«Μουσικός Διανυσματικός Λογισμός»

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης
Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας,
Τμήμα Μουσικών Σπουδών,
Φιλοσοφική Σχολή,
Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΕΙΣ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΜΟΥ
***ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ Ι. ΡΕΝΤΖΕΠΕΡΗΝ**,*

ΟΣΤΙΣ ΜΟΥ ΕΔΙΔΑΞΕ ΤΗΝ ΚΡΥΣΤΑΛΛΟΔΟΜΗ,
ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΔΕΣΜΗ
ΠΟΛΛΩΝ ΚΟΣΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΠΑΝΤΙΚΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΩΝ…

1. Προλεγόμενα

Θα ήθελα να εκκινήσω με ένα προσωπικό σχόλιο. Το ενδιαφέρον μου για τον πλατωνισμό ήταν κατ' αρχάς το ενδιαφέρον του επιστήμονος που ασχολείται με τον πυθαγορισμό, στοχεύοντας στην κατανόηση του τρόπου μελέτης από τους πυθαγορείους των ακουστικών φαινομένων, τα οποία ακολουθούν νόμους αρμονικούς και φθάνουν επί αιώνες κατ' αυτόν ή εκείνον τον τρόπο στην ανθρώπινη αίσθηση.

Έτσι ο άνθρωπος από της αρχαιότητος μέχρι της σημερινής εποχής δεν κάνει τίποτ' άλλο από το να προσπαθεί ν' ανακαλύψει και διατυπώσει με την επιστημονική γνώση, που εκάστοτε διαθέτει, τη φύση και τη μορφή αυτών των φαινομένων κατά την Πλατωνική φιλοσοφική κι επιστημονική άποψη
«σώζειν τα φαινόμενα».

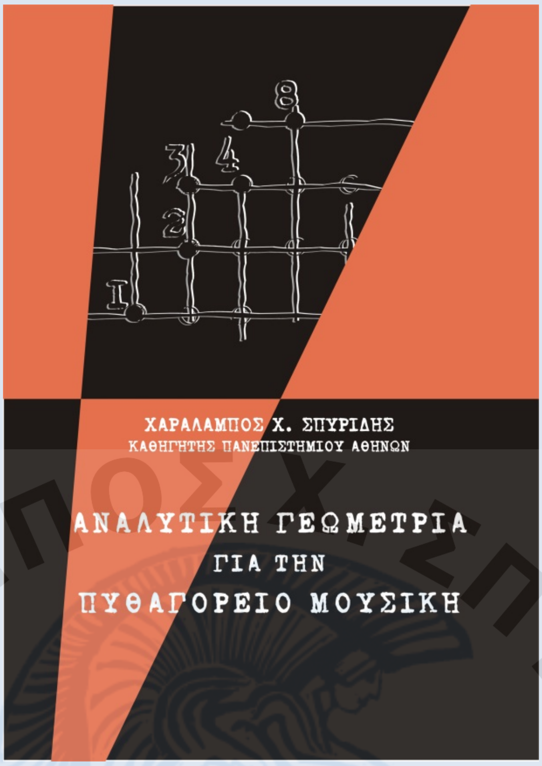
Στην προσπάθειά μου αυτή εντυπωσιάσθηκα εξαιρετικά από τον μυστικισμό, που διέκρινε τη μετάδοση της επιστημονικής γνώσεως μεταξύ των μεμυημένων ομάδων του πυθαγορισμού, αλλά συντόμως διεπίστωσα ότι ανέκαθεν οι κοσμοθεωρίες των κατ' έθνη ιερατείων εβασίζοντο στον συμβολισμό. Για τον λόγον αυτόν τα ιερά κείμενά τους είναι άρρηκτα συνδεδεμένα με σημεία, σύμβολα, αριθμούς και αστερισμούς, προκειμένου να προστατευθούν αλήθειες και ιδανικά που, διαφορετικώς, με το πέρασμα των χρόνων θα υφίσταντο διαστρέβλωση (McClain E. G., 2006).

Μελετώντας την πορεία των μουσικών ιδεών από τον Πυθαγόρα στον Πλάτωνα, ασχολήθηκα επί πολύν καιρό με το
«*μουσικό χωρίο*» του Πλατωνικού Τιμαίου (35a1 - 36b6), το οποίο αναφέρεται στη δημιουργία και τη σύσταση της Ψυχής του Κόσμου επί τη βάσει ενός αλγορίθμου διατυπωμένου με Πυθαγόρειο μουσική ορολογία.

Συντόμως αντελήφθηκα ότι ο πλατωνισμός αντιμετωπίζει τη μουσική με μια νέα οπτική. Μια οπτική, η οποία αναγνωρίζει τη μουσική ως μία δύναμη ικανή να προβάλλει μια φιλοσοφική σύνθεση μόνο που ο μελετητής θα πρέπει ν' ασχοληθεί με ένα απόθεμα αριθμολογίας και να συσχετίσει μια μυθολογία με μαθηματικές αλληγορίες.

Κατάλαβα ότι ο μελετητής θα πρέπει να χρησιμοποιήσει τον Πλάτωνα ως την πολύτιμη στήλη της Ροζέττης για να μπορέσει να εισχωρήσει στην περισσότερο δυσνόητη επιστήμη των πρωιμοτέρων πολιτισμών αφενός και αφετέρου να συσχετίσει την τότε με τη σημερινή επιστημονική ορολογία.

Καρπός αυτής της ενασχολήσεώς μου με το «*μουσικό χωρίο*» υπήρξαν τα δύο σύγγραμματά μου με τίτλο
«Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική» (Εικόνα 1.1) και
«*Πλάτωνος Τίμαιος: Γένεση Ψυχής Κόσμου*», (Εικόνα 1.2), εις τα οποία αποκαλύπτεται πλήρως η όποια μουσική αλληγορία κάτω από τις προεκτάσεις
της μεγίστης Πλατωνικής τετρακτύος 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27 εις το εν λόγω Πλατωνικό χωρίο.



Εικόνα 1.1: Το σύγγραμμά του καθηγητού Χ. Χ. Σπυρίδη με τίτλο «*Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*».

Εικόνα 1.2: Το σύγγραμμά του καθηγητού Χ. Χ. Σπυρίδη με τίτλο «Πλάτωνος Τίμαιος: Γένεση Ψυχής Κόσμου (γραμμικές & λαβδοειδείς λύσεις)».

2. Η επιστήμη της Αρμονικής (=Μουσικής)

Οι πυθαγόρειοι ανεκάλυψαν τις βασικές αρχές της παγκοσμίου αρμονίας, των οποίων έκφραση και απείκασμα είναι οι μουσικοί λόγοι.

Η λέξη αρμονία σημαίνει συναρμολόγηση, σύνδεση, εκ του αρχαίου ρήματος *αραρίσκω*, το οποίο έχει τη σημασία συνάπτω, ενώνω, συναρμόζω, βάλλω μαζί, προσαρμόζω τι προς τι, συναρμολογώ τι με τι.

Η αλληλοδιαδοχή ποικίλων μουσικών λόγων εντός της διαπασών (=οκτάβας) γεννά αλληλουχία ποικίλων αλληλοσυνδεομένων μουσικών διαστημάτων και φθόγγων. Για τον λόγο αυτόν οι παλαιοί μαθηματικοί και μουσικοί αποκαλούσαν τη διαπασών «*αρμονίαν*».

Τα πολυποίκιλα φαινόμενα περί την αρμονίαν αντιμετώπιζαν οι πυθαγόρειοι με την επιστήμη της Αρμονικής (=Μουσικής), μια πρωτοεπιστήμη αριθμών και φθόγγων, η οποία ετυμολογικώς σημαίνει μέσον προς συναρμογήν δια του νοός.

Η Αρμονική (=Μουσική) κατά τους Πυθαγορείους (Νικόμαχος Γερασηνός, *Αριθμητική Εισαγωγή*) ήτο η τρίτη κατά σειράν εκ των τεσσάρων αδελφών της Μαθηματικής επιστήμης
(Αριθμητική, Γεωμετρία, Αρμονική και Σφαιρική), ενώ κατά τον Πλάτωνα ήτο η τετάρτη εκ των πέντε ιδιοτήτων δια των οποίων εξαγνίζεται ο άνθρωπος
(Αριθμητική, Γεωμετρία, Στερεομετρία, Μουσική και Αστρονομία).

Ο Νικόμαχος επισημαίνει ότι για να λειτουργήσει εκάστη επιστήμη ή ιδιότητα χρειάζεται οπωσδήποτε τις γνώσεις όλων των προηγουμένων της επιστημών ή ιδιοτήτων.

Η Αρμονική, ως ασχολουμένη με την αρμονία, ήτο μία καθαρώς μαθηματική επιστήμη, βασιζομένη στην Αριθμητική, τη Γεωμετρία και την Στερεομετρία και δεν ήτο μια δραστηριότητα αποσκοπούσα στην τέρψη και τη διασκέδαση των ανθρώπων.

Οφείλω να καταθέσω ότι η πολυετής ερευνητική ενασχόλησή μου με το γνωστό ως «*μουσικό χωρίο*» εκ του Πλατωνικού Τιμαίου, το οποίο αναφέρεται στη δημιουργία και τη σύσταση της Ψυχής του Κόσμου επί τη βάσει ενός αλγορίθμου βασιζομένου σε δύο τετράδες αριθμών, σε δύο τετρακτύες,
(1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27) και διατυπωμένου με Πυθαγόρειο μουσική ορολογία, μου εδημιούργησε την πίστη ότι η Πυθαγόρειος μουσική, ως καθαρώς μαθηματικός κλάδος, ήτο η εν είδει Διανυσματικού Λογισμού αντιμετώπιση των πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων.

Επιθυμών να επαληθεύσω αυτό μου το πιστεύω εδημιούργησα τη θεωρία του **Μουσικού Διανυσματικού Λογισμού** δια της οποίας απλοποιήθηκε η όλη αντιμετώπιση των πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων και η οποία αποτελεί το θέμα της παρούσης εισηγήσεώς μου.

Συνειδητοποιώντας το περιεχόμενο του αποσπάσματος του Νικομάχου του Γερασηνού «περί των τεσσάρων αδελφών της Μαθηματικής Επιστήμης» το ενδιαφέρον μου μετετοπίσθη από τη θεωρία των μουσικών διαστημάτων προς τη Γεωμετρία, διότι με τη Γεωμετρία οι αρχαίοι Έλληνες επεδίωκαν να κατανοήσουν την αφηρημένη δομή των σημείων και των ευθειών, χωρίς να προσκολλώνται σε συγκεκριμένους τύπους-συνταγές.

Με προβλημάτιζαν οι νέοι τύποι γεωμετριών, που πολλοί είχαν προταθεί από διαφόρους μαθηματικούς κατά τον δέκατο ένατο αιώνα και που ο καθένας παρεβίαζε ένα από τα θεμελιώδη αξιώματα της Ευκλειδείου Γεωμετρίας. Το σημαντικό για μένα ήταν οι σχέσεις ανάμεσα στα αντικείμενα και όχι τα ίδια τα αντικείμενα. Θεωρούσα ότι η Γεωμετρία εξακολουθεί να έχει νόημα ακόμη και όταν οι όροι σημείο, ευθεία, επίπεδο, αντικατασταθούν από τις λέξεις μουσικό ύψος, μουσικό διάστημα, μουσικό σύστημα.

Η ανάγκη να απαντήσω στα πάρα πολλά ερωτηματικά, που αντιμετώπισα κατά την πολυειδή ανάλυση του εν λόγω Πλατωνικού χωρίου, με ωδήγησε στη σύλληψη και διατύπωση της Γεωμετρίας των *ευθέων* και των *αντιστρόφων δικτυωτών* και στη συγγραφή του βιβλίου μου με τίτλο «*Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*» με έντονες επιρροές από την Ρεντζεπέρειο διδασκαλία της Κρυσταλλοδομής.

Ως γνωστόν, όλες οι υπάρχουσες Γεωμετρίες, άλλη ολιγότερο και άλλη περισσότερο, περιγράφουν τον φυσικό κόσμο. Η δική μου Γεωμετρία περιγράφει ιδανικά τον κόσμο όλων των μουσικών γεγονότων, δηλαδή τις μουσικές όλων των μουσικών πολιτισμών που υπήρξαν, υπάρχουν και που θα υπάρξουν στον πλανήτη Γη με την πλέον λεπτή μέθοδο, με τη συντομότερη ανάλυση, με τη μεγαλύτερη δυνατή σαφήνεια και καλαισθησία και, τέλος, τον μικρότερο πνευματικό κόπο.

Απόρροια της θεωρίας των δικτυωτών είναι «*Ο Μουσικός Διανυσματικός Λογισμός*» δια του οποίου επιλύονται τα μουσικά προβλήματα, αντιμετωπίζοντας τα μουσικά διαστήματα ως διανύσματα.

3. Επίπεδα Δικτυωτά

Με τον όρο επίπεδο δικτυωτό εννοούμε το σύνολο των σημείων που ορίζονται από τις τομές των ευθειών δύο συνεπιπέδων δεσμών[1] παραλλήλων ευθειών, συνήθως ορθογωνίων μεταξύ τους.

Λαμβάνομε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy. Λαμβάνομε επίσης μία επίπεδη δέσμη παραλλήλων ευθειών προς τον άξονα y'Oy, που τέμνουν τον άξονα x'Ox κατά επίτριτα μουσικά διαστήματα $\left(\frac{4}{3}\right)$ και μια επίπεδη δέσμη παραλλήλων ευθειών προς τον άξονα x'Ox, που τέμνουν τον άξονα y'Oy καθ' ημιόλια μουσικά διαστήματα $\left(\frac{3}{2}\right)$. Οι τομές των δύο επιπέδων και ορθογωνίων δεσμών παραλλήλων ευθειών ορίζουν ένα σύνολο ομοεπιπέδων *σημείων* ή *κόμβων*, δηλαδή ορίζουν ένα *επίπεδο δικτυωτό* (Σχήμα 3.1).

Το επίτριτο και το ημιόλιο διάστημα επελέγησαν για τη δόμηση του δικτυωτού -ως χαρακτηριστικά θεμελειώδη μουσικά διαστήματα κατά τους αντιστοίχους άξονες x και y-, διότι είναι εκφραστές των δύο και μοναδικών ασυνθέτων αρχαιοελληνικών συμφωνιών, ήτοι της διατεσσάρων και της διαπέντε.

> Τῶν συμφωνιῶν αἱ μέν εἰσιν ἀσύνθετοι, αἱ δὲὲ σύνθετοι, ἀσύνθετοι μὲν αἱ διὰ τεσσάρων αἵ τε διὰ πέντε, σύνθετοι δὲ αἱ διὰ ὀκτὼ καὶ ἕνδεκα καὶ δώδεκα καὶ δεκαπέντε.
>
> Ανωνύμου του Bellermann, Τέχνη Μουσικής, 74, 1 έως 75, 1.

Ο κάθε κόμβος του δικτυωτού ορίζει είτε ένα ***μουσικό ύψος***, είτε ένα **μήκος ταλαντουμένου τμήματος χορδής** επί ενός συμπαντικού μονοχόρδου. Στην πρώτη περίπτωση το δικτυωτό θα ονομάζεται **ευθύ** ή **Πυθαγόρειο**, στη δεύτερη περίπτωση **αντίστροφο** ή **Σπυρίδειο**.

Οι έννοιες ευθύ και αντίστροφο εδόθησαν επειδή τα μουσικά ύψη και τα ταλαντούμενα τμήματα χορδών συνδέονται δια της αντιστρόφου σχέσεως $\frac{f_1}{f_2} = \frac{L_2}{L_1}$.

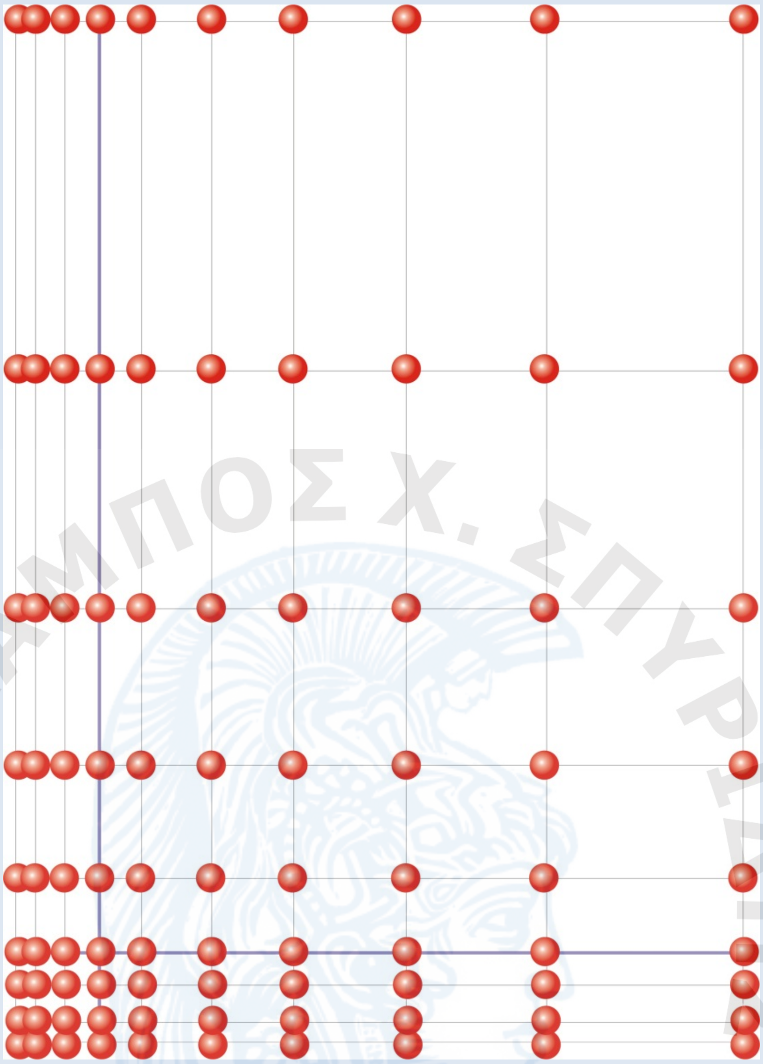
Πρέπει να τονισθεί ευθύς εξ αρχής ότι το δικτυωτό αποτελεί μια αφηρημένη περιοδική διάταξη κόμβων, επί της οποίας υλοποιείται η Πυθαγόρειος μουσική και ΜΟΝΟΝ.

Κατά τη σχεδίαση του δικτυωτού σε γραμμικούς άξονες οι παράλληλες ευθείες των συνεπιπέδων δεσμών απέχουν κατά αποστάσεις ανάλογες του $\left(\frac{a}{b}\right)^k \; k = 1,2,3,...$, όπου $\left(\frac{a}{b}\right)$ είναι το χαρακτηριστικό θεμελειώδες μουσικό διάστημα κατά τον αντίστοιχο άξονα. Ως εκ τούτου είναι μεταξύ τους μη ισαπέχουσες.

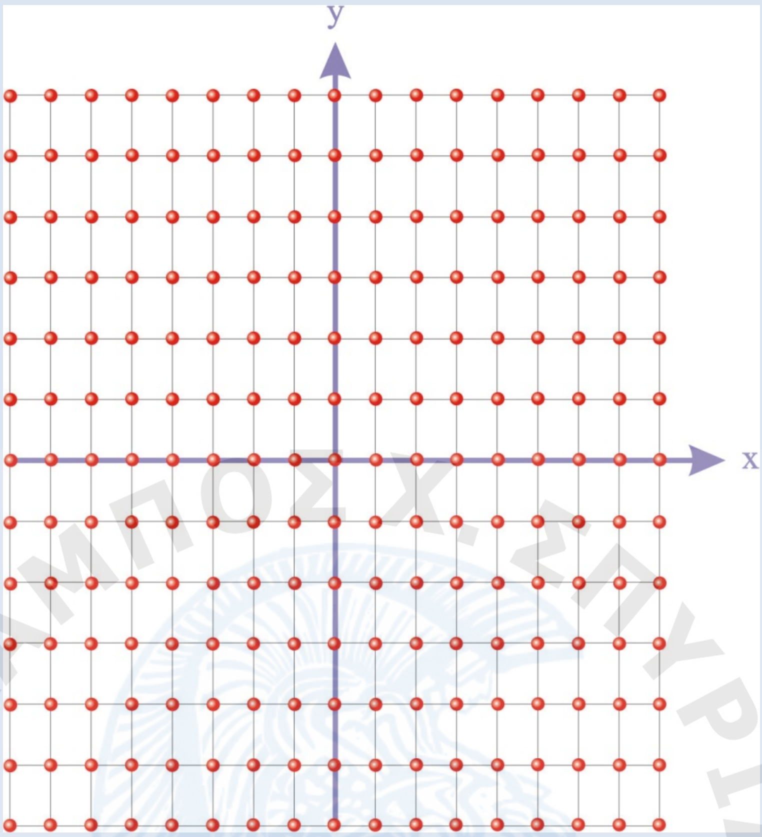
Προκειμένου να καταστεί το δικτυωτό ευκολότερο στη σχεδίαση και περισσότερον εποπτικό, το σχεδιάζουμε σε ορθογώνιο σύστημα αναφοράς με λογαριθμικούς άξονες (Σχήμα 3.2), οπότε οι παράλληλες ευθείες ανά δέσμη καθίστανται ισαπέχουσες.

Στο εξής, όταν ομιλούμε για το ευθύ ή το αντίστροφο δικτυωτό, θα εννοούμε μετακίνηση κατά μήκος των αξόνων κατά το αντίστοιχο χαρακτηριστικό θεμελειώδες τους μουσικό διάστημα, αλλά θα το σχεδιάζουμε σε log-log άξονες.

[1] Δέσμη ευθειών εν γένει λέγεται το σύνολο των ευθειών, οι οποίες διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο ονομάζεται *κέντρο* της δέσμης. Δεχόμαστε ότι το κέντρο μιας δέσμης παραλλήλων ευθειών ευρίσκεται στο άπειρο.



Σχήμα 3.1: Το δικτυωτό σε γραμμική σχεδίαση.



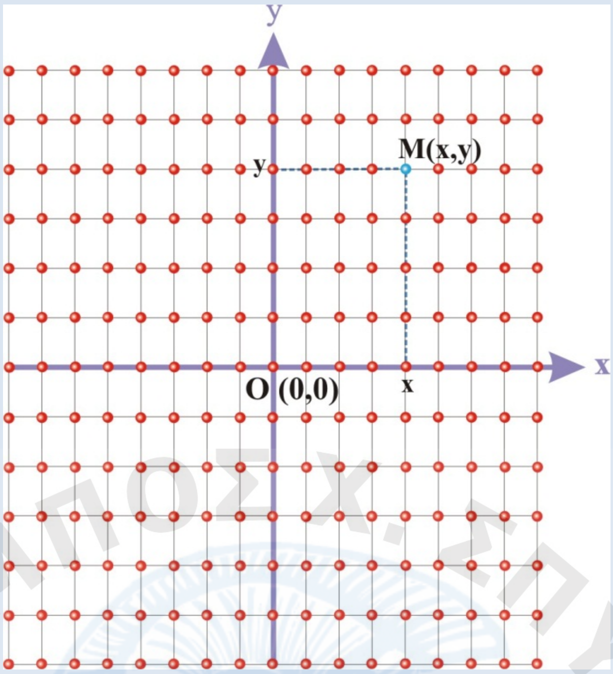
Σχήμα 3.2: Το δικτυωτό σε log-log διάγραμμα,

όπου $x = \log\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{x}\right]$ και $y = \log\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{y}\right]$.

Επί εκάστου δικτυωτού κατά τον άξονα x το βήμα (= η μικρότερη επιτρεπτή μετακίνηση) είναι ένα επίτριτο διάστημα και κατά τον άξονα y το βήμα είναι ένα ημιόλιο διάστημα. Αυτά σημαίνουν ότι στο δικτυωτό οι μετατοπίσεις γίνονται κατά ακέραιο αριθμό βημάτων και ΜΟΝΟΝ.

Το βήμα κατά τον άξονα x και το βήμα κατά τον άξονα y έχουν μέτρα $\left(\frac{4}{3}\right)$ και $\left(\frac{3}{2}\right)$, αντιστοίχως, είναι κάθετα μεταξύ τους και ονομάζονται *παράμετροι του δικτυωτού*.

Επί του ευθέος δικτυωτού συμβολίζουμε με M(x,y) ένα μουσικό διάστημα, που υλοποιείται με την εκτέλεση x επιτρίτων και y ημιολίων μουσικών διαστημάτων σε σχέση με ένα αρχικό μουσικό ύψος O(0,0), το οποίο εκλαμβάνεται ως μουσικό ύψος αναφοράς (Σχήμα 3.3).



Σχήμα 3.3: Ένα μουσικό ύψος M(x,y) σε Πυθαγόρειο δικτυωτό, το οποίο σε σχέση με ένα μουσικό ύψος αναφοράς O(0,0) σχηματίζει ένα μουσικό διάστημα.

Ένας κόμβος του Πυθαγορείου δικτυωτού με συντεταγμένες x και y συμβολίζεται ως $M(x, y)$ και παριστά το μουσικό ύψος $M(x,y)=\left(\frac{4}{3}\right)^{x}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{y}\cdot O(0,0)$, αφού υλοποιείται με την εκτέλεση x επιτρίτων και y ημιολίων μουσικών διαστημάτων σε σχέση με ένα αρχικό μουσικό ύψος O(0,0), το οποίο εκλαμβάνεται ως μουσικό ύψος αναφοράς (Σχήμα 3.3). Τούτο συμβαίνει επειδή οι αριθμητικές σχέσεις των πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων προστίθενται δια πολλαπλασιασμού.

Επί του αντιστρόφου δικτυωτού, αντιστοίχως, ένας κόμβος M με συντεταγμένες x, y παριστά ένα μήκος δονουμένου τμήματος χορδής, το οποίο υλοποιεί σε σχέση με ένα αρχικό δονούμενο τμήμα χορδής $L_0(0,0)$, το οποίο εκλαμβάνεται ως δονούμενο τμήμα χορδής αναφοράς, το μουσικό διάστημα

$$L_M(x,y)=\left(\frac{4}{3}\right)^{x}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{y}\cdot L_0(0,0)$$

Προφανώς, οποιοδήποτε μουσικό διάστημα εκφράζεται σαν απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κόμβων του δικτυωτού, η οποία επαναλαμβανόμενη δίδει **στοίχο** του δικτυωτού.

Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, το οποίο σχηματίζεται από τις δύο παραμέτρους του δικτυωτού ονομάζεται **βρόχος**.

Το δικτυωτό μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγεται με περιοδική μετατόπιση του βρόχου από τις δύο παραμέτρους του.

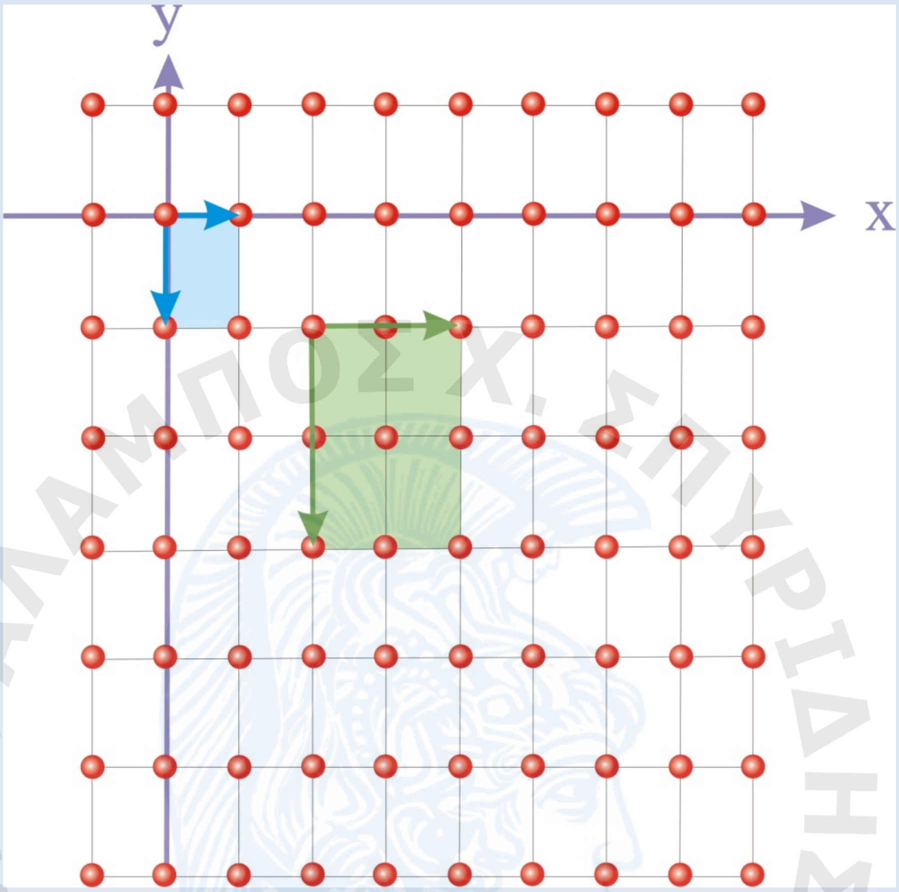
Ένας βρόχος δεν έχει σαφώς καθορισμένη αρχή ή θέση στο δικτυωτό, εκτός εάν επιβάλλεται από ένα πρόβλημα ο καθορισμός της αρχής και της θέσεώς του.

Ένας βρόχος ονομάζεται απλός, διπλός, τριπλός και γενικώς πολλαπλός, αναλόγως του εάν περιέχει 1, 2, 3, ..., πολλούς ισοδυνάμους από μετατόπιση κόμβους (Σχήμα 3.4).

Προφανώς, οι τέσσερις κόμβοι στις κορυφές ενός βρόχου πρέπει να θεωρούνται ως ένας, διότι ο καθένας τους ανήκει κατά το ¼ στον εν λόγω βρόχο, αφού συμμετέχει στον σχηματισμό τεσσάρων γειτονικών βρόχων.

Οι δύο παράμετροι του δικτυωτού, που ορίζουν απλό βρόχο, ονομάζονται συζυγείς.

Όλοι οι απλοί βρόχοι, οι οποίοι ορίζονται από διαφόρους συζυγείς παραμέτρους ενός δικτυωτού, έχουν το ίδιο εμβαδόν. Πολλαπλός βρόχος με n κόμβους μέσα του έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν (n+1) απλών βρόχων.



Σχήμα 3.4: Απλός και σύνθετος βρόχος σε δικτυωτό.

Επί δικτυωτού, στο οποίο έχει καθορισθεί ο κόμβος αναφοράς Ο(0,0), δίδεται ένας ακόμη κόμβος M_1 με συντεταγμένες (x, y) $x, y \in N$.

Τούτο, κατά τα γνωστά, σημαίνει ότι το ευθύγραμμο τμήμα OM_1 επί του δικτυωτού αντιπροσωπεύει το Πυθαγόρειο μουσικό διάστημα, το οποίο δομείται από x επίτριτα και y ημιόλια μουσικά διαστήματα.

Έστω ότι επί του ιδίου δικτυωτού μας δίδονται οι κόμβοι $M_2, M_3, ..., M_n$ με συντεταγμένες $(2x,2y)$, $(3x,3y)$ και (nx, ny) $n \in N$, αντιστοίχως. Η κοινή ευθεία ή διεύθυνση επί της οποίας κείνται αυτοί οι κόμβοι λέμε ότι ορίζει τη θέση ενός **στοίχου** του δικτυωτού. Η δυάδα $x, y,$ αποτελεί τους **δείκτες** του στοίχου, οι οποίοι τιθέμενοι εντός αγκυλών $[x, y]$ συμβολίζουν τον εν λόγω στοίχο. Επειδή οι δείκτες $[x, y]$, $[2x, 2y]$, $[3x, 3y]$, ..., $[nx, ny]$ ορίζουν, προφανώς, τον ίδιο στοίχο, συνηθίζεται να συμβολίζεται η διεύθυνση ενός στοίχου με δείκτες χωρίς κοινό παράγοντα.

Το σύνολο όλων των παραλλήλων στοίχων του δικτυωτού ως προς τον στοίχο $[x, y]$ το συμβολίζουμε με τους ίδιους δείκτες, αλλά εντός διπλών αγκυλών $[[x, y]]$.

Αφού στο δικτυωτό όλοι οι κόμβοι ορίζονται με συντεταγμένες ακεραίους αριθμούς, έπεται ότι μέσα στον οιονδήποτε απλό βρόχο του δικτυωτού δεν υπάρχει κανείς κόμβος, διότι τότε ο κόμβος αυτός αφενός μεν θα ορίζετο με μη ακεραίους συντεταγμένες, αφετέρου δε ο βρόχος θα έπαυε να είναι απλός και θα καθίστατο πολλαπλός.

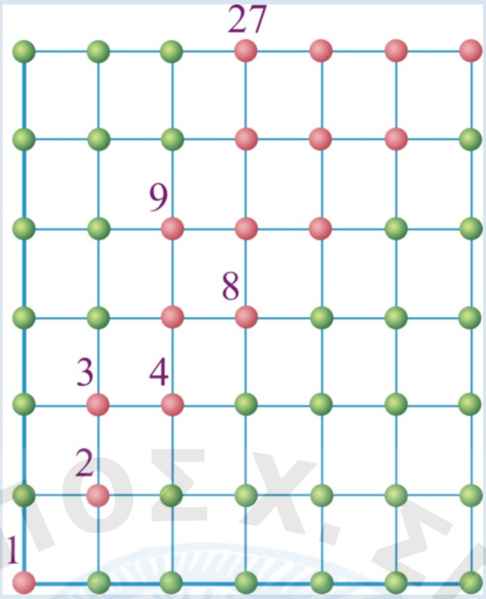
Όπως έχει ήδη λεχθεί, έκαστος των κόμβων επί ενός αντιστρόφου δικτυωτού ορίζει ένα μήκος δονουμένου τμήματος χορδής επί του άνευ δεσμών βραχίονος του συμπαντικού μονοχόρδου.

Λόγω της Ευκλειδείου μεθόδου της ανταναιρέσεως ή της ανθυφαιρέσεως εκ του συνόλου των κόμβων του αντιστρόφου δικτυωτού φυσική σημασία έχουν μόνον οι κόμβοι, οι οποίοι αντιστοιχούν σε δονούμενα τμήματα χορδής με μήκη εκφραζόμενα δι' ακεραίων αριθμών.

Η μικρότερη αριθμητική τιμή αποδεκτού κόμβου είναι αυτή της μονάδος και εκφράζει το μήκος της «ανθυφαιρετικής» μονάδος, η οποία δια τούτο είναι και αδιαίρετη. «τὴν μονάδα διαιρεῖσθαι, ὅπερ ἀδύνατον» κατά την 3η μαθηματική πρόταση της πραγματείας Ευκλείδου κατατομή κανόνος. Βλέπε Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2005, Ευκλείδου: Κανόνος Κατατομή, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα, σ. 58.

Επειδή στην αρχαία ελληνική μουσική τα διαστήματα εξεφράζοντο ως λόγοι μηκών ταλαντουμένων τμημάτων χορδής, όπως συμβαίνει επί του αντιστρόφου δικτυωτου, γι' αυτόν τον λόγο η όλη μελέτη της αρχαιοελληνικής μουσικής πραγματοποιείται επί του αντιστρόφου δικτυωτού.

Έχω αποδείξει στα δύο προμνημονευθέντα συγγράμματά μου ότι ένα αντίστροφο δικτυωτό αποτελεί αυτό που ο Πλάτων ονομάζει **ΚΟΣΜΟΝ** εις τον Τίμαιό του και το τμήμα του Κόσμου, που περιλαμβάνει τους κόμβους που αντιστοιχούν σε δονούμενα τμήματα χορδής με μήκη εκφραζόμενα δι' ακεραίων αριθμών, ονομάζεται **Ψυχή του Κόσμου** (Σχήμα 3.5).



Σχήμα 3.5: Ο καθορισμός των ορίων της Ψυχής του Κόσμου με τους όρους της μεγίστης τετρακτύος του Πλάτωνος [«μουσικό χωρίο (35a1-36b6)» του διαλόγου *του Τίμαιος]*.

Ο ασχολούμενος με την επίλυση του Πλατωνικού προβλήματος επί του ***αντιστρόφου δικτυωτού*** ευρίσκεσαι αντιμέτωπος με ένα θαυμάσιο ***πρόβλημα της θεωρίας αριθμών***, το οποίο είναι εξ ίσου διαχρονικό μ' ένα αληθινό έργο τέχνης, και αισθάνεται την ανάγκη να αναφωνήσει: «*Αυτά δεν είναι Μαθηματικά. Αυτά είναι Θεολογία!*».

4. ΜΟΥΣΙΚΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Για πρώτη φορά το έτος 2004 στο σύγγραμμά μου με τον τίτλο *Ο ΔΥΪΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΟΥΣΙΚΟΥ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ*, σύμφωνα με τη γραμμική Αριστοξένειο θέαση του μουσικού διαστήματος, αντιμετώπισα το μουσικό διάστημα ως ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών (α, β) και καθόρισα την Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων με βάση τα μη ηχούντα τμήματα χορδής.

Το επόμενο έτος, 2005, στο σύγγραμμά μου με τον τίτλο *ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΜΟΥΣΙΚΗ* καθιέρωσα για πρώτη φορά τα ευθέα και τα αντίστροφα δικτυωτά, τα οποία με οδήγησαν στην ανακάλυψη του *Μουσικού Διανυσματικού Λογισμού*, τον οποίο και χρησιμοποιώ για τη θεωρητική αντιμετώπιση μουσικών προβλημάτων, που αφορούν στα Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα.

Περί του *Μουσικού Διανυσματικού Λογισμού*, ο οποίος προσομοιάζει προς αυτόν, που όλοι ως Φυσικοί γνωρίζουμε, με προπαιδεία τα όσα μέχρι στιγμής σας ανέπτυξα, θα σας ομιλήσω εν γενικαίς γραμμαίς.

4.1 Ορισμοί

Μουσικό διάνυσμα λέγεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ από έναν κόμβο Α σε έναν κόμβο Β ενός άξονα (στοίχου) δικτυωτού. Ο κόμβος Α θεωρείται αρχή και ο κόμβος Β θεωρείται τέλος του μουσικού διανύσματος.

Συμβολικά το μουσικό διάνυσμα ΑΒ γράφεται $\overline{AB}$.

Επίσης, ένα μουσικό διάνυσμα το συμβολίζουμε με ένα πεζό γράμμα λ.χ. $\overline{AB}=\overline{a}$.

Τα μουσικά διανύσματα θα χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη των μουσικών διαστημάτων στο δομικό Πυθαγόρειο μουσικό σύστημα.

4.1.1 Στοιχεία μουσικού διανύσματος

Φορέας του μουσικού διανύσματος ονομάζεται ο άξονας (στοίχος) επάνω στον οποίον βρίσκεται το μουσικό διάνυσμα.

Διεύθυνση του μουσικού διανύσματος ονομάζεται η διεύθυνση, την οποία ορίζει ο φορέας του.

Φορά του μουσικού διανύσματος $\overline{AB}$ είναι η φορά από τον κόμβο (αρχής) Α προς τον κόμβο (πέρατος) Β.

Μέτρο $\left|\overline{AB}\right|$ του μουσικού διανύσματος $\overline{AB}$ ονομάζεται το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Το μέτρο ενός μουσικού διανύσματος βρίσκεται ως εξής:

Περίπτωση 1η

Έστω το μουσικό διάνυσμα από τον κόμβο Ο(0,0) (την αρχή των ορθογωνίων συντεταγμένων xOy) σε έναν κόμβο Α(x,y) του δικτυωτού. Το μέτρο (= η απόσταση των άκρων Ο και Α) αυτού του μουσικού διανύσματος θα δίδεται από τη σχέση: $\left|\overline{OA}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^y$.

Περίπτωση 2η

Έστω το μουσικό διάνυσμα από τον κόμβο $A(x_1, y_1)$ σε έναν κόμβο $B(x_2, y_2)$ του δικτυωτού. Το μέτρο (= η απόσταση των άκρων Α και Β) αυτού του μουσικού διανύσματος θα δίδεται από τη σχέση: $\left|\overline{AB}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^{(x_2 - x_1)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{(y_2 - y_1)}$

Κάθε μουσικό διάνυσμα με αρχή έναν κόμβο του δικτυωτού και πέρας έναν άλλον κόμβο του ιδίου δικτυωτού παριστάνει ένα μουσικό διάστημα μεταξύ είτε των μουσικών υψών, είτε μεταξύ των μηκών των ταλαντουμένων μηκών χορδής, τα οποία αντιστοιχούν στους κόμβους αρχής και πέρατος αυτού.

Το μέτρο αυτού του μουσικού διανύσματος θα δίνει την αριθμητική σχέση, η οποία εκφράζει το μέγεθος του αντιστοίχου μουσικού διαστήματος.

4.1.2 Είδη μουσικών διανυσμάτων

Ελεύθερα ονομάζονται δύο μουσικά διανύσματα, τα οποία έχουν το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση και την ίδια φορά. Αυτά σημαίνουν ότι οι φορείς (στοίχοι) των ελευθέρων μουσικών διαστημάτων είναι μεταξύ τους παράλληλοι [[x,y]].

Ολισθαίνοντα ονομάζονται δύο μουσικά διανύσματα, τα οποία έχουν το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και επί πλέον κείνται επάνω στον ίδιο φορέα [x,y].

Εφαρμοστά ονομάζονται δύο μουσικά διανύσματα, τα οποία έχουν το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση και την ίδια φορά και επί πλέον το ίδιο σημείο εφαρμογής (=την ίδια αρχή).

Ουδέτερο μουσικό διάνυσμα $\overline{o}$: Το μουσικό διάνυσμα από έναν οποιονδήποτε κόμβο Α(x,y) του δικτυωτού προς τον ίδιο κόμβο Α(x,y) έχει διεύθυνση και φορά απροσδιόριστες, μέτρο δε που δίδεται από τη σχέση:

$\left|\overline{o}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^{x-x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{y-y} = \left(\frac{4}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^0$. Το διάνυσμα αυτό ονομάζεται ουδέτερο μουσικό διάνυσμα.

Μοναδιαίο μουσικό διάνυσμα $\overline{x_0}$ (1,0) ή $\overline{y_0}$ (0,1) λέγεται το διάνυσμα του άξονα x ή y, αντιστοίχως, που έχει θετική φορά και μέτρο ίσο προς $\left(\frac{4}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^0$ ή $\left(\frac{4}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^1$, αντιστοίχως.

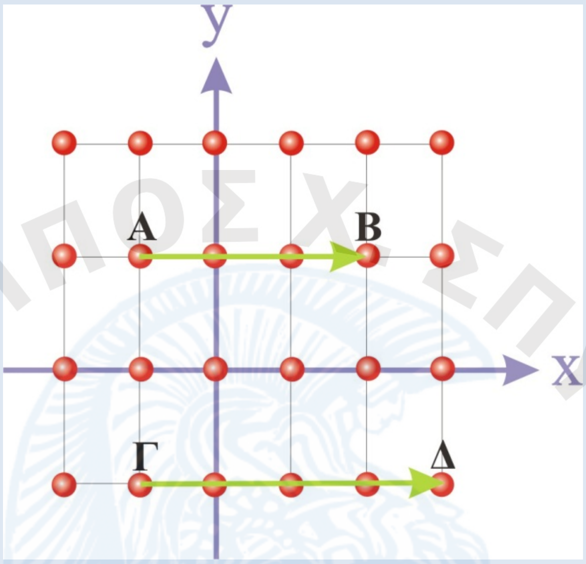
Οι ορθογώνιοι άξονες xOy στα δικτυωτά είναι *κβαντισμένοι*. Δηλαδή επάνω τους δεν μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε μήκος, αλλά το μήκος είτε επάνω στον άξονα x'Ox, είτε επάνω στον άξονα y'Oy είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μέτρου του αντιστοίχου μοναδιαίου μουσικού διανύσματος, δηλαδή:

$$x = \kappa\left|\overline{x_0}\right|,\ y = \lambda\left|\overline{y_0}\right| \quad \kappa, \lambda \in N .$$

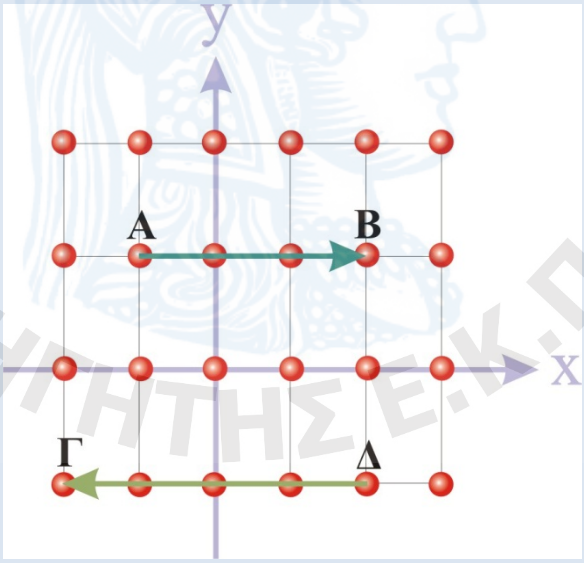
Με τα ανωτέρω καθίσταται αντιληπτό ότι στο κβαντισμένο αυτό ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy σχηματίζεται ένα δικτύωμα του οποίου τα κομβικά σημεία έχουν συντεταγμένες $x = \kappa\left|\overline{x_0}\right|$, $y = \lambda\left|\overline{y_0}\right|$ $\kappa, \lambda \in N$.

Δύο ή περισσότερα μουσικά διανύσματα λέγονται <u>συγγραμμικά</u>, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση [x,y].

Δύο συγγραμμικά μουσικά διανύσματα, εάν έχουν ίδια φορά, λέγονται <u>ομόρροπα</u> (Σχήμα 4.1), εάν έχουν αντίθετη φορά, λέγονται αντίρροπα (Σχήμα 4.2).



Σχήμα 4.1: <u>Ομόρροπα</u> μουσικά διανύσματα.

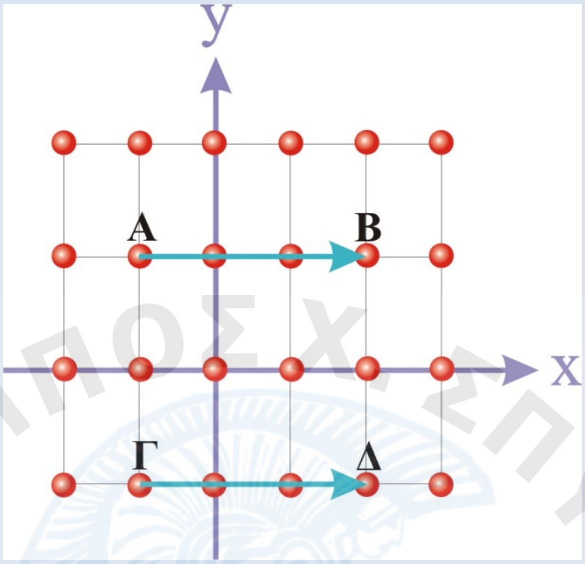


Σχήμα 4.2: Αντίρροπα μουσικά διανύσματα.

Παρατήρηση

Δεν μπορούμε να ομιλούμε για ομόρροπα ή αντίρροπα μουσικά διανύσματα, εάν αυτά δεν είναι συγγραμμικά.

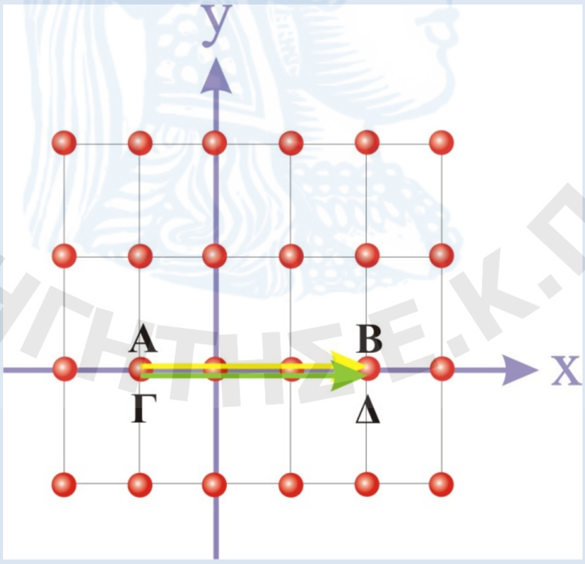
Δύο μουσικά διανύσματα λέγονται <u>ίσα «δυνάμει»</u> (Σχήμα 4.3), όταν είναι είτε ελεύθερα, είτε είναι ολισθαίνονται. Αυτά σημαίνουν ότι τα μουσικά διαστήματα είναι ομόρροπα και έχουν το ίδιο μέτρο χωρίς να αποτελεί κώλυμμα η περιοχή είτε των μουσικών τους υψών, είτε των μηκών των ταλαντουμένων τμημάτων χορδής. Επί παραδείγματι, στο τέλειο αμετάβολο σύστημα των αρχαίων υπάρχουν πέντε διαστήματα διατεσσάρων (τετράχορδα), που είναι ίσα μεταξύ τους, αλλά το καθένα τους αναφέρεται σε διαφορετική περιοχή μουσικών υψών λ.χ. τετράχορδο υπατών, τετράχορδο μέσων, τετράχορδο συνημμένων, τετράχορδο διεζευγμένων, τετράχορδο υπερβολαίων.



Σχήμα 4.3: Ίσα «δυνάμει» μουσικά διανύσματα.

Δύο μουσικά διανύσματα λέγονται ίσα «ενεργεία» (Σχήμα 4.4), όταν είναι εφαρμοστά. Αυτό σημαίνει ότι τα μουσικά διαστήματα είναι ομόρροπα και έχουν την ίδια αρχή και το ίδιο πέρας. Δηλαδή κατά την εκτέλεσή τους το άκουσμά τους είναι απολύτως το ίδιο.

Επί παραδείγματι, στο τέλειο αμετάβολο σύστημα των αρχαίων το μουσικό διάστημα από την υπάτη μέσων μέχρι τη μέση είναι ίσο με το τετράχορδο μέσων.



Σχήμα 4.4: Ίσα «ενεργεία» μουσικά διανύσματα

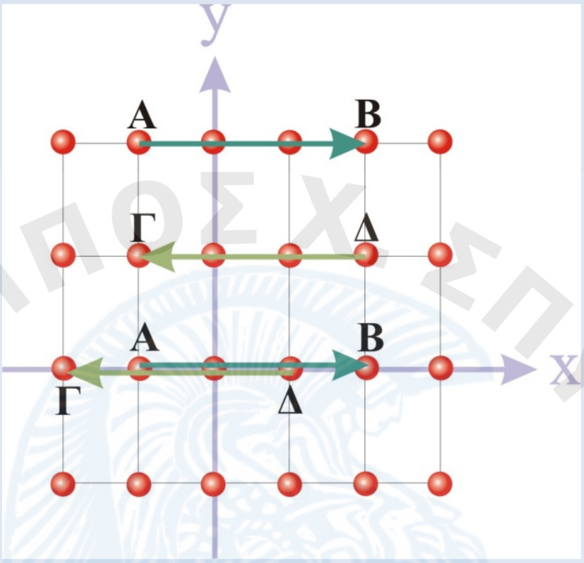
Δύο μουσικά διανύσματα λέγονται αντίθετα «δυνάμει» (Σχήμα 4.5), όταν

είτε έχουν το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά (οι φορείς τους είναι διαφορετικοί και μεταξύ τους παράλληλοι [[x,y]]),

είτε έχουν το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά και επί πλέον κείνται επάνω στον ίδιο φορέα [x,y].

Αυτά σημαίνουν ότι τα μουσικά διαστήματα είναι αντίρροπα και έχουν το ίδιο μέτρο χωρίς να αποτελεί κώλυμμα η περιοχή είτε των μουσικών τους υψών, είτε των μηκών των ταλαντουμένων τμημάτων χορδής.

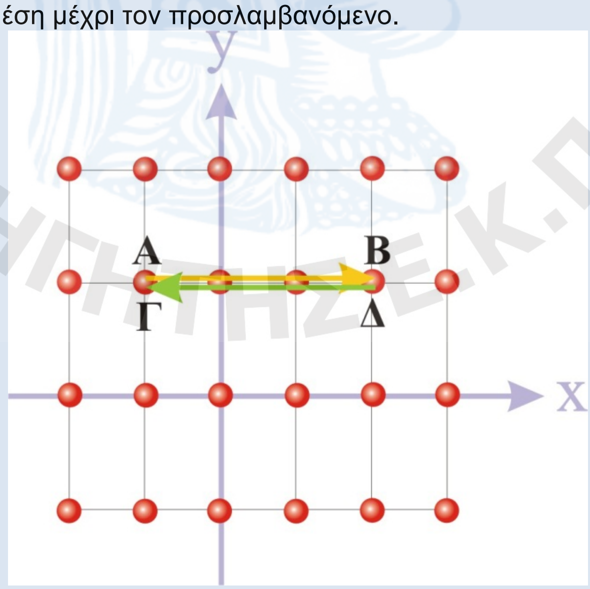
Επί παραδείγματι, στο τέλειο αμετάβολο σύστημα των αρχαίων το μουσικό διάστημα από την υπάτη υπατών μέχρι τη νήτη υπατών (=υπάτη μέσων) είναι αντίθετο «δυνάμει» με το μουσικό διάστημα από τη νήτη υπερβολαίων μέχρι την υπάτη υπερβολαίων (=νήτη διεζευγμένων). Πράγματι, το καθένα από τα δύο αυτά μουσικά διαστήματα είναι ένα δια τεσσάρων, μόνον που το πρώτο είναι ανιόν και το δεύτερο κατιόν.



Σχήμα 4.5: Αντίθετα «δυνάμει» μουσικά διανύσματα.

Δύο μουσικά διανύσματα λέγονται <u>αντίθετα «ενεργεία»</u> (Σχήμα 4.6), όταν έχουν το ίδιο μέτρο, την ίδια διεύθυνση [x,y], αντίθετη φορά καθώς επίσης η αρχή και το πέρας του πρώτου είναι πέρας και αρχή, αντίστοιχα, του δευτέρου.

Επί παραδείγματι, στο τέλειο αμετάβολο σύστημα των αρχαίων το μουσικό διάστημα από τον προσλαμβανόμενο μέχρι τη μέση είναι αντίθετο «ενεργεία» του μουσικού διαστήματος από τη μέση μέχρι τον προσλαμβανόμενο.



Σχήμα 4.6: Αντίθετα «ενεργεία» μουσικά διανύσματα.

Διαδοχικά μουσικά διανύσματα

Δύο ή περισσότερα μουσικά διανύσματα καλούνται *διαδοχικά*, όταν η αρχή εκάστου είναι πέρας του προηγουμένου του.

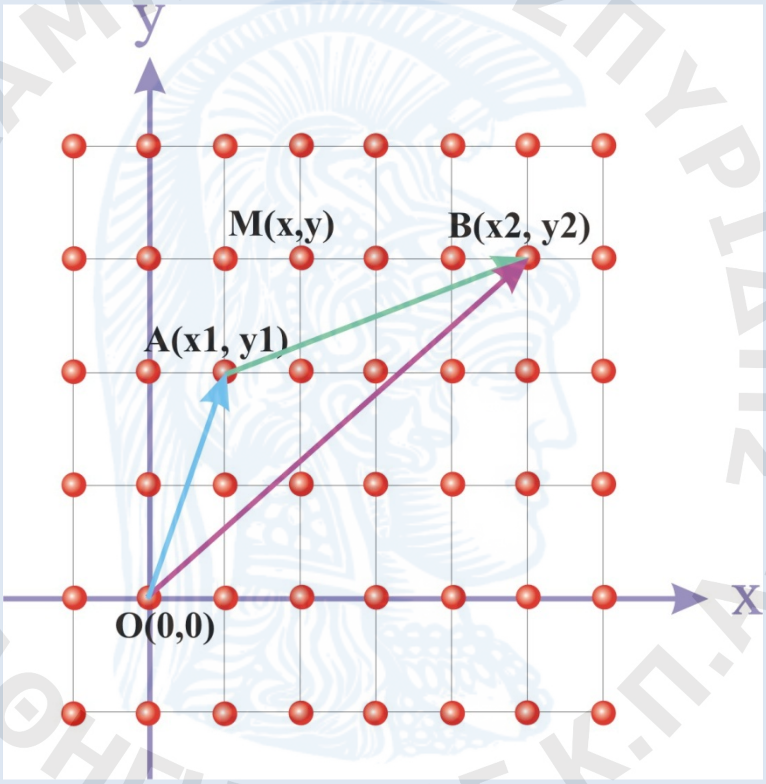
4.2 Πράξεις με μουσικά διανύσματα

4.2.1 Πρόσθεση μουσικών διανυσμάτων

Διακρίνουμε την πρόσθεση «ενεργεία» και την πρόσθεση «δυνάμει» των μουσικών διανυσμάτων.

Η πρόσθεση «ενεργεία» αναφέρεται πάντοτε σε διαδοχικά μουσικά διανύσματα και είναι υλοποιήσιμη μουσικώς, δηλαδή εκτελείται στην πράξη επί συγκεκριμένων μουσικών διαστημάτων. Αυτό με ένα μουσικό παράδειγμα σημαίνει το εξής: ξεκίνησα από ένα συγκεκριμένο μουσικό ύψος και έπαιξα ένα ανιόν διάστημα διατεσσάρων και στη συνέχεια έπαιξα ένα ανιόν διάστημα διαπέντε. Άρα έπαιξα συνολικά ένα ανιόν διάστημα διαπασών και βρέθηκα σε διπλάσιο μουσικό ύψος του αρχικού.

Δοθέντων, λοιπόν, δύο τουλάχιστον διαδοχικών μουσικών διανυσμάτων, καλούμε άθροισμα αυτών το μουσικό διάνυσμα το οποίο έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου . Δηλαδή $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$ κατά το Σχήμα 4.7.



Σχήμα 4.7: Πρόσθεση «ενεργεία» δύο διαδοχικών μουσικών διανυσμάτων.

Η πρόσθεση «δυνάμει» αναφέρεται πάντοτε σε μη διαδοχικά μουσικά διανύσματα, δεν έχει υλοποιήσιμο χαρακτήρα παρά έχει ένα χαρακτήρα αφορισμού.

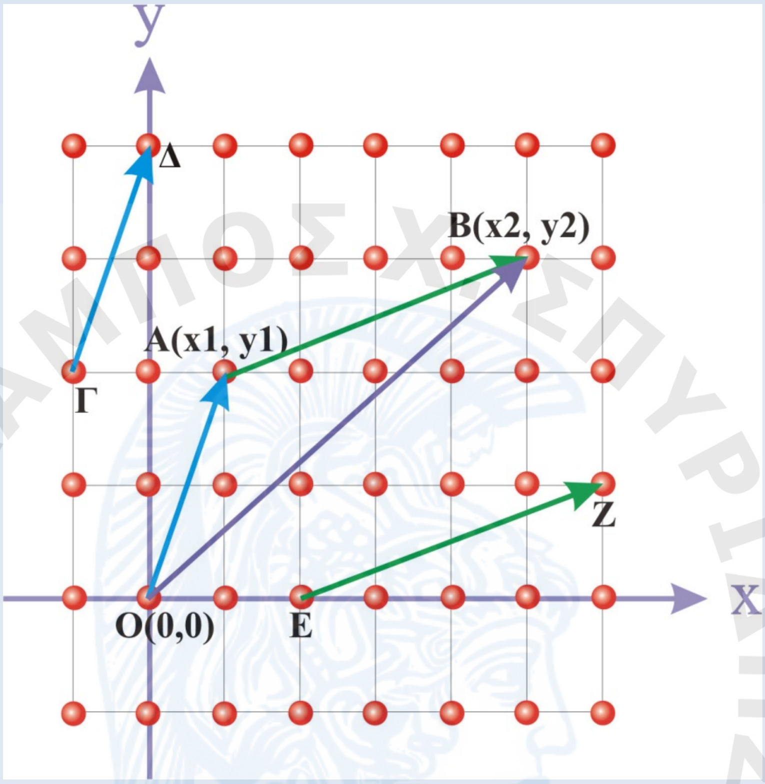
Αυτό με ένα μουσικό παράδειγμα σημαίνει το εξής: Κάθε φορά που προσθέτουμε λ.χ. έναν επόγδοο τόνο σε ένα οποιοδήποτε διατεσσάρων διάστημα, προκύπτει ένα διαπέντε διάστημα. Αυτό είναι ένας αφορισμός, μία λογική πρόταση αληθής, που ισχύει για όλα τα μουσικά διαστήματα, χωρίς, όμως, να αναφέρεται σε κάποια συγκεκριμένα.

Επειδή ωρισμένες φορές δεν είναι τόσο οφθαλμοφανές το αποτέλεσμα της προσθέσεως «δυνάμει», ενεργούμε ωσάν να εκτελούμε πρόσθεση «ενεργεία», εκκινούντες από ένα αυθαιρέτως επιλεγμένο μουσικό ύψος και καθιστώντες τα δοθέντα μουσικά διανύσματα διαδοχικά.

Διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις προσθέσεως «δυνάμει» μουσικών διανυσμάτων:

1η Περίπτωση

Έστω ότι έχουμε τα μη διαδοχικά μουσικά διανύσματα $\overline{\Gamma\Delta}$ και $\overline{EZ}$ (Σχήμα 4.8). Θα έχουμε $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$, όπου $\overline{OA}$ παράλληλο, ομόρροπο και ίσο με το $\overline{\Gamma\Delta}$ (αντιμετωπίζεται ως ελεύθερο μουσικό διάνυσμα) και $\overline{AB}$ παράλληλο, ομόρροπο και ίσο με το $\overline{EZ}$ (αντιμετωπίζεται ως ελεύθερο μουσικό διάνυσμα).

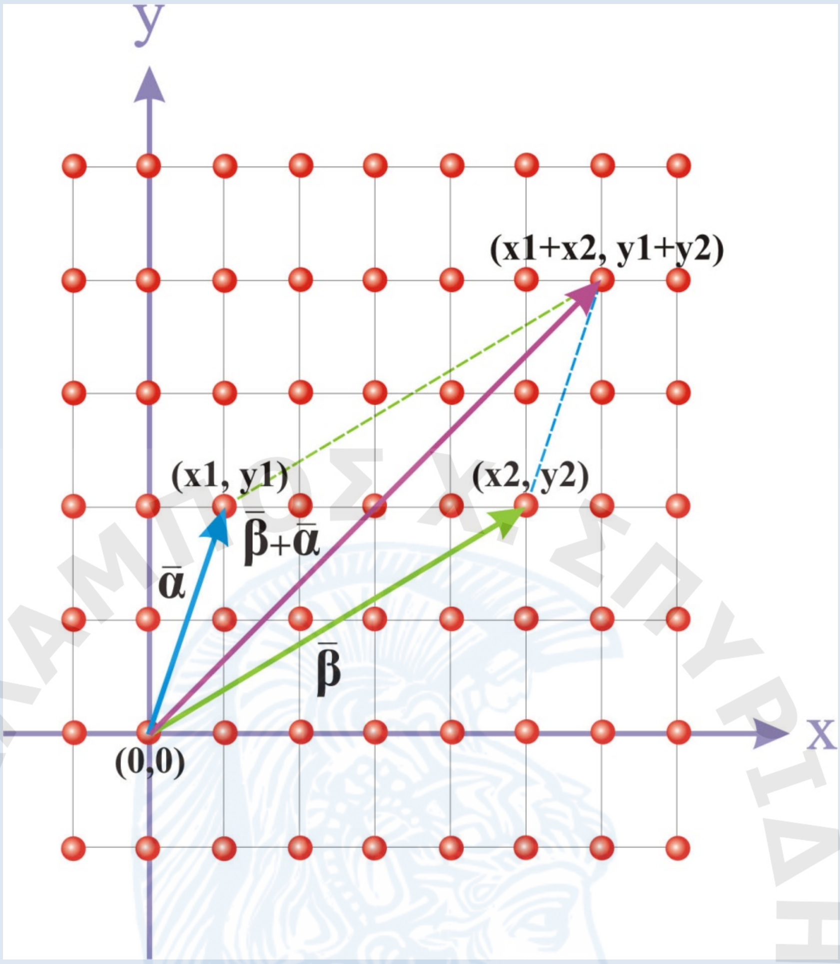


Σχήμα 4.8: Πρόσθεση «δυνάμει» δύο μη διαδοχικών μουσικών διανυσμάτων.

2η Περίπτωση

Έστω ότι έχουμε να προσθέσουμε δύο μουσικά διανύσματα, τα οποία έχουν κοινή αρχή (Σχήμα 4.9). Άθροισμα αυτών των δύο μουσικών διανυσμάτων είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου[2] που κατασκευάζεται με πλευρές τα δοθέντα δύο μουσικά διανύσματα και η οποία (διαγώνιος) έχει ως αρχή την κοινή αρχή O(0,0) αυτών.

[2] Η μέθοδος του παραλληλογράμμου αποτελεί μια διαδικασία με την οποία καθιστούμε τα δύο μουσικά διανύσματα διαδοχικά, εάν σκεφθεί κανείς ότι οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου είναι παράλληλες και ίσες και, διανυσματικώς, παριστούν ανά δύο ίσα μουσικά διανύσματα (αντιμετωπιζόμενα ως ελεύθερα μουσικά διανύσματα).



Σχήμα 4.9: Πρόσθεση «δυνάμει» δύο μουσικών διανυσμάτων που έχουν κοινή αρχή.

Εάν περισσότερα από δύο μουσικά διανύσματα έχουν κοινή αρχή, το άθροισμά τους βρίσκεται ως εξής: Βρίσκουμε το άθροισμα δύο εξ αυτών, κατόπιν το άθροισμα του αθροίσματος των δύο προηγουμένων με το τρίτο κ.ο.κ. Η περίπτωση αυτή είναι μουσικώς μη υλοποιήσιμη.

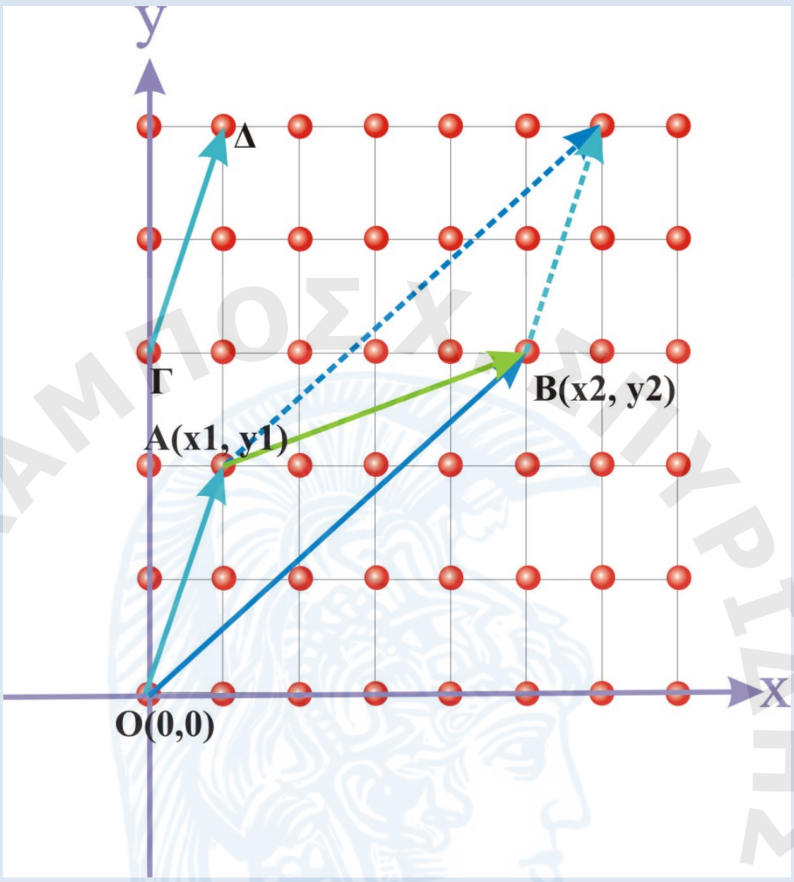
4.2.2 Αφαίρεση δύο μουσικών διανυσμάτων

Διακρίνουμε την αφαίρεση «ενεργεία» και την αφαίρεση «δυνάμει» των μουσικών διανυσμάτων.

Η αφαίρεση «ενεργεία» αναφέρεται πάντοτε σε διαδοχικά μουσικά διανύσματα και είναι μουσικώς υλοποιήσιμη, ενώ η αφαίρεση «δυνάμει» αναφέρεται πάντοτε σε μη διαδοχικά μουσικά διανύσματα, είναι μουσικώς μη υλοποιήσιμη και έχει ένα χαρακτήρα αφορισμού.

Για να πραγματοποιήσουμε γραφικά την αφαίρεση «δυνάμει» δύο δοθέντων μουσικών διανυσμάτων, τα αντιμετωπίζουμε ως ελεύθερα μουσικά διανύσματα και τα καθιστούμε κοινής αρχής επί ενός αφθαιρέτως επιλεγμένου κόμβου του δικτυωτού. Τότε διαφορά αυτών είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου με πλευρές τα δύο δοθέντα μουσικά διανύσματα, η οποία ΔΕΝ διέρχεται από τον κοινή τους αρχή και έχει φορά από το πέρας του αφαιρετέου προς το πέρας του μειωτέου (Σχήμα 4.10).

Έστω ότι έχουμε τα δύο μουσικά διανύσματα $\overline{\Gamma\Delta}$ και $\overline{OB}$, τα οποία ούτε διαδοχικά είναι, ούτε έχουν κοινή αρχή. Η διαφορά «δυνάμει» αυτών $\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{\Gamma\Delta}$ [3] είναι εξ ορισμού ένα μουσικό διάνυσμα το οποίο, εάν προστεθεί στο $\overline{\Gamma\Delta}$, θα μας δώσει το $\overline{OB}$.



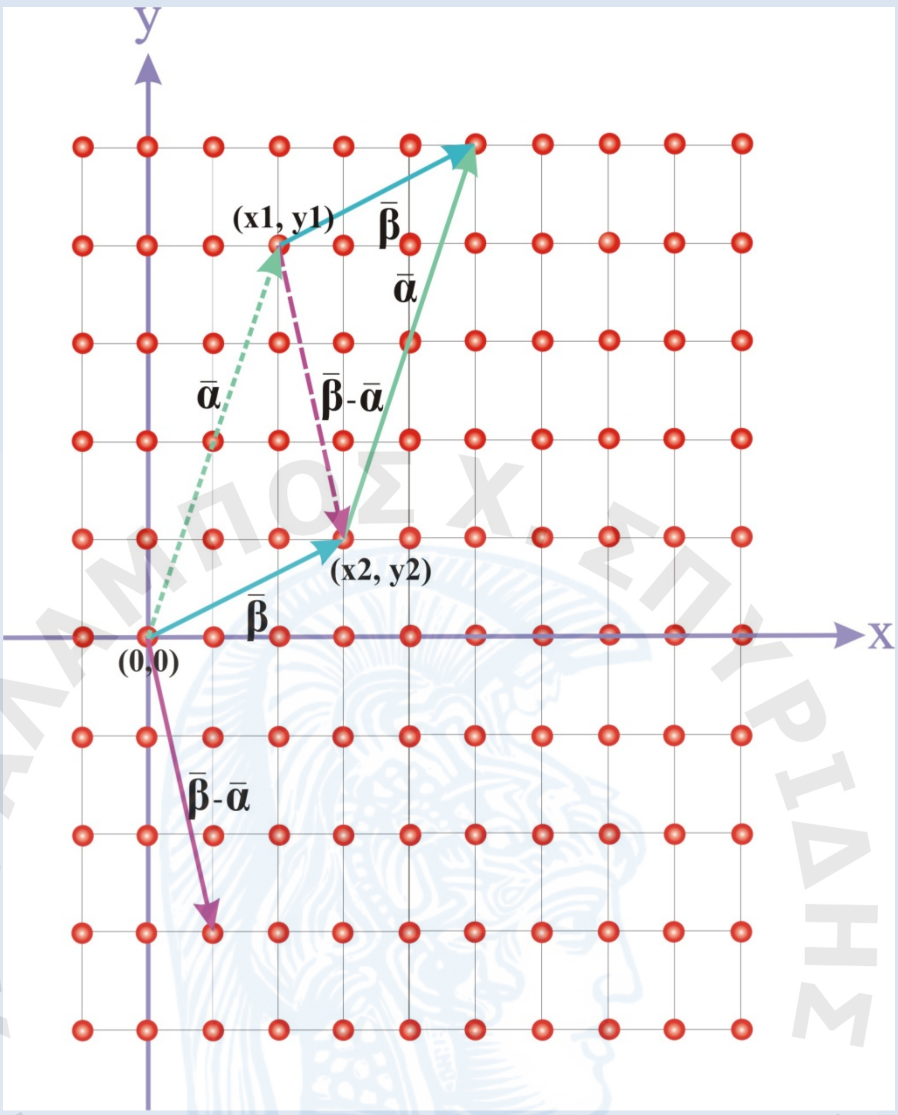
Σχήμα 4.10: Αφαίρεση «δυνάμει» δύο μουσικών διανυσμάτων που δεν έχουν κοινή αρχή.

Αφαίρεση «ενεργεία» δύο μουσικών διανυσμάτων. Μπορούμε να εργασθούμε με δύο τρόπους.

1ος τρόπος

Ενεργούμε, όπως στην αφαίρεση «δυνάμει» των δύο μουσικών διανυσμάτων και, όταν βρούμε τη διαφορά, την αντιμετωπίζουμε ως ελεύθερο μουσικό διάνυσμα και λαμβάνουμε ίσο προς αυτήν μουσικό διάνυσμα με αρχή την αρχή του πρώτου μουσικού διανύσματος (μειωτέου) (Σχήμα 4.11).

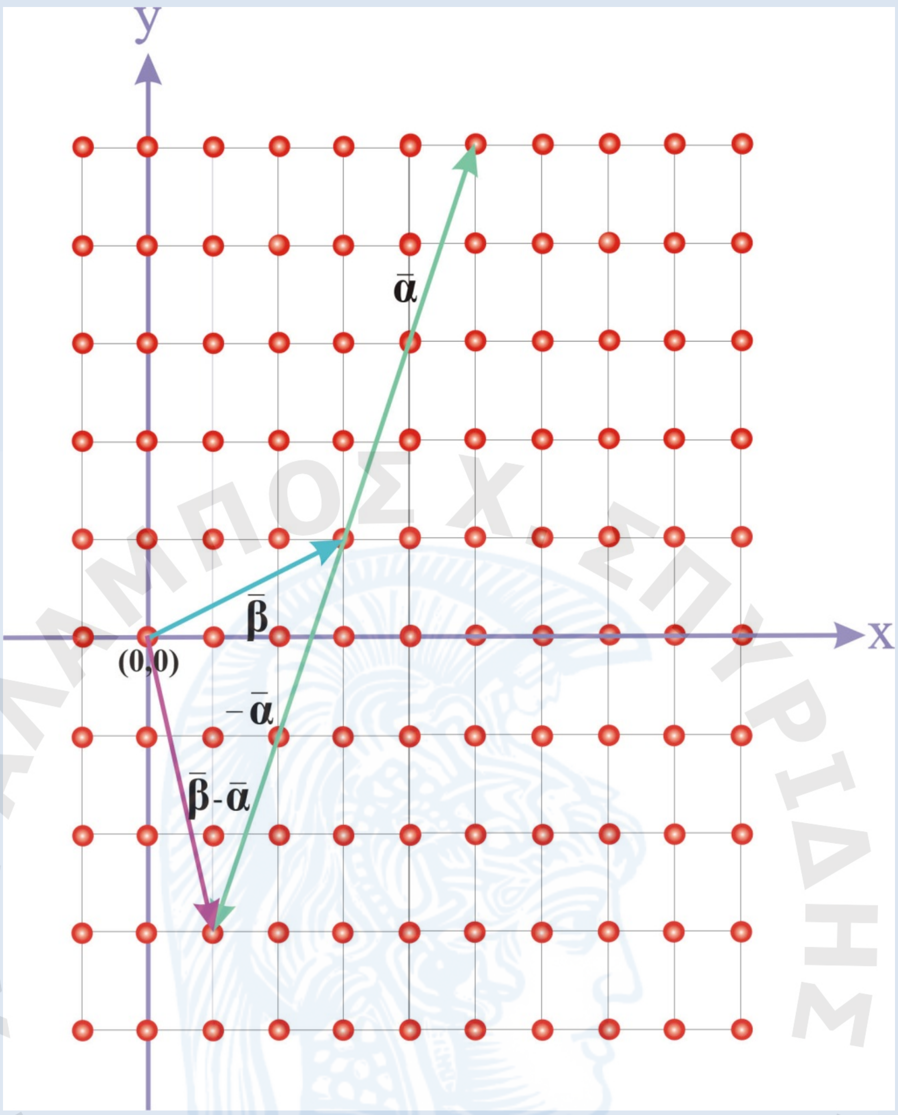
[3] Το διάνυσμα $\overline{AB}$ καλείται διαφορά των δύο διανυσμάτων $\overline{OB}$ και $\overline{\Gamma\Delta}$. Το διάνυσμα $\overline{OB}$ καλείται μειωτέος, διότι θα μειωθεί. Το διάνυσμα $\overline{\Gamma\Delta}$ καλείται αφαιρετέος, διότι θα αφαιρεθεί.



Σχήμα 4.11: Αφαίρεση «ενεργεία» δύο διαδοχικών μουσικών διανυσμάτων.

2ος τρόπος

Η έκφραση $\overline{\beta}-\overline{\alpha}$ μπορεί να γραφεί ισοδυνάμως ως $\overline{\beta}-\overline{\alpha}=\overline{\beta}+\left(-\overline{\alpha}\right)$. Αυτό σημαίνει ότι, προκειμένου να αφαιρέσουμε το μουσικό διάνυσμα $\overline{\alpha}$ από το μουσικό διάνυσμα $\overline{\beta}$, προσθέτουμε στο μουσικό διάνυσμα $\overline{\beta}$ το αντίθετο του μουσικού διανύσματος $\overline{\alpha}$, δηλαδή το μουσικό διάνυσμα $-\overline{\alpha}$ (Σχήμα 4.12).



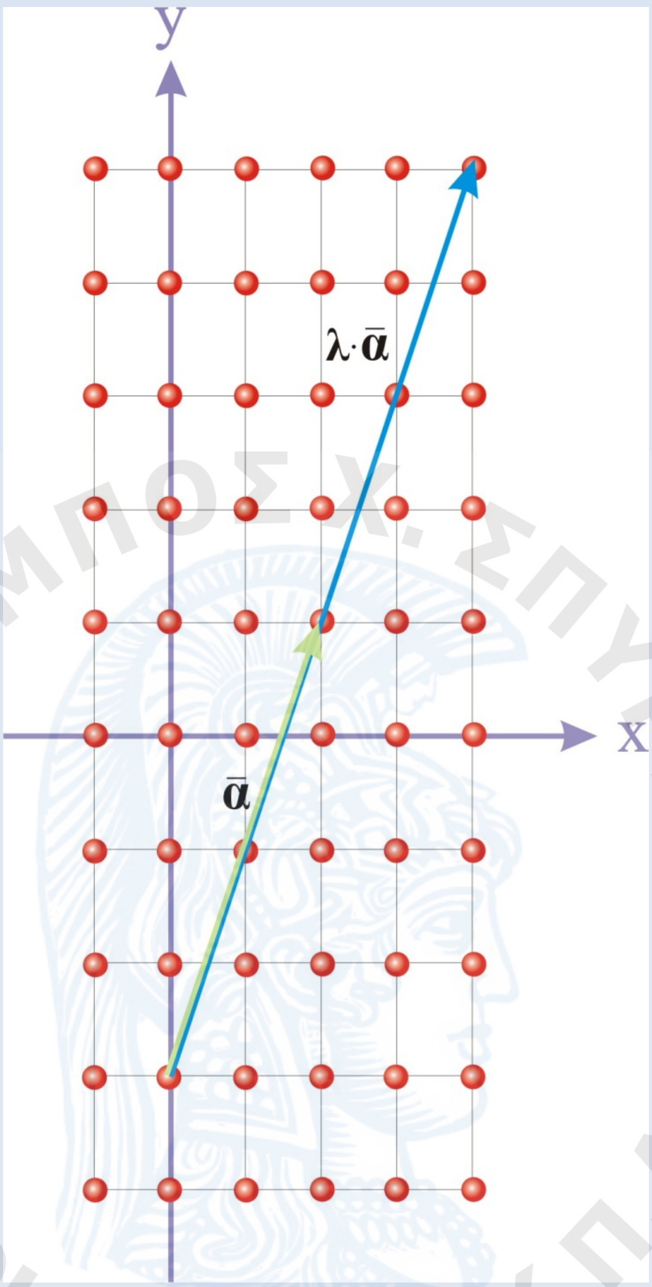
Σχήμα 4.12: Αφαίρεση «ενεργεία» δύο διαδοχικών μουσικών διανυσμάτων.

4.2.3 Πολλαπλασιασμός μουσικού διανύσματος επί ακέραιο αριθμό (βαθμωτός πολλαπλασιασμός μουσικού διανύσματος)

Έστω το μουσικό διάνυσμα $\overline{AB}$ από τον κόμβο $A(x_1, y_1)$ σε έναν κόμβο $B(x_2, y_2)$ του δικτυωτού (Σχήμα 4.13) και ένας ακέραιος αριθμός λ $(\lambda \in Z)$.

Το διάνυσμα $\lambda \cdot \overline{AB}$

- είναι μουσικό εφ' όσον ξεκινά από κόμβο και καταλήγει σε κόμβο του δικτυωτού,
- είναι ομόρροπο του $\overline{AB}$, εάν λ>0,
- είναι αντίρροπο του $\overline{AB}$, εάν λ<0,
- έχει δε μέτρο ίσο προς $|\lambda| \cdot |\overline{AB}| = \left(\frac{4}{3}\right)^{|\lambda| \cdot (x_2 - x_1)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{|\lambda| \cdot (y_2 - y_1)}$.



Σχήμα 4.13: Βαθμωτός πολλαπλασιασμός μουσικού διανύσματος επί ακέραιο θετικό αριθμό.

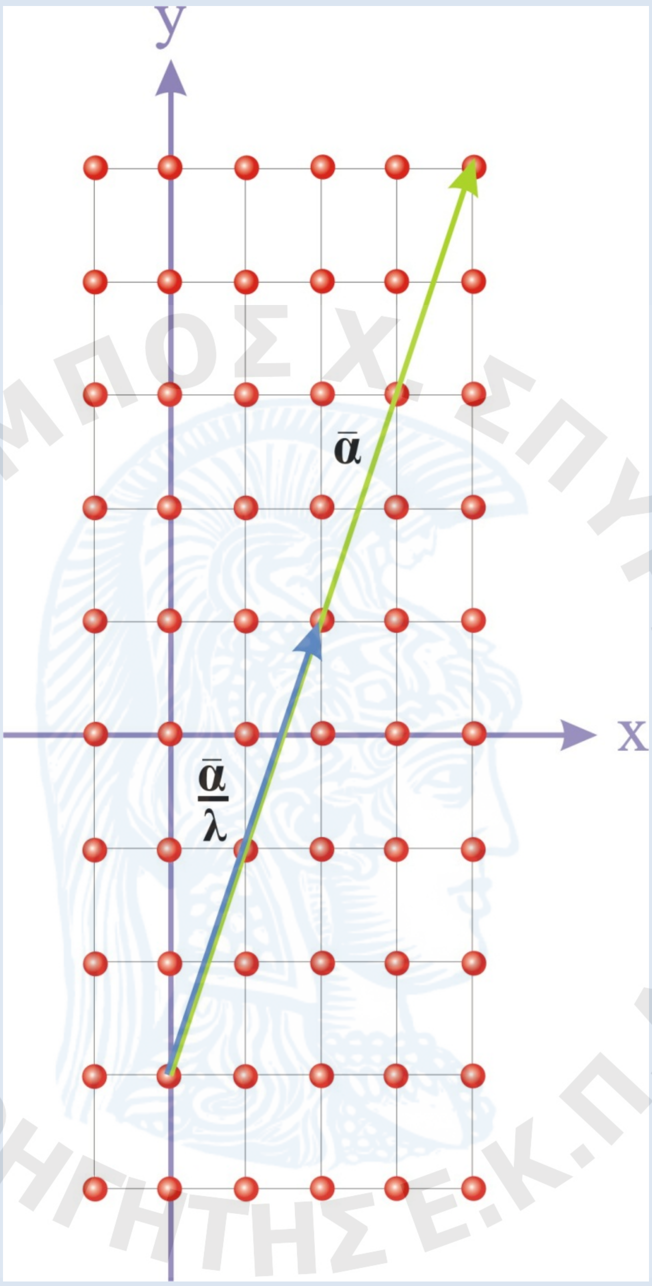
4.2.4 Διαίρεση μουσικού διανύσματος δια ακεραίου αριθμού

Έστω το μουσικό διάνυσμα $\overline{AB}$ από τον κόμβο $A(x_1, y_1)$ σε έναν κόμβο $B(x_2, y_2)$ του δικτυωτού (Σχήμα 4.14) και ένας ακέραιος αριθμός λ $(\lambda \in Z)$.

Το διάνυσμα $\dfrac{\overline{AB}}{\lambda}$

- είναι μουσικό εφ' όσον ξεκινά από κόμβο και καταλήγει σε κόμβο του δικτυωτού,
- είναι ομόρροπο του $\overline{AB}$, εάν λ>0,
- είναι αντίρροπο του $\overline{AB}$, εάν λ<0,

- ➢ έχει δε μέτρο ίσο προς $\frac{\left|\overline{AB}\right|}{|\lambda|} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{(x_2 - x_1)}{|\lambda|}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{(y_2 - y_1)}{|\lambda|}}$



Σχήμα 4.14: Διαίρεση μουσικού διανύσματος δια ακεραίου θετικού αριθμού.

4.3. Διαστηματική ανάλυση βρόχου επί του αντιστρόφου δικτυωτού

Όπως έχει ήδη λεχθεί, κάθε κόμβος της Ψυχής Κόσμου επί του αντιστρόφου δικτυωτού εκφράζεται δι' ενός ακεραίου Πυθαγορείου αριθμού $\left(2^x \cdot 3^y \quad x, y \in Z\right)$ και παριστά ένα μήκος χορδής.

Μετακίνηση από κόμβου εις κόμβον του αντιστρόφου δικτυωτού εκφράζει ένα μουσικό διάστημα, το οποίο υπολογίζεται από τον λόγο του αριθμού του κόμβου αφίξεως δια του αριθμού του κόμβου εκκινήσεως $\left(\frac{L_{\alpha\varphi\acute{\iota}\xi\varepsilon\omega\varsigma}}{L_{\varepsilon\kappa\kappa\iota\nu\acute{\eta}\sigma\varepsilon\omega\varsigma}}\right)$.

Μετακίνηση από κόμβο μικρού αριθμού προς κόμβο μεγαλυτέρου αριθμού σημαίνει μετακίνηση από μικρό μήκος δονουμένου τμήματος χορδής προς μεγαλύτερο, δηλαδή εκτέλεση ενός καθοδικού μουσικού διαστήματος.

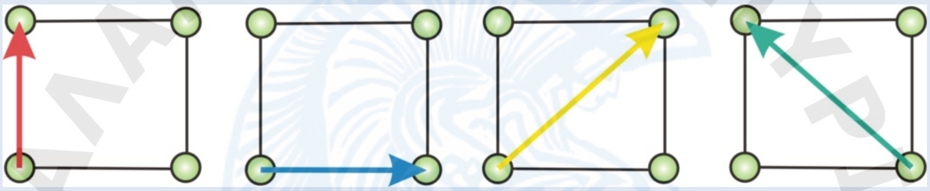
Οι στοιχειώδεις μετακινήσεις μεταξύ των κόμβων του αντιστρόφου δικτυωτού πραγματοποιούνται εντός ενός απλού βρόχου (σχήμα 4.15) είναι οι:

Μετακίνηση κατακορύφως μεταξύ δύο διαδοχικών κόμβων συνεπάγεται εκτέλεση ενός διαπέντε διαστήματος ανιόντος ή κατιόντος, αναλόγως της σχέσεως των αριθμών του κόμβου εκκινήσεως και του κόμβου αφίξεως.

Μετακίνηση οριζοντίως μεταξύ των δύο διαδοχικών κόμβων συνεπάγεται εκτέλεση ενός διατεσσάρων διαστήματος.

Μετακίνηση μεταξύ των διαγωνίων κόμβων (κάτω αριστερά- επάνω δεξιά) συνεπάγεται εκτέλεση ενός διαστήματος διαπασών.

Μετακίνηση μεταξύ των διαγωνίων κόμβων (κάτω δεξιά- επάνω αριστερά) συνεπάγεται εκτέλεση ενός επογδόου διαστήματος.

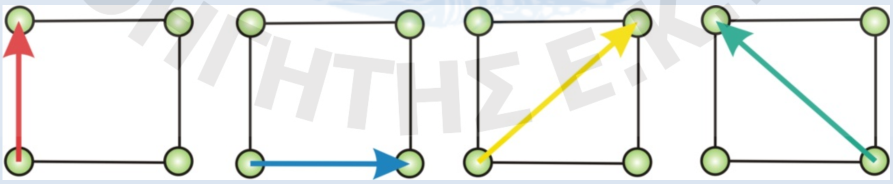


Σχήμα 4.15: Η γραφική παρουσίαση των τεσσάρων δυνατών κινήσεων μεταξύ των κόμβων ενός απλού βρόχου διπλασίων αριθμών.

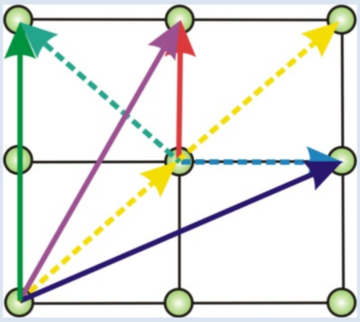
Οι μετακινήσεις μεταξύ κόμβων συνθετοτέρων βρόχων εκφράζουν μουσικά διαστήματα, το μέγεθος των οποίων προκύπτει δια της συνθέσεως ωρισμένων εκ των στοιχειωδών μετακινήσεως εντός του αντιστρόφου δικτυωτού κατά διανυσματικόν τρόπον, όπως θα δειχθεί κατωτέρω.

4.4. Διανυσματική πρόσθεση πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων

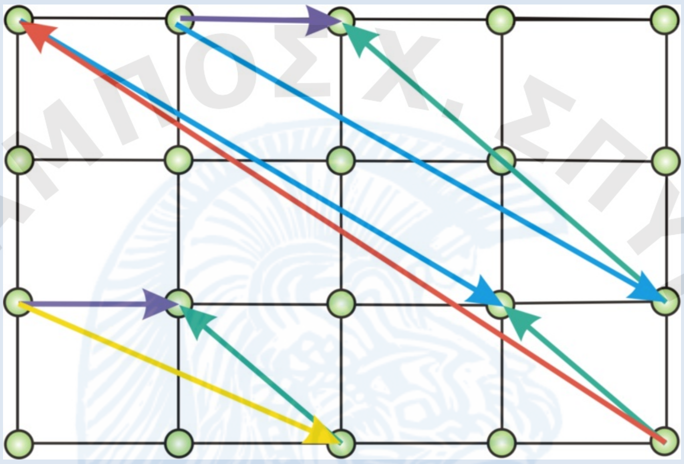
1. Τα μουσικά διαστήματα που αναφέρονται από τον Ιάμβλιχο στο πυθαγόρειο πείραμα στο χαλκοτυπείον.



2. Διαπασών συν έκαστον εκ των μουσικών διαστημάτων που αναφέρονται από τον Ιάμβλιχο στο πυθαγόρειο πείραμα στο χαλκοτυπείον.



3. Τα μουσικά διαστήματα διατονικόν τριημίτονον, αποτομή μείζονος τόνου, λείμμα.



$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$
$$y_1 = 1 \quad y_2 = 0$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^{(2-0)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{(2-0)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{32}{27}$$

ΔΙΑΤΟΝΙΚΟ ΤΡΙΗΜΙΤΟΝΟ (ΚΙΤΡΙΝΟ)

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 0$$
$$y_1 = 0 \quad y_2 = 3$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^{(0-4)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{(3-0)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{3^7}{2^{11}} = \frac{2187}{2048}$$

ΑΠΟΤΟΜΗ ΜΕΙΖΟΝΟΣ ΤΟΝΟΥ (ΚΟΚΚΙΝΟ)

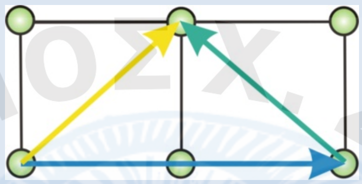
$x_1 = 1 \quad x_2 = 4$

$y_1 = 3 \quad y_2 = 1$

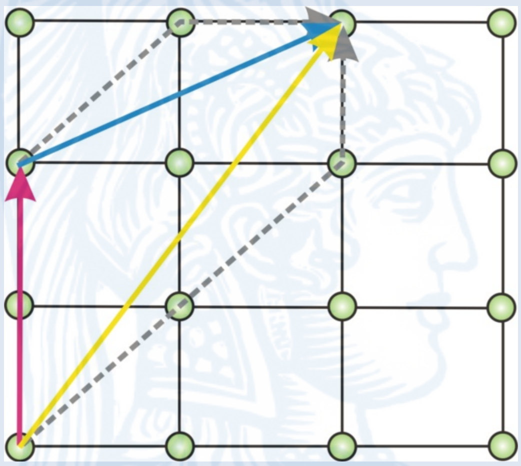
$$\left|\overline{AB}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^{(4-1)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{(1-3)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{2^8}{3^5} = \frac{256}{243}$$

ΛΕΙΜΜΑ (ΜΠΛΕ)

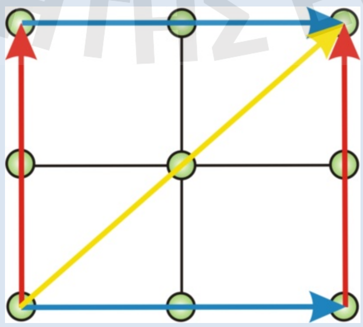
4. Του δις διατεσσάρων προστιθεμένου εις τον μείζονα τόνον (επόγδοον), γεννάται το διαπασών.



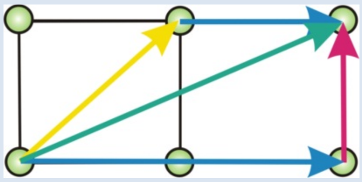
5. Του δις διαπέντε προστιθεμένου εις το διαπασών και διατεσσάρων, γεννάται το δις διαπασών και διαπέντε.



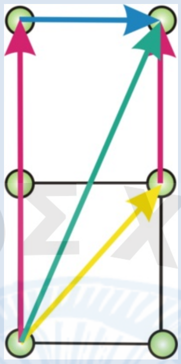
6. Του δις διαπέντε προστιθεμένου εις το δις διατεσσάρων, γεννάται το δις διαπασών και του δις διατεσσάρων προστιθεμένου εις το δις διαπέντε, γεννάται το δις διαπασών.



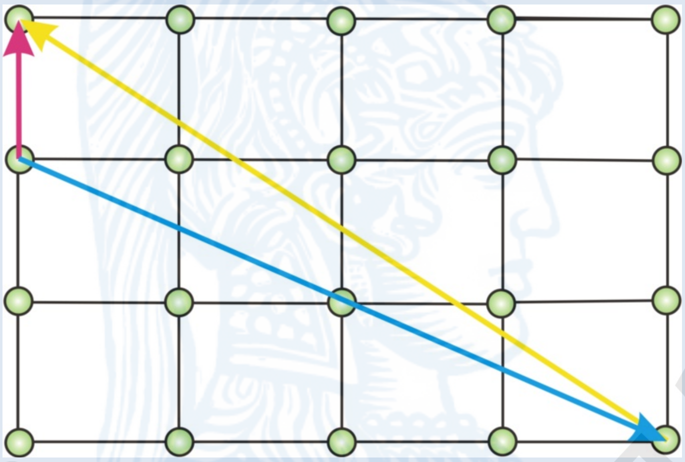
7. Του δις διατεσσάρων προστιθεμένου εις το διαπέντε, γεννάται το διαπασών και διατεσσάρων.



8. Του δις διαπέντε προστιθεμένου εις το διατεσσάρων, γεννάται το διαπασών και διαπέντε.



9. Του δις διατονικού τριημιτόνου προστιθεμένου εις το χρωματικόν ημίτονον ή αποτομήν μείζονος τόνου, γεννάται το διαπέντε.



$x_1 = 0 \quad x_2 = 4$

$y_1 = 2 \quad y_2 = 0$

$$\left|\overline{AB}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^{(4-0)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{(0-2)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{2^{10}}{3^{6}} = \frac{1024}{729} = \left(\frac{32}{27}\right)^{2}$$

ΔΙΣ ΔΙΑΤΟΝΙΚΟ ΤΡΙΗΜΙΤΟΝΟ (ΜΠΛΕ)

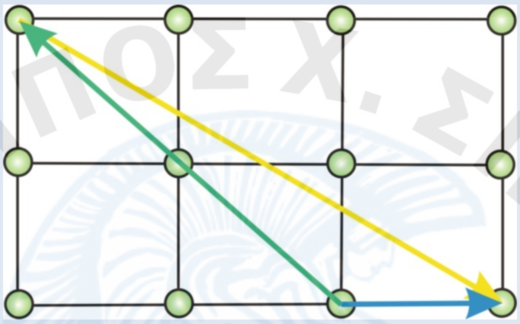
$x_1 = 4 \quad x_2 = 0$

$y_1 = 0 \quad y_2 = 3$

$$\left|\overline{AB}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^{(0-4)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{(3-0)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{3^7}{2^{11}} = \frac{2187}{2048}$$

ΑΠΟΤΟΜΗ ΜΕΙΖΟΝΟΣ ΤΟΝΟΥ (ΚΙΤΡΙΝΟ)

10. Του πυθαγορείου διτόνου προστιθεμένου εις το διατονικόν ημίτονον ή λείμμα, γεννάται το διατεσσάρων.



$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$

$y_1 = 2 \quad y_2 = 0$

$$\left|\overline{AB}\right| = \left(\frac{4}{3}\right)^{(3-0)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{(0-2)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{2^8}{3^5} = \frac{256}{243}$$

ΛΕΙΜΜΑ (ΚΙΤΡΙΝΟ)

7. Επίλογος

Απευθυνόμενος προς τους φοιτητάς μου θα ήθελα αφενός μεν να τους θυμίσω τη λατινική ρήση «*ignoramus et ignorabimus*» [είμαστε και θα παραμείνουμε αδαείς] με την έννοια ότι υπάρχουν όρια στην ικανότητά μας να κατανοήσουμε τη φύση, αφετέρου δε να τους συμβουλέψω να μη διστάζουν να ασχολούνται με τα μεγάλα προβλήματα, διότι έτσι δεν αποκλείεται να ανακαλύψουν καθ΄ οδόν κάτι το ενδιαφέρον.