

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ: Κατατομή Κανόνος

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής, Τμήμα Μουσικών Σπουδών, Πανεπιστήμιο Αθηνών, hspyridis@music.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο Τμήμα Μουσικών Σπουδών του Πανεπιστημίου Αθηνών διδάσχω επί μία δεκαετία μάθημα με τίτλο «ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ: Κατατομή Κανόνος» από το οποίο οι φοιτητές αντλούν γνώσεις σχετικά με την Ακουστική, τη Μαθηματική και τη Φιλοσοφική θεώρηση της Μουσικής των αρχαίων Ελλήνων του 4^{ου}-3^{ου} π.Χ. αιώνα.

Η «Κατατομή Κανόνος» είναι μια πυθαγόρεια πραγματεία πάνω στη σχέση που συνδέει μαθηματικές και ακουστικές αλήθειες, αποτελώντας, έτσι, τη βάση για την Ακουστική Επιστήμη του Δυτικού κόσμου. Είναι γραμμένη με το ίδιο ύφος που είναι γραμμένα τα «Στοιχεία» του Ευκλείδου και γι' αυτό το λόγο αποδίδεται σ' αυτόν.

Η κατατομή κανόνος με το Ευκλείδειο ύφος, τη σπονδυλωτή και ουσιαστικά Πυθαγόρεια φύση αποτελεί έργο αναφοράς από την αρχαιότητα και έχει τραβήξει την προσοχή και το ενδιαφέρον πολλών μουσικολόγων, φιλόλογων, μαθηματικών και ιστορικών της Επιστήμης. Ο συγγραφέας της κυρίως ενδιαφέρεται να αποδείξει συστηματικά και τυπικά προτάσεις, οι οποίες αποτελούν τη βάση της Πυθαγορείου και της Πλατωνικής παραδόσεως. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα συμπεράσματά του δεν είναι καθαρά «ορθολογιστικά» και μαθηματικά, αλλά βασίζονται κυρίως σε αποδεκτά γεγονότα της εμπειρικής παρατηρήσεως και σε φυσικές και σε γενικής φύσεως θεωρήσεις.

Euclid: sectio canonis

Haralampos C. Spyridis, Professor in Musical Acoustics, Informatics
Dpt. of Music Studies, University of Athens, hspyridis@music.uoa.gr

ABSTRACT

Over the last 10 years in the Department of Music Studies, Athens University, I have presented lectures under the title "Euclid: sectio canonis". From these lectures the students gain knowledge about the Acoustic, Mathematical and Philosophical theory of music of the ancient Hellenes in the 4th-3rd century BC.

Sectio canonis is a Pythagorean treatise based on the relationship, which connects Mathematical and Acoustic truths, constituting the base for the Acoustic Science of the western world. It is written in the same style as Euclid's "Elements" and for this reason it is attributed to him.

Sectio canonis with the Euclidean style, the fractured and essentially Pythagorean nature forms a reference piece from the ancient times and it has drawn the attention and interest of many musicologists, literary-men, mathematicians and historians. The author of sectio canonis is mainly interested to prove systematical

and typical phrases, which constitute the base of the Pythagorean and Platonic traditions. It should be noted that his conclusions are not purely rational and mathematical, but are based mainly on proven instances of empirical observation and physical and general interest theorems.

1. Πληροφοριακά στοιχεία για την πραγματεία

Η *κατατομή κανόνος* είναι μια πυθαγόρεια πραγματεία πάνω στη σχέση που συνδέει μαθηματικές και ακουστικές αλήθειες, αποτελώντας, έτσι, τη βάση για την ακουστική επιστήμη του Δυτικού κόσμου. Είναι γραμμένη με το ίδιο ύφος που είναι γραμμένα τα «*Στοιχεία*» του Ευκλείδου και γι' αυτό αποδίδεται σ' αυτόν. Εάν ο Ευκλείδης είναι όντως ο συγγραφέας της πραγματείας, διότι κάποιοι το αμφισβητούν, αυτή θα πρέπει να έχει γραφεί γύρω στο 300 π.Χ.

Το έργο διασώζεται από τρεις ξεχωριστές πηγές:

- (1) μια μεγάλης έκτασης έκδοση, που αποδίδεται στον Ευκλείδη ή στον Κλεωνείδη ή στον Ζώσιμο τον Πανοπολίτη¹,
- (2) μια συντομότερη Ελληνική έκδοση που εμπεριέχεται στο υπόμνημα του Πορφύριου² «*εις τα αρμονικά Πτολεμαίου*»³ και

¹ Ζώσιμος ο Πανοπολίτης. Ο αρχαιότερος των αλχημιστών συγγραφέων. Γεννήθηκε στις αρχές του 4^{ου} μ.Χ. αιώνα στην Πανόπολη της Άνω Αιγύπτου. Τον αναφέρουν ο Γεώργιος Σύγκελλος και Φώτιος. Όλοι οι αλχημιστές ομιλούν γι' αυτόν με βαθύτατο σεβασμό. Είναι ο πρώτος που διαχωρίζει τις επιστήμες Φυσική και Χημεία και ο πρώτος που αναφέρει τον όρο «*Χημεία*». Κατά τον Σουίδα ο Ζώσιμος συνέγραψε 28 βιβλία για την αλχημεία με τον γενικό τίτλο «*Χειρόκμητα*» και βιογραφία του Πλάτωνος. Των περισσότερων έργων του σώζονται μόνον περιλήψεις και τίτλοι. Μας σώζεται η περιγραφή κατασκευής διυλιστηρίου. Σ' αυτόν αποδίδεται από μερικούς το έργο «*Εισαγωγή αρμονική*» που περισώθηκε, ενώ άλλοι το αποδίδουν είτε στον Κλεωνείδη, είτε στον Ευκλείδη, είτε στον Πάππο.

² Πορφύριος ο Τύριος ή Φοίνιξ ή Βατανιώτης. Νεοπλατωνικός φιλόσοφος, ο πιο σημαντικός από τους μαθητές του Πλωτίνου. Γεννήθηκε περίπου το 232 και πέθανε στη Ρώμη γύρω στο 304 μ.Χ. Διετέλεσε στην αρχή μαθητής του Λογγίνου στην Αθήνα και από την ηλικία των 30 ετών μαθητής του Πλωτίνου στη Ρώμη. Έγραψε πολλά έργα στα οποία πραγματεύεται φιλοσοφικά, μαθηματικά, αστρονομικά, ιστορικά και γραμματικά θέματα. Από τα έργα του σώθηκαν ελάχιστα. Από το έργο του «*Φιλοσόφου ιστορίας*», στο οποίο εξέθετε τον βίο και τη διδασκαλία των σπουδαιότερων φιλοσόφων της αρχαιότητας, διεσώθη μόνον ο «*Πυθαγόρειος βίος*». Άλλα έργα του είναι «*Σχόλια εις το έργον του Πλωτίνου*», «*Σχόλια εις το έργον περί Μουσικής του Πτολεμαίου*», «*Εισαγωγή*» στο έργο «*Κατηγορία*» του Αριστοτέλους, «*Βίος Πλωτίνου*» κ.λπ. Ο Πορφύριος υπήρξε από τους σφοδρότερους πολεμίους του Χριστιανισμού. Έγραψε 15 βιβλία κατά των Χριστιανών, τα οποία ερίφθησαν στην πυρά και εκάησαν με διάταγμα που εκδόθηκε το έτος 448 των αυτοκρατόρων Θεοδοσίου Β' (408-450 μ.Χ.) της Ανατολής και του Ουαλεντινιανού (425-455 μ.Χ.) της Δύσεως.

(3) μια Λατινική έκδοση, που εμπεριέχεται στο έργο «*De institutione musica*»⁴ του Βοηθίου⁵.

Μερικοί σχολιαστές αμφιβάλουν, όσον αφορά στον έναν και μοναδικό συγγραφέα της πραγματείας, ακόμη και εάν γράφτηκε σε μία και μόνον περίοδο, εικασίες που ενθαρρύνονται από την πιθανότητα ο Πορφύριος και ο Βοήθιος να μη γνώριζαν την *Κατατομή κανόνος* ως ολότητα, με τη μορφή που έφθασε σε μας.

³ Το χειρόγραφο αποδίδεται στον Ευκλείδη από τον Πορφύριο, ο οποίος το παραθέτει κατά κόρον (Comm. 98.14-103.25 εμπεριέχει τις πρώτες δεκαέξι προτάσεις και υπάρχουν περιληπτικά αποσπάσματα και αλλού). Το κείμενο που παραθέτει ο Πορφύριος δεν είναι εντελώς ταυτόσημο με το κείμενο του βιβλίου μας, και περιλαμβάνει –πιθανώς λανθασμένα– μια πρόταση που δεν υπάρχει στο χειρόγραφο MSS (*Κανένα πολλαπλάσιο διάστημα πλην μόνον της διαπασών δεν δομείται από επιμόρια διαστήματα*).

⁴ Τμήματα της πραγματείας παρατίθενται επίσης και από τον Βοήθιο. Και αυτά δεν είναι ταυτόσημα με το χειρόγραφο MSS.

⁵ Βοήθιος του οποίου το πλήρες όνομα είναι Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius. Ρωμαίος φιλόσοφος και πολιτικός που έζησε από το 480 έως το 524 μ.Χ. Γεννήθηκε στη Ρώμη και είχε τη σπουδαία τύχη να σπουδάσει στην Αθήνα. Θεώρησε ως αποκλειστικό του πνευματικό καθήκον να μεταλαμπαδεύσει την ελληνική φιλοσοφία στη Δύση. Υπήρξε σύμβουλος του βασιλέα των Οστρογότθων Θεοδωρίχου κοντά στον οποίον γνώρισε δόξες, τιμές, αλλά και την ατίμωση, τη φυλάκιση και το θάνατο με φρικτά βασανιστήρια. Το έργο του έγκειται σε μεταφράσεις και υπομνήματα Ελλήνων συγγραφέων. Μετέφρασε στη λατινική την «*Αριθμητικήν Εισαγωγήν*» του Νικομάχου του Γερασηνού («*Institutio arithmetica*») και το χαμένο μουσικό έργο του ίδιου «*Μουσικήν Εισαγωγήν*» («*Institutio musica*»). Το μουσικό έργο αυτό είναι πολύτιμη πηγή πληροφορίας για την αρχαία μουσική και αποτέλεσε τη βάση των μουσικών μελετών κατά τον μεσαίωνα. Το πιο γνωστό από όλα τα έργα του («*Παραμυθία της Φιλοσοφίας*») «*Consolatio Philosophiae*», το έγραψε για παρηγοριά του στη φυλακή και είναι πεζό και έμμετρο κείμενο. Βοηθήματά του για τη συγγραφή αυτού του έργου είχε τον «Προτρεπτικό» του Αριστοτέλους, τον Πλάτωνα, τον Κικέρωνα και τον Πλωτίνο. Κύριο τμήμα του έργου του Βοηθίου σχετίζεται με τη *Λογική* του Αριστοτέλους και τους σχολιαστές της. Το πολυδιαδομένο έργο του Βοηθίου μεταφράστηκε σε πάρα πολλές γλώσσες και σχολιάστηκε από πολλούς σχολιαστές. Πρέπει να τονισθεί το γεγονός ότι σήμερα υπάρχουν περισσότερα από 400 χειρόγραφα του στη λατινική γλώσσα και δεν είναι λίγα τα χειρόγραφα στην ελληνική γλώσσα, που τα μετέφρασε τον 14^ο αιώνα ο μοναχός Μάξιμος Πλανούδης.

Πρέπει να τονισθεί με έμφαση ότι επί αιώνες ο Αριστοτέλης, η βάση της μεσαιωνικής φιλοσοφίας, ήταν γνωστός από τις μεταφράσεις και τις πρωτότυπες εργασίες του Βοηθίου.

Τον Βοήθιο, που άλλοι τον αποκαλούν τελευταίο Ρωμαίο και άλλοι πρώτο σχολαστικό, μερικές εκκλησίες της Ιταλίας τον θεώρησαν μάρτυρα και άγιο του Χριστιανισμού.

Η *κατατομή κανόνος* με το Ευκλείδειο ύφος, τη σπονδυλωτή (κομματιαστή) και ουσιαστικά Πυθαγόρεια φύση αποτελεί έργο αναφοράς από την αρχαιότητα και έχει τραβήξει την προσοχή και το ενδιαφέρον πολλών μουσικολόγων, φιλολόγων, μαθηματικών και ιστορικών της επιστήμης. Έτσι, η *κατατομή κανόνος* έχει πολυμελετηθεί, αφού πρώτα πολυαντιγραφήθηκε. Πράγματι, σήμερα η μεγάλης έκτασης Ελληνική έκδοση σώζεται σε 32 χειρόγραφα αντίγραφα, η συντομότερη Ελληνική έκδοση, που εμπεριέχεται στο υπόμνημα του Πορφυρίου «εις τα αρμονικά Πτολεμαίου», σώζεται σε 52 χειρόγραφα αντίγραφα και, τέλος, η Λατινική έκδοση, που εμπεριέχεται στο έργο «*De institutione musica*» του Βοηθίου, σώζεται σε περισσότερα από 130 χειρόγραφα αντίγραφα.

Οι Karl von Jan (1895) και Heinrich Menge (1916) μεταφράζουν και εκδίδουν τη μεγάλης έκτασης Ελληνική έκδοση της *κατατομής κανόνος*. Ο Ingemar During (1930) εκδίδει τα αρμονικά του Πτολεμαίου και (1932) εκδίδει το σχολιασμό του Πορφυρίου. Ο Godofred Friedlein (1867) εκδίδει μια συλλογή έργων του Βοηθίου, εις την οποία συμπεριλαμβάνεται και το έργο *De institutione musica*.

Πρέπει να σημειωθεί ότι σε καμιά έκδοση δεν ελήφθησαν υπ' όψιν όλα τα υπάρχοντα χειρόγραφα του έργου. Ο Karl von Jan, επί παραδείγματι, από τα 32 χειρόγραφα γνώριζε τα 25 και για την έκδοσή του έλαβε υπ' όψιν του μόνον τα 8. Αγνοούσε παντελώς την ύπαρξη του πλέον παλαιού και του πλέον έγκυρου χειρογράφου της *κατατομής κανόνος*, του *Vaticanus gr. 2338*.

Τέλος, εξ όσων γνωρίζω, μόνον ο Andre Barbera προέβη σε λεπτομερή σύγκριση των τριών σωζομένων μορφών της *κατατομής κανόνος*.

2. Ποιος έγραψε την πραγματεία «Κατατομή κανόνος»;

Ας ξεκινήσουμε από τη Λατινική έκδοση της «*Κατατομής κανόνος*», η οποία υπάρχει σε 130 και πλέον χειρόγραφα αντίγραφα, είναι δηλαδή η πλέον διαδεδομένη και μας διασώζεται στα πιο παλαιά, από φυσική άποψη, χειρόγραφα του 9^{ου} και του 10^{ου} αιώνα. Η εν λόγω πραγματεία εμφανίζεται στην αρχή του 4^{ου} βιβλίου του Βοηθίου *De institutione musica* χωρίς καμιά αναφορά στο όνομα κάποιου συγγραφέα. Ο Βοήθιος (480-524 μ.Χ.) τη χρησιμοποιεί ως εισαγωγή προτρέποντας τον αναγνώστη να αναθεωρήσει κάποια θέματα προτού συνεχίσει.

Θα μπορούσαμε εν πρώτοις, εντελώς απλά, να θεωρήσουμε ότι ο συγγραφέας της πραγματείας «*Κατατομή κανόνος*» είναι ο ίδιος ο Βοήθιος. Να μη διαφεύγει της προσοχής μας το γεγονός ότι ο Βοήθιος δεν θεωρείται ο συγγραφέας ενός μεγάλου μέρους της πραγματείας του. Επιπροσθέτως η εμφάνιση του έργου «*Κατατομή κανόνος*» στο υπόμνημα του Πορφυρίου «εις τα αρμονικά Πτολεμαίου»⁶ μας κάνει να πάψουμε να θεωρούμε τον Βοήθιο ως πιθανό συγγραφέα της πραγματείας «*Κατατομή κανόνος*», αφού ο Πορφύριος έζησε δύο αιώνες πριν από τον Βοήθιο.

Στη μεγάλης εκτάσεως Ελληνική έκδοση, η οποία σώζεται σε 32 χειρόγραφα αντίγραφα, η πραγματεία «*Κατατομή κανόνος*» αποδίδεται άμεσα ή έμμεσα

⁶ Μερικοί αμφισβητούν το γεγονός ότι ο Πορφύριος είναι ο συγγραφέας της πραγματείας υπόμνημα «εις τα αρμονικά Πτολεμαίου» και θεωρούν ως συγγραφέα το διάσημο Μαθηματικό τον Πάππο τον Αλεξανδρέα⁶ (3^{ος} – 4^{ος} μ.Χ. αιώνας).

21 φορές στον Ευκλείδη και 11 φορές στον Κλεωνείδη, για τον οποίον, ας σημειωθεί, δεν γνωρίζουμε τίποτα. Ο Πορφύριος, που έζησε 600 χρόνια μετά τον Ευκλείδη, στον σχολιασμό του αποδίδει σαφώς την πραγματεία «Κατατομή κανόνος» στον Ευκλείδη.

Ο νεοπλατωνικός φιλόσοφος Πρόκλος ο Λύκιος (ο Διάδοχος) (Κωνσταντινούπολη 410 μ.Χ. – Αθήνα 485 μ.Χ.) και ο μαθητής του Μαρίνος ο Φλάβιος⁷ (5^{ος} αιώνας μ.Χ.) αποδίδουν τη συγγραφή της πραγματείας «Κατατομή κανόνος» στον Ευκλείδη.

Τέλος, στον Ευκλείδη αποδίδεται η συγγραφή της πραγματείας «Κατατομή κανόνος» από τον Θεόδωρο τον Μετοχίτη⁸ (1270-1332 μ.Χ.), πρώτον υπουργό του

⁷ Μαρίνος ο Φλάβιος. Νεοπλατωνικός φιλόσοφος που γεννήθηκε στη Φλάβια Νεάπολη της Παλαιστίνης και έζησε τα τέλη του 5^{ου} και τις αρχές του 6^{ου} μ.Χ. αιώνα. Υπήρξε μαθητής και διάδοχος του Πρόκλου στη Σχολή των Αθηνών. Συνέγραψε «*Ερευνα των φιλοσόφων*» ένα συμπλήρωμα που χάθηκε, υπομνήματα στον «*Φίληβον*» και στον «*Παρμενίδην*» του Πλάτωνος, τα οποία ο ίδιος του τα έκαψε μετά το θάνατο του Πρόκλου, μία συλλογή εκλεκτών κομματιών στα υπομνήματα του Συριανού πάνω στα ορφικά άσματα, που χάθηκε, και τέλος «*Βίον του Πρόκλου ή περί ευδαιμονίας*» που διασώθηκε. Στο περιεργό αυτό έργο αναλύει, καθορίζει και ταξινομεί όλες τις αρετές που, κατά τους Αλεξανδρινούς, αποτελούν την τελειότητα του αληθινού φιλοσόφου από τις σωματικές δεξιότητες μέχρι τη θεουργία και παρουσιάζει τον τρόπο με τον οποίο ο δάσκαλός του διέτρεξε όλους αυτούς τους βαθμούς. Ο Μαρίνος αγνοεί τον Χριστιανισμό, γι' αυτό δεν ομιλεί ποτέ και πουθενά γι' αυτόν. Ο «*Βίος του Πρόκλου*» δημοσιεύθηκε τον 18^ο αιώνα από ατελές χειρόγραφο και επανεκδόθηκε αφενός μεν το 1700 συμπληρωμένος από τον Φαβρίκιο στο Αμβούργο σε ειδική έκδοση, αφετέρου δε σε βελτιωμένη έκδοση το 1814 από τον Boissanade.

⁸ Θεόδωρος ο Μετοχίτης. Μέγας λογοθέτης, δηλαδή πρωθυπουργός, του Βυζαντίου επί της βασιλείας του Ανδρόνικου Β' του Παλαιολόγου (1282-1328 μ.Χ.). Ο μαθητής του Νικηφόρος Γρηγοράς τον αποκαλεί «έμψυχον βιβλιοθήκην», διότι ήταν λόγιος. Από τον έρωτά του προς τη φιλολογία παραμελούσε τελείως τις υποθέσεις του κράτους κατά τις πολύ επικίνδυνες στιγμές, που οι Τούρκοι κατέλαμβαναν την Προύσσα και απειλούσαν τις Μικρασιατικές κτήσεις, οι Σέρβοι και οι Βούλγαροι προσπαθούσαν να καταλάβουν τις Ευρωπαϊκές επαρχίες του Βυζαντίου και ο Ανδρόνικος ο Παλαιολόγος συνωμοτούσε και στασίαζε για την κατάληψη της εξουσίας. Στις 24 Μαΐου 1328 ο στασιαστής Ανδρόνικος Παλαιολόγος εισήλθε στην Κωνσταντινούπολη, εξεθρόνισε τον Ανδρόνικο Β' και εξώρισε τον Θεόδωρο στο Διδυμότειχο. Πέθανε το 1332 ως μοναχός με το όνομα Θεόληπτος σε μοναστήρι της Χώρας. Έγραψε 18 ρητορικά έργα εκ των οποίων σώζονται μόνον δύο, είκοσι εξаметρικά ποιήματα, ενώ δεν γνωρίζουμε τα φιλοσοφικά και τα αστρονομικά του έργα. Από τις επιστολές του αντλούμε πολλές και πολύτιμες πληροφορίες για την εποχή του.

αυτοκράτορα του Βυζαντίου Ανδρόνικου ΙΙ του Παλαιολόγου, μαθητού του Μανουήλ Βρυέννιου⁹.

3. Μέρη της πραγματείας «Κατατομή κανόνος»

Το κείμενο της πραγματείας «Κατατομή κανόνος» σήμερα το γνωρίζουμε ως αρθρωτό, δηλαδή ως αποτελούμενο από διάφορα μέρη. Εξετάζοντας τα διασωθέντα χειρόγραφα αντίγραφα της διατριβής «Κατατομή κανόνος» διαπιστώνουμε ότι δεν είναι καθόλου προφανές πού αρχίζει και πού τελειώνει το κάθε μέρος της πραγματείας. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις τρεις διασωθείσες εκδοχές, που προαναφέραμε, χωρίς αμφιβολία η *Εισαγωγή* αποτελεί το πρώτο μεγάλο μέρος, το οποίο δεν υπάρχει στην εκδοχή του Πορφυρίου. Το δεύτερο μεγάλο μέρος αποτελούν όλες οι μαθηματικές προτάσεις, οι οποίες υπάρχουν και στις τρεις εκδοχές της πραγματείας. Με αυτές τις μαθηματικές προτάσεις τελειώνει η Λατινική εκδοχή της πραγματείας. Ακολουθεί το τρίτο μεγάλο μέρος, που περιέχει ακουστικές προτάσεις με ένα μέρος των οποίων ολοκληρώνεται η εκδοχή του Πορφυρίου. Το υπόλοιπο μέρος των ακουστικών προτάσεων και ό,τι άλλο απομένει μέχρι το τέλος της Ελληνικής εκδοχής με το μεγάλο μήκος απαρτίζουν το τέταρτο και τελευταίο μεγάλο μέρος της πραγματείας «Κατατομή κανόνος».

Το πρώτο μεγάλο μέρος της πραγματείας αντιμετωπίζεται ως μια ενιαία ολότητα, ως εισαγωγή. Στην εισαγωγή διατυπώνεται μια θεωρία για τη φυσική αιτία των ήχων και των μουσικών τους υψών έτσι σχεδιασμένη, ώστε να αιτιολογεί τη χρήση των μουσικών υψών ως σχετικών ποσοτήτων και των μεταξύ τους διαστημάτων ως αριθμητικών λόγων. Συνεχίζει δίνοντας μια τριπλή κατάταξη των λόγων και με ένα επιχείρημα εντάσσει τα εύφωνα (σύμφωνα) διαστήματα σε δύο μόνον από αυτές¹⁰.

⁹ Μανουήλ Βρυέννιος. Βυζαντινός θεωρητικός διδάσκαλος της εκκλησιαστικής μουσικής. Έζησε τα τέλη του 13^{ου} αρχές 14^{ου} μ.Χ. αιώνα. Μας άφησε σύγγραμμα εξαιρετικά σπουδαίο σχετικά με τη θεωρία της μουσικής, στο οποίο πραγματεύεται τους οκτώ ήχους και τα τετράχορδα των αρχαίων και αποδεικνύει την άμεση σχέση της αρχαίας μουσικής των Ελλήνων με τη Βυζαντινή εκκλησιαστική μουσική. Για τη συγγραφή αυτού του συγγράμματος συμβουλευθήκε τους Αλεξανδρινούς μουσικούς Ευκλείδη, Αριστείδη και Πτολεμαίο. Διακρίνει τα τρία γένη της μουσικής, τη δίεση, καθώς επίσης το τριτημόριο και το τεταρτημόριο του τόνου. Όμως, πουθενά στο σύγγραμμά του δεν αναφέρει περί χειρονομίας και χαρακτήρων, παρόλο που πολύ καλά γνωρίζουμε ότι στην εποχή του ήταν γνωστή η χρήση τους. Αυτό μας οδηγεί στην υπόθεση ή ότι ο Βρυέννιος ήταν αμύητος στην εκκλησιαστική μουσική και ασχολήθηκε μόνον με τις κλίμακες της ή ότι συνέγραψε και άλλα συγγράμματα, που χάθηκαν.

¹⁰ Περισσότερο από όλα τα μέρη της πραγματείας αμφισβητείται η εισαγωγή. Βέβαια είναι ένα ευφές τμήμα της πραγματείας, και ως πρόλογος είναι απαραίτητο, αφού περιλαμβάνει κάποιες λεπτομέρειες αναγκαίες για την κατανόηση των προτάσεων. Αλλά θα μπορούσε η εισαγωγή να φανεί ως πολύ συντομογραφημένη και μερικά από τα επιχειρήματα, έτσι, όπως διατυπώνονται σε αυτήν, πολύ αδύνατα για να θεωρηθεί έργο ενός συγγραφέα, ο οποίος με περισσή προσοχή διατύπωσε και

Τα υπόλοιπα τρία μεγάλα μέρη, όμως, υποδιαιρούνται σε μικρότερες ενότητες. Το δεύτερο μεγάλο μέρος τόσο στον Βοήθιο, όσο και στην ελληνική εκδοχή με το μεγάλο μήκος, υποδιαιρείται σε εννέα μαθηματικές προτάσεις (1-9 ή α-θ), εννέα καθαρά μαθηματικά θεωρήματα, που αποδεικνύουν διάφορες προτάσεις για αυτές καθαυτές τις αναλογίες και τα «διαστήματα» -με την ευρεία έννοια του όρου και όχι απαραίτητα με τη μουσική- ανάμεσα στους όρους τέτοιων αναλογιών.

Οι ακουστικές προτάσεις είναι επτά στον αριθμό εκ των οποίων οι δύο πρώτες υπάρχουν στο τρίτο μεγάλο μέρος και οι υπόλοιπες πέντε ανήκουν στο τέταρτο μεγάλο μέρος της πραγματείας (10-16 ή ι-ις). Στην πρόταση 10 αρχίζουν να εισάγονται μουσικές έννοιες. Με βάση τα Μαθηματικά των πρώτων εννέα θεωρημάτων, τα επιχειρήματα της εισαγωγής και ένα πλήθος γεγονότων από τη μουσική εμπειρία, οι προτάσεις 10-13 παρουσιάζουν τους αριθμητικούς λόγους των βασικών μουσικών συμφωνιών και του τόνου. Οι προτάσεις 14-16 είναι αποδείξεις δευτερευουσών θέσεων, που προκύπτουν από μια «Πυθαγόρεια» πραγματεία περί μουσικών διαστημάτων ως λόγων, αλλά οι οποίες είναι εντελώς ενάντιες προς τις «Αριστοξένειες» μεθόδους αναλύσεως.

Στη συνέχεια του τετάρτου μεγάλου μέρους υπάρχουν δύο προτάσεις σχετικές με το εναρμόνιο γένος (17-18 ή ιζ-ιη). Η πρόταση 17 δείχνει πως να τοποθετηθούν κάποιες νότες στο εναρμόνιο γένος με τη βοήθεια των συμφωνιών και η πρόταση 18, που αφορά στο σχηματισμό ανίσων διαστημάτων, αποτελεί ένα επί πλέον αντιαριστοξένειο επιχειρήμα.

Τέλος, ακολουθούν άλλες δύο προτάσεις, που αφορούν στην κατατομή του κανόνος κατά το αμετάβολο¹¹ λεγόμενο σύστημα (19-20 ή ιθ-κ). Οι προτάσεις 19-

απέδειξε τα θεωρήματα. Ο Πορφύριος και οι πηγές του παραφράζουν μέρη της εισαγωγής. Πιθανώς να πρόκειται για μια μεταγενέστερη περίληψη ή παράφραση της αρχικής εισαγωγής.

¹¹ Το επονομαζόμενο Τέλειον Μείζον Σύστημα της μουσικής θεωρίας των αρχαίων Ελλήνων επί μακρόν ήλκυσε την προσοχή των σχολιαστών στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν τη μυστηριώδη και δυσνόητη θεωρητική βάση της αρχαίας Ελληνικής μουσικής. Πράγματι, ακόμη και τα πλέον σύγχρονα ανεγνωρισμένα μουσικά εγχειρίδια και οι γενικές ιστορίες μουσικής συχνά περιλαμβάνουν ως θέμα σειράς μαθημάτων μια εξήγηση του Μείζονος Τελείου Συστήματος ή του Τελείου Αμεταβόλου Συστήματος ως μια επίδειξη της σχέσεως μεταξύ ποικίλων τετραχόρδων και φθόγγων των κλιμάκων των αρχαιοελληνικών συστημάτων. Το Τέλειο Μείζον Σύστημα θεωρείται ως ο θεμελιώδης λίθος της αρχαιοελληνικής θεωρίας, η σύνθεση και η σπουδαιότης του συστήματος από τους αρχαίους συγγραφείς ακόμη και τώρα δεν έχει γίνει κατανοητή.

Η πλέον αρχέγονη συστηματική εξήγηση του Μείζονος Τελείου Συστήματος είναι εκείνη, η οποία βρέθηκε στη σύντομη πραγματεία με τον τίτλο *Κατατομή κανόνος* ή *Sectio canonis*, γραμμένη πιθανώς γύρω στα 300 π.Χ. από τον Ευκλείδη.

Η πραγματεία αρχίζει με ένα σύντομο τμήμα, στο οποίο εκτίθενται κάποια αξιώματα της Ακουστικής, συνεχίζει με μια σειρά καθαρών Μαθηματικών προτάσεων, ακολουθεί μια σειρά πορισμάτων που συνδέουν τις νότες του Μείζονος Τελείου Συστήματος και καταλήγει με δύο προτάσεις -ή μάλλον, αποδείξεις- που μας

20¹² δείχνουν πώς να υποδιαιρεθεί με τη βοήθεια αναλογιών η χορδή του μονοχόρδου, ώστε να προκύψει ένα σύστημα του διατονικού γένους. Αυτό, άλλωστε, αποτελεί την «Κατατομή του κανόνος», από την οποία η πραγματεία φέρει το όνομά της.

Ο συγγραφέας κυρίως ενδιαφέρεται να αποδείξει συστηματικά και τυπικά τις προτάσεις, οι οποίες αποτελούν τη βάση της Πυθαγορείου και της Πλατωνικής παραδόσεως¹³. Πρέπει να σημειωθεί ότι τα συμπεράσματά του δεν είναι καθαρά «ορθολογιστικά» και μαθηματικά. Βασίζονται κυρίως σε αποδεκτά γεγονότα της εμπειρικής παρατηρήσεως¹⁴ και σε φυσικές και σε γενικής φύσεως θεωρήσεις, που εκτίθενται στην εισαγωγή. Έτσι, τα επιχειρήματα δεν αναπληρώνουν τη μουσική εμπειρία, αλλά απλά αποτελούν μια προσπάθεια να μεταφράσουν τις αλήθειες αυτών των εμπειριών στη γλώσσα των Μαθηματικών, ώστε οι επαγωγές και οι αμοιβαίες σχέσεις μπορούν να μελετηθούν σχολαστικά.

παρέχουν τα μέσα να ευρίσκομε όλες (πλην μιας, της Τρίτης συνημμένων) τις νότες του Μείζονος Τελείου Συστήματος επάνω στο μονόχορδο.

¹² Υποτονικά υποστηρίζεται ότι ή οι προτάσεις 17-18 ή οι προτάσεις 19-20 προέρχονται από άλλη πέννα.

¹³ Όποιος και εάν είναι ο συγγραφέας αυτής της πραγματείας, το βέβαιον είναι ότι ε γνώριζε καλά το έργο του Αρχύτου και του Ευκλείδου. Η πρόταση 3 είναι μια εκδοχή ενός σημαντικού θεωρήματος, το οποίον ο Αρχύτας είχε αποδείξει και αρκετές προτάσεις χρησιμοποιούν θεωρήματα γνωστά από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδου. Αλλά ο Ευκλείδης παρεκκλίνει από τον Αρχύτα στην ανάλυσή του για το εναρμόνιο και το διατονικό γένος (πρόταση 17, πρόταση 20). Οι διαιρέσεις του αντιστοιχούν σε αυτές του Φιλόλαου (1.12 απόσπ. 6) και του Πλάτωνα (2.3 Τίμ. 35b-36b) και των μεταγενεστέρων Πλατωνικών Πυθαγορείων, όπως σχολιάζει ο Θέων ο Σμυρναίος (Άδραστος 9.2-9.3, Θράσυλλος 9.4-9.5) και ο Νικόμαχος στο *Εγχειρίδιο*. Πάλι, παρόλο που οι εισαγωγικές προτάσεις είναι προφανώς αναπολήσεις του 1.19 Αρχύτας απόσπ. 1, ο Ευκλείδης διαφοροποιείται από τον Αρχύτα και από την ισχύουσα παράδοση γενικώς, όσον αφορά στη θεωρία του μουσικού ύψους, την οποία η εισαγωγή προχωρεί να σκιαγραφήσει. Υπάρχουν υπομνήσεις της ίδιας ιδέας και αλλού, αλλά καμία άλλη πηγή δεν την εκφράζει καθαρά και κατηγορηματικά και η ανάπτυξή της σε μία πλήρως αρθρωτή υπόθεση ίσως είναι κατόρθωμα αυτού καθαυτού του Ευκλείδου.

¹⁴ Πρέπει να εστιάσουμε την προσοχή μας κυρίως σε μία αδυναμία αυτής της πραγματείας, η οποία αφορά στη μη ικανοποιητική φύση των απόψεων, που συνδέουν τις συμφωνίες με τους πολλαπλάσιους και τους επιμόριους λόγους στο τέλος της εισαγωγής. Η εν λόγω αδυναμία οδήγησε σε ένα σόβαρό πρόβλημα σχετικά με το εάν είναι ή δεν είναι εύφωνο διάστημα το διάστημα της οκτάβας+τετάρτη (8:3). Το συγκεκριμένο διάστημα αποτελεί την «αχίλλειο πέτρνα» της πραγματείας και ο συγγραφέας της αποφεύγει εντελώς να το μνημονεύσει (πρόταση 12).

Υποστηρίζεται η άποψη ότι η υποδιαίρεση της πραγματείας σε μια Εισαγωγή και σε είκοσι προτάσεις¹⁵ είναι έργο της Ιταλικής Αναγεννήσεως με αφορμή τον τρόπο που είναι γραμμένα κάποια χειρόγραφα αντίγραφα της πραγματείας. Σε κάποια χειρόγραφα αντίγραφα της πραγματείας τμήματα του κειμένου αριθμούνται με αραβικούς αριθμούς 1-11, σε κάποια άλλα αριθμούνται με τους ελληνικούς αλφαριθμούς α-ια στα περιθώρια. Τέλος, σε κάποια χειρόγραφα της διατριβής τμήματά της είτε χωρίζονται μεταξύ τους με διάκενο, είτε χωρίζονται με κάποιο σύμβολο στα περιθώρια σαν τη διπλή δίεση.



¹⁵ Παρά τις όποιες αδυναμίες της και το περιορισμένο του πεδίου εφαρμογής της, η πραγματεία αποτελεί μια καθαρή προσπάθεια για τη μαθηματική θεμελίωση της αρμονικής με είκοσι θεωρήματα, που αποδεικνύονται θαυμαστά και συνυφαίνονται με ένα μοναδικό τρόπο.