριθμοί 6, 8, 9, 12 και βρίσκουμε να τη χρησιμοποιούν πολλοί Πυθαγόρειοι όπως π.χ. ο Αρισταίος ο Κροτωνιάτης, ο Τίμαιος ο Λοκρός, οι Ταραντίνιοι Φιλόλαος και Αρχύτας και ο Πλάτων στο περί γενέσεως ψυχῆς κόσμου στο διάλογό του *Τίμαιος*.

Στην εν λόγω αναλογία:

Η γεωμετρική αναλογικότης εκφράζεται δια των λόγων $\left(\frac{12}{8} = \frac{9}{6}\right)$ ἕκαστος των οποίων είναι ημιόλιος.

Η αριθμητική αναλογικότης εντοπίζεται μεταξύ των ζευγών των αριθμών 12, 9 και 9, 6, διότι 12-9=9-6.

Η αρμονική αναλογικότης εντοπίζεται μεταξύ των ζευγών των αριθμών 12, 8 και 8, 6, διότι $\left(\frac{12}{6} = \frac{12-8}{8-6}\right)$.

Επίσης, σε αυτή τη σειρά των αριθμών 6, 8, 9, 12 εντοπίζονται όλες οι μουσικές συμφωνίες γι' αυτό το λόγο, άλλωστε, και ονομάστη μουσική αναλογία.

Πράγματι, οι σχέσεις $\left(\frac{8}{6}\right)$ και $\left(\frac{12}{9}\right)$ εκφράζουν τον επίτριτο λόγο και ταυτοχρόνως την δια τεσσάρων συμφωνία.

Οι σχέσεις $\left(\frac{9}{6}\right)$ και $\left(\frac{12}{8}\right)$ εκφράζουν τον ημιόλιο λόγο και ταυτοχρόνως την δια πέντε συμφωνία.

Η σχέσις $\left(\frac{12}{6}\right)$ εκφράζει τον διπλάσιο λόγο και ταυτοχρόνως την δια πασών συμφωνία.

Πίνακας 3: Η σειρά των αριθμών που προέκυψε από την ένθεση του αριθμητικού και αρμονικού μέσου στο διπλάσιο διάστημα.

	9/8		
6	8	9	12
4/3		4/3	

ἐπιτρίτων δὲ διαστάσεων καὶ ἐπογδῶν γενομένων ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν, τῷ τοῦ ἐπογδῶν διαστήματι τὰ ἐπίτριτα συνεπληροῦτο, λείπων αὐτῶν ἐκάστου μόριον, τῆς τοῦ μορίου ταύτης διαστάσεως λειφθείσης ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἐχούσης τοὺς ὄρους ἐξ καὶ πεντήκοντα καὶ διακοσίων πρὸς τρία καὶ τετταράκοντα καὶ διακόσια. καὶ δὴ καὶ τὸ μειχθέν, ἐξ οὗ ταῦτα κατέτεμνεν, οὕτως ἤδη πᾶν κατανηλώκει. (Στίχοι 20-27)

Τώρα θα πρέπει στη σειρά των αριθμών του Πίνακα 3 τα διαστήματα των ὄρων, τα οποία ἔχουν λόγο ἐπίτριτο (4/3), να τα διαιρέσουμε σε δύο ἐπογδῶν τόνους και σε ἓνα λείμμα.

Εργαζόμεθα ως ἀκολουθῶς: Προκειμένου να ληφθεῖ ο ἐπόγδοος ἐνός δοθέντος ἀριθμοῦ, και να εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, θα πρέπει ο δοθείς ἀριθμός να διαιρεῖται ἀκριβῶς δια του 8. Προς τούτοις, οκταπλασιάζομε ὅλους τους μέχρι στιγμῆς ληφθέντες ἀριθμούς (Πίνακας 3) και ἔχομε τη σειρά των ἀριθμῶν του Πίνακα 4:

Πίνακα 4: Οἱ ἀριθμοὶ της μουσικῆς ἀναλογίας 6, 8, 9, 12 οκταπλασιασμένοι, προκειμένου να εὐρεθοῦν οἱ ἐπόγδοοί τους.

	9/8		
48	64	72	96
4/3		4/3	

Στο ἐπίτριτο διάστημα των ἀριθμῶν 48, 64 ἐπόγδοος του 48 εἶναι ο ἀριθμός 54. Στο ἐπίτριτο διάστημα των ἀριθμῶν 72, 96 ἐπόγδοος του 72 εἶναι ο ἀριθμός 81.

Προκειμένου να ληθοῦν οἱ δεῦτεροι ἐπόγδοοι ὄροι στα προμνημονευθέντα δύο ἐπίτριτα διαστήματα, και να εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, οκταπλασιάζομε ὅλους τους μέχρι στιγμῆς ληφθέντες ἀριθμούς.

Ἔτσι, λοιπόν, στο ἐπίτριτο διάστημα των ἀριθμῶν 384, 512 παρενεβλήθησαν οἱ δύο διαδοχικοί ἐπόγδοοι ὄροι 432 και 486. Το ἀπομένον διάστημα μεταξύ των ὄρων 486 και 512 εἶναι το διάστημα του λείμματος. Ακολουθεῖ ἐν διαζεύξει το ἐπίτριτο διάστη-

Η σχέση $\left(\frac{9}{8}\right)$ ἐκφράζει τον ἐπόγδοον τόνο, ο οποίος ἰσοῦται με το ὅτι διαφέρει η διαπέντε συμφωνία ἀπὸ τη

διατεσσάρων συμφωνία ἢ ο ἡμιόλιος λόγος ἀπὸ τον ἐπίτριτο λόγο $\left(\frac{3}{2} = \frac{9}{6}\right)$.

μα των αριθμών 576, 768 με τους δύο διαδοχικούς επογδούς όρους 648 και 729 και το λείμμα μεταξύ των όρων 729 και 768 (Πίνακας 5).

Πίνακα 5: Τα διαστήματα μεταξύ των όρων της Πυθαγορείου κλίμακος.

	9/8		9/8		9/8		
384	432	486	512	576	648	729	768
9/8		256/243		9/8		256/243	
4/3				4/3			

Οι παραπάνω αριθμοί 384 432 486 512 576 648 729 768 εκφράζουν τα μήκη των δονούμενων τμημάτων χορδής επί ενός συμπαντικού μονοχόρδου, τα οποία υλοποιούν ηχητικά τους οκτώ φθόγγους¹³ της Πυθαγορείου κλίμακος.

Με βάση τη θεωρία των χορδών, μικρό μήκος δονούμενου τμήματος χορδής παράγει ήχο μεγάλης συχνότητας και μεγάλο μήκος δονούμενου τμήματος χορδής παράγει ήχο μικρής συχνότητας $\frac{f_1}{f_2} = \frac{L_2}{L_1}$, $f_1 > f_2 \Rightarrow L_2 > L_1$.

Άρα η εν λόγω σειρά των δονούμενων τμημάτων χορδής εκφράζει μια σειρά μουσικών υψών, μια κλίμακα, κατά την κατιούσα διαδοχή. Αυτό είναι συμπέρασμα εξαιρετικής σπουδαιότητας. Άλλωστε οι αρχαίοι Έλληνες πάντοτε αντιμετώπιζαν τις κλίμακες των κατά την κατιούσα διαδοχή και μπορούμε να επικαλεσθούμε τον Αριστοτέλη, ο οποίος στο έργο του «Προβλήματα, Όσα περί Αρμονίαν», ομιλών για τη μέση (=ο φθόγγος της συναφής δύο τετραχόρδων) (Σχήμα 1) καθορίζει σαφέστατα κατιούσα κίνηση κατά την αντιμετώπιση του επταχόρδου:

διὸ καὶ μέσῃ αὐτὴν προσηγόρευσαν. ἢ ὅτι ἦν τοῦ μὲν ἄνω τετραχόρδου τελευτή, τοῦ δὲ κάτω ἀρχή,



Σχήμα 1: Στο επτάχορδο σύστημα η Μέση είναι το πέρας του άνω τετραχόρδου και αρχή του κάτω.

Με άλλα λόγια η δομή της Πυθαγορείου κλίμακος κατά την κατιούσα διαδοχή είναι δύο διεξευγμένα δώρια τετράχορδα δηλαδή τόνος, τόνος, λείμμα, διαζευκτικός τόνος, τόνος, τόνος, λείμμα.

¹³ Το οκτάχορδο σύστημα δημιουργήθηκε τον 6ο π.Χ. αιώνα από τον Πυθαγόρα με την παρεμβολή μιας διάζευξης ανάμεσα σε δύο συνημμένα (συνεχή) τετράχορδα.

(Νικόμαχος, *Εγχειρίδιον*, 5): «ὅτι τῇ ἐπταχόρδῳ λύρα τὴν ὀγδόην ὁ Πυθαγόρας προσθεὶς τὴν διὰ πασῶν συνεστήσατο ἀρμονίας».

Εάν θελήσωμε να προσεγγίσουμε τη δομή της Πυθαγορείου κλίμακος με τη σύγχρονη ευρωπαϊκή σημειογραφία, θα είχαμε

E	D	C	B	A	G	F	e
$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	

Όσοι δεν έχουν μελετήσει αρχαίους Έλληνες αρμονικούς και, ως εκ τούτου, δεν γνωρίζουν την παραπάνω Αριστοτέλαιο διευκρίνιση, αντιμετωπίζουν τη συγκεκριμένη σειρά των δονουμένων τμημάτων χορδής ως αν να εκφράζει μια σειρά μουσικών υψών, μια κλίμακα, κατά την ανιούσα διαδοχή και, εσφαλμένως, καταλήγουν ότι η Πυθαγόρειος κλίμαξ έχει τη δομή της C Major (Σχήμα 3). Αυτή δεν είναι η Πυθαγόρειος κλίμαξ με δώριο δομή τετραχόρδων, αλλά η Πυθαγόρειος κλίμαξ με λύδιο δομή τετραχόρδων, έχουσα παντελώς διαφορετικόν ήθος κατά τους αρχαίους.

Σχήμα 3: Εσφαλμένη αντιμετώπιση της Πυθαγόρειας μουσικής κλίμακος

