ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ, ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΟΥΣΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ Τ.Κ. 157 84
e-mail: hspyridis@music.uoa.gr
☎ 210 - 72.77.832

Ερανίσματα από τη διδακτική και ερευνητική δραστηριότητά μου στο Τμήμα Μουσικών Σπουδών του Πανεπιστημίου Αθηνών

Ερανίσματα από τη διδακτική και ερευνητική δραστηριότητά μου στο Τμήμα Μουσικών Σπουδών του Πανεπιστημίου Αθηνών

Κυρίες και κύριοι,

είμαι Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής στο Τμήμα Μουσικών Σπουδών του Πανεπιστημίου Αθηνών. Η Γενική Συνέλευση *του Τμήματος κατά τη συνεδρία της στις 13-10-2004, σύμφωνα με τη διαδικασία που ορίζουν οι διατάξεις του άρθρου 28 παρ. 22 του Ν. 2083/1992, με εξέλεξε παμψηφεί* Διευθυντή του *Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας, το οποίο ιδρύθηκε με την υπ' αριθμόν* 16841/Β1/9-6-2004 Υπουργική απόφαση (Φ.Ε.Κ. 937/23-6-2004 τ.Β').

Κυρίες και κύριοι, ο πρωτοεισερχόμενος ως φοιτητής στο Τμήμα μας θα πρέπει να γνωρίζει τουλάχιστον τί είναι ήχος και ποια είναι τα χαρακτηριστικά του, γιατί έχουμε δύο αυτιά και όχι ένα, πώς ακούμε, πώς ομιλούμε και ποιές συχνοτικές περιοχές εννοούμε, όταν ομιλούμε για τους ήχους.
Μετά μεγάλης μου λύπης σας αναφέρω ότι στο Λύκειο της Ελλάδος –σε αντίθεση με το Λύκειο της Κύπρου- οι μαθητές ΔΥΣΤΥΧΩΣ δεν διδάσκονται τίποτα απ' όλα αυτά. Δηλαδή εισέρχονται στα Τμήματα Μουσικών Σπουδών χωρίς να γνωρίζουν τα στοιχειώδη περί την ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΝ.

Η διδασκαλία και η έρευνα που διεξάγω αναφέρονται σε όλους σχεδόν τους Τομείς της Επιστήμης, που συνδέονται με την Ακουστική. Τα κύρια υποστηρικτικά εργαλεία του διδακτικού και ερευνητικού μου έργου προέρχονται από το χώρο των Θετικών Επιστημών και ιδιαίτερα από τα επιστημονικά πεδία της Φυσικής, των Μαθηματικών και της Πληροφορικής.

Στον καιρό μας, κυρίες και κύριοι Σύνεδροι, ο κόσμος αποδεικνύεται τόσο πολύπλοκος, ώστε ελάχιστα από τα σημερινά προβλήματα μπορούν ν' αντιμετωπισθούν στα στενά όρια ενός και μόνον επιστημονικού κλάδου. Προβάλλει επιτακτικά η ανάγκη της διεπιστημονικής συνεργασίας με την υπέρβαση των όποιων συντεχνιακών εμποδίων, τη δημιουργία κοινής επιστημονικής γλώσσας κι εννοιολογίας, προκειμένου να προσεγγισθεί και κατανοηθεί η πολυπλοκότητα του περιβάλλοντος κόσμου.
Τα προβλήματα αυτά τα έχω τονίσει και τα έχουν κατανοήσει οι φοιτητές μου. Γι' αυτό εντείνουν συνεχώς τις προσπάθειές τους προκειμένου ν' αποκτήσουν όλο και περισσότερες γνώσεις και πληροφορίες από τα πολυειδή μαθήματα που διδάσκω.

Τα μαθήματα που διδάσκω στο Τμήμα Μουσικών Σπουδών του Πανεπιστημίου Αθηνών είναι τα εξής ένδεκα:

1. Φυσική και Μουσική Ακουστική
2. Εισαγωγή στους Ηλεκτρονικούς Υπολογιστές
3. Μαθηματικά του Μουσικού Ρυθμού
4. Ακουστική σχεδίαση κλειστών χώρων
5. Ακουστική σχεδίαση χώρων με Ηλεκτρονικό Υπολογιστή
6. Μικρόφωνα-Μεγάφωνα-Ηχεία
7. Εισαγωγή στην Ηχοληψία
8. Μουσική για Media
9. Ευκλείδου Κατατομή Κανόνος
10. Ο δυϊσμός του μουσικού διαστήματος
11. Πλάτωνος Τίμαιος

Με το πρώτο μάθημα, που είναι υποχρεωτικό, αποκτούν τις γνώσεις περί τον ήχον, το πρωτογενές υλικό της Επιστήμης τους.
Ζούμε στην εποχή της *«Πληροφορίας»*, στην εποχή του *«bit»*, που ήδη έχει σημαντικές επιπτώσεις στην ανθρώπινη σκέψη. Κάτω από αυτήν την προοπτική, είναι επιτακτική η ανάγκη να εκπαιδεύσουμε σήμερα τους μελλοντικούς Μουσικολόγους και στην Πληροφορική. Τις βασικές γνώσεις περί τον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή και τα Προγράμματα Επεξεργασίας Κειμένου (WORD), Στατιστικά Φύλλα (XL) και το INTERNET τις αποκτούν με το δεύτερο μάθημα, που είναι υποχρεωτικό, επίσης.

Με το τρίτο μάθημα αποκτούν εκείνες τις γνώσεις των Μαθηματικών, που θα τους βοηθήσουν να κατανοήσουν ακόμη και να συνθέσουν μουσική λ.χ. Συμβολική Μουσική κατά τον Ιάννη Ξενάκη.
Τα δύο επόμενα μαθήματα τους δίδουν γνώσεις για το πώς να διαμορφώνουν χώρους και να τους καθιστούν καταλλήλους για συγκεκριμένη χρήση λ.χ. για διαλέξεις, συναυλίες, home studios κ.λπ.
Τα επόμενα τρία μαθήματα ανοίγουν την κατεύθυνση της Ηχοληψίας. Φοιτητές μας με αυτές τις γνώσεις εργάσθηκαν ως Ηχολήπτες με συμβόλαιο στους Ολυμπιακούς και ΠαραΟλυμπιακούς Αγώνες της Αθήνας 2004.
Τα τρία τελευταία μαθήματα αφορούν στην Αρχαία Ελληνική Μουσική, αντιμετωπιζόμενη αυστηρά ως μαθηματική δομή. Μια οπτική με την οποία δεν συνηθίσαμε μέχρι τώρα ν' αντιμετωπίζουμε τη Μουσική των προγόνων μας.

Για τη σημερινή εισήγησή μου πραγματοποίησα ερανισμούς από τα μαθήματά μου περί την αρχαία Ελληνική μουσική και τη σύνθεση Συμβολικής Μουσικής.
Το πρώτο το θεωρώ εξαιρετικά σπουδαίο και σας προτρέπω ν' ασχοληθείτε συστηματικά ερευνητικά με αυτό. Αξίζει τον κόπο, πιστέψτε με.

Κύριοι σύνεδροι, μας μάθανε να λέμε ότι *η* **αρχαία Ελληνική μουσική κατέχει σπουδαία θέση ανάμεσα στους μουσικούς πολιτισμούς της αρχαιότητας.** Ότι ήταν μονοφωνική και ότι η εκτέλεσή της ήταν συνυφασμένη με συγκεκριμένες δραστηριότητες, εργασίες, γάμους, προσευχές κ.λπ. και ότι σχεδόν κάθε δραστηριότητα των προγόνων μας είχε το δικό της συγκεκριμένο είδος μουσικής. Μας μάθανε να μιλάμε για τη μαγική δύναμη που απεδίδετο στη μουσική από τους αρχαίους. Λ.χ. ο Αμφίων έπαιζε τη λύρα του και κινούσε κυκλώπειες πέτρες. Έτσι λέει η παράδοση ότι εκτίσθηκαν τα τείχη των Θηβών. Ή ότι ο Θραξ Ορφεύς με τη μουσική της λύρας του μάγευε ζώα και δένδρα.
Αλλά, κυρίες και κύριοι Μουσικολόγοι, η αρχαία ελληνική μουσική ήτο όντως μονοφωνική; Ένας λαός που έκτισε Παρθενώνες έμεινε στο μονότονο της μονοφωνίας; Είχε στη λύρα του τουλάχιστον επτά χορδές και τις έκρουε μία μία χωρίς να τις συν-κρούει; Δεν επιθυμώ να σας επηρεάσω. Θα σας αφήσω μόνους σας να αποφασίσετε. Εγώ θα σας αναγνώσω μερικά αποσπάσματα αρχαίων Ελλήνων αρμονικών. Εσείς, σας παρακαλώ, ψάξτε μόνοι σας και θα βρείτε κι άλλα στοιχεία.

Στα Λεξικά της αρχαίας ελληνικής γλώσσης διαβάζουμε: ***Συμφωνέω_ῶ, συμφωνία, σύμφωνος***· *(σὺν+φωνὴ) φωνῶ ὁμοῦ, ὁ συμφωνῶν κατὰ τὸν ἦχον, μουσικὴ συμφωνία (ἁρμονία).*

Ο Κλεονείδης (2ος μ.Χ. αιώνας) *(Εισαγ. 5)* δίνει τον ακόλουθο ορισμό της συμφωνίας: *"ἔστι δὲ συμφωνία μὲν κρᾶσις δύο φθόγγων ὀξυτέρου καὶ βαρυτέρου"* (συμφωνία είναι η ανάμειξη δύο φθόγγων, από τους οποίους ο ένας είναι ψηλότερος και ο άλλος χαμηλότερος).

Ο Πορφύριος (232-304 μ.Χ.) μνημονεύει τον ορισμό του Αιλιανού (από το έργο του *Τίμαιος*): "Συμφωνία είναι σύμπτωση και ανάμειξη *("ἐπὶ τὸ αὐτὸ πτῶσις καὶ κρᾶσις")* δύο φθόγγων διαφορετικών ως προς την οξύτητα και τη βαρύτητα", δηλαδή δύο φθόγγων διαφορετικού μουσικού ύψους.

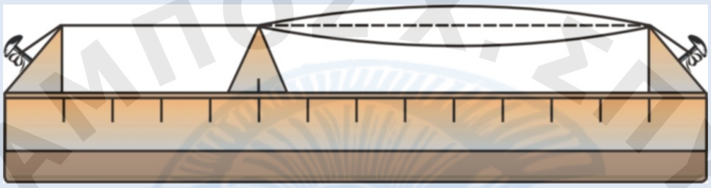
Ο Νικόμαχος (1ος μ.Χ. αιώνας) *(Εγχειρ. 12)* υποστηρίζει ότι σύμφωνα συστήματα είναι εκείνα των οποίων οι συστατικοί φθόγγοι, όταν συνακουσθούν *("ἅμα κρουσθέντες"),* αναμειγνύονται ο ένας με τον άλλον κατά τέτοιο τρόπο, ώστε δίνουν την εντύπωση ενός μόνον ήχου *("ἑνοειδῆ φωνὴν") (πρβ. Αριστείδης, Περὶ μουσ. 12 Μβ και Γαυδ. Εισαγ. 8).*

Ο Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.) *(Προβλ. ΧΙΧ, 38)* υποστηρίζει πως "ο λόγος για τον οποίον απολαμβάνουμε τη συμφωνία είναι το ότι είναι ανάμειξη αντιθέτων (φθόγγων) που έχουν σχέση ο ένας με τον άλλον"· και στα *Μουσικὰ Προβλήματα ΧΙΧ, 35,* λέει ότι η διὰ πασῶν είναι η πιο ωραία συμφωνία.

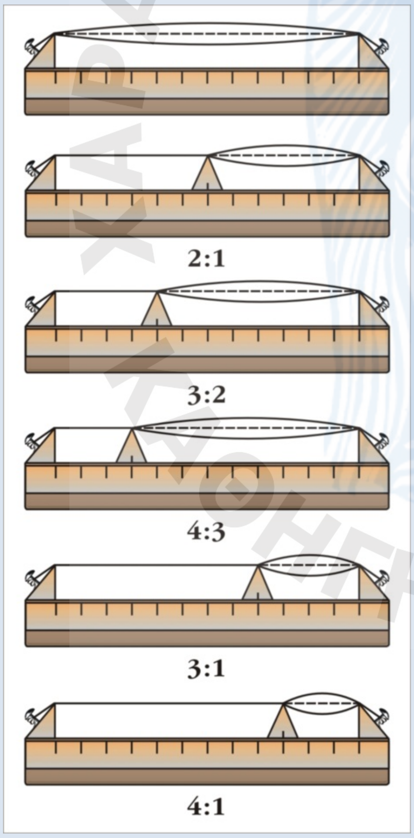
Ο Ευκλείδης (330-270 π.Χ.) *(Κατατ. Καν., Εισαγ. 17-22)* "Γινώσκομεν δὲ καὶ τῶν φθόγγων τοὺς μὲν συμφώνους ὄντας, τοὺς δὲ διαφώνους, καὶ τοὺς μὲν συμφώνους μίαν κρᾶσιν τὴν ἐξ ἀμφοῖν ποιοῦντας, τοὺς δὲ διαφώνους οὔ. τούτων οὕτως ἐχόντων εἰκὸς τοὺς συμφώνους φθόγγους, ἐπειδὴ μίαν τὴν ἐξ ἀμφοῖν ποιοῦνται κρᾶσιν τῆς φωνῆς, ...".

Πυθαγόρειο πείραμα Ακουστικής κατά Γαυδέντιο.

Η ενασχόληση του Πυθαγόρα με τη μουσική τον κατέστησε ευτυχή, διότι με την εφαρμογή των Μαθηματικών στο χώρο της Μουσικής και με την πραγματοποίηση «ψυχοακουστικών» πειραμάτων οδηγήθηκε στη σπουδαία και πολύ γόνιμη ανακάλυψη ότι το μουσικό ύψος των φθόγγων εξαρτάται από το δονούμενο μήκος των χορδών. Η ανακάλυψη αυτή προέκυψε από πειράματα, που πραγματοποίησε ο Πυθαγόρας επάνω στον «κανόνα» ή «μονόχορδο» (Εικόνα 1). Με τη βοήθεια κινητού καβαλάρη (υπαγωγέως ή μαγαδίου) ήταν δυνατόν να υποδιαιρεθεί η χορδή σε δύο τμήματα, ένα δονούμενο (=ηχούν) κι ένα ακίνητο (=σιγούν).
Η δόνηση των ηχούντων τμημάτων χορδής παρήγαγε ήχους διαφορετικών μουσικών υψών.



Εικόνα 1: Το μονόχορδο για τη μελέτη των νόμων των χορδών.



Στην εικόνα 2 φαίνεται κατά τον Γαυδέντιο[1] ο τρόπος, που πιθανώς πειραματίσθηκε ο Πυθαγόρας επάνω στον κανόνα κι ανεκάλυψε τις αριθμητικές σχέσεις των συμφωνιών.
Διήρεσε τη χορδή του μονοχόρδου σε δύο ίσα τμήματα με τη βοήθεια ενός κινητού καβαλάρη, του υπαγωγέα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής και στη συνέχεια το μισό μήκος αυτής. Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε το διπλάσιο διάστημα $\left(\frac{2}{1}\right)$. Το διάστημα αυτό κατά την Αριστοξένειο αντιμετώπιση παριστάνεται από το μήκος του ακινήτου τμήματος της χορδής του κανόνος (Εικόνα 2-$2^{ο}$ μονόχορδο) και ονομάζεται διάστημα διαπασών.

Εικόνα 2: Προσδιορισμός των αριθμητικών σχέσεων των μουσικών συμφωνιών στο μονόχορδο.

Κατόπιν διήρεσε κι αρίθμησε ολόκληρο το μήκος της χορδής του κανόνος σε τρία ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής και στη συνέχεια τα $\frac{2}{3}$ του μήκους αυτής. Διεπίστωσε ότι από

[1] **Γαυδέντιος ο φιλόσοφος**, θεωρητικός της μουσικής. Τοποθετείται από άλλους μεν στον $2^{ο}$ με $3^{ο}$ αιώνα μ.Χ. από άλλους δε στον $5^{ο}$ μ.Χ. αιώνα. Συνέγραψε το βιβλίο «*Αρμονική Εισαγωγή*», το οποίο αναφέρεται στους ήχους, τα διαστήματα, τα συστήματα, τα γένη κ.λπ. ακολουθώντας άλλοτε τις πυθαγόρειες και άλλοτε τις αριστοξένειες αντιλήψεις.

τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε το ημιόλιον διάστημα $\left(\frac{3}{2}\right)$. Το διάστημα αυτό κατά την Αριστοξένειο αντιμετώπιση παριστάνεται από το μήκος του ακινήτου τμήματος της χορδής του κανόνος (Εικόνα 2-3^{o} μονόχορδο) και ονομάζεται διάστημα διαπέντε.
Τέλος, διήρεσε κι αρίθμησε ολόκληρο το μήκος της χορδής του κανόνος σε τέσσερα ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής και στη συνέχεια τα $\frac{3}{4}$ του μήκους αυτής. Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε το επίτριτον διάστημα $\left(\frac{4}{3}\right)$. Το διάστημα αυτό κατά την Αριστοξένειο αντιμετώπιση παριστάνεται από το μήκος του ακινήτου τμήματος της χορδής του κανόνος (Εικόνα 2-4^{o} μονόχορδο) και ονομάζεται διάστημα διατεσσάρων.
Να σημειωθεί ότι οι παραπάνω ονομασίες των συμφώνων διαστημάτων κατά την Αριστοξένειο αντιμετώπισή τους προκύπτουν αβίαστα, διότι το μήκος του *μη ηχούντος* τμήματος της χορδής καθορίζεται στην περίπτωση της δια τεσσάρων συμφωνίας με τους αριθμούς 12 και 9 (ανάμεσα σε 4 τάστα) και στην περίπτωση της δια πέντε συμφωνίας με τους αριθμούς 12 και 8 (ανάμεσα σε 5 τάστα) (Εικόνα 2) επάνω σε κανόνα υποδιηρημένο σε 12 ίσα τμήματα.

Οι προμνημονευθείσες αριθμητικές σχέσεις 2/1 ή 3/2 ή 4/3 κ.λπ. δεν είναι και δεν μπορεί να αποτελούν αυτές καθεαυτές κάποιο μουσικό φαινόμενο και αυτό διότι η μουσική δεν υπάρχει έξω από το μυαλό του ανθρώπου. Για τον τρόπο με τον οποίο το μυαλό του ανθρώπου εκτελεί τις αλληλοσχετίσεις των ήχων προκειμένου να μετατραπούν σε μουσική, αναπτύχθηκε η θεωρία των ψυχαριθμών[2]. ***Ένας ψυχαριθμός εκφράζει τη σχέση δύο ήχων και παριστάνεται με ένα γινόμενο μόνον πρώτων αριθμών, υψωμένων σε κάποια θετική ή αρνητικκή δύναμη.***

Κάθε μουσικό διάστημα, που εκφράζεται από έναν ψυχαριθμό της μορφής
$2^{\kappa} \cdot 3^{\lambda} \quad \kappa, \lambda \in Z$, ονομάζεται **Πυθαγόρειο**.
Η συγκεκριμένη αριθμητική έκφραση οφείλεται στο γεγονός ότι τα Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα προκύπτουν από αλληλοπροσθέσεις ή/και αλληλοαφαιρέσεις των δύο θεμελειωδών μουσικών διαστημάτων, δηλαδή του επιτρίτου $\left(\frac{4}{3}\right)$ και του ημιολίου $\left(\frac{3}{2}\right)$.

Στον Πίνακα Ι παρουσιάζονται Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα με τις ονομασίες τους και τις αριθμητικές σχέσεις, που τα εκφράζουν.

Πίνακας Ι

Ονομασία	Αριθμητική έκφραση
Πυθαγόρειο κόμμα	$\frac{531441}{524288} = 2^{-19} \cdot 3^{12}$
Αποτομή μείζονος τόνου	$\frac{2187}{2048} = 2^{-11} \cdot 3^{7}$
Πυθαγόρειον δίτονον	$\frac{81}{64} = 2^{-6} \cdot 3^{4}$
Πυθαγόρειον τρίτονον	$\frac{729}{512} = 2^{-9} \cdot 3^{6}$
Επόγδοος τόνος	$\frac{9}{8} = 2^{-3} \cdot 3^{2}$
Διαπασών	$\frac{2}{1} = 2^{1} \cdot 3^{0}$

[2] Robert Tanner, Psycharithms as the mathematical nature of music, *The Journal of Musicological Research*, vol. 3, Numbers ¾, 1981.

Δις διαπασών	$\frac{4}{1} = 2^2 \cdot 3^0$
Διαπασών και δια πέντε	$\frac{3}{1} = 2^0 \cdot 3^1$
Διαπασών και δια τεσσάρων	$\frac{8}{3} = 2^3 \cdot 3^{-1}$
Δις διατεσσάρων	$\frac{16}{9} = 2^4 \cdot 3^{-2}$
Δις διαπέντε	$\frac{9}{4} = 2^{-2} \cdot 3^2$

Κάθε μουσικό διάστημα, που εκφράζεται από έναν ψυχαριθμό της μορφής $2^{\kappa} \cdot 3^{\lambda} \cdot 5^{\mu}$ $\kappa, \lambda, \mu \in Z$, ονομάζεται **Φυσικό**[3].

Η συγκεκριμένη αριθμητική έκφραση οφείλεται στο γεγονός ότι τα Φυσικά μουσικά διαστήματα προκύπτουν από αλληλοπροσθέσεις ή/και αλληλοαφαιρέσεις των τριών θεμελειωδών μουσικών διαστημάτων, δηλαδή του επιτρίτου $\left(\frac{4}{3}\right)$, του ημιολίου $\left(\frac{3}{2}\right)$ και της τρίτης $\left(\frac{5}{4}\right)$.

Κάθε μουσικό διάστημα, που εκφράζεται από έναν ψυχαριθμό της μορφής $2^{\kappa} \cdot 3^{\lambda} \cdot 5^{\mu} \cdot 7^{\nu}$ $\kappa, \lambda, \mu, \nu \in Z$, ονομάζεται **Εβδομικό**.

Κάθε μουσικό διάστημα, που εκφράζεται από έναν ψυχαριθμό της μορφής $2^{\kappa} \cdot 3^{\lambda} \cdot 5^{\mu} \cdot 7^{\nu} \cdot 11^{\xi}$ $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi \in Z$, ονομάζεται **Πτολεμαϊκό**.

Κάθε μουσικό διάστημα, που εκφράζεται από έναν ψυχαριθμό της μορφής $2^{\kappa} \cdot 3^{\lambda} \cdot 5^{\mu} \cdot 7^{\nu} \cdot 11^{\xi} \cdot 13^{\pi}$ $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \pi \in Z$, ονομάζεται **Παχυμέρειο**.

Κάθε μουσικό διάστημα, που εκφράζεται από έναν ψυχαριθμό της μορφής $2^{\kappa} \cdot 3^{\lambda} \cdot 5^{\mu} \cdot 7^{\nu} \cdot 11^{\xi} \cdot 13^{\pi} \cdot 17^{\rho}$ $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \pi, \rho \in Z$, ονομάζεται **Διχοτονικό**.

Κάθε μουσικό διάστημα, που εκφράζεται από έναν ψυχαριθμό της μορφής $2^{\kappa} \cdot 3^{\lambda} \cdot 5^{\mu} \cdot 7^{\nu} \cdot 11^{\xi} \cdot 13^{\pi} \cdot 17^{\rho} \cdot 19^{\sigma}$ $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \pi, \rho, \sigma \in Z$, ονομάζεται **Ερατοσθένειο**.

Κάθε μουσικό διάστημα, που εκφράζεται από έναν ψυχαριθμό της μορφής $2^{\kappa} \cdot 3^{\lambda} \cdot 5^{\mu} \cdot 7^{\nu} \cdot 11^{\xi} \cdot 13^{\pi} \cdot 17^{\rho} \cdot 19^{\sigma} \cdot 23^{\tau}$ $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \pi, \rho, \sigma, \tau \in Z$, ονομάζεται **Διαχρωματικό**.

Κάθε μουσικό διάστημα, που εκφράζεται από έναν ψυχαριθμό της μορφής $2^{\kappa} \cdot 3^{\lambda} \cdot 5^{\mu} \cdot 7^{\nu} \cdot 11^{\xi} \cdot 13^{\pi} \cdot 17^{\rho} \cdot 19^{\sigma} \cdot 23^{\tau} \cdot 29^{\upsilon}$ $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon \in Z$, ονομάζεται **Προεναρμόνιο**.

[3] Δημήτρης Ε. Λέκκας, Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ – ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Μουσικών Σπουδών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα 1995.

Κάθε μουσικό διάστημα, που εκφράζεται από έναν ψυχαριθμό της μορφής $2^{\kappa}\cdot 3^{\lambda}\cdot 5^{\mu}\cdot 7^{\nu}\cdot 11^{\xi}\cdot 13^{\pi}\cdot 17^{\rho}\cdot 19^{\sigma}\cdot 23^{\tau}\cdot 29^{\upsilon}\cdot 31^{\phi}\quad \kappa,\lambda,\mu,\nu,\xi,\pi,\rho,\sigma,\tau,\upsilon,\phi\in Z$, ονομάζεται **Εναρμόνιο**.

Ο μετασχηματιστής που ονομάζεται «κανών (=μονόχορδο)»

Τα κριτήρια των Αρμονικών (=θεωρητικών της μουσικής) είναι η ακοή και η λογική. Η ακοή συσχετίζεται με την ύλη και την μετατροπή. Η λογική συσχετίζεται με τη μορφή και την αιτία.

Η προσπάθεια των Πυθαγορείων σύμφωνα με τις «γραφές» εμφανίζεται να είναι η επιβολή με τη βοήθεια της θεωρίας των λόγων ενός συστήματος προσδιορισμού των μαθηματικών σχέσεων μεταξύ των φθόγγων της κλίμακας.
Εκείνο που πρέπει με έμφαση να τονισθεί είναι το γεγονός ότι, χρησιμοποιώντας ως όργανο μετρήσεως το αυτί, δεν μπορούσαν επακριβώς να μετρήσουν τις σχέσεις των μουσικών υψών των φθόγγων.

Κάποια στιγμή, όμως, αντελήφθησαν ότι, εάν επιδιώκεται η ακρίβεια στις μετρήσεις των σχέσεων των μουσικών υψών των φθόγγων, θα πρέπει να βρεθεί ένας μετασχηματισμός δια του οποίου να μεταφέρονται οι σχέσεις των μουσικών υψών από τον χώρο της ακοής στον χώρο του οφθαλμού, όπου είναι γενικώς αποδεκτό ότι μπορούν να πραγματοποιηθούν ακριβείς μετρήσεις.
Ο ζητούμενος μετασχηματισμός υλοποιείται με τον «κανόνα (=μονόχορδο)» και αφορά στον μετασχηματισμό των λόγων μουσικών υψών από τον χώρο της ακοής (frequency domain) σε λόγους δονουμένων τμημάτων χορδής (length domain) στο χώρο της οπτικής ως εξής:
Έστω ότι πάλλονται τμήματα χορδής με μήκη L_1 και L_2 ($L_1<L_2$) και παράγουν ήχους με συχνότητες f_1 και f_2, αντιστοίχως. Το μουσικό διάστημα στο χώρο της ακοής εκφράζεται ως ο λόγος των συχνοτήτων $\frac{f_1}{f_2}$ των δύο ακουομένων φθόγγων, όπου $\left(f_1 > f_2\right)$.

Από τη θεωρία των χορδών είναι γνωστόν ότι η σχέση $f=\frac{k}{2L}\cdot\sqrt{\frac{F}{\mu}}\quad k\in N$ δίνει τη συχνότητα, που παράγεται από τον αρμονικό k τάξης μιας πακτωμένης κατά τα δύο άκρα χορδής μήκους L, γραμμικής πυκνότητας μ και τεντωμένης με δύναμη F. Εφαρμόζοντας αυτή τη σχέση για δύο χορδές διαφορετικών μηκών λαμβάνομε δύο αναλυτικές εκφράσεις για τις συχνότητες f_1 και f_2, αντιστοίχως. Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις λαμβάνομε τη σχέση

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{\frac{k}{2L_1}\sqrt{\frac{T}{\mu}}}{\frac{k}{2L_2}\sqrt{\frac{T}{\mu}}}=\frac{L_2}{L_1}$$

η οποία εκφράζει τον συζητούμενο μετασχηματισμό, αφού ο λόγος των μηκών $\frac{L_2}{L_1}$ των δονουμένων τμημάτων της χορδής εκφράζει το μουσικό διάστημα στον χώρο της οπτικής. Η χάραξη κατά μήκος του κανόνος των πρεπόντων μηκών των δονουμένων τμημάτων χορδής, ώστε να αποδίδονται οι Πυθαγόρειες συμφωνίες και τα μουσικά διαστήματα, ονομάζεται Κατατομή του Κανόνος, για την οποία έγραψαν ο Πλάτων στον Τίμαιο, ο Ευκλείδης, ο Πορφύριος, ο Νικόμαχος, ο Αριστείδης Κοϊντιλιανός, ο Θέων ο Σμυρναίος κ.α.

Τα προηγούμενα προϋποθέτουν τη γνώση των μουσικών αναλογιών. Η θεωρία των αναλογιών φαίνεται να πρωτοεισήχθη από τον Θαλή (7ος – 6ος π.Χ. αι.) και μετά να υπέστη από τους Πυθαγορείους συνεχείς βελτιώσεις. Βρήκε εφαρμογή στον τομέα των καθαρών Μαθηματικών (Ίππασος ο Μεταποντίνος [6ος-5ος π.Χ. αι.], Ιπποκράτης ο Χίος [470-400 π.Χ.]) και στη Μουσική (Ίππασος ο Μεταποντίνος, Φιλόλαος [530-470 π.Χ.], Αρχύτας ο Ταραντίνος [430-350 π.Χ.]).

Η περίοδος κατά την οποία διδάσκονται οι μουσικές αναλογίες διακρίνεται στην αρχαιότερη και στη νεώτερη. Κατά την αρχαιότερη περίοδο οι πειραματισμοί πραγματοποιούνται επάνω στο μονόχορδο το υποδιηρημένο στα τέσσερα τμήματα. Την περίοδο αυτή δημιουργούνται οι πυθαγόρειες μουσικές έννοιες «διπλάσιον», «ημιόλιον» και «επίτριτον». Λόγω του συγκεκριμένου κανόνος εις τα 4 ισχύει η ρήση του Φιλολάου «ἁρμονίας δὲ μέγεθός ἐστι συλλαβὰ καὶ δι' ὀξειᾶν» **4** $\left(\frac{3}{4}\right)$ **3** $\left(\frac{2}{3}\right)$ **2** και όχι το αντίστροφο**.**

Κατά την νεώτερη περίοδο οι πειραματισμοί πραγματοποιούνται επάνω στο μονόχορδο το υποδιηρημένο στα δώδεκα τμήματα. Τώρα πια ισχύει **ευθέως** και **αντιστρόφως** η παραπάνω ρήση του φιλολάου διότι

12 $\left(\frac{3}{4}\right)$ **9** $\left(\frac{2}{3}\right)$ **6** και **12** $\left(\frac{2}{3}\right)$ **8** $\left(\frac{3}{4}\right)$ **6**.

Τρεις αναλογίες, η Αριθμητική, η Γεωμετρική και η Αρμονική (ή Υπενάντιος), ήσαν γνωστές στους πιο αρχαίους Μαθηματικούς και οι οποίες παρουσιάσθηκαν στη φιλοσοφία του Πυθαγόρα (580-490 π.Χ.), του Πλάτωνα (427-347 π.Χ.) και του Αριστοτέλη (384-322 π.Χ.). Αυτές οι τρεις αναλογίες σύμφωνα με τον *Ιάμβλιχο* (346-414 μ.Χ.) χρησιμοποιήθηκαν από τον *Πλάτωνα* μέχρι τον *Ερατοσθένη (276-194 π.Χ.)*.
Για τρεις δοθέντες φυσικούς (ακεραίους θετικούς) αριθμού α>β>γ ισχύουν:

α/α	Ονομασία	Μαθηματικός Ορισμός	Μέσος	Παράδειγμα αριθμητικό
1	Αριθμητική	$\beta-\alpha=\gamma-\beta$	$\beta_\alpha=\frac{\alpha+\gamma}{2}$	1,2,3
2	Γεωμετρική	$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta}$	$\beta_\gamma=\sqrt{\alpha\cdot\gamma}$	1,2,4
3	Αρμονική	$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}$	$\beta_{\alpha\rho\mu}=\frac{2\alpha\cdot\gamma}{\alpha+\gamma}$	3,4,6

Επί των τριών αυτών αναλογιών στηρίζεται ολόκληρο το θεωρητικό μαθηματικό οικοδόμημα της Πυθαγορείου μουσικής. Ο μη γνώστης των αναλογιών αποκλείεται να κατανοήσει ΠΛΗΡΩΣ την αρχαιοελληνική μουσική και τη φιλοσοφία του Πλάτωνος, η οποία διατυπούται με μουσικούς όρους.

τῆς ἀμερίστου
καὶ ἀεὶ κατὰ ταὐτὰ ἐχούσης οὐσίας καὶ τῆς αὖ περὶ τὰ σώματα
γιγνομένης μεριστῆς τρίτον ἐξ ἀμφοῖν ἐν μέσῳ συνεκεράσατο
οὐσίας εἶδος, τῆς τε ταὐτοῦ φύσεως [αὖ πέρι] καὶ τῆς τοῦ
ἑτέρου, καὶ κατὰ ταὐτὰ συνέστησεν ἐν μέσῳ τοῦ τε ἀμεροῦς
αὐτῶν καὶ τοῦ κατὰ τὰ σώματα μεριστοῦ· καὶ τρία λαβὼν

(Πλάτωνος Τίμαιος 35 α1-35 α6)

Τῶν δὲ μεσοτήτων τριῶν οὐσῶν ἡ μὲν γεωμετρικὴ τὸ οὐσιῶδές πως συνδεῖ τῶν ψυχῶν, ἡ δὲ ἁρμονικὴ τὴν ταυτότητα, ἡ δὲ ἀριθμητικὴ τὴν ἑτερότητα·

(Γεωργίου του Κεδρηνού Σύνοψις Ιστοριών, 1058)

Γενικά, δοθέντων δύο αριθμών χ, y (έστω χ<y) ισχύει η πολλαπλή ανισότητα, που απεδείχθη από τους Πυθαγορείους: χ < αρμονικός μέσος < γεωμετρικός μέσος < αριθμητικός μέσος < y ή

$$x < \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} < \sqrt{x \cdot y} < \frac{x+y}{2} < y \quad \text{ή} \quad x < \beta_{\alpha\rho\mu} < \beta_{\gamma} < \beta_{\alpha} < y$$

ακόμη

$$\beta_{\alpha\rho\mu} = \frac{2\alpha \cdot \gamma}{\alpha+\gamma} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\frac{\alpha+\gamma}{2}} = \frac{\beta_{\gamma}^{2}}{\beta_{\alpha}} \quad \text{δηλαδή} \quad \frac{\beta_{\alpha\rho\mu}}{\beta_{\gamma}} = \frac{\beta_{\gamma}}{\beta_{\alpha}}$$

Η αρμονία των σφαιρών κατά τον Πυθαγόρα

Η θεωρία για την αρμονία των σφαιρών αποτελεί ένα πυθαγόρειο δόγμα, το οποίο διατυπώθηκε από τον ίδιο τον Πυθαγόρα.
Όπως γράφει ο Ιάμβλιχος: «Συγκεντρώνοντας ο Πυθαγόρας την ακοή και τη σκέψη του, βύθιζε τον εαυτό του στις κινούμενες αρμονίες του κόσμου, τις οποίες μόνο ο ίδιος μπορούσε ν' ακούσει και να κατανοήσει».

Από τον Θέωνα το Σμυρναίο (XV 140) σώζονται μερικοί εξάμετροι στίχοι από ένα διδακτικό ποίημα του Αλεξάνδρου του Αιτωλού με θέμα την αρμονία των σφαιρών.

γαῖα μὲν οὖν ὑπάτη τε βαρεῖα τε μεσσόθι ναίει·
ἀπλανέων δὲ σφαῖρα συνημμένη ἔπλετο νήτη·
μέσσην δ' ἠέλιος πλαγκτῶν θέσιν ἔσχεθεν ἄστρων·
τοῦ δ' ἀπὸ δὴ ψυχρὸς μὲν ἔχει διὰ τέσσαρα κύκλος·
κείνου δ' ἡμίτονον φαίνων ἀνίησι χαλασθείς,
τοῦ δὲ τόσον φαέθων ὅσον ὄβριμος Ἄρεος ἀστήρ·
ἠέλιος δ' ὑπὸ τοῖσι τόνον τερψίμβροτος ἴσχει,
αἴγλης δ' ἠελίοιο τριημίτονον Κυθέρεια·
ἡμίτονον δ' ὑπὸ τῷ στίλβων φέρεθ' Ἑρμείαο,
τόσσον δὲ χρωσθεῖσα φύσιν πολυκαμπέα μήνη·
κέντρου δ' ἠελίοιο θέσιν διὰ (πέντ') ἔλαχε χθών·
αὕτη πεντάζωνος ἀπ' ἠέρος εἰς φλογόεν πῦρ
ἁρμοσθεῖσ' ἀκτῖσι πυρὸς κρυερῇσί τε πάχναις
οὐρανοῦ ἑξάτονον τόνον ἔσχεθε τὸν διὰ πασῶν.
τοίην τοι σειρῆνα Διὸς παῖς ἥρμοσεν Ἑρμῆς,
ἑπτάτονον κίθαριν, θεομήστορος εἰκόνα κόσμου.

(Ερμηνεία)
Η μεν γη λοιπόν σαν προσλαμβανόμενος τοποθετείται στο κέντρο,
η δε σφαίρα των απλανών αστέρων ήταν πάντοτε η νήτη συνημμένων,
ο δε ήλιος κατείχε τη μέση των περιπλανομένων άστρων,
κι από 'κείνον (τον ήλιο) η γυάλινη σφαίρα (των απλανών) σχηματίζει το διάστημα της τετάρτης,
κι από 'κείνη (τη γυάλινη σφαίρα των απλανών) ο Κρόνος χαλαρούμενος κατέρχεται ένα ημιτόνιο,
κι απ' αυτόν (τον Κρόνο) ο Δίας απέχει όσο κι απ' τον ισχυρό αστέρα του Άρη,
έναν τόνο πιο κάτω απ' αυτούς είναι ο ήλιος,η χαρά των θνητών,
κι από την αίγλη του ήλιου ένα τριημιτόνιο μακριά η Αφροδίτη,
ένα ημιτόνιο χαμηλότερα κυλά ακτινοβόλος ο Ερμής,
τόσο λοιπόν (δηλαδή ένα ημιτόνιο) έπειτα η σελήνη, που χιλιοποίκιλες αποχρώσεις δίνει στη φύση,
από το κέντρο, δηλαδή τη θέση του ήλιου, έλαχε η γη σε διάστημα πέμπτης,
πέντε είναι οι ζώνες της, από τον ομιχλώδη αέρα (τους πόλους)
ως το φλογερό πυρ (τους τροπικούς),

κι είναι προσαρμοσμένη στις διάπυρες ακτίνες και στις παγετώδεις πάχνες.
Με έξι τόνους ο ουρανός βρίσκεται σε διάστημα ογδόης.
Τέτοιου είδους πράγματι σειρήνα συνταίριασε ο Ερμής, ο γιος του Δία,
δηλαδή επτάχορδη λύρα, εικόνα του θεόπνευστου κόσμου.

Με τους στίχους αυτούς ο Αλέξανδρος τοποθετεί τις ουράνιες σφαίρες επάνω σε τρία τετράχορδα κι έναν προσλαμβανόμενο (Γη). Με το πρώτο τετράχορδο τα άλλα δύο ενώνονται το ένα με συναφή και το άλλο με διάζευξη. Το πρώτο τετράχορδο (Σελήνη, Ερμής, Αφροδίτη, Ήλιος) είναι του χρωματικού γένους με δομή από την υπάτη προς τη νήτη ημιτόνιο-ημιτόνιο-τριημιτόνιο. Το συνημμένο τετράχορδο (Ήλιος, Άρης, Κρόνος, Απλανείς αστέρες) είναι κι αυτό του χρωματικού γένους με δομή από τη μέση προς τη νήτη συνημμένων τριημιτόνιο-ημιτόνιο-ημιτόνιο. Από το διεζευγμένο τετράχορδο (Άρης, Κρόνος, Απλανείς αστέρερς, -) δεν χρησιμοποιεί τη νήτη, παρά μόνον τις άλλες τρεις βαθμίδες, διότι του αρκούν για να συμπληρώσει τη διαπασών (οκτάβα). Το τετράχορδο αυτό είναι του διατονικού γένους με δομή από την παραμέση προς τη νήτη τόνος-ημιτόνιο-τόνος.
Βλέπετε ότι για όλα τα επιστημονικά θέματα της εποχής εχρησιμοποιείτο μουσική ορολογία.

Στοιχεία Θεωρίας Γλωσσών

Όταν θέλουμε να μάθουμε μία γλώσσα, μαθαίνουμε το αλφάβητό της.Το **αλφάβητο** είναι ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων. Τα στοιχεία του συνόλου αυτού ονομάζονται **γράμματα**. Παραθέτοντας κάποια γράμματα του αλφαβήτου το ένα κατόπιν του άλλου, σχηματίζουμε μία **λέξη**. Με την **παράθεση λέξεων** τη μία δίπλα στην άλλη προκύπτουν οι σύνθετες λέξεις.

Με μια διαδικασία αντιστοιχίας, που αναπτύσσω στο βιβλίο μου «Η Πληροφορική στην Εθνομουσικολογία» η έννοια *“μουσική λέξη”* συμπίπτει απόλυτα με την έννοια *“μουσικό μέτρο”.* Δηλαδή : *μουσική λέξη = μουσικό μέτρο*.

Γλώσσα του απλού διμερή ρυθμού
Είναι η ρυθμική γλώσσα των δύο ογδόων (2/8) και, θεωρώντας ως μικρότερη χρονική διάρκεια αυτήν του 1/16, τα μουσικά της μέτρα απαντώνται όλο-όλο με 8 διαφορετικές μορφές.

Γλώσσα του απλού τριμερή ρυθμού
Είναι η ρυθμική γλώσσα των τριών ογδόων (3/8) και, θεωρώντας πάλι ως μικρότερη χρονική διάρκεια αυτήν του 1/16, τα μουσικά της μέτρα απαντώνται όλο-όλο με 30 διαφορετικές μορφές.

Η γλώσσα του σύνθετου διμερή ρυθμού
Συνδυάζει τη γλώσσα του απλού διμερή ρυθμού με τον εαυτό της.
Η γλώσσα λ.χ. των 4/8, δηλαδή των 2·2/8 περιλαμβάνει συνολικό πλήθος διαφορετικών μουσικών μέτρων, που υπολογίζεται ως εξής: $N_{4/8} = N_{2/8} \cdot N_{2/8} = 8 \cdot 8 = 64$

Η γλώσσα του σύνθετου τριμερή ρυθμού
Συνδυάζει τη γλώσσα του απλού τριμερή ρυθμού με τον εαυτό της. Η γλώσσα λ.χ. των 6/8, δηλαδή των 2·3/8 περιλαμβάνει συνολικό πλήθος διαφορετικών μουσικών μέτρων, που υπολογίζεται ως εξής: $N_{6/8} = N_{(3+3)/8} = 30 \cdot 30 = 900$

Η γλώσσα του μικτού ρυθμού
Συνδυάζει τη γλώσσα του απλού διμερή και του απλού τριμερή ρυθμού. Απαραίτητη είναι η εφαρμογή της Συνδυαστικής Αναλύσεως για τον υπολογισμό του συνολικού πλήθους των διαφορετικών μουσικών μέτρων.

Το σύνολο των μετρικών μορφών του ρυθμού των 9/8 μπορεί να βρεθεί ως εξής:
δομή 9/8 (3+3+3)/8 ή <u>(3+2+2+2)/8</u> ή (2+3+2+2)/8 ή (2+2+3+2)/8 ή <u>(2+2+2+3)/8</u>
(Οι υπογραμμισμένες μορφές είναι αυτές που έχουν επικρατήσει στη δημοτική μας μουσική)
$N_{(3+3+3)/8} = N_{3/8} \cdot N_{3/8} \cdot N_{3/8} = 30 \cdot 30 \cdot 30 = 27.000$

$N_{(3+2+2+2)/8} = N_{3/8} \cdot N_{2/8} \cdot N_{2/8} \cdot N_{2/8} = 30 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 15.360$
$N_{(2+3+2+2)/8} = N_{2/8} \cdot N_{3/8} \cdot N_{2/8} \cdot N_{2/8} = 8 \cdot 30 \cdot 8 \cdot 8 = 15.360$
$N_{(2+2+3+2)/8} = N_{2/8} \cdot N_{2/8} \cdot N_{3/8} \cdot N_{2/8} = 8 \cdot 8 \cdot 30 \cdot 8 = 15.360$
$N_{(2+2+2+3)/8} = N_{2/8} \cdot N_{2/8} \cdot N_{2/8} \cdot N_{3/8} = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 30 = 15.360$

$N_{9/8ολ} = 27.000+4 \cdot 15.360= 88.440$

Χωρίς τον περιορισμό τα εν λόγω μουσικά μέτρα να δομούνται με την παράθεση του απλού διμερή και του απλού τριμερή ρυθμού, με κατάλληλο λογισμικό σε ηλεκτρονικό υπολογιστή προκύπτει ότι το σύνολο των μετρικών μορφών του ρυθμού των 9/8 είναι 98.226. Δηλαδή 98.226-88.440=9.786 διαφορετικές μορφές μουσικών μέτρων πιθανώς να μη μπορούν να εκτελεσθούν από άνθρωπο μουσικό εκτελεστή.

Η Φυσική και τα Μαθηματικά ως «εργαλεία» για τη Σύνθεση Μουσικής

Θεωρητικά, το ανθρώπινο αυτί αντιλαμβάνεται ήχους με συχνότητα μεταξύ των 20 - 20.000 Hz. Απ᾽ αυτήν την πληθώρα των συχνοτήτων, λαμβανομένης υπόψη και της διακριτικής ικανότητος του ανθρωπίνου αυτιού στην κάθε επί μέρους συχνοτική περιοχή, επιλέγονται κάποιες ως «νότες» προκειμένου να συντεθεί μουσική. Αυτή η άνευ προδιαγραφών επιλογή των «νοτών» θα οδηγούσε σε μια «χαοτική» συμπεριφορά του ηχητικού υλικού μέσα στο χώρο της μουσικής.

Προκειμένου ν' αποφευχθεί αυτό το «χάος», όσον αφορά στο χώρο των μουσικών υψών, ο άνθρωπος επέβαλε «δεσμούς», περιορίζοντας, έτσι, το πλήθος των συχνοτήτων, που σαν υποψήφιες «νότες» θα διεκδικούσαν να επιλεγούν για τη σύνθεση μιας μουσικής δημιουργίας.

Οι συγκεκριμένοι περιορισμοί θα μπορούσαν να τεθούν από τη μεριά του συνθέτη με την εφαρμογή των όσων ο ίδιος διδάχθηκε σε κάποιο Ωδείο ή σε κάποιο Τμήμα Μουσικών Σπουδών π.χ. εύφωνα ή διάφωνα μουσικά διαστήματα, μουσικοί τρόποι, μουσικές κλίμακες, κανόνες για τη μελωδία, την αρμονία κλπ.

Θα μπορούσε, όμως, κάλλιστα ο συνθέτης να επιβάλλει τάξη στο «χάος» του ηχητικού του υλικού και να συνθέσει ένα μουσικό έργο επιλέγοντας και εφαρμόζοντας κάποια Θεωρία από τα Μαθηματικά ή τη Φυσική π.χ. Θεωρία Συνόλων, Θεωρία Πιθανοτήτων, Θεωρία Πληροφοριών, Θεωρία Καταστροφών, Θεωρία Παιχνιδιών, Θεωρία Συμμετριών, Θεωρία Χρυσής Τομής, Νόμος της ραδιενεργού διασπάσεως, Νόμος των τελείων αερίων, Κίνηση Brown κ.λ.π.

Πολλοί σύγχρονοι συνθέτες με κύριο αντιπρόσωπό τους τον Γιάννη Ξενάκη έγραψαν μουσική στηριγμένοι στις προαναφερθείσες Θεωρίες και Νόμους.

Πρέπει να σημειωθεί με έμφαση ότι ένας ακροατής δεν μπορεί να καταλάβει τη μουσική σαν δομή και σαν αισθητικό περιεχόμενο μόνον ακούγοντάς την. Η μουσική πρέπει να κατανοείται σε σχέση με τη «γεννεσιουργό» σκέψη, που τη συνθέτει, για να καταστούν λεπτομερώς γνωστές οι νοητικές τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για την επίτευξη της βαθειάς συγκίνησης των ανθρώπων.

Στη συνέχεια θα παρουσιασθεί το σκεπτικό δόμησης μιας μουσικής σύνθεσης, με τίτλο «ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ», η οποία γράφτηκε από τη Μαργαρίτη Μυρσίνη, φοιτήτρια κάποτε του Τμήματος Μουσικών Σπουδών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, στα πλαίσια μαθήματός μου σχετικού με τη Μαθηματική σύνθεση μουσικής. Προκειμένου να επιβάλλει η συνθέτης «τάξη» στο «χαοτικό» ηχητικό υλικό, έλαβε υπόψη της τη Θεωρία των Συνόλων, τη Θεωρία των Καρτεσιανών γινομένων, τη Θεωρία περί Συμμετρίας, το Θεώρημα της Χρυσής τομής και τις σειρές Fibonacci και Lucas.

Συμμετρία

Αντιμετωπίζοντας αόριστα την έννοια «συμμετρία» λέμε ότι σημαίνει την αρμονία των αναλογιών. Η συμμετρία, αντιμετωπιζόμενη άλλοτε με φιλοσοφική και άλλοτε με μαθηματική

σημασία, βρίσκει μεγάλη ποικιλία εφαρμογών στην ανόργανη και στην οργανική φύση. Η ίδια έννοια είτε αντιμετωπίζεται με την πλατιά είτε με τη στενή της σημασία, είναι μια αντίληψη με την οποία ο άνθρωπος δια μέσου των αιώνων προσπάθησε να κατανοήσει και να δημιουργήσει τάξη, ομορφιά και τελειότητα.

Τα πιο εντυπωσιακά παραδείγματα συμμετρίας στον ανόργανο κόσμο είναι οι κρύσταλλοι και στον κόσμο της μουσικής είναι οι «κατοπτρικές» φούγκες του J. S. Bach από το έργο του «Η τέχνη της Φούγκας».

Περί του άκρου και μέσου λόγου ή περί του Θεωρήματος της Χρυσής Τομής

Το θεώρημα **αφορά στον χωρισμό ενός ευθυγράμμου τμήματος σε δύο** άνισα **μέρη**, τέτοια ώστε **«Ο λόγος του μεγαλύτερου προς το μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα ισούται με το λόγο του όλου προς το μεγαλύτερο ευθύγραμμο τμήμα»**. Ο λόγος της χρυσής τομής ισούται με $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618...$ και συμβολίζεται με το γράμμα Φ, **από το όνομα του αρχαίου γλύπτη Φειδία** και ονομάζεται και χρυσός αριθμός. Ο αριθμός Φ αναζητήθηκε και βρέθηκε όχι μόνο στην Τέχνη, αλλά και στη φύση.

Στην περίπτωση ανάλυσης ή σύνθεσης ενός μουσικού έργου βάσει του θεωρήματος της Χρυσής τομής χρησιμοποιείται ο αριθμός φ, που ισούται με το δεκαδικό μέρος του χρυσού αριθμού Φ, δηλαδή φ=0,618...

Άκρος και Μέσος Λόγος

$$\frac{\text{ΜΕΓΑΛΟ}}{\text{ΜΙΚΡΟ}}=\frac{\text{ΟΛΟ}}{\text{ΜΕΓΑΛΟ}} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{x+y}{x}$$

Η λύση αυτής της εξισώσεως επιτυγχάνεται με διαφόρους τρόπους.
Επί παραδείγματι, μπορεί να λυθεί ως προς x, θέτοντας y=1 ή να λυθεί ως προς y, θέτοντας x=1.

$$\frac{x+1}{x}=\frac{x}{1} \Rightarrow x+1=x^2 \Rightarrow x^2-x-1=0$$

$$x=\frac{\pm\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow x_1=\frac{+\sqrt{5}+1}{2}=1{,}618033988... \quad \kappa\alpha\iota \quad x_2=\frac{-\sqrt{5}+1}{2}=-0{,}618033988...$$

$$\frac{y+1}{1}=\frac{1}{y} \Rightarrow y(y+1)=1 \Rightarrow y^2+y-1=0$$

$$y=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow y_1=\frac{+\sqrt{5}-1}{2}=0{,}618033988\ldots \;\; \kappa\alpha\iota \;\; y_2=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}=-1{,}618033988\ldots$$

Εάν τεθεί $x+y=1 \Rightarrow y=1-x$

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}= \Rightarrow 1-x=x^2 \Rightarrow x^2+x-1=0$$

$$x=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x_1=\frac{+\sqrt{5}-1}{2}=0{,}618033988\ldots \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x_2=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}=-1{,}618033988\ldots$$

Στο έργο HERMA ο Ιάννης Ξενάκης, θεώρησε το μήκος ολοκλήρου του έργου ίσο με τη μονάδα (1) και το μήκος του μεγαλυτέρου τμήματός του ίσο προς φ=0,618 ολόκληρου του μήκους. Στο σημείο αυτό η μουσική πλοκή του έργου κορυφούται.
Στο έργο οι αριθμοί των μουσικών μέτρων, όπου ενεργοποιούνται κάποια μαθηματικά σύνολα, συμπίπτουν με αριθμούς είτε της σειράς Fibonacci, είτε της σειράς Lucas είτε κάποιας αναλογίας.

<u>Η σειρά ή η ακολουθία του Fibonacci</u>
από το όνομα του Leonardo της Πίζα ή Filius Bonacci, τον Μαθηματικό του Μεσαίωνα, στον οποίο χρεώνεται η εισαγωγή των Αραβικών αριθμών στην Ευρώπη το 1202.

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	...
1	1	2	3	5	8	13	...

$F_1=F_2=1$ και $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ για n>2

<u>Σχόλιο δικό μου:</u> Ο Fibonacci στο βιβλίο του *Liber abaci* (1202) ισχυρίζεται ότι επενόησε την ομώνυμη σειρά των αριθμών μελετώντας τον τρόπο πολλαπλασιασμού των κουνελιών στην αυλή του.
Εάν ανατρέξουμε στη δεκάτη αναλογία των Πυθαγορείων, η οποία είναι $\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}=\frac{\beta}{\gamma} \Rightarrow \alpha=\beta+\gamma$ για $\forall \; \alpha>\beta>\gamma\in\mathrm{N}$ προκύπτει η σειρά Fibonacci χωρίς καμμιά σχέση με τα κουνέλια!

<u>Η σειρά ή η ακολουθία του Lucas</u>
προς τιμήν του Γάλλου μαθηματικού του 19[ου] αι. E. Lucas. Αυτός έδωσε στην ακολουθία Fibonacci το όνομά της.

L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	...
1	3	4	7	11	18	...

Τη χρυσή τομή συναντούμε

1. Στο α**νθρώπινο Σώμα**:

i) τα μήκη των φαλάγγων των δακτύλων
ii) Ο ομφαλός χωρίζει το ανθρώπινο σώμα με βάση το θεώρημα της χρυσής τομής.

2. Στη **Φυλλοταξία**, δηλαδή **στη διάταξη φύλλων και λουλουδιών στα φυτά.**

5. Σ**τη γενεαλογία των μελισσών**

6. Σ**τις αποστάσεις των πλανητών από τον 'Ηλιο**

7. Σ**ε προβλήματα της κίνησης των κακοηθών καρκινικών κυττάρων**

8. Στην **Αρχιτεκτονική**

9. Στη **Γλυπτική**

Η χρυσή τομή ανακαλύπτεται στη ζωγραφική των έργων των Fra Bartholomeo, Bellini, Botticellii, Cimabue, Durer, della Francesca, el Greco, Masaccio, Raphael, Titian, Σεζάν και Max Paris καθώς επίσης και στη σύγχρονη μουσική, όπως είναι τα έργα των Binchois, Gibbons, Jannequin, Maffoni, Obrecht, Sermisy, Dufay, Cornelius Heyns, Machaut, Bach, Beethoven, Handel, Haydn, Mozart, Cezanne, Muxfield Parrish, Berg, Brahms, Chopin, Debussy, Delius, Dvorak, MacDowell, Mendelssohn, Rachmaninoff, Saint-Saens, Schoenberg, Schubert, Schumann, Scriabin, Tchaikovsky, Wagner, Webern, Wolf, Xenakis.

Ανάλυση της δομής της σύνθεσης «ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ»

Η σύνθεση «Συμμετρία» εξελίσσεται σε 100 μουσικά μέτρα, τα οποία χωρίζονται σε τρία μέρη με βάση τα εξής:

1. Σύνολα

Για τη σύνθεση του έργου «Συμμετρία» χρησιμοποιήθηκαν τα παρακάτω σύνολα:

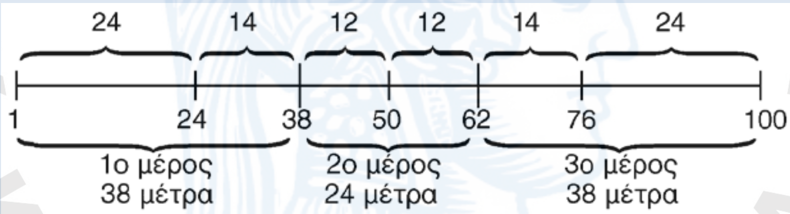
Α= (λα, σιb, ντο, ρε)
Β= (ρε, μιb, φα, σολ)
Γ= (λα, σι, ντο#, ρε#, μι)
Δ= (ρε#, μι, φα#, σολ#, λα#)
Α $\cup$ Β= (λα, σιb,ντο, ρε, μιb, φα, σολ)
Β $\cup$ Δ= (ρε, ρε#, μι, φα, φα#, σολ, σολ#, λα#)
(Α $\cap$ Β) $\cup$ (Γ $\cap$ Δ)= (ρε, λα)
$Γ^c \cap Δ^c$= (λα, σιb, ντο, ρε, μιb, φα, σολ)
$Α^c \cap Β^c$= (λα#, σι, ντο#, ρε#, μι, φα#, σολ#)
$Β^c$-Γ= (λα#, σιb, ντο, φα#, σολ#)
Ω είναι το γενικό σύνολο.

Στο πρώτο μέρος, που είναι μονοφωνικό, χρησιμοποιούνται τα σύνολα Α, Β, Γ, Δ, $A \cup B$, $\Gamma \cup \Delta$ και $(A \cap B) \cup (\Gamma \cap \Delta)$.
Στο δεύτερο μέρος, που είναι πολυφωνικό, χρησιμοποιούνται τα σύνολα Α, Β, Γ, Δ σε τρεις ή τέσσερις φωνές μαζί με καρτεσιανά γινόμενα συνόλων, όπως εξηγείται παρακάτω.
Στο τρίτο μέρος, που είναι και αυτό μονοφωνικό, χρησιμοποιούνται τα σύνολα Α, Β, Γ, Δ, $\Gamma^c \cap \Delta^c$, $A^c \cap B^c$ και B^c-Γ.

2. Χωρισμός μερών και καθορισμός σημείων κορύφωσης

Η σύνθεση είναι τριμερής και δομήθηκε με το εξής μαθηματικό σκεπτικό:
Αρχικά εφαρμόσθηκε το Θεώρημα της Χρυσής Τομής στην ολότητα των 100 μουσικών μέτρων και, έτσι, η σύνθεση χωρίσθηκε σε δύο τμήματα των 62 και των 38 μουσικών μέτρων ($0.618 \times 100 = 61{,}8 \cong 62$ και $100 - 62 = 38$), αντίστοιχα.

Το Θεώρημα της Χρυσής Τομής εφαρμόσθηκε εκ νέου στο τμήμα των 62 μουσικών μέτρων και προέκυψαν άλλα δύο τμήματα των 38 και 24 μουσικών μέτρων ($0.618 \times 62 = 38$ και $62 - 38 = 24$), αντίστοιχα. Έτσι δημιουργήθηκαν τρία μέρη. Το πρώτο και το τρίτο με 38 μουσικά μέτρα και το δεύτερο με 24 μουσικά μέτρα.
Στα μέρη των 38 μουσικών μέτρων (δηλαδή στο πρώτο και το τρίτο) εφαρμόσθηκε ακόμη μια φορά το Θεώρημα της Χρυσής Τομής, οπότε προέκυψαν τμήματα των 24 και 14 μουσικών μέτρων, για τον καθορισμό των σημείων κορύφωσης του έργου στα αντίστοιχα μέρη. Συγκεκριμένα στο πρώτο μέρος το σημείο κορύφωσης είναι στο 24ο μουσικό μέτρο, ενώ στο τρίτο μέρος το σημείο κορύφωσης βρίσκεται στο 76ο μουσικό μέτρο, μετρώντας δηλαδή 24 μουσικά μέτρα από το τέλος ($100 - 24 = 76$). Τέλος, το δεύτερο μέρος χωρίσθηκε σε δύο ίσα μέρη, οπότε ως σημείο κορύφωσής του θεωρήθηκε το μέτρο 50 ($38 + 12 = 50$), το οποίο αποτελεί και το μέσο όλου του έργου. Έτσι, μ᾽ αυτές τις μαθηματικές-αισθητικές διεργασίες προέκυψε μια απόλυτα συμμετρική δομή για τη σύνθεση, που δικαιολογεί απόλυτα τον τίτλο της «Συμμετρία» και η οποία θα μπορούσε να παρουσιαστεί με σχεδιάγραμμα, ως εξής:



3. Άλλα Χαρακτηριστικά

Προκειμένου να δοθεί γενικότερα στη σύνθεση ένα συμμετρικό ύφος: το πρώτο και τρίτο μέρος γράφτηκαν μονοφωνικά (για μονοφωνικό όργανο), έστω και με μια προσθήκη ισοκρατήματος σε γρήγορο ρυθμό. Σε αντίθεση, το δεύτερο μέρος είναι αργό και πολυφωνικό (γραμμένο για πιάνο).
Τέλος, όσον αφορά στη ρυθμική δομή των τριών μερών, το πρώτο έχει ρυθμική δομή 4/4, το τρίτο 3/4, ενώ το δεύτερο μέρος έχει ρυθμική δομή το κλάσμα έκφρασης της οποίας προκύπτει από το άθροισμα των ομωνύμων όρων των κλασμάτων που εκφράζουν τη ρυθμική δομή των δύο άλλων μερών (αριθμητής+αριθμητής) και (παρονομαστή+παρονομαστής).

$$\frac{(3+4)}{(4+4)} = \frac{7}{8}.$$

4. Αλλαγή Συνόλων

Πρώτο Μέρος:

Η διάρκεια ισχύος του κάθε συνόλου προκύπτει από τον τύπο της αριθμητικής προόδου $α_{ν+1} = α_ν + 1$, όπου $α_1 = 2 = 2^1$. Έτσι, το σύνολο Α χρησιμοποιείται στα δύο πρώτα μουσικά μέτρα, το Β στα τρία επόμενα, το Γ στα τέσσερα επόμενα κ.ο.κ.

Δεύτερο Μέρος:

Εδώ τα σύνολα αλλάζουν κάθε έξι μέτρα κι, έτσι, έχουμε τέσσερις αλλαγές επί συνόλου 24 μουσικών μέτρων (4 x 6 = 24). Σ' αυτό το μέρος η πολυφωνία βασίζεται στη Θεωρία των Καρτεσιανών γινομένων των συνόλων Α, Β, Γ, Δ και Ω. Δηλαδή, οι νότες τρίφωνων συγχορδιών μπορεί π.χ. να προέρχονται από το Καρτεσιανό γινόμενο

ΑxΒxΓ={λα-ρε-ντο#, λα-ρε-λα, λα-ρε-μι, σιb-ρε-ντο, κ.ο.κ.} (Πίνακας II)

Τα καρτεσιανά γινόμενα που χρησιμοποιούνται στο μέρος αυτό του έργου είναι τα:

ΑxΒxΓ, ΒxΓxΔ, ΓxΔxΑ , $ΩxΩxΩ = Ω^3$, ΒxΓxΔxΑ και $ΩxΩxΩxΩ = Ω^4$.

Αρχικά το μέρος αυτό του έργου είναι τρίφωνο. Στα 6 κεντρικά μουσικά μέτρα ολόκληρης της σύνθεσης (από το 48 έως το 53), στα οποία περιλαμβάνεται και το σημείο κορύφωσης του όλου έργου (μέτρο 50) εμφανίζεται τετραφωνία. Με τριφωνία ολοκληρώνεται στη συνέχεια το δεύτερο μέρος.

Τρίτο Μέρος:

Η διάρκεια ισχύος του κάθε συνόλου και σ᾽αυτό το μέρος του έργου προκύπτει από έναν τύπο αριθμητικής προόδου και συγκεκριμένα τον $α_{ν+1} = α_ν - 1$, όπου $α_1 = 8 = 2^3$. Έτσι το μέρος αυτό αρχίζει με το σύνολο $Γ^c \cap Δ^c$, που διαρκεί για 8 μουσικά μέτρα, συνεχίζει με το σύνολο $Α^c \cap Β^c$ στα επόμενα 7 μουσικά μέτρα κ.ο.κ.

Πίνακας ΙΙ: Οι 80 τριπλέτες, μέλη του Καρτεσιανού γινομένου ΑxΒxΓ, σε μουσική σημειογραφία υπό μορφήν τρίφωνων συγχορδιών.

«ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ»


Α×Β×Γ
Β×Γ×Δ
Β×Γ×Δ×Α


Ω × Ω × Ω × Ω
Ω × Ω × Ω
Γ × Δ × Α
Ω


Ω
B – Γ
Δ
Γ
B
A