

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ

**ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ,
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΟΥΣΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

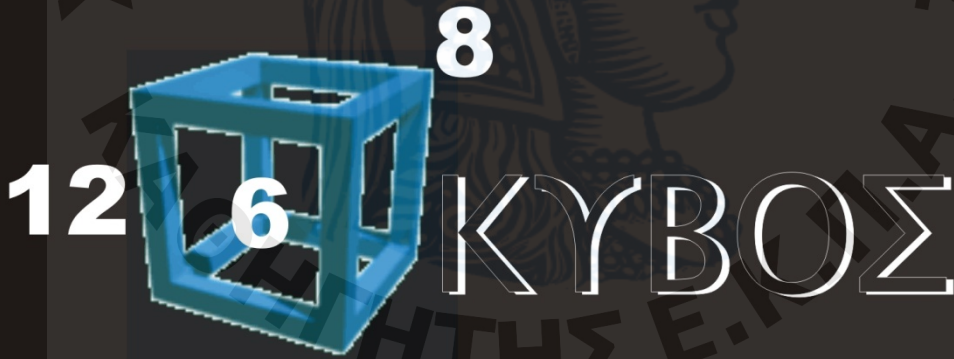
ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ Τ.Κ. 157 84

e-mail: hspyridis@music.uoa.gr

☎ 210 - 72.77.832

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ



«Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ λόγος
καὶ ὁ λόγος ἦν πρὸς τὴν συμμετρίαν
καὶ συμμετρία ἦν ὁ λόγος»
Πυθαγόρειοι

Ο Θέων ο Σμυρναῖος στο έργο του «Ἐπιπέδων κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν» μας πληροφορεῖ ὅτι ἡ λέξη «λόγος» θεωρεῖται ἀπὸ τοὺς περιπατητικοὺς ὡς ἔχουσα πολλὰς ἐννοίας. Λόγο ὀνομάζουσαν τὴν ομιλία, δηλαδὴ τὸν προφορικὸν λόγον, ἀκόμη μία ομιλία ποὺ γίνεται σε συναθροισμένον πλῆθος λ.χ. ὁ Δημοσθενικὸς λόγος, ὁ Λυσιακὸς λόγος. Λόγο ὀνομάζουσαν τὸν συλλογισμόν, τὴν επαγωγήν, τὸν μῦθον, τὸ ἐγκώμιον, τὴν παροιμίαν. Λόγο ὀνομάζουσαν τὴν διανοητικὴν συλλογιστικὴν χωρὶς ἐκπομπὴν φωνῆς. Λόγο ὀνομάζουσαν τὴν ἀναλογίαν.

Στὸν Πλάτωνα ὁ «λόγος» χρησιμοποιεῖται μετέσσερις ἐννοίαις. Ὄνομάζει λόγον τὴν νοητικὴν καὶ ὄχι τὴν ρηματικὴν διάνοησιν, τὰς ἀγορεύσεις ποὺ ξεκινῶντας ἀπὸ τὸ πνεῦμα ἐκφράζονται ἀπὸ τὴν φωνήν, τὴν ἐπεξήγησιν τῶν στοιχείων τοῦ Σύμπαντος καὶ τὸν λόγον τῆς ἀναλογίας.

Κατὰ τὸν Ἀδραστο ὁ λόγος τῆς ἀναλογίας ἐκφράζει μίαν σχέσιν μεταξύ ὁμοειδῶν ὀντοτήτων.

Ἀπὸ τὴν ἄλλῃ μερίαν συμμετρικὸν σημαίνει κάτι ποὺ ἔχει καλὰς ἀναλογίας, ποὺ εἶναι καλὰ ἰσορροπημένον καὶ ἡ λέξη «συμετρία» υποδηλώνει αὐτὴν τὴν ἰδιαιτέραν συμφωνίαν πολλῶν μερῶν με τὴν ὁποία συγκροτοῦν ἓνα σύνολον. Στὸ βιβλίον τοῦ περὶ ἀναλογιῶν ὁ Πολύκλειτος, τὸν ὁποῖον οἱ ἀρχαῖοι ἐπαίνεσαν γιὰ τὴν ἀρμονικὴν τελειότητα τῶν γλυπτῶν τοῦ, γράφει ὅτι ἡ ὁμορφία εἶναι συνδεδεμένη με τὴν συμετρίαν. Ὑπογραμμίζω ὅτι ἡ συμετρία με κανένα τρόπο δὲν περιορίζεται μόνον σε ἀντικείμενα στὸ χωρὸν. Τὸ συνώνυμον «ἀρμονία» τονίζει περισσότερο τὰς ἠχητικὰς καὶ μουσικὰς παρά τὰς γεωμετρικὰς τῆς ἐφαρμογὰς.

Ὁ Βιτρούβιος ὀρίζει: «Ἡ συμετρία ἀπορρέει ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν, δηλαδὴ τὸν λόγον τῶν ποικίλων συστατικῶν μερῶν πρὸς τὸ σύνολον».

Ἡ συμετρία, λοιπόν, ὅσο πλατιά ἢ ὅσο στενά κι ἀν ὀρίσουμε τὴν σημασίαν τῆς, εἶναι μίαν ἀντίληψιν με τὴν ὁποία ὁ ἄνθρωπος διαμέσου τῶν αἰῶνων ἔχει προσπαθήσει νὰ κατανοήσῃ καὶ νὰ δημιουργήσῃ τάξιν, ὁμορφίαν καὶ τελειότητα.

Στὸν Εὐκλείδην ὁ σύμμετρος, δηλαδὴ ὁ ἀνάλογος, ὀνομάζεται ρητὸς καὶ τὸ ἀντίθετόν του εἶναι ὁ ἄρρητος καὶ ὁ ἄλογος.

Ἡ Μουσικὴ γιὰ τοὺς Πυθαγορείους ἀποτελοῦσε τὴν «θεωρίαν τῶν λόγων» καὶ συγκαταλεγόταν ὡς τρίτον μέρος ἀνάμεσα στα τέσσερα μέρη τῆς Μαθηματικῆς ἐπιστήμης (Ἀριθμητικὴ, Γεωμετρία, Μουσικὴ, Ἀστρονομία).

Γιὰ νὰ καταστῆ κατανοητὸ τὸ θεωρητικὸν μέρος τῆς Μουσικῆς, τῆς Ἀστρονομίας, τῆς Γεωμετρίας καὶ τῆς Φιλοσοφίας τοῦ Πλάτωνος καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους πρέπει νὰ ὀρισθῆ ἡ ἐννοία τῆς *μεσότητος* ἢ *ἀναλογικότητος* ἢ τῆς *ἀναλογίας*.

Ἡ θεωρία τῶν ἀναλογικότητων ἢ τῶν ἀναλογιῶν φαίνεται νὰ πρωτοεισήχθη ἀπὸ τὸν Θαλή (7^{ος}-6^{ος} π.Χ. αἰ.) καὶ μετὰ νὰ υπέστη ἀπὸ τοὺς Πυθαγορείους συνεχεῖς βελτιώσεις, βρήκε ἐφαρμογὴν

- στὸν τομέα τῶν καθαρῶν Μαθηματικῶν (Ἰπασσος ὁ Μεταποντίνος [6^{ος}-5^{ος} π.Χ. αἰ.], Ἰπποκράτης ὁ Χίος [470-400 π.Χ.]),

- στη Μουσική (Ίππασος ο Μεταποντίνος, Φιλόλαος [530-470 π.Χ.], Αρχύτας ο Ταραντίνος [430-350 π.Χ.]),
- στη Γλυπτική (Πολύκλειτος ο Αργεῖος [4^{ος} π.Χ. αι.]), και
- στην Ιατρική (!) (Αλκμαίων [570-500 π.Χ.], Φιλόλαος).

Ο στοιχειωτής Ευκλείδης μας διδάσκει την προϊστορία της αναλογίας στο βιβλίο V των Στοιχείων του. Πρέπει να τονισθεί ότι η Ευκλείδειος ορολογία της διδασκαλίας για την αναλογία προδίδει τη σχέση της προς τη θεωρία της Μουσικής.

Ο Πρόκλος ορίζει την αναλογία στο *Υπόμνημα εις τον Πλάτωνος Τίμαιο* ως

- «την ταυτότητα του λόγου και ως τον πλέον υπέροχο εκ των δεσμών»,
- «Αναλογικότητα είναι η αναγωγή δύο ή περισσότερων λόγων σε έναν»,
- «Αναλογικότητα είναι η όμοια σχέση δύο ή περισσότερων λόγων, οι οποίοι δεν έχουν δομηθεί από τις ίδιες ποσότητες και διαφορές»,
- «Λόγος είναι μια ορισμένη σχέση μεταξύ δύο όρων, που παράγει το αναλογικό ή ανάλογο και η αναλογικότητα προκύπτει από την ένωση λόγων».

Τρεις αναλογίες, η Αριθμητική, η Γεωμετρική και η Αρμονική (ή Υπενάντιος), ήσαν γνωστές στους πιο αρχαίους Μαθηματικούς και οι οποίες παρουσιάστηκαν στη φιλοσοφία του Πυθαγόρου (580-490 π.Χ.), του Πλάτωνος (427-347 π.Χ.) και του Αριστοτέλους (384-322 π.Χ.). Αυτές οι τρεις αναλογικότητες (μεσότητες) σύμφωνα με τον *Ιάμβλιχο* (346-414 μ.Χ.) χρησιμοποιήθηκαν από τον *Πλάτωνα* μέχρι τον *Ερατοσθένη* (276-194 π.Χ.).

«μόνοι δὲ τὸ παλαιὸν τρεῖς ἦσαν μεσότητες ἐπὶ Πυθαγόρου καὶ τῶν κατ' αὐτὸν μαθηματικῶν, ἀριθμητικὴ τε καὶ ἡ γεωμετρικὴ καὶ ἡ ποτὲ μὲν ὑπεναντία λεγομένη τῇ τάξει τρίτη, ὑπὸ δὲ τῶν περὶ Αρχύταν αἵθις καὶ Ἰππασὸν ἀρμονικὴ μετακληθεῖσα ὅτι τοὺς κατὰ τὸ ἡρμωσμένον καὶ ἐμμελὲς ἐφαίνετο λόγους περιέχουσα».

Νεοελληνική απόδοση: [παλιὰ κατὰ τὴν ἐποχὴ τοῦ Πυθαγόρου καὶ τῶν μαθηματικῶν τοῦ ὑπῆρχαν τρεῖς μεσότητες, ἡ ἀριθμητικὴ, ἡ γεωμετρικὴ καὶ ἡ τρίτη ποὺ ονομάζετο μὲν ὑπεναντία. Ἀπὸ δὲ τοῦ Αρχύτα, τοῦ Ἰππασοῦ καὶ τοῦ μαθητῆς τοῦς ονομάσθηκε ἀρμονικὴ, διότι φαίνεται ὅτι περιέχει τοὺς μουσικοὺς ἀρμονικοὺς λόγους].

Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός υπογραμμίζει ότι οι τρεις αυτές πρώτες αναλογίες πήραν τα ονόματά τους από τις τρεις πρώτες επιστήμες, δηλαδή την Αριθμητική, τη Γεωμετρία και την Αρμονική (=Μουσική).

Η Αριθμητική αναλογία

Εάν μεταξύ τριών δοθέντων αριθμών $\alpha > \beta > \gamma$ ισχύει η ισότητα των διαφορών $\alpha - \beta = \beta - \gamma$, λέμε ότι δομείται μια αριθμητική αναλογία.

Ο μεσαίος αριθμός β ονομάζεται αριθμητικός μέσος και εκφράζεται συναρτήσει των

δύο άκρων αριθμών ως $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.

Πρέπει να τονισθεί ότι η Αριθμητική αναλογία ονομάζεται και «αναλογία κατὰ ποσότητα», διότι σε αυτήν δεν ισχύει η ισότητα των λόγων μεταξύ των τριών διαδοχικών όρων, αλλά η ισότητα των διαφορών τους.

Εάν μεταξύ των μερών ενός συνόλου δεν ισχύει η ταυτότητα του λόγου, δεν υφίσταται συνοχή μεταξύ των μερών του συνόλου. Γιαυτό την αριθμητική αναλογία 1, 2, 3, 4, ...

οι αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί την ονόμαζαν Φυσικόν χύμα (μη συνεκτικόν) και κατά τον Μιχαήλ Ψελλό ο Πλάτων την αποκαλεί στον Τίμαιο στο περί γενέσεως της Ψυχής του Κόσμου «ετερότητα».

Ο Πρόκλος στο *Υπόμνημα εις τὸν Πλάτωνος Τίμαιον* αποκαλεί τον αριθμητικό μέσο *Ειρήνη*, όνομα της κόρης της Θέμιδος και τούτο, διότι υπερβαίνει και υπερβαίνεται από μια ίση ποσότητα και τον χρησιμοποιούμε στις συναλλαγές μας εν καιρώ ειρήνης.

Οι προγενέστεροι του Νικομάχου (50-120 μ.Χ.) ε γνώριζαν ότι στην αριθμητική αναλογικότητα ο λόγος των δύο μικροτέρων όρων της είναι μεγαλύτερος του λόγου των δύο μεγαλύτερων όρων της π.χ. $\frac{2}{1} > \frac{3}{2}$, αφού ο πρώτος λόγος είναι ο διπλάσιος και ο

δεύτερος είναι ο ημιόλιος. Βάσει αυτού ο αριθμητικός μέσος συγκρίνεται με την ολιγαρχία ή την πολιτεία που κυβερνάται από λίγους, οι οποίοι επιδιώκουν το δικό τους καλό και όχι αυτό της πολιτείας.

Η Γεωμετρική αναλογία

Εάν μεταξύ τριών δοθέντων αριθμών $\alpha > \beta > \gamma$ ισχύει η ισότητα των λόγων $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$,

λέμε ότι δομείται μια γεωμετρική αναλογία.

Ο μεσαίος αριθμός β ονομάζεται γεωμετρικός μέσος και εκφράζεται συναρτήσει των δύο άκρων αριθμών ως $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$. Παράδειγμα γεωμετρικής αναλογίας αποτελεί η

τριάδα των αριθμών 4, 2, 1, διότι $\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ και $2 = \sqrt{1 \cdot 4}$.

Ο Πρόκλος στο *Υπόμνημα εις τὸν Πλάτωνος Τίμαιον* αποκαλεί τον γεωμετρικό μέσο *Ευνομία*, δηλαδή δίκαιη νομοθεσία, όνομα της άλλης κόρης της Θέμιδος, και ο Πλάτων τον ονομάζει κρίση του Δία μέσω της οποίας το σύμπαν κοσμεύεται με γεωμετρικές αναλογίες.

Οι προγενέστεροι του Νικομάχου ε γνώριζαν ότι στη γεωμετρική αναλογικότητα ο λόγος των δύο μικροτέρων όρων της είναι ίσος προς το λόγο των δύο μεγαλύτερων όρων της π.χ. $\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$ (αναλογία κατά ποιότητα), αφού και οι δύο εκφράζουν τον διπλάσιο

λόγο. Βάσει αυτού ο γεωμετρικός μέσος είναι ανάλογος προς μια λαϊκή κυβέρνηση, όπου τόσο ο φτωχός όσο και ο πλούσιος συμμετέχουν ισότιμα στη διακυβέρνηση.

Η αρμονική αναλογία

Εάν μεταξύ τριών δοθέντων αριθμών $\alpha > \beta > \gamma$ ο μεσαίος δεν έχει τον ίδιο λόγο με τους άκρους ως επόμενος του ενός και προηγούμενος του άλλου, όπως συμβαίνει στη γεωμετρική αναλογία, ούτε έχει ίσες διαφορές και άνισους λόγους, όπως συμβαίνει στην αριθμητική αναλογία, αλλά ο μέγιστος προς τον ελάχιστο όρο έχει λόγο ίσο με το λόγο της διαφοράς του μέσου από τον μέγιστο προς τη διαφορά του ελάχιστου από τον

μέσο $\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$, λέμε ότι δομείται μια αρμονική αναλογία. Παράδειγμα αρμονικής

αναλογίας αποτελεί η τριάδα των αριθμών 6, 4, 3, διότι $\frac{6}{3} = \frac{6-4}{4-3}$.

Ο μεσαίος αριθμός β ονομάζεται αρμονικός μέσος και εκφράζεται συναρτήσει των δύο άκρων αριθμών ως $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}$.

Οι προγενέστεροι του Νικομάχου ε γνώριζαν ότι στην αρμονική αναλογικότητα ο λόγος των δύο μικρότερων όρων της είναι μικρότερος του λόγου των δύο μεγαλύτερων όρων της π.χ. $\frac{4}{3} < \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, αφού ο πρώτος είναι επίτριτος και ο δεύτερος είναι ημιόλιος. Για το λόγο αυτό η αρμονική πρόοδος ονομάζεται υπεναντία της αριθμητικής προόδου.

Βάσει αυτού ο αρμονικός μέσος λέγεται ότι αντιστοιχεί στην αριστοκρατία, επειδή υπάρχει μεγαλύτερος λόγος στους μεγαλύτερους όρους.

Ο Πρόκλος στο *Υπόμνημα εις τὸν Πλάτωνος Τίμαιον* θεωρεί ότι ο αρμονικός μέσος έχει σχέση με τη Δίκη ή Δικαιοσύνη, μέσω της οποίας οι μεγαλύτεροι όροι έχουν ένα μεγαλύτερο λόγο και οι μικρότεροι ένα μικρότερο λόγο.

Επειδή μεταξύ των μερών της αρμονικής αναλογίας ισχύει η ταυτότητα του λόγου, υφίσταται συνοχή μεταξύ αυτών και κατά τον Μιχαήλ Ψελλό ο Πλάτων την αποκαλεί στον Τίμαιο στο περί γενέσεως της Ψυχής του Κόσμου «ταυτότητα».

«Τῶν δὲ μεσοτήτων τριῶν οὐσῶν ἢ μὲν γεωμετρικὴ τὸ οὐσιῶδές πως συνδεῖ τῶν ψυχῶν, ἢ δὲ ἀρμονικὴ τὴν ταυτότητα, ἢ δὲ ἀριθμητικὴ τὴν ἑτερότητα»

Μιχαήλ Ψελλός, Γεωργίου του Κεδρηνού Σύνοψις Ἱστοριῶν, τόμος XI, ἔτος 1058.

...τῆς ἀμερίστου

καὶ αἰεὶ κατὰ ταῦτὰ ἐχούσης οὐσίας καὶ τῆς αἰὲν περὶ τὰ σώματα γιγνομένης μεριστῆς τρίτον ἐξ ἀμφοῖν ἐν μέσῳ συνεκεράσατο οὐσίας εἶδος

Πλάτωνος Τίμαιος (35 α, 1-3)

Νεοελληνική απόδοση: [Ανέμειξε (ο Θεός) την ουσία του ταυτού (αμερούς, αμεταβλήτου) με την ουσία του ἑτέρου (μεριστού, μεταβλητού) και ἐδημιούργησε ἀπὸ τις δύο μια τρίτη ἐνδιάμεση οὐσία].

$$\frac{2xy}{x+y} = \frac{xy}{\frac{x+y}{2}} = \frac{(\sqrt{xy})^2}{\frac{x+y}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2xy}{x+y} = \frac{\sqrt{xy}}{\frac{x+y}{2}} \Rightarrow \frac{\text{αρμονικός μέσος}}{\text{γεωμετρικός μέσος}} = \frac{\text{γεωμετρικός μέσος}}{\text{αριθμητικός μέσος}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ}}{\text{ΟΥΣΙΩΔΕΣ}} = \frac{\text{ΟΥΣΙΩΔΕΣ}}{\text{ΕΤΕΡΟΤΗΤΑ}}$$

Εφόσον μεταξύ των τριών μερών

- ταυτότητα,
- ἑτερότητα,
- ουσιώδες

δομείται ισότητα λόγων, το όλον που προκύπτει χαρακτηρίζεται από ισχυρά συνοχή. Μ' αυτό το συνεκτικό υλικό ο Θεός θα πλάση την ψυχή του κόσμου, δηλαδή μια κατανομή αριθμών που αντιπροσωπεύουν τμήματα χορδών στο συμπαντικό μονόχορδο κατά το διατονικό γένος καλύπτοντας μια έκταση (ampitus) δύο δις διαπασών, ενός διαπέντε κι ενός επογδίου.

Στο δεύτερο μισό της εισαγωγής της Ευκλειδείου πραγματείας «Κατατομή κανόνος» αναφέρεται το θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας περί ευφωνίας ή συμφωνίας. Οι Πυθαγόρειοι εξέφραζαν τα μουσικά διαστήματα ως λόγους ακεραίων αριθμών.

Κατά την Πυθαγόρειο μουσική θεωρία τα μουσικά διαστήματα κατετάσσοντο σε δύο βασικές κατηγορίες τις ευφωνίες ή συμφωνίες και τις διαφωνίες ή ασυμφωνίες. Οι συμφωνίες εκ του ρήματος συμφωνέω_ω̄ (=φωνώ ὁμοῦ).

Πρέπει να σημειώσουμε ότι κατά το θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας περί ευφωνίας ή συμφωνίας ΜΟΝΟ μία πολλαπλάσια ή επιμόρια σχέση μεταξύ των αριθμών των ενσαρκωτών της ιεράς τετρακτύος (1, 2, 3, 4) εκφράζει ένα σύμφωνο μουσικό διάστημα.

Αυτό συμβαίνει στα διαστήματα δις διαπασών $\left(\frac{4}{1}\right)$, διαπασών $\left(\frac{2}{1}\right)$, ημιόλιον (διαπέντε ή διοξεία), $\left(\frac{3}{2}\right)$, επίτριτον (διατεσσάρων ή συλλαβά) $\left(\frac{4}{3}\right)$. Έτσι, λοιπόν,

κατά το θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας περί ευφωνίας ή συμφωνίας το διάστημα του επογδίου τόνου $\left(\frac{9}{8}\right)$, παρόλο που αποτελεί μια επιμόρια σχέση, το κατέτασσαν στις διαφωνίες ή ασυμφωνίες, επειδή οι ακέραιοι αριθμοί 8 και 9, που το δομούν, δεν συγκαταλέγονται μεταξύ των αριθμών των ενσαρκωτών της ιεράς τετρακτύος (1, 2, 3, 4).

Στα σύμφωνα μουσικά διαστήματα συγκαταλέγοντο και τα σύνθετα των παραπάνω συμφώνων διαστημάτων με την οκτάβα με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι δεν παραβιάζεται το Θεμελιώδες Πυθαγόρειο αξίωμα για τη μουσική συμφωνία.

Έτσι, λοιπόν, η δις διαπασών (=διαπασών+διαπασών), που εκφράζεται με πολλαπλάσια σχέση $\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{1}\right)$, εντάσσεται στα σύμφωνα διαστήματα, η διαπασών και δια πέντε

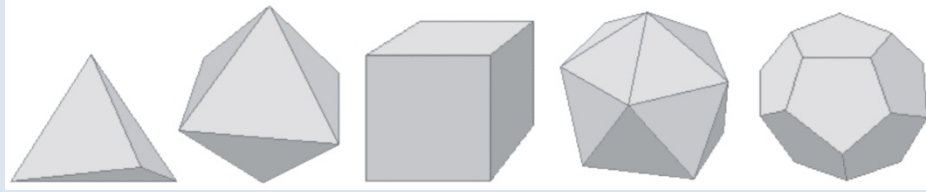
(=διαπασών+δια πέντε), που εκφράζεται με πολλαπλάσια σχέση $\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{1}\right)$,

εντάσσεται στα σύμφωνα διαστήματα, η διαπασών και δια τεσσάρων (=διαπασών+δια τεσσάρων), που εκφράζεται με πολλαπλασιεπιμερή σχέση $\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}\right)$,

παραβιάζει το Θεμελιώδες Πυθαγόρειο αξίωμα για τη μουσική συμφωνία, και γι' αυτό εντάσσεται στα διάφωνα ή ασύμφωνα διαστήματα.

Ο στοιχειωτής Ευκλείδης ήταν γνώστης και οπαδός της φιλοσοφίας του Πλάτωνος και γι αυτό έθεσε ως τελικό σκοπό της συγγραφής των Στοιχείων την κατασκευή των πέντε κανονικών πολυέδρων (τετράεδρον, οκτάεδρον, εξαέδρον, εικοσάεδρον και πενταγωνικόν δωδεκάεδρον), που αποκαλούνται πλατωνικά στερεά.

Τα τρία τελευταία βιβλία των στοιχείων, δηλαδή το ενδέκατο, δωδέκατο και το δέκατο τρίτο, περιλαμβάνουν τη Στερεομετρία Το τελευταίο μάλιστα βιβλίο με 18 θεωρήματα αναφέρεται στην εγγραφή των κανονικών πολυέδρων στη σφαίρα, γεγονός που φανερώνει ότι στους Πυθαγορείους ήσαν γνωστοί οι ασύμμετροι αριθμοί, όπως λ.χ. είναι ο αριθμός π .



$\pi = 3, 141592653589793238462$

6 4 3 3 8 3 2 7 9 5 0 2 8 8 4 1 9 7 1 6 9 3 9 9 3 7 5 1 0 5
 8 2 0 9 7 4 9 4 4 5 9 2 3 0 7 8 1 6 4 0 6 2 8 6 2 0 8 9 9 8
 6 2 8 0 3 4 8 2 5 3 4 2 1 1 7 0 6 7 9 8 2 1 4 8 0 8 6 5 1 3
 2 8 2 3 0 6 6 4 7 0 9 3 8 4 4 6 0 9 5 5 0 5 8 2 2 3 1 7 2 5
 3 5 9 4 0 8 1 2 8 4 8 1 1 1 7 4 5 0 2 8 4 1 0 2 7 0 1 9 3 8
 5 2 1 1 0 5 5 5 9 6 4 4 6 2 2 9 4 8 9 5 4 9 3 0 3 8 1 9 6 4
 4 2 8 8 1 0 9 7 5 6 6 5 9 3 3 4 4 6 1 2 8 4 7 5 6 4 8 2 3 3
 7 8 6 7 8 3 1 6 5 2 7 1 2 0 1 9 0 9 1 4 5 6 4 8 5 6 6 9 2 3
 4 6 0 3 4 8 6 1 0 4 5 4 3 2 6 6 4 8 2 1 3 3 9 3 6 0 7 2 6 0
 2 4 9 1 4 1 2 7 3 7 2 4 5 8 7 0 0 6 6 0 6 3 1 5 5 8 8 1 7 4
 8 8 1 5 2 0 9 2 0 9 6 2 8 2 9 2 5 4 0 9 1 7 1 5 3 6 4 3 6 7
 8 9 2 5 9 0 3 6 0 0 1 1 3 3 0 5 3 0 5 4 8 8 2 0 4 6 6 5 2 1
 3 8 4 1 4 6 9 5 1 9 4 1 5 1 1 6 0 9 4 3 3 0 5 7 2 7 0 3 6 5
 7 5 9 5 9 1 9 5 3 0 9 2 1 8 6 1 1 7 3 8 1 9 3 2 6 1 1 7 9 3
 1 0 5 1 1 8 5 4 8 0 7 4 4 6 2 3 7 9 9 6 2 7 4 9 5 6 7 3 5 1
 8 8 5 7 5 2 7 2 4 8 9 1 2 2 7 9 3 8 1 8 3 0 1 1 9 4 9 1 2 9
 8 3 3 6 7 3 3 6 2 4 4 0 6 5 6 6 4 3 0 8 6 0 2 1 3 9 4 9 4 6
 3 9 5 2 2 4 7 3 7 1 9 0 7 0 2 1 7 9 8 6 0 9 4 3 7 0 2 7 7 0
 5 3 9 2 1 7 1 7 6 2 9 3 1 7 6 7 5 2 3 8 4 6 7 4 8 1 8 4 6 7
 6 6 9 4 0 5 1 3 2 0 0 0 5 6 8 1 2 7 1 4 5 2 6 3 5 6 0 8 2 7
 7 8 5 7 7 1 3 4 2 7 5 7 7 8 9 6 0 9 1 7 3 6 3 7 1 7 8 7 2 1
 4 6 8 4 4 0 9 0 1 2 2 4 9 5 3 4 3 0 1 4 6 5 4 9 5 8 5 3 7 1
 0 5 0 7 9 2 2 7 9 6 8 9 2 5 8 9 2 3 5 4 2 0 1 9 9 5 6 1 1 2
 1 2 9 0 2 1 9 6 0 8 6 4 0 3 4 4 1 8 1 5 9 8 1 3 6 2 9 7 7 4
 7 7 1 3 0 9 9 6 0 5 1 8 7 0 7 2 1 1 3 4 9 9 9 9 9 9 8 3 7 2
 9 7 8 0 4 9 9 5 1 0 5 9 7 3 1 7 3 2 8 1 6 0 9 6 3 1 8 5 9 5
 0 2 4 4 5 9 4 5 5 3 4 6 9 0 8 3 0 2 6 4 2 5 2 2 3 0 8 2 5 3
 3 4 4 6 8 5 0 3 5 2 6 1 9 3 1 1 8 8 1 7 1 0 1 0 0 0 3 1 3 7
 8 3 8 7 5 2 8 8 6 5 8 7 5 3 3 2 0 8 3 8 1 4 2 0 6 1 7 1 7 7
 6 6 9 1 4 7 3 0 3 5 9 8 2 5 3 4 9 0 4 2 8 7 5 5 4 6 8 7 3 1
 1 5 9 5 6 2 8 6 3 8 8 2 3 5 3 7 8 7 5 9 3 7 5 1 9 5 7 7 8 1
 8 5 7 7 8 0 5 3 2 1 7 1 2 2 6 8 0 6 6 1 3 0 0 1 9 2 7 8 7 6
 6 1 1 1 9 5 9 0 9 2 1 6 4 2 0 1 9 8 9 3 8 0 9 5 2 5 7 2 0 1
 0 6 5 4 8 5 8 6 3 2 7 8 8 6 5 9 3 6 1 5 3 3 8 1 8 2 7 9 6 8

2 3 0 3 0 1 9 5 2 0 3 5 3 0 1 8 5 2 9 6 8 9 9 5 7 7 3 6 2 2
 5 9 9 4 1 3 8 9 1 2 4 9 7 2 1 7 7 5 2 8 3 4 7 9 1 3 1 5 1 5
 5 7 4 8 5 7 2 4 2 4 5 4 1 5 0 6 9 5 9 5 0 8 2 9 5 3 3 1 1 6
 8 6 1 7 2 7 8 5 5 8 8 9 0 7 5 0 9 8 3 8 1 7 5 4 6 3 7 4 6 4
 9 3 9 3 1 9 2 5 5 0 6 0 4 0 0 9 2 7 7 0 1 6 7 1 1 3 9 0 0 9
 8 4 8 8 2 4 0 1 2 8 5 8 3 6 1 6 0 3 5 6 3 7 0 7 6 6 0 1 0 4
 7 1 0 1 8 1 9 4 2 9 5 5 5 9 6 1 9 8 9 4 6 7 6 7 8 3 7 4 4 9
 4 4 8 2 5 5 3 7 9 7 7 4 7 2 6 8 4 7 1 0 4 0 4 7 5 3 4 6 4 6
 2 0 8 0 4 6 6 8 4 2 5 9 0 6 9 4 9 1 2 9 3 3 1 3 6 7 7 0 2 8
 9 8 9 1 5 2 1 0 4 7 5 2 1 6 2 0 5 6 9 6 6 0 2 4 0 5 8 0 3 8
 1 5 0 1 9 3 5 1 1 2 5 3 3 8 2 4 3 0 0 3 5 5 8 7 6 4 0 2 4 7

Στον Τίμαιο ο Πλάτων συσχετίζει

- το τετράεδρο με το πυρ,
- το οκτάεδρο με τον αέρα,
- το εξάεδρο με τη γη,
- το εικοσάεδρο με το νερό και
- το δωδεκάεδρο με την εικόνα ολοκλήρου του σύμπαντος ή, κατ' άλλους μελετητές, με τον αιθέρα (η πέμπτη ουσία, δηλαδή η μεμπτουσία).

Η πρώτη κατασκευή του πενταγωνικού δωδεκαέδρου αποδίδεται στον μεγάλο Αθηναίο μαθηματικό Θεαίτητο (415-369 π.Χ.), ο οποίος υπήρξε φίλος του Πλάτωνος, μαθητής του Πυθαγορείου μαθηματικού Θεοδώρου του Κυρηναίου και σύγχρονος του Αρχύτου του Ταραντίνου. Ο τρόπος κατασκευής και εγγραφής σε σφαίρα ενός οκταέδρου και ενός εικοσαέδρου (από τις απόρρητες Πυθαγόρειες γνώσεις) οφείλονται στον Θεαίτητο. Ο Ίππασος ο Μεταποντίνος (5^{ος} π.Χ. αιώνας), πατώντας τον Πυθαγόρειο όρκο σιωπής, τόλμησε και φανέρωσε στους μη μεμνημένους αυτά τα μυστικά και γι' αυτό, λέγεται, ότι εξαναγκάστηκε να αυτοκτονήσει δια πνιγμού στη θάλασσα.

Κύβος, η «Γεωμετρική Αρμονία» (Νικόμαχος, Εγχειρ. 12, 26,2)

«γεωμετρικὴν ἄρμονίαν φασὶ τὸν κύβον ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸ τρία διαστήματα ἡρμόσθαι ἰσάκις. ἐν γὰρ παντὶ κύβῳ ἦδε ἡ μεσότης ἐνοπτρίζεται. πλευραὶ μὲν γὰρ παντὸς κύβου εἰσὶν ἰβ', γωνίαι δὲ η', ἐπίπεδα δὲ ζ'. μεσότης ἄρα ὁ η' τῶν ζ' καὶ τῶν ἰβ' κατὰ τὴν ἄρμονικὴν».

- Δηλαδή στον κύβο προχωρώντας κατά το μήκος, το πλάτος και το ύψος κατά ἴσα διαστήματα, προκύπτει στερεό που συμφωνεί με τον εαυτό του.
- Στον κάθε κύβο διακρίνονται 12 ακμές, 8 κορυφές και 6 ἔδρες.
- Οι αριθμοί 6, 8, 12 συνιστούν αρμονική αναλογία, διότι $\frac{12}{6} = \frac{12-8}{8-6}$.

Στην εν λόγω αρμονική αναλογία διακρίνονται όλες οι μουσικές συμφωνίες.

- Η δια τεσσάρων συμφωνία είναι ο λόγος $\frac{8}{6}$, επειδή είναι ένας επίτριτος λόγος.
- Η δια πέντε συμφωνία είναι ο λόγος $\frac{12}{8}$, επειδή είναι ένας ημιόλιος λόγος.
- Η δια πασών συμφωνία εκφράζεται με τον λόγο $\frac{12}{6}$.

- Η δια πασών και η δια πέντε συμφωνία δηλαδή η $\frac{3}{1}$ εκφράζεται με το λόγο των διαφορών $\frac{12-6}{8-6}$.
- Η δις δια πασών συμφωνία είναι ορατή στο λόγο $\frac{8}{8-6}$.

Βάσει αυτών καταφαίνεται ότι σωστά η συγκεκριμένη αναλογικότητα ονομάζεται αρμονική και το ότι τον κύβο τον ονόμαζαν οι Πυθαγόρειοι «Γεωμετρική Αρμονία» κι αντιστρόφως.

Καταφαίνεται ότι μεταξύ των μερών (εδρών, ακμών, κορυφών) του κύβου και του οκταέδρου ισχύει η ταυτότητα του λόγου, σχέση μη υφισταμένη εις τα υπόλοιπα τρία Πλατωνικά στερεά (τετράεδρο, εικοσάεδρο, πενταγωνικό δωδεκάεδρο).

Επιπροσθέτως, όμως, οι τετραγωνικές έδρες του κύβου συντίθενται εκ δύο ίσων ισοσκελών ορθογωνίων τριγώνων, ενώ των υπολοίπων τεσσάρων Πλατωνικών στερεών οι ισόπλευρες τριγωνικές έδρες των (τετράεδρο, οκτάεδρο, εικοσάεδρο, πενταγωνικό δωδεκάεδρο) συντίθενται εξ έξι σκαληνών ορθογωνίων τριγώνων.

Για τα δύο προμνημονευθέντα χαρακτηριστικά και μόνον η γαία, ήτοι ο κύβος, στον Τίμαιο διαφοροποιείται από τα τέσσερα υπόλοιπα στερεά «φύσει» και «ονομασία».

Ο Πλάτων θεωρεί ότι τα μέρη του κύβου συνδέονται αρρήκτως μεταξύ των δι' ισχυρών δυνάμεων συνοχής, οι οποίες του προσδίδουν συνεκτικότητα και ικανότητα να αντιδρά σε παραμορφωτικές δυνάμεις. Δια τούτο με τον κύβο συσχετίζει ο Πλάτων την συνεκτική και στερεά γαία.

Το καθένα από τα άλλα τέσσερα Πλατωνικά στερεά (τετράεδρο, οκτάεδρο, εικοσάεδρο, πενταγωνικό δωδεκάεδρο) χαρακτηρίζεται –κατά τον Πλάτωνα- από έλλειψη συνοχής μεταξύ των μερών του και δια τούτο τα συσχετίζει με τα ρευστά πυρ, αήρ, ύδωρ, αιθήρ, αντιστοίχως, της ρευστότητός των δηλουμένης δια του καταληκτικού γράμματος **ρ** (ρω) του ονόματός των.

Εκ των ανωτέρω καταφαίνεται και η «ονομασία» διαφοροποίηση του συμβολιζομένου υπό του κύβου σώματος ονομάζεται γαῖα και όχι γαῖαρ.