

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΦΙΛΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΤΕΛΩΣ ΦΙΛΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΤΑ ΟΜΗΡΙΚΑ ΕΠΗ (ΙΛΙΑΣ ΚΑΙ ΟΔΥΣΣΕΙΑ)

Α. Προλεγόμενα

Την έρευνα επί των Ομηρικών επών, την Ιλιάδα και την Οδύσσεια, την ξεκίνησα το έτος 1988¹ στο Τμήμα Φυσικής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης όχι ως ειδικός, αλλά ως ασχολούμενος με τη Φυσική, τα Μαθηματικά και την Πληροφορική, έχοντας την πεποίθηση ότι θα μπορούσα να προσφέρω θετικές υπηρεσίες στη μελέτη του Ομηρικού ζητήματος.

Στην παρούσα εργασία ως δεδομένα (*data*) ελήφθησαν ολόκληρα τα κείμενα της Ιλιάδος και της Οδύσσειας². Για να υποστεί επεξεργασία αυτός ο τεράστιος όγκος των δεδομένων απαιτήθηκε πέραν των ισχυρών ηλεκτρονικών υπολογιστών κι ένα εξαιρετικά «έξυπνο» και «ευέλικτο» λογισμικό, το οποίο συνέγραψα με τον συνεργάτη μου κ. Πέτρο Κ. Μουστάκα, Μουσικολόγο.

Στόχος της εργασίας είναι η επισήμανση λέξεων και στίχων των δύο Ομηρικών επών, με συγκεκριμένες αριθμητικές ιδιότητες σύμφωνα με μια πτυχή της «Θεωρίας των Αριθμών» κατά τους αρχαίους Έλληνες³, που ενδεχομένως χρησιμοποίησε ο Όμηρος κατά τη συγγραφή των δύο ποιημάτων του.

Όλο το ερευνητικό υλικό τίθεται στη διάθεση των ειδικών επί του Ομηρικού

1. H. C. Spyridis and S. Eystratiou, *A computer approach to the music of ancient greek speech*, ACUSTICA, vol. 69, pp 211-217, (1989).

2. Βιβλιογραφία Ομήρου όπως παρουσιάζεται στο TLG:

Ilias, ed. T.W. Allen, *Homeri Ilias*, vols. 2-3. Oxford: Clarendon Press, 1931: 2:1-356; 3:1-370. Cod: 115, 477: Epic.: corrected

Odyssey, ed. P. von der Muhll, *Homeri Odyssea*. Basel: Helbing & Lichtenhahn, 1962: 1-456. Cod: 87, 765: Epic.: corrected

Συμπληρώθηκαν στίχοι από τα βιβλία:

Ομήρου Ιλιάς, Αρχαίον Κείμενον – Μετάφραση – Σημειώσεις: Α.Παπαγιάννη – Ν.Σηφάκι, Εισαγωγή στο Ομηρικό Έπος: U.Wilamowitz. Αθήνα: Εκδόσεις Πάπυρος, 1975

Ομήρου Οδύσσεια, Αρχαίον Κείμενον – Εισαγωγή – Μετάφραση – Σημειώσεις: Γ.Δ.Ζευγώλη. Αθήνα: Εκδόσεις Πάπυρος, 1975

3. Νικομάχου του Γερασινού, *Αριθμητική Εισαγωγή*, (Recensvit Ricardus Hoche) (in Aedibus B. G. Teubneri), Lipsiae 1866.

προβλήματος για περαιτέρω έρευνα με την ελπίδα ότι τα πορίσματα, που θα προκύψουν, αφενός μεν θα συμβάλουν στην ολοκλήρωση του στόχου της παρούσης εργασίας, αφετέρου δε στο να διανοιγεί μια, τουλάχιστον, νέα ατραπός στην αντιμετώπιση του Ομηρικού ζητήματος.

B. Απαραίτητες γνώσεις

B.1. Περί των λέξεων και των στίχων των Ομηρικών επών⁴

Το έπος της Ιλιάδος έχει συντεθεί με τη χρήση 552.278 γραμμάτων εκ των οποίων τα 284.503 είναι φωνήεντα. Το έπος της Οδύσσειας συνθέτουν 221.496 φωνήεντα και 205.554 σύμφωνα. Με το πλήθος αυτό των γραμμάτων της αλφαβήτου στο καθένα έπος δομούνται στην μεν Ιλιάδα 111.937 λέξεις και 19.911 τύποι λέξεων⁵, στην δε Οδύσσεια 87.218 λέξεις και 16.168 τύποι λέξεων.

Το έπος της Ιλιάδος συντίθεται από 15.693 στίχους, που κατανέμονται σε 24 ραψωδίες από Α έως Ω. Το έπος της Οδύσσειας συντίθεται από 12.110 στίχους, που κατανέμονται σε 24 ραψωδίες από α έως ω. Από τους στίχους αυτούς του κάθε έπους κάποιοι εμφανίζονται μία και μοναδική φορά, κάποιοι άλλοι περισσότερες της μιας φορές και υπάρχει μια τρίτη ομάδα στίχων, που είναι κοινοί και στα δύο έπη, μερικοί μάλιστα εκ των οποίων επαναλαμβάνονται περισσότερες της μιας φορές.

Με βάση τη Θεωρία των Συνόλων⁶ η πλήρης παρουσίαση των ιδιομορφιών των στίχων των δύο Ομηρικών επών γίνεται με τους Πίνακες I, II, III και IV.

- Έστω Ω το γενικό σύνολο, που παριστάνει το σύνολο των **διαφορετικών** στίχων σε ένα έπος.
- Έστω A το σύνολο των **κοινών** στίχων μεταξύ των δύο επών, οπότε A' είναι η άρνηση του συνόλου A , δηλαδή είναι το σύνολο των **μη κοινών** στίχων μεταξύ των δύο επών.
- Έστω B το σύνολο των στίχων του ενός έπους, που εμφανίζονται μία φορά, οπότε B' είναι η άρνηση του συνόλου B , δηλαδή είναι το σύνολο των στίχων του ενός έπους, που εμφανίζονται περισσότερες της μιας φορές.

Βάσει των ανωτέρω παραδοχών το γενικό σύνολο Ω για το έπος της Ιλιάδος και το έπος της Οδύσσειας χωρίζεται σε τέσσερα ξένα μεταξύ τους σύνολα,

4. Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, Τα Ομηρικά έπη (Ιλιάς και Οδύσσεια) από τον πυλώνα των ηλεκτρονικών υπολογιστών, στην *Επιστημονική Επετηρίδα της Φιλοσοφικής Σχολής του Πανεπιστημίου Αθηνών*, Τόμος ΛΕ' (2003-2004), Αθήνα 2004, σελ. 81-107.

5. Τύπος λέξης $\Leftrightarrow$ Λήμμα στη λεξικογραφία ονομάζεται ο αρχικός ή συνηθέστερος ή επικρατέστερος τύπος λέξης υπό τον οποίον υπάγονται άλλοι τύποι της ίδιας λέξης και γενικώς κάθε τι που πρέπει να γραφεί ή που πρέπει να υπάρχει γραμμένο σχετικώς με αυτόν.

6. Βλέπε Χ. Θ. Μωυσιάδη και Χ. Χ. Σπυρίδη, (1994), *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά στην Επιστήμη της Μουσικής*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

όπως φαίνεται στους Πίνακες I και II, αντίστοιχα.

Πίνακας I: Ιδιομορφίες των διαφορετικών στίχων του έπους της Ιλιάδος

	A	A'
B	$A \cap B$ 154	$A' \cap B$ 13.452
B'	$A \cap B'$ 71	$A' \cap B'$ 795

Πίνακας II: Ιδιομορφίες των διαφορετικών στίχων του έπους της Οδύσσειας

	A	A'
B	$A \cap B$ 142	$A' \cap B$ 9.772
B'	$A \cap B'$ 83	$A' \cap B'$ 740

- Έστω Φ το γενικό σύνολο, που παριστάνει το **σύνολο** των στίχων σε ένα έπος.

Βάσει των ανωτέρω παραδοχών το γενικό σύνολο Φ για το έπος της Ιλιάδος και το έπος της Οδύσσειας χωρίζεται σε τέσσερα ξένα μεταξύ τους σύνολα, όπως φαίνεται στους Πίνακες III και IV, αντίστοιχα.

Πίνακας III: Ιδιομορφίες του ολικού πλήθους των στίχων του έπους της Ιλιάδος

	A	A'
B	$A \cap B$ 154	$A' \cap B$ 13.452
B'	$A \cap B'$ 250	$A' \cup B'$ 1.837

Πίνακας IV: Ιδιομορφίες του ολικού πλήθους των στίχων του έπους της Οδύσσειας

	A	A'
B	$A \cap B$ 142	$A' \cap B$ 9.772
B'	$A \cap B'$ 356	$A' \cup B'$ 1.840

Από τους παραπάνω Πίνακες αντλούνται οι εξής χρήσιμες πληροφορίες για το κάθε γενικό σύνολο Ω ή Φ κάθε έπους:

$$\Omega = (A \cap B) \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B')$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$$

$$A' = (A' \cap B) \cup (A' \cap B')$$

$$B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$$

$$B' = (A \cap B') \cup (A' \cap B')$$

$$\Phi = (A \cap B) \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B')$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$$

$$A' = (A' \cap B) \cup (A' \cap B')$$

$$B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$$

$$B' = (A \cap B') \cup (A' \cap B')$$

Οι αριθμητικές τιμές των συνόλων Ω , Φ , A , A' , B , και B' προκύπτουν με άθροιση των πληθικών αριθμών των αντιστοιχών ξένων συνόλων, που αναγράφονται εντός των κελιών.

B.2. Το ελληνικό αριθμητάριο

Η προφορική και η γραπτή αρίθμηση αποτελούν τα δύο βασικά μέσα έκφρασης στον τομέα της Αριθμητικής. Με άλλα λόγια το ισχυρότερο βοηθητικό μέσον γι' αυτόν, που βρίσκεται στην ανάγκη να εκτελεί υπολογισμούς, υπήρξε σε κάθε τόπο και χρόνο η γραφή.

Οι Έλληνες, εφαρμόζοντας τη φιλοσοφία της ολιγοσημίας, χρησιμοποιούν ένα και το αυτό σύνολο 24 συμβόλων και για τη γραφή (αλφάβητο) και για την αρίθμηση (αριθμητάριο) και για τη μουσική (παρασημαντική).

Για τις καθημερινές ανάγκες τον 3^ο π.Χ. αιώνα επί βασιλείας του Πτολεμαίου του Φιλαδέλφου άρχισε να χρησιμοποιείται μια αρίθμηση στην οποία τα 24 γράμματα του Ιωνικού αλφαβήτου εμπλουτίζονται με άλλα 3 σύμβολα [το δίγαμμο F (στο Βυζάντιο στίγμα ζ, το κόππα ο ή ζ και το παρακύσμο ή σαμπί Ϸ)] - που προέρχονται από αρχαιότερο αλφάβητο, το οποίο εγκαταλείφθηκε - χρησιμοποιούνται για τη γραφή των αριθμών. Το καθένα σύμβολο έχει μια συγκεκριμένη αριθμητική αξία. Ο Πίνακας V δείχνει την αντιστοιχία μεταξύ της ελληνικής και της ινδοαραβικής⁷ γραφής των αριθμών.

7. Ο Leonardo Fibonacci ή Leonardo ο εκ Πίζης (1180-1250) συνέβαλε στο να επικρατήσει στην Ευρώπη το ινδοαραβικό αριθμητικό σύστημα.

Πίνακας V: Η αντιστοιχία μεταξύ της ελληνικής και της ινδοαραβικής γραφής των αριθμών.

A	α	1	I	ι	10	P	ρ	100
B	β	2	K	κ	20	Σ	σ	200
Γ	γ	3	Λ	λ	30	T	τ	300
Δ	δ	4	M	μ	40	Υ	υ	400
E	ε	5	N	ν	50	Φ	φ	500
F	ς	6	Ξ	ξ	60	X	χ	600
Z	ζ	7	O	ο	70	Ψ	ψ	700
H	η	8	P	π	80	Ω	ω	800
Θ	θ	9	ο	ι	90	Ϻ		900
						,A	, α	1.000

Το αριθμητάριο αυτό κατά βάση έχει τη φιλοσοφία του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος. Με την παράθεση των μονάδων στις δεκάδες και των δεκάδων στις εκατοντάδες, κατ' εφαρμογήν του νόμου του Hankel, παραγόντουσαν όλοι οι αριθμοί οι μικρότεροι του 1.000. Γι' αυτό το αριθμητάριο αυτό ονομάζεται *τακτικό*.

Άλλες φορές δεξιά και επί της παράθεσης των αριθμητικών στοιχείων έβαν μια οξεία ή την παράθεση των αριθμητικών στοιχείων την τοποθετούσαν κάτω από μια ισομήκη παύλα. Προκειμένου να γράψουν χιλιάδες ή δεκάδες χιλιάδων ή εκατοντάδες χιλιάδων, χρησιμοποιούσαν τα ίδια σύμβολα, αλλά με ένα τόνο κάτω και στα αριστερά του συμβόλου. Έτσι, λόγου χάριν ο αριθμός 2004 γράφεται, βδ, ο αριθμός 888672 γράφεται, ωπηχοβ', ο αριθμός 6798 γράφεται, ςψη' κ.λπ. Παρατηρεί κανείς ότι με τη συγκεκριμένη φιλοσοφία γραφής των αριθμών δεν ήταν απαραίτητο το μηδέν. Γι' αυτό δεν υπήρχε ιδιαίτερο σύμβολο για το μηδέν στο αριθμητάριο αυτό.

B.3. Λεξάριθμοι

Η κάθε μία ελληνική λέξη σχηματίζεται από την παράθεση ορισμένου πλήθους γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου. Με την αντιμετώπιση του κάθε γράμματος της λέξης ως αριθμού, κατά το ελληνικό αριθμητάριο, η λέξη από σύνολο παρατιθεμένων γραμμάτων μετασχηματίζεται σε σύνολο παρατιθεμένων αριθμών, το άθροισμα των οποίων δίδει τον *λεξάριθμο* της συγκεκριμένης λέξης. Όταν δύο ή περισσότερες λέξεις εμφανίζονται να έχουν τον ίδιο λεξάριθμο, τότε λέμε ότι έχουμε *λεξαριθμική ισοψηφία* ή *λεξαριθμική ταυτότητα*⁸ μεταξύ αυτών

8. Αργυρόπουλος Ελευθέριος, (2001), *Η Μαθηματική αποκωδικοποίησης της Ελληνικής γλώσ-*

των λέξεων.

Το άθροισμα των λεξαριθμικών λέξεων, που απαρτίζουν ένα στίχο, ονομάζεται *λεξαριθμικόν άθροισμα του στίχου*.

Πυθμενικός λεξάριθμος μιας λέξης ή ενός στίχου είναι ο τελικός μονοψήφιος φυσικός αριθμός που προκύπτει από τις διαδοχικές αθροίσεις των ψηφίων του λεξαριθμού μιας λέξης ή ενός στίχου.

Παράδειγμα: Ο λεξάριθμος της λέξης ΟΔΥΣΣΕΥΣ είναι ο φυσικός αριθμός 1479, ενώ ο πυθμενικός λεξάριθμος της ίδιας λέξης είναι ο φυσικός αριθμός 3, διότι:

$$1 + 4 + 7 + 9 = 21 \Rightarrow 2 + 1 = 3.$$

Αυστηρά μαθηματικά ο Πυθμενικός λεξάριθμος μιας λέξης ή ενός στίχου, που έχει λεξάριθμο τον φυσικό αριθμό x , είναι το υπόλοιπον της διαιρέσεως του λεξαριθμού x δια του αριθμού 9 [$(x \bmod 9)$]. Στην περίπτωση που ως υπόλοιπο προκύπτει ο αριθμός μηδέν ($x \bmod 9 = 0$), ως πυθμενικός λεξάριθμος της λέξεως ή του στίχου λαμβάνεται ο αριθμός 9.

Β.4. Φίλοι ή φίλιοι αριθμοί

Ο Ιάμβλιχος στην πραγματεία του *Περί της Νικομάχου Αριθμητικής Εισαγωγής* παρατηρεί:

... άλλους γάρ
 τινας άντικρυς φίλους αριθμούς καλοῦσιν έν τῷ
 προσοικειοῦν τάς τε άρετάς καί τὰς άστείας ἔξεις τοῖς
 αριθμοῖς, οἷον τὸν σπδ καί τὸν σκ' γεννητικὰ γάρ
 ἀλλήλων τὰ ἑκατέρου αὐτῶν μέρη κατὰ τὸν τῆς φιλίας
 λόγον, ὡς Πυθαγόρας ἀπεφήνατο ἐρομένου γάρ τινος
 «τί ἔστι φίλος» εἶπεν «ἕτερος ἐγώ», ὅπερ ἐπὶ
 τούτων τῶν αριθμῶν δείκνυται.

Ιάμβλιχος, *Περί της Νικομάχου Αριθμητικής Εισαγωγής* Σελίς 34 Στίχος 26 - Σελίς 35 Στίχος 5.

Δυστυχώς, πουθενά στην εν λόγω πραγματεία, αλλά και σε κανένα άλλο σωζόμενο έργο του Ιαμβλίχου δεν αναφέρει τίποτα σχετικά με αυτή τη θαυμάσια και εκλεπτυσμένη Πυθαγόρεια θεωρία. Στους φίλιους αριθμούς αναφέρεται περισσότερο ολοκληρωμένα ο Γάλλος Μαθηματικός Jacques Ozanam⁹ (1640-1717) στο έργο του *Μαθηματικές Ψυχαγωγίες* δίνοντας τον ακόλουθο ορισμό:

σης, Αυτοέκδοση, Αθήνα.

9. Thomas Taylor, *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων*, (1995), Εκδόσεις Ιάμβλιχος, Αθήνα, σελ. 190.

Ονομάζονται φίλιοι δύο αριθμοί, όταν το άθροισμα των γνησίων διαιρετών¹⁰ του πρώτου αριθμού ισούται με τον δεύτερο αριθμό και το άθροισμα των γνησίων διαιρετών του δεύτερου αριθμού ισούται με τον πρώτο αριθμό.

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί είχαν βρει μόνο ένα ζεύγος φιλίων αριθμών [σκ' (220) και σπδ' (284)], (Πίνακας VI).

Πίνακας VI: Απόδειξη ότι οι αριθμοί 220 και 284 είναι φίλιοι.

Φίλιοι αριθμοί	Γνήσιοι διαιρέτες											Άθροισμα γνησίων διαιρετών
220	1	2	4	5	10	11	20	22	44	55	110	284
284	1	2	4	71	142							220

Το 1636 ο Fermat βρήκε το ζεύγος των φιλίων αριθμών 17296 και 18416. Ο Descartes (1596-1650) βρήκε τρία ζεύγη φιλίων αριθμών και ο Euler (1707-1783) βρήκε άλλα 61 ζεύγη φιλίων αριθμών. Στην εποχή μας με τη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών έχουν ανακαλυφθεί άλλα 536 ζεύγη φιλίων αριθμών.

Στον Πίνακα VII παρατίθενται 20 ζεύγη φιλίων αριθμών, που υπολογίσαμε συγγράφοντας κατάλληλο λογισμικό.

Πίνακας VII: Είκοσι ζεύγη φιλίων αριθμών των Χ. Χ. Σπυρίδη και Π. Κ. Μουστάκα.

α/α	Φίλιοι Αριθμοί		α/α	Φίλιοι Αριθμοί	
1	284	220	11	76084	63020
2	1210	1184	12	87633	69615
3	2924	2620	13	88730	79750
4	5564	5020	14	123152	122368
5	6368	6232	15	124155	100485
6	10856	10744	16	139815	122265
7	14595	12285	17	153176	141664
8	18416	17296	18	168730	142310
9	66992	66928	19	176336	171856
10	71145	67095	20	180848	176272

10. Από την Αριθμητική είναι γνωστόν ότι κάθε αριθμός διαιρείται με τη μονάδα και τον εαυτό του, οπωσδήποτε, και, πιθανώς, από ένα πλήθος άλλων αριθμών. Οι αριθμοί, που διαιρούν ένα δοθέντα αριθμό, ονομάζονται διαιρέτες του δοθέντος αριθμού. Όλοι οι διαιρέτες ενός αριθμού, που είναι διαφορετικοί από τον ίδιο, ονομάζονται γνήσιοι διαιρέτες του.

Ο Thomas Taylor¹¹ αναφέρει μια παρεμφερή κατηγορία αριθμών με τους φίλους αριθμούς, τους οποίους ονομάζει ατελώς φίλους αριθμούς. Ενώ στους φίλους αριθμούς το άθροισμα των γνησίων διαιρετών του ενός αριθμού ισούται με τον άλλον αριθμό, στους ατελώς φίλους αριθμούς το άθροισμα των γνησίων διαιρετών τους είναι απλώς το ίδιο, χωρίς να συμπίπτει με κανέναν από τους δύο αριθμούς. Παράδειγμα ζεύγους ατελώς φίλων αριθμών αναλυτικώς παρουσιάζεται στον Πίνακα VIII.

Πίνακας VIII: Οι αριθμοί 1001 και 578 αποτελούν ζεύγος ατελώς φίλων αριθμών

Ατελώς Φίλοι αριθμοί	Γνήσιοι διαιρέτες							Άθροισμα γνησίων διαιρετών
1001	1	7	11	13	77	91	143	343
578	1	2	17	34	289			343

Καθώς οι φίλοι αριθμοί σκιαγραφούν την τέλεια φιλία, η οποία βρίσκεται στην αρετή, οι ατελώς φίλοι αριθμοί αποτελούν ευκρινείς εικόνες της φιλίας που υφίσταται ανάμεσα σε φαύλους χαρακτήρες¹².

Γ. Το Πρόβλημα

Ο Ρωμαίος συγγραφέας Aulus G. Gellius (2^{ος} μ.Χ. αι.) εσπούδασε στην Αθήνα, στην Ακαδημία του Πλάτωνος, και συνέγραψε μία δίτομη πραγματεία με τον τίτλο «*Noctes Atticae*» (Αττικές νύκτες)¹³. Στο δεύτερο τόμο της πραγματείας του (XIV κεφ. 6 παραγρ. 4) αναφέρει ότι πήρε να μελετήσει ένα βιβλίο από κάποιον φίλο του, στο οποίο ο φίλος του είχε συγκεντρώσει εξαιρετικά ενδιαφέροντες και σπάνιες πληροφορίες. Μια πληροφορία ανεφέρετο στους λεξαριθμούς. Η προμνημονευθείσα πληροφορία αναφερόταν στην ύπαρξη στίχων στα έπη του Ομήρου με τον αυτόν λεξαριθμό.

Αυτή η μαθηματική παρατήρηση, καθώς και άλλες πολλές, προκάλεσαν το εξαιρετικό ενδιαφέρον πολλών μελετητών των Ομηρικών επών από την αρχαιότητα μέχρι τους αιώνες της ύστερης αρχαιότητας, το οποίο συνεχίζει να υπάρχει και επί των ημερών μας.

Ο Πλάτων στην Πολιτεία¹⁴ του ασχολείται με μια παραλλαγή των λεξα-

11. Αυτόθι, σελ. 196.

12. Ε. Σ. Σταμάτη, *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών*, εν Αθήναις, 1980, σελ. 59.

13. Αυτόθι σελ. 198.

14. Stephanus Σελίς 546, Παράγραφος α, Στίχοι 5-6.

... ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν,
πεμπάδι συζυγεῖς δύο ἄρμονίας παρέχεται τρις αὐξηθεῖς,

ρίθμων, τους «πυθμένες». Ο Πλάτων με τη λέξη πυθμήν υπονοεί τους δύο μικρότερους φυσικούς αριθμούς (3 και 4), που ικανοποιούν αριθμητικώς το Πυθαγόρειο θεώρημα, όταν ισοξυγίζουν με το 5, δηλαδή $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Ο Ευκλείδης στα Στοιχεία¹⁵ του δεν χρησιμοποιεί την έννοια πυθμένες, αλλά τον όρο «ελάχιστοι αριθμοί», στην δε Κατατομή Κανόνος¹⁶ τον όρο «ἐλάχιστοι δὲ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ» με την έννοια του αναγώγου κλάσματος, που προκύπτει μετά από απλοποιήσεις σε μια κλασματική παράσταση.

Επίσης υπήρχαν επιγραμματοποιοί, οι οποίοι έγραφαν επιγράμματα με συγκεκριμένο λεξαριθμικό άθροισμα –κατά παραγγελία. Ένας από τους ικανότερους επιγραμματοποιούς ήταν ο μαθηματικός και αστρονόμος Λεωνίδας ο Αλεξανδρεύς (1^{ος} μ.Χ. αι.)¹⁷, ο οποίος συνέθετε επιγράμματα τετράστιχα ή δίστιχα. Στα τετράστιχα επιγράμματα οι δύο πρώτοι στίχοι είχαν το ίδιο λεξαριθμικό άθροισμα με τους δύο επόμενους. Στα δίστιχα επιγράμματα οι δύο στίχοι είχαν το ίδιο λεξαριθμικό άθροισμα.

Ο Ευάγγελος Σ. Σταμάτης¹⁸ ευλόγως διερωτάται, αφού ο Λεωνίδας ο Αλεξανδρεύς είχε την ικανότητα να συνθέτει στίχους ισόψηφους ή δίστιχα ισόψηφα, γιατί να αποκλείσουμε την ικανότητα αυτήν από τον Όμηρο;

Εάν πράγματι χρησιμοποιήθηκαν λεξάριθμοι ή λεξαριθμικά αθροίσματα στίχων ή λεξαριθμικές ισοψηφίες μεταξύ λέξεων ή/και στίχων, μήπως χρησιμοποιήθηκαν φίλια ζεύγη λεξαρίθμων ή φίλια ζεύγη λεξαριθμικών αθροισμάτων στίχων;

Μήπως ακόμη χρησιμοποιήθηκαν ατελώς φίλια ζεύγη λεξαρίθμων ή ατελώς φίλια ζεύγη λεξαριθμικών αθροισμάτων στίχων;

Δ. Αποτελέσματα

Προκειμένου να μπορούν να μελετηθούν τα ομηρικά έπη με βάση τους λεξαρίθμους των λέξεων και τα λεξαριθμικά αθροίσματα των στίχων από τους σύγχρονους ερευνητές συγγράψαμε τρία βιβλία¹⁹ με όλες τις σχετικές πληροφορίες.

15. Στοιχεία, Βιβλίο 7, Πρόταση 20, Στίχοι 1-3.

Οι ελάχιστοι αριθμοί των τον αυτόν λόγον εχόντων αυτοίς μετρούσι τους τον αυτόν λόγον έχοντας ισάκεις ο τε μείζων τον μείζονα και ο ελάσσων τον ελάσσονα.

16. Πρόταση γ, Στίχος 4.

17. Τον αναφέρουν οι: Στοβαίος, Ιωάννης Τζέτζης και Βιτρούβιος.

18. Ευαγγέλου Σ. Σταμάτη, (1980), *Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών (Αριθμητικά-Αι αρχαί της Ελληνικής Γεωμετρίας)*, Δευτέρα Έκδοσις, Αθήνα, σελίδες 59-63.

19. Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης και Πέτρος Κ. Μουστάκας, (2004), *Η στιχογραφία εις την Ομήρου Ιλιάδα από τον πυλώνα των ηλεκτρονικών υπολογιστών*, Ομηρικοί στίχοι: κατ' επικλήν ακολουθίαν, επαναλαμβανόμενοι, κοινοί, Συνάριθμοι (λεξαριθμικά αθροίσματα) ομηρικών στίχων, Ομηρικοί στίχοι κατά συνάριθμον, Αθήνα.

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης και Πέτρος Κ. Μουστάκας, (2004), *Η στιχογραφία εις την Ομήρου Ιλιάδα από τον πυλώνα των ηλεκτρονικών υπολογιστών*, Ομηρικοί στίχοι: κατ' επικλήν ακολουθίαν, επαναλαμβανόμενοι, κοινοί, Συνάριθμοι (λεξαριθμικά αθροίσματα) ομηρικών στίχων, Ομηρικοί στίχοι κατά συνάριθμον, Αθήνα.

Στην παρούσα εργασία η έρευνα συνεχίζεται για τον εντοπισμό τυχόν ζευγών φιλίων λεξαρίθμων ή ζευγών φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων στίχων ή ζευγών ατελώς φιλίων λεξαρίθμων ή ζευγών ατελώς φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων στίχων.

Από τη μελέτη των λεξαρίθμων των λέξεων, των τύπων λέξεων και των λεξαριθμικών αθροισμάτων των στίχων προκύπτει ότι:

Οι λεξάριθμοι των ομηρικών λέξεων ανήκουν στο κλειστό διάστημα [1, 3331]. Δηλαδή ο μικρότερος λεξάριθμος είναι ο φυσικός αριθμός 1 για τη λέξη «Α», που εμφανίζεται στην μεν Ιλιάδα 28 φορές, στη δε Οδύσσεια 30 φορές και ο μεγαλύτερος λεξάριθμος είναι ο φυσικός αριθμός 3331 για τη λέξη «ΧΑΛΚΟΧΙΤΩΝΩΝ», που εμφανίζεται στην μεν Ιλιάδα 29 φορές, στη δε Οδύσσεια 2 φορές.

Μεταξύ των λεξαρίθμων 1 και 3331 εντοπίζονται μόνο τα δύο ζεύγη φιλίων λεξαρίθμων (284, 220) και (1210, 1184) τόσο στην Ιλιάδα, όσο και στην Οδύσσεια (Πίνακες ΙΧ και Χ).

Με λεξάριθμο 284 ισοψηφούν λεξαριθμικά στην Ιλιάδα 20 λέξεις και στην Οδύσσεια 17 λέξεις.

Με λεξάριθμο 220 ισοψηφούν λεξαριθμικά στην Ιλιάδα 22 λέξεις και στην Οδύσσεια 21 λέξεις.

Με λεξάριθμο 1210 ισοψηφούν λεξαριθμικά στην Ιλιάδα 14 λέξεις και στην Οδύσσεια 6 λέξεις.

Με λεξάριθμο 1184 ισοψηφούν λεξαριθμικά στην Ιλιάδα 7 λέξεις και στην Οδύσσεια 4 λέξεις.

Πίνακας ΙΧ: Φίλιες λέξεις στην Ιλιάδα		
α/α	Λέξη με λεξάριθμο	Λέξη με λεξάριθμο
1	(284) ΑΝΑΘΗΣΕΙ ΕΠΕΠΙΘΜΕΝ ΑΙΓΟΣ ΠΑΡΕΙΠΗ ΑΓΑΘΟΣ ΘΕΟΣ ΠΟΘΕΟΝ ΑΓΕΙΡΟΜΕΝ ΠΑΡΑΒΛΗΔΗΝ ΔΕΔΙΑΣΙΝ ΝΑΙΟΜΕΝΗΝ ΑΝΕΕΡΓΟΝ ΕΖΕΣΘΗΝ ΔΙΟΣ ΕΙΣΙΔΕΝ ΕΝΗΚΑΣ ΠΡΟΕΗΚΑ ΠΕΡΙΟΙΔΕ ΑΙΔΕΣΘΕΝ ΔΕΙΔΙΣΑΝ	(220) ΠΙΟΝΙ ΕΚΜΟΛΕΝ ΑΕΙΡΑΜΕΝΗ ΑΒΑΡΒΑΡΕΗ ΟΙΝΕΙΔΑΟ ΕΜΕΝΟΝ ΕΞΕΛΟΝ ΕΚΛΕΛΑΘΟΝ ΕΙΣΕ ΡΕΕΘΡΑ ΘΗΒΑΣ ΕΕΙΠΟΝ ΠΟΙΚΙΛ΄ ΟΙΚΟΝ ΠΑΙΗΟΝΑ ΒΙΗΣ ΠΑΘΟΙΜΙ ΔΙΑΔΡΑΚΟΙ ΘΕΡΜΗΝΗ ΜΟΙΡ΄ ΕΡΡΕΙ ΠΕΙΡΗΘΗ
2	(1210) ΕΝΕΤΩΝ ΕΤΕΡΩ ΕΚΚΑΤΙΔΩΝ ΥΠΕΞΕΦΕΡΕΝ ΠΡΟΕΡΥΣΣΕΝ ΤΕΤΕΛΕΣΜΕΝΟΣ ΦΥΛΟΙΣ ΙΠΠΟΛΟΧΟΣ ΦΡΙΧ΄ ΕΡΧΟΜΕΝΟΙΣΙΝ ΤΡΩΙ ΦΙΛΟΥΣ ΕΝΩΡΣΕΝ ΖΥΓΩ	(1184) ΜΟΝΩΘΕΙΣ ΤΟΙΩΔ΄ ΠΟΔΩΚΕΕΣ ΔΡΥΤΟΜΟΣ ΥΠΕΡΘΥΜΟΙΟ ΚΗΩΕΝΤΑ ΕΠΙΘΥΟΥΣΙ

Πίνακας Χ: Φίλιες λέξεις στην Οδύσσεια		
α/α	Λέξη με λεξά- ριθμο	Λέξη με λεξά- ριθμο
1	(284) ΠΕΡΙΟΙΔΕ ΕΖΕΣΘΗΝ ΑΓΑΘΟΣ ΑΛΑΛΗΣΘΕ ΠΡΟΗΚΕΑ ΘΕΟΣ ΔΙΕΔΡΑΜΟΝ ΔΙΟΣ ΜΗΛΕΑΣ ΕΙΣΙΔΕΝ ΑΝΙΕΙΗΣ ΝΟΜΟΝΔ΄ ΝΑΙΟΜΕΝΗΝ ΑΝΙΗΣΕΙ ΑΓΕΙΡΟΜΕΝ ΕΓΡΟΜΕΝΑΙ ΑΙΓΟΣ	(220) ΕΕΙΠΟΝ ΟΙΚΟΝ ΔΑΙΔΑΣ ΜΟΙΡ΄ ΕΛΚΟΜΕΝ ΡΕΕΘΡΑ ΠΟΙΚΙΛ΄ ΕΞΕΛΘΕΜΕΝΑΙ ΒΙΗΣ ΕΙΣΕ ΑΓΑΑΣΘΕ ΕΞΕΛΟΝ ΕΝΕΜΟΝ ΠΙΟΙΜΙ ΑΡΓΑΛΕΟΙ ΗΓΑΓΕΣ ΑΕΙΡΑΜΕΝΗ ΝΕΙΚΕΙΟΝ ΕΠΟΙΕΝ ΠΙΟΝΙ ΕΠΗΓΑΓΟΝ
2	(1210) ΝΑΥΣΙΘΟΟΥ ΕΤΕΡΩ ΕΜΦΟΡΕΟΝΤΟ ΔΙΟΙΣΤΕΥΣΑΙ ΤΙΝΩΝ ΦΙΛΟΥΣ	(1184) ΚΗΩΕΝΤΑ ΓΛΑΦΥΡΟΙΟ ΥΠΕΡΘΥΜΟΙΟ ΤΟΙΩΔ΄

Μεταξύ των φυσικών αριθμών 1 και 3331 με κατάλληλο λογισμικό εντοπίζονται 2118 ζεύγη ατελώς φιλίων αριθμών. Ως ενδεικτικό παράδειγμα αναφέρεται ο φυσικός αριθμός 3131, με τον οποίον σχηματίζονται τα έξι ζεύγη ατελώς φιλίων αριθμών του Πίνακα ΧΙ.

Πίνακας ΧΙ: Τα έξι ζεύγη ατελώς φιλίων αριθμών που σχηματίζονται με τον φυσικό αριθμό 3131.

α/α	Πρώτος αριθμός	Δεύτερος αριθμός	Άθροισμα γνησίων διαιρετών
1	3131	425	133
2	3131	635	133
3	3131	1331	133
4	3131	2147	133
5	3131	2507	133
6	3131	2987	133

Εξ αυτών των έξι ζευγών φυσικών αριθμών μόνον τα ζεύγη 1, 2, 3 και 5 συμπίπτουν με υπάρχοντες λεξαριθμούς (είτε από την Ιλιάδα, είτε από την Οδύσσεια, είτε και από τα δύο έπη) και, έτσι, σχηματίζονται τα εξής τέσσερα ζεύγη ατελώς φιλίων λεξαριθμών (3131,425), (3131,635), (3131, 1331), (3131, 2507) (Πίνακας XII).

Πίνακας XII: Τα τέσσερα ζεύγη ατελώς φιλίων λεξαριθμών που σχηματίζονται με τον λεξαριθμο 3131.

α/α	Λέξη με λεξάριθμο	Λέξη με λεξάριθμο
1	(3131) ΧΑΛΚΟΧΙΤΩΝΩΝ	(425) ΑΓΟΝΤΑ, ΑΓΥΙΑΙ, ΑΝΔΡΟΣ, ΓΥΓΑΙΗ, ΔΕΥΕΑΙ, ΔΙΑΚΡΙΝΕΕΣΘΑΙ, ΕΔΕΙΣΑΣ, ΕΚΠΕΡΣΕΙ, ΕΝΙΣΠΟΙ, ΕΝΤΟ, ΕΞΕΠΡΑΘΟΜΕΝ, ΕΟΝΤ', ΕΠΕΣΠΕΝ, ΕΠΙΒΗΣΟΝ, ΕΡΝΟΣ, ΕΤΕΙΡΕ, ΕΤΕΛΛΕΝ, ΘΗΤΗΝ, ΙΔΥΙΑ, ΙΜΕΡΟΣ, ΚΑΤΑΛΕΞΗ, ΚΕΙΝΟΙΣΙΝ, ΛΕΚΤΟ, ΛΙΠΕΤ', ΠΑΡΗΛΑΣΕ, ΠΕΙΚΕΤΕ, ΤΕΟΝ, ΤΙΝΕΙΝ, ΥΙΕΙ
	(3131) ΧΑΛΚΟΧΙΤΩΝΩΝ	(635) ΑΠΟΠΤΑΜΕΝΗ, ΕΙΡΟΠΟΚΟΙΣ, ΕΚΤΕΛΕΣΕΙΕΝ, ΕΛΥΣ', ΕΛΧ', ΕΠΙΚΕΙΣΕΤ', ΕΡΡΟΝΤΙ, ΕΥΡΟΙΜΙ, ΗΙΧΘΗ, ΙΔΟΝΤΑΣ, ΙΟΝΤΕΣ, ΙΡΕΥΟΝ, ΙΦΙΜΕΔΕΙΑΝ, ΚΑΤΘΕΤ', ΚΛΕΙΤΟΣ, ΛΥΣΕ, ΜΙΝΥΕΙΟΝ, ΟΚΡΙΟΕΝΤΙ, ΟΛΥΜΠΙΕ, ΟΜΟΣΣΕΝ, ΟΝΕΙΡΟΠΟΛΟΙΟ, ΟΡΕΣΣΙΝ, ΠΛΑΓΚΤΑΣ, ΠΥΕΛΟΝ, ΣΕΙΟΝΤ', ΤΙΚΤΕ,
2		

		ΥΠΕΔΡΑΜΕ, ΥΠΟΔΕΞΕΑΙ
3	(3131) ΧΑΛΚΟΧΙΤΩΝΩΝ	(1331) ΑΜΥΜΩΝ, ΑΝΤΙΛΟΧΟΣ, ΑΠΟΛΛΩΝΟΣ, ΑΠΟΣΤΕΙΧΕΙΝ, ΑΥΤΟΦΙΝ, ΒΟΥΛΥΤΟΝΔΕ, ΕΚΧΕΥΑΤ' ΕΠΙΠΩΛΕΙΤΑΙ, ΕΦΗΜΟΣΥΝΗΝ, ΕΧΕΦΡΟΝΑ, ΚΑΛΛΙΧΟΡΟΥ, ΚΑΜΟΝΤΩΝ, ΚΑΤΑΧΘΟΝΙΟΣ, ΚΡΟΤΑΦΟΙΣΙΝ, ΜΑΧΕΟΥΜΕΝΟΝ, ΝΕΜΕΣΙΖΕΣΘΩ, ΝΟΣΦΙΣΑΤ', ΟΡΘΟΚΡΑΙΡΑΩΝ, ΠΑΣΣΩΝ, ΠΑΤΡΩΝ, ΠΙΦΑΥΣΚΟΝ, ΠΡΟΣΩΠΑ, ΠΡΟΥΦΑΙΝΟΝ, ΣΤΟΜΑΧΟΝ, ΥΣΤΑΤΙΟΝ, ΦΟΡΥΞΑΣ, ΦΥΟΝΤΑΙ, ΦΩΚΑΙ, ΩΚΙΣΤΑ
4	(3131) ΧΑΛΚΟΧΙΤΩΝΩΝ	(2507) ΣΥΒΩΤΕΩ

Στην Ιλιάδα οι στίχοι Γ127, Γ131, Γ251 και Θ71 έχουν το μεγαλύτερο λεξαρithμικό άθροισμα, ίσο προς 8018, ενώ στην Οδύσσεια ο στίχος ν228 έχει το μεγαλύτερο λεξαρithμικό άθροισμα, ίσο προς 7876.

Στην Ιλιάδα ο στίχος Η416 έχει το μικρότερο λεξαρithμικό άθροισμα, ίσο προς 849, ενώ στην Οδύσσεια ο στίχος γ365 έχει το μικρότερο λεξαρithμικό άθροισμα, ίσο προς 826.

Στην Ιλιάδα μεταξύ των λεξαρithμικών αθροισμάτων 849 και 8018 εντοπίζεται μόνον ένα ζεύγος φιλίων λεξαρithμικών αθροισμάτων, το (2924, 2620).

Με λεξαρithμικό άθροισμα 2924 ισοψηφούν επτά στίχοι, ενώ με λεξαρithμικό άθροισμα 2620 ισοψηφούν τρεις στίχοι.

Στην Οδύσσεια μεταξύ των λεξαρithμικών αθροισμάτων 826 και 7876 εντοπίζονται δύο ζεύγη φιλίων λεξαρithμικών αθροισμάτων, το (2924, 2620) και το (5564, 5020).

Με λεξαρithμικό άθροισμα 2924 ισοψηφούν τέσσερις στίχοι και με λεξαρithμικό άθροισμα 2620 ισοψηφούν πάλι τέσσερις στίχοι.

Με λεξαρithμικό άθροισμα 5564 εμφανίζεται ένας στίχος και με λεξαρithμικό ά-

θροισμα 5020 ισοψηφούν δύο στίχοι (Πίνακας XIII).

Πίνακας XIII: Φίλιοι στίχοι στα Ομηρικά έπη (Ιλιάδα και Οδύσσεια)

Στίχος		Λεξαριθμικό άθροισμα
Π651	Η ΕΤΙ ΚΑΙ ΠΛΕΟΝΕΣΣΙΝ ΟΦΕΛΛΕΙΕΝ ΠΟΝΟΝ ΑΙΠΥΝ	2620
Κ140	ΕΚ Δ' ΗΛΘΕ ΚΛΙΣΙΗΣ ΚΑΙ ΣΦΕΑΣ ΠΡΟΣ ΜΥΘΟΝ ΕΕΙΠΕ	
Α270	ΤΗΛΟΘΕΝ ΕΞ ΑΠΙΗΣ ΓΑΙΗΣ ΚΑΛΕΣΑΝΤΟ ΓΑΡ ΑΥΤΟΙ	
Χ451	ΑΙΔΟΙΗΣ ΕΚΥΡΗΣ ΟΠΟΣ ΕΚΛΥΟΝ ΕΝ Δ' ΕΜΟΙ ΑΥΤΗ	2924
Χ104	ΝΥΝ Δ' ΕΠΕΙ ΩΛΕΣΑ ΛΑΟΝ ΑΤΑΣΘΑΛΙΗΣΙΝ ΕΜΗΣΙΝ	
Υ356	ΑΡΓΑΛΕΟΝ ΔΕ ΜΟΙ ΕΣΤΙ ΚΑΙ ΙΦΘΙΜΩ ΠΕΡ ΕΟΝΤΙ	
Ν562	ΕΓΓΥΘΕΝ ΟΡΜΗΘΕΙΣ ΑΜΕΝΗΝΩΣΕΝ ΔΕ ΟΙ ΑΙΧΜΗΝ	
Μ410	ΑΡΓΑΛΕΟΝ ΔΕ ΜΟΙ ΕΣΤΙ ΚΑΙ ΙΦΘΙΜΩ ΠΕΡ ΕΟΝΤΙ	
Λ149	ΤΗ Ρ' ΕΝΟΡΟΥΣ' ΑΜΑ Δ' ΑΛΛΟΙ ΕΥΚΝΗΜΙΔΕΣ ΑΧΑΙΟΙ	
Γ172	ΑΙΔΟΙΟΣ ΤΕ ΜΟΙ ΕΣΣΙ ΦΙΛΕ ΕΚΥΡΕ ΔΕΙΝΟΣ ΤΕ	

ψ170	ΕΛΘΟΙ ΕΕΙΚΟΣΤΩ ΕΤΕΙ ΕΣ ΠΑΤΡΙΔΑ ΓΑΙΑΝ	2620
ψ102	ΕΛΘΟΙ ΕΕΙΚΟΣΤΩ ΕΤΕΙ ΕΣ ΠΑΤΡΙΔΑ ΓΑΙΑΝ	
ψ38	ΜΟΥΝΟΣ ΕΩΝ ΟΙ Δ' ΑΙΕΝ ΑΟΛΛΕΕΣ ΕΝΔΟΝ ΕΜΙΜΝΟΝ	
ν407	ΔΗΕΙΣ ΤΟΝ ΓΕ ΣΥΕΣΣΙ ΠΑΡΗΜΕΝΟΝ ΑΙ ΔΕ ΝΕΜΟΝΤΑΙ	2924
τ117	ΜΗ ΜΟΙ ΜΑΛΛΟΝ ΘΥΜΟΝ ΕΝΙΠΛΗΣΗΣ ΟΔΥΝΑΩΝ	
π74	Η ΑΥΤΟΥ ΠΑΡ' ΕΜΟΙ ΤΕ ΜΕΝΗ ΚΑΙ ΔΩΜΑ ΚΟΜΙΖΗ	
δ432	ΚΑΙ ΤΟΤΕ ΔΗ ΠΑΡΑ ΘΙΝΑ ΘΑΛΑΣΣΗΣ ΕΥΡΥΠΟΡΟΙΟ	5020
β122	ΗΔΗ ΑΤΑΡ ΜΕΝ ΤΟΥΤΟ Γ' ΕΝΑΙΣΙΜΟΝ ΟΥΚ ΕΝΟΗΣΕ	
ω225	ΩΧΟΝΤ' ΑΥΤΑΡ Ο ΤΟΙΣΙ ΓΕΡΩΝ ΟΔΟΝ ΗΓΕΜΟΝΕΥΕ	
ε466	ΕΙ ΜΕΝ Κ' ΕΝ ΠΟΤΑΜΩ ΔΥΣΚΗΔΕΑ ΝΥΚΤΑ ΦΥΛΑΣΣΩ	5564
ι289	ΣΥΝ ΔΕ ΔΥΩ ΜΑΡΨΑΣ ΩΣ ΤΕ ΣΚΥΛΑΚΑΣ ΠΟΤΙ ΓΑΙΗ	

Μεταξύ των φυσικών αριθμών 849 και 8018 εντοπίζονται 5636 ζεύγη ατελώς φιλίων αριθμών. Στην πλέον ευνοϊκή περίπτωση κατά την οποία όλα αυτά τα ζεύγη συμπίπτουν με λεξαριθμικά αθροίσματα στίχων της Ιλιάδος, τότε στην Ιλιάδα μεταξύ των λεξαριθμικών αθροισμάτων 849 και 8018 θα υπάρχουν 5636 ζεύγη ατελώς φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων.

Μεταξύ των φυσικών αριθμών 826 και 7876 εντοπίζονται 5508 ζεύγη ατελώς φιλίων αριθμών. Στην πλέον ευνοϊκή περίπτωση κατά την οποία όλα αυτά τα ζεύγη συμπίπτουν με λεξαριθμικά αθροίσματα στίχων της Οδύσσειας, τότε στην Οδύσσεια μεταξύ των λεξαριθμικών αθροισμάτων 826 και 7876 θα υπάρχουν 5508 ζεύγη ατελώς φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων.

Ως ενδεικτικό παράδειγμα αναφέρεται ο φυσικός αριθμός 4961, με τον οποίον σχηματίζονται τα τέσσερα ζεύγη ατελώς φιλίων αριθμών του Πίνακα XIV.

Πίνακας XIV: Τα τέσσερα ζεύγη ατελώς φιλίων αριθμών που σχηματίζονται με τον φυσικό αριθμό 4961.

α/α	Πρώτος αριθμός	Δεύτερος αριθμός	Άθροισμα γνησίων διαιρετών
1	4961	1587	625
2	4961	3095	625
3	4961	3479	625
4	4961	4319	625

Εξ αυτών των τεσσάρων ζευγών φυσικών αριθμών μόνον τα ζεύγη 2, 3 και 4 συμπίπτουν με υπάρχοντα λεξαριθμικά αθροίσματα και, έτσι, σχηματίζονται τα εξής τρία ζεύγη ατελώς φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων (4961,3095), (4961, 3479), (4961, 4319) (Πίνακας XV).

Πίνακας XV: Τα τρία ζεύγη ατελώς φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων που σχηματίζονται με τον λεξάριθμο 4961.

α/α	Στίχος με λεξαριθμικό άθροισμα	Στίχος με λεξαριθμικό άθροισμα
1	(4961) K177, Y373, μ38	(3095) N664, O251, O604, P370, Ω802, δ189, η24, ο270
2	(4961) K177, Y373, μ38	(3479) E899, K41, Π801, Ψ494, α283, θ114, π233, φ417
3	(4961) K177, Y373, μ38	(4319) Θ503, Λ466, α130, γ63, ι99, π418, σ47, φ372

Ε. Επιλεγόμενα

Με το θέμα της έρευνας, το οποίο εν ολίγοις ανέπτυξα, είχα σκοπό να δι-αρθρώσω λόγο χρήσης ειδικών Μαθηματικών θεωριών, στη συγκεκριμένη περι-πτωση της θεωρίας των φιλίων αριθμών, από τον Όμηρο στη συγγραφή του έ-πους της Ιλιάδος και του έπους της Οδύσσειας.

Για την επίτευξη του σκοπού αυτού έπρεπε οι ερευνητές να εργασθούν σε δύο φάσεις.

Κατά την πρώτη φάση έπρεπε

α. Να υπολογισθούν οι λεξάριθμοι όλων των λέξεων των δύο επών και να

αξιολογηθούν με βάση τη θεωρία των φιλίων αριθμών και των ατελώς φιλίων αριθμών, ώστε να εντοπισθούν οι φίλιες λέξεις και οι ατελώς φίλιες λέξεις στα δύο Ομηρικά έπη.

β. Να υπολογισθούν τα λεξαριθμικά αθροίσματα όλων των στίχων των δύο επών και να αξιολογηθούν με βάση τη θεωρία των φιλίων αριθμών και των ατελώς φιλίων αριθμών, ώστε να εντοπισθούν οι φίλιοι στίχοι και οι ατελώς φίλιοι στίχοι στα δύο Ομηρικά έπη.

Κατά τη δεύτερη φάση έπρεπε να μελετηθούν «νοηματικά» ή «λειτουργικά» ή άλλως πώς μεταξύ τους οι φίλιες λέξεις, οι ατελώς φίλιες λέξεις, οι φίλιοι στίχοι και οι ατελώς φίλιοι στίχοι, ώστε να καταλήξουν, πιθανώς, σε συσχετίσεις οι οποίες θα στηρίζαν ή θα απέρριπταν την υπόθεση χρήσης της θεωρίας των φιλίων αριθμών από τον Όμηρο στη συγγραφή των δύο επών.

Οι ερευνητές, ως ασχολούμενοι με την Πληροφορική και όχι ως ειδικοί επί των διαφόρων πτυχών του Ομηρικού ζητήματος, ολοκλήρωσαν πλήρως την πρώτη φάση της εργασίας καταλήγοντας ότι:

- Μεταξύ των λεξαρίθμων 1 και 3331 των λέξεων των δύο επών εντοπίζονται μόνο δύο ζεύγη φιλίων λεξαρίθμων [(284, 220) και (1210, 1184)] τόσο στην Ιλιάδα, όσο και στην Οδύσσεια.
- Μεταξύ των λεξαρίθμων εντοπίζονται λιγότερα από 2118 ζεύγη ατελώς φιλίων λέξεων.
- Στην Ιλιάδα μεταξύ των λεξαριθμικών αθροισμάτων 849 και 8018 των στίχων της εντοπίζεται μόνον ένα ζεύγος φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων, το (2924, 2620). Με λεξαριθμικό άθροισμα 2924 ισοψηφούν επτά στίχοι, ενώ με λεξαριθμικό άθροισμα 2620 ισοψηφούν τρεις στίχοι.
- Στην Οδύσσεια μεταξύ των λεξαριθμικών αθροισμάτων 826 και 7876 των στίχων της εντοπίζονται δύο ζεύγη φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων, το (2924, 2620) και το (5564, 5020). Με λεξαριθμικό άθροισμα 2924 ισοψηφούν τέσσερις στίχοι και με λεξαριθμικό άθροισμα 2620 ισοψηφούν πάλι τέσσερις στίχοι. Με λεξαριθμικό άθροισμα 5564 εμφανίζεται ένας στίχος και με λεξαριθμικό άθροισμα 5020 ισοψηφούν δύο στίχοι.
- Μεταξύ των λεξαριθμικών αθροισμάτων των στίχων των δύο επών εντοπίζονται λιγότερα από 5636 ζεύγη ατελώς φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων στην Ιλιάδα και λιγότερα από 5508 ζεύγη ατελώς φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων στην Οδύσσεια.

Για την ολοκλήρωση της δεύτερης φάσης -και την επίτευξη του σκοπού της έρευνας- χρειάζεται οπωσδήποτε η γνώση των ειδικών επί του Ομηρικού προβλήματος. Οι ερευνητές θέτουν όλο το ερευνητικό υλικό στη διάθεσή των «Ομηριστών» προκειμένου με σημαντική βεβαιότητα να γίνει αποδεκτή ή να απορριφθεί η αρχική υπόθεση ότι δηλαδή ο Όμηρος κατά τη συγγραφή των δύο επών χρησιμοποίησε μια πτυχή της «Θεωρίας των Αριθμών» κατά τους αρχαίους Έλ-

ληνες, τη θεωρία των φιλίων αριθμών, είτε για τις λέξεις, είτε για τους στίχους, είτε και για τα δύο.

