

# HERMA

## Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης

Καθηγητής Τμήματος Μουσικών Σπουδών Πανεπιστημίου Αθηνών,

Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας

[hspyridis@music.uoa.gr](mailto:hspyridis@music.uoa.gr)

Το HERMA γράφτηκε τα έτη 1960-61 για πιάνο. Είναι η πρώτη σύνθεση του Ξενάκη για σόλο όργανο. Η πρώτη του εκτέλεση έγινε στο Τόκιο στις 2 Φεβρουαρίου 1962 από τον πιανίστα/συνθέτη Yuji Takahashi.

Στο Λεξικό της Ελληνικής γλώσσας του Σκαρλάτου Δ. του Βυζαντίου **έρμα** σημαίνει κάθε τί που χρησιμεύει για να συγκρατεί κάτι, δεσμός, στήριγμα, όχημα, μεταφορικών το βέλος, σαβούρα του πλοίου, το κυοφορούμενο έμβρυο, βάση, πρηπίς, θεμέλιο, μόλος, πρόχωμα, λίθο που χρησίμευε ως αφετηρία των δρομέων στο στάδιο, ξέρα όπου συντρίβονται τα πλοία, λαιμοδέτη, βραχιόλι, σκουλαρήκι.

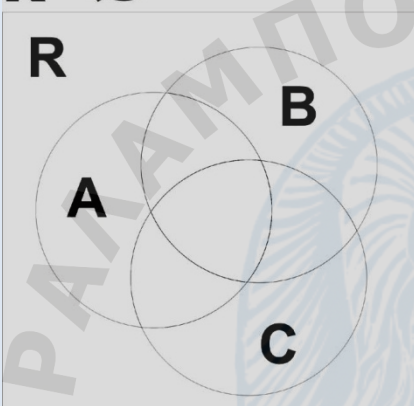

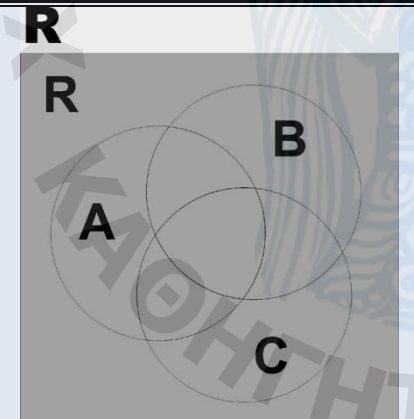
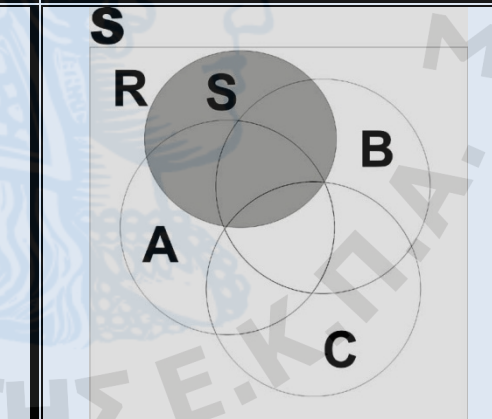
Ο Ξενάκης σε πρώτο βήμα (δεκαετία του '50) κατήγγησε τη μουσική κλίμακα για την επιλογή των φθόγγων με την εκχώρηση στον κάθε φθόγγο μια πιθανότητα εμφανίσεως (στοχαστική σύνθεση μουσικής). Τη δεκαετία του '60 προχωρεί στη σύνθεση μουσικής με τη χρήση συνόλων προαποφασισμένων ή προεκλεχθέντων φθόγγων της χρωματικής κλίμακος με την έννοια του ηχητικού γεγονότος (Συμβολική μουσική).

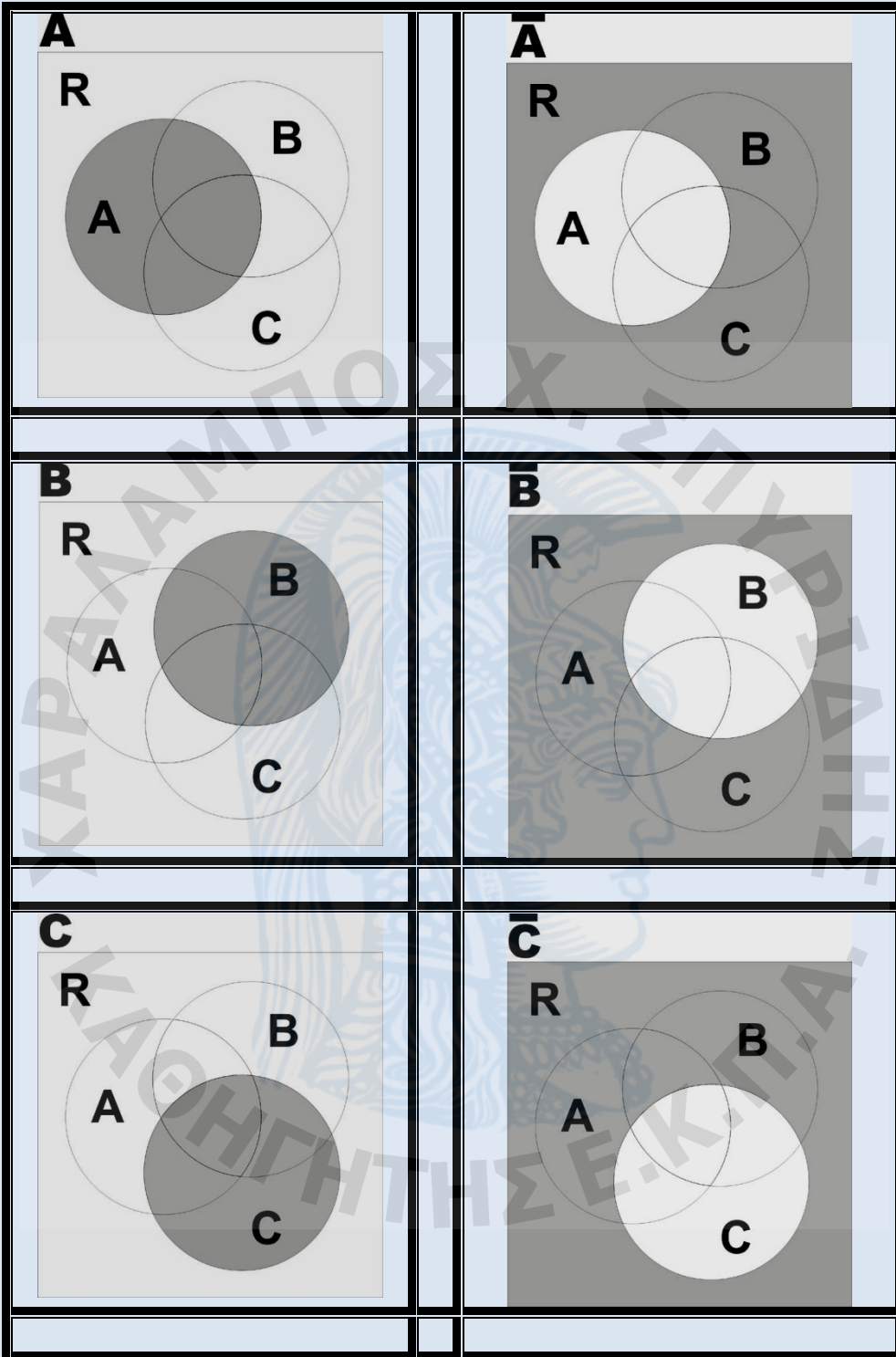
Τα σύνολα που χρησιμοποιεί είναι το γενικό σύνολο  $R$  όλων των πλήκτρων του πληκτρολογίου του πιάνου, τα σύνολα  $S, A, B, C$  με προκαθορισμένους φθόγγους από τον συνθέτη, τα συμπληρώματα  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  των τριών τελευταίων συνόλων καθώς επίσης λογικές πράξεις (ένωση, τομή, συμπλήρωμα) μεταξύ των προαναφερθέντων συνόλων. Δηλαδή δεν χρησιμοποιεί διαφορές συνόλων. Όλα τα σύνολα, είτε απλής, είτε πολύπλοκης δομής που ώφειλα να μελετήσω είναι 27. Το νούμερο δεν είναι τυχαίο, αλλά συμβολικώς επιλεγμένο από τον συνθέτη, διότι  $27 = 3^3$ .

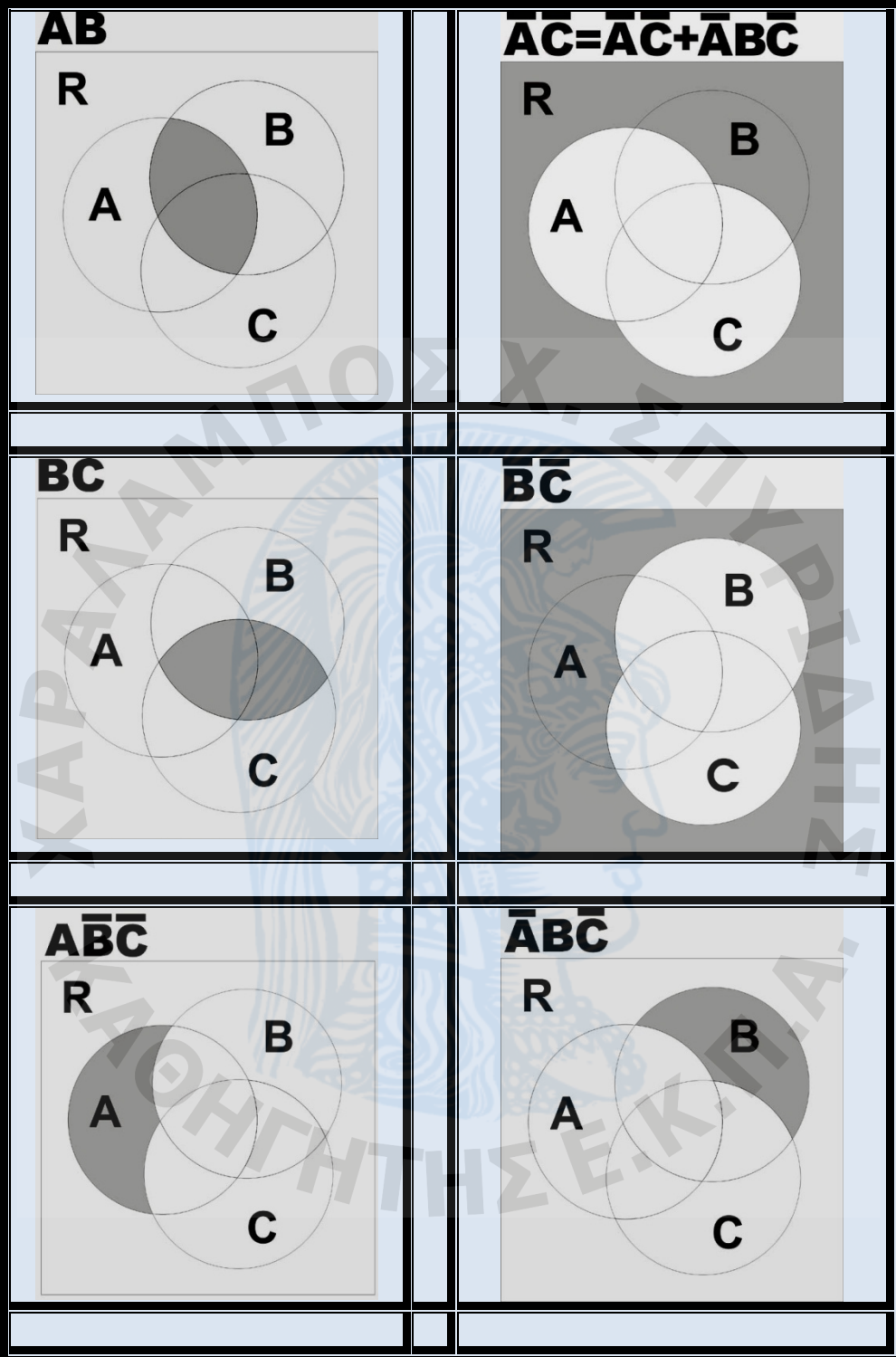
Έχω, όμως, να παρατηρήσω ότι ο συνθέτης δεν είχε το δικαίωμα να χρησιμοποιήσει παύσεις στη σύνθεση HERMA, αφού χρησιμοποιεί σύνολα φθόγγων, δηλαδή σύνολα ηχητικών γεγονότων. Παύση σημαίνει έλλειψη ηχητικού γεγονότος, δηλαδή ύπαρξη ενός συνόλου που περιέχει την απουσία ηχητικών γεγονότων, δηλαδή το **Κενό** σύνολο ( $\emptyset$ ), που είναι το συμπλήρωμα του  $R$  ως προς τον εαυτό του. Του διέφυγε, λοιπόν, το 28 σύνολο, διότι αλλιώς θα έπρεπε να το είχε σημειώσει κάθε φορά που έγραφε μια παύση.

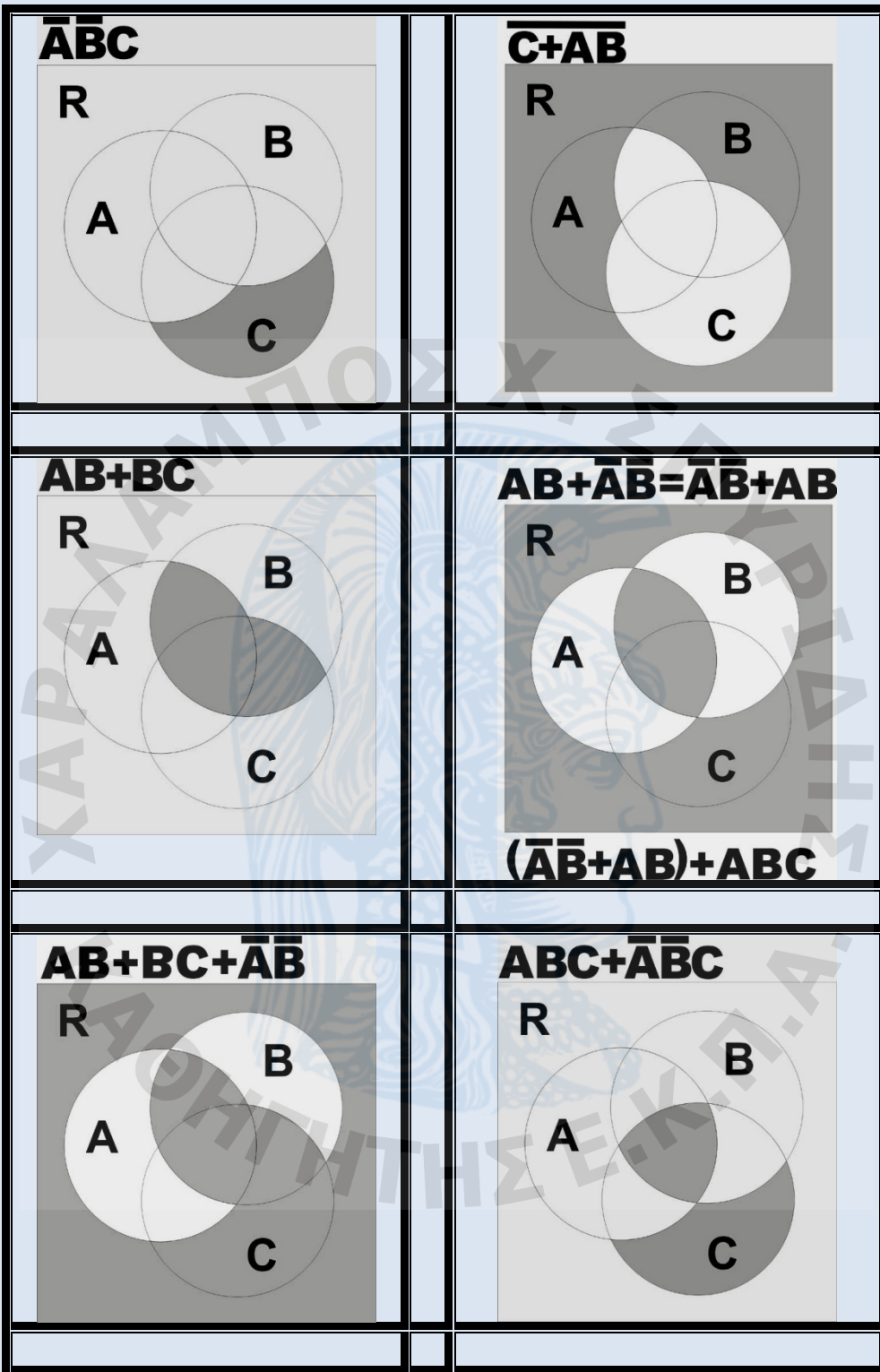
(Βλέπε Πίνακα 1).

Πίνακας 1: Τα 28 σύνολα φθόγγων που μελετήθηκαν στο HERMA

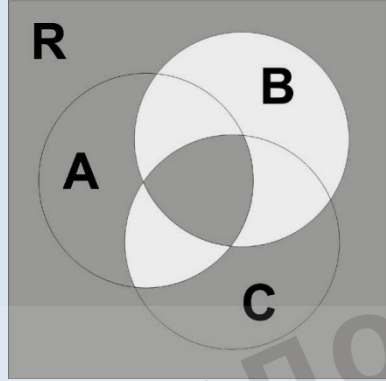
<p><math>\bar{R} = \emptyset</math></p> 	
	



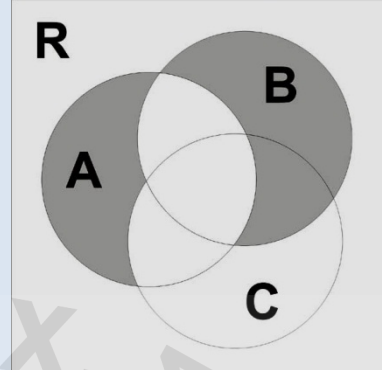




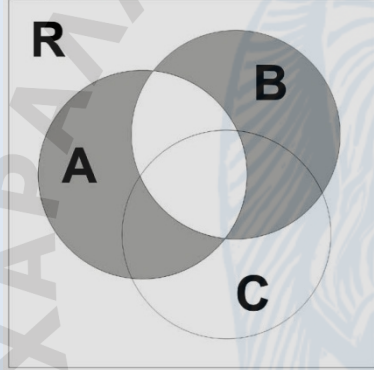
$$ABC + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C$$



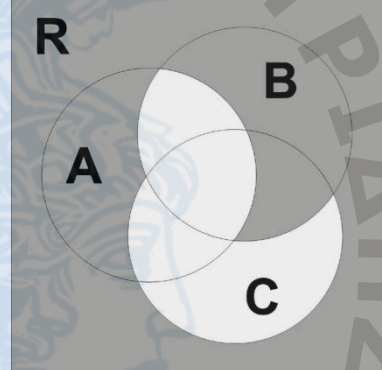
$$AB + \overline{A}\overline{B} + A\overline{B}\overline{C}$$



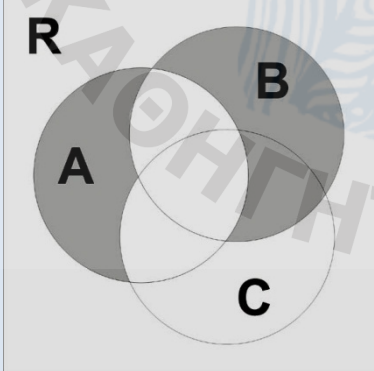
$$AB + \overline{A}\overline{B}$$



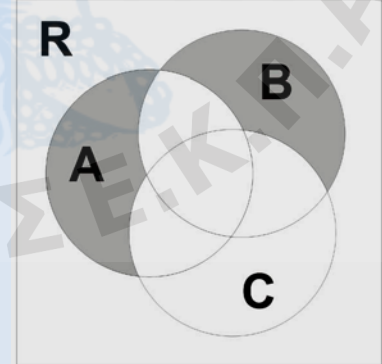
$$AB + \overline{A}\overline{B} + \overline{B}\overline{C}$$



$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}$$

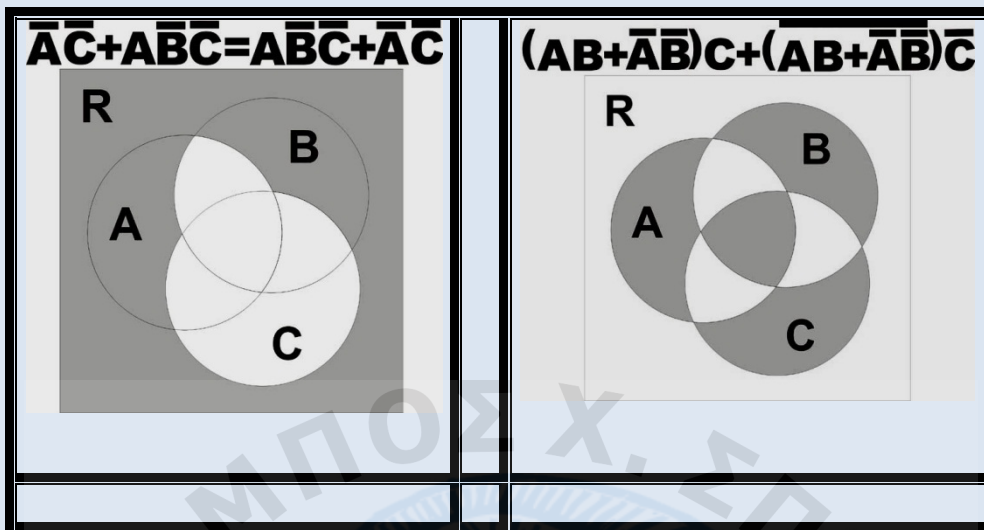


$$(\overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{B})\overline{C}$$



$$(\overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{B})\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

$$(\overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{B})\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$$



Η εμφάνιση των φθόγγων από το κάθε σύνολο ισχυρίζεται ο συνθέτης ότι γίνεται με εντελώς τυχαίο τρόπο, γεγονός που ελέγχο αυστηρώς μαθηματικά παρακάτω και καταλήγω να συμφωνήσω μαζί του.

### Έλεγχος τυχειότητας επιλογής πλήκτρων (φθόγγων) από τα σύνολα

Ο έλεγχος πραγματοποιείται επί των επιλογών εκ του συνόλου R για το οποίο υπάρχει ικανός αριθμός πλήκτρων, που επελέγησαν.

### Θεωρητική προσέγγιση

Ας υποθέσουμε ότι  $\Omega = \{1, 2, \dots, 88\}$  είναι τα πλήκτρα του πιάνου. Επιλέγουμε τυχαία n από αυτά με επανάληψη.

Ας είναι  $A_k$  το γεγονός {το πλήκτρο k δεν επιλέγεται στις n επιλογές}

Ζητούμε την πιθανότητα να επιλεγούν όλα τα πλήκτρα τουλάχιστον από μία φορά, δηλαδή την πιθανότητα του γεγονότος  $A_1' A_2' A_3' \dots A_{88}'$ . Από γνωστό θεώρημα (Poincare) ισχύει:

$$P(A_1' A_2' \dots A_{88}') = 1 - \sum_i P(A_i) + \sum_{i < j} P(A_i A_j) - \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{88} P(A_1 A_2 \dots A_{88})$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$\sum_i P(A_i) = \sum_i \left( \frac{87}{88} \right)^n = \binom{88}{1} \left( \frac{87}{88} \right)^n$$

$$\sum_{i < j} P(A_i A_j) = \sum_{i < j} \left(\frac{86}{88}\right)^n = \binom{88}{2} \left(\frac{86}{88}\right)^n, \text{ κ.ο.κ.}$$

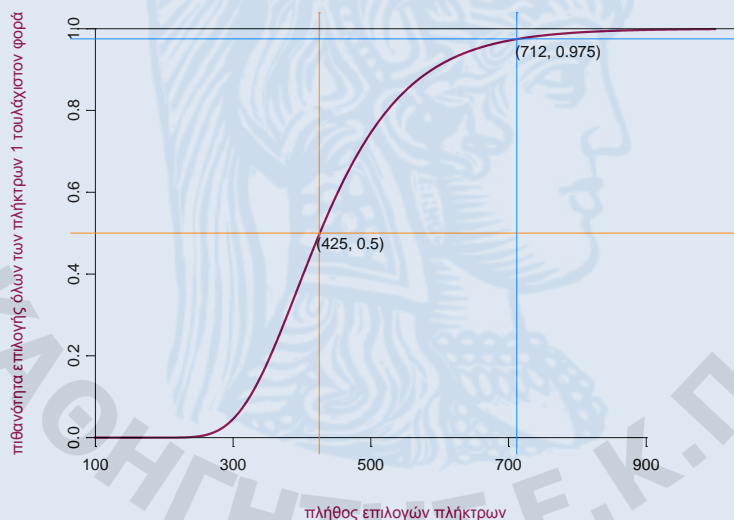
οπότε

$$P(A'_1 A'_2 \dots A'_{88}) = \sum_{t=0}^{87} \binom{88}{t} \left(1 - \frac{t}{88}\right)^n$$

Η πιθανότητα αυτή εξαρτάται από το  $n$  και είναι δύσκολο να υπολογιστεί αναλυτικά. Υπολογίσθηκε η πιθανότητα αυτή με τη βοήθεια του στατιστικού πακέτου S-Plus για τιμές του  $n$  από 100 μέχρι 900. Οι τιμές των πιθανοτήτων, που προέκυψαν, παριστάνονται γραφικά στο παρακάτω γράφημα.

Από το γράφημα αυτό διαπιστώνεται ότι η πιθανότητα (0,50) να επιλεγούν όλα τα πλήκτρα και (0,50) να μην επιλεγούν όλα τα πλήκτρα αρχίζει να γίνεται ευνοϊκότερη από από  $n=425$  επιλογές και μετά.

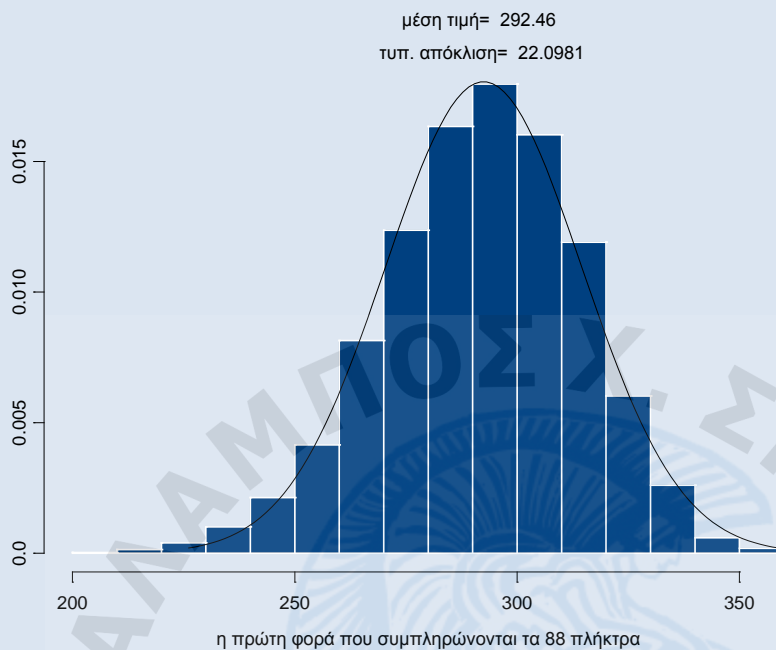
Ακόμη ότι από  $n=712$  επιλογές και μετά η πιθανότητα να επιλεγούν όλα τα πλήκτρα γίνεται μεγαλύτερη από 0,975.



## Προσομοίωση

Για το παραπάνω πρόβλημα έγινε και μία προσομοίωση. Θεωρήθηκε μια μεγάλη σειρά ( $N=10.000$ ) επαναλήψεων του εξής πειράματος: Εκτελούνται επιλογές πλήκτρων κάθε φορά τυχαία από το  $\Omega$  100 έως 800 πλήκτρα, καταγράφοντας την πρώτη φορά που στα επιλεγμένα πλήκτρα υπάρχουν όλα τα 88 πλήκτρα, οπότε και σταματά η επιλογή. Η πρώτη φορά που συμπληρώνονται όλα τα 88 πλήκτρα είναι μια τυχαία μεταβλητή, της οποίας το ιστόγραμμα που προκύπτει από το πείραμα προσομοιώσεως είναι το παρακάτω.





Από το σχήμα διαπιστώνεται ότι η πρώτη φορά που επιλέγονται όλα τα πλήκτρα είναι κανονικά κατανομημένη μεταβλητή με μέση τιμή 292,5 και τυπική απόκλιση 22,0981. Υπολογίστηκε επίσης ότι με 95% πιθανότητα η πρώτη φορά επιλογής όλων των 88 πλήκρων συμβαίνει σε 245 έως 333 επιλογές, ενώ με 99% πιθανότητα σε 230 έως 344 επιλογές.

Αυτό σημαίνει, κατά συνέπεια, ότι είναι εξαιρετικά απίθανο με πιθανότητα μικρότερη του 0.005 να επιλεγούν και τα 88 πλήκτρα με λιγότερες από 230 επιλογές.

Ο Ξενάκης στην εισαγωγή του έργου επιλέγει τυχαία(;) 205 πλήκτρα από το σύνολο R και μέσα σ' αυτά δεν έχουν επιλεγεί όλα τα 88 του πληκτρολογίου του πιάνου παρά μόνον τα 75. Το γεγονός είναι σύμφωνο με το πείραμα της προσομοιώσεως, οπότε συμπεραίνεται ότι πράγματι οι επιλογές των πλήκτρων γίνεται με τυχαίο τρόπο.

### Στοιχεία των διαφόρων συνόλων

Το έργο βασίζεται σε λογικές διεργασίες μεταξύ συγκεκριμένων συνόλων φθόγγων. Τα στοιχεία κάθε συνόλου ορίζονται μόνο με το κριτήριο του μουσικού ύψους, σύμφωνα με τις προλογικές σημειώσεις του συνθέτη για το συγκεκριμένο έργο. Τούτο επιβάλλει τον μη διαχωρισμό των εναρμονιών φθόγγων, που σημαίνει ότι, εάν

σε κάποιο σύνολο ανήκει ο φθόγγος  $C_4\sharp$ , τότε θεωρείται αυτονόητο ότι και ο φθόγγος

$D_4\flat$  ανήκει στο σύνολο αυτό.

Τα βασικά σύνολα στο HERMA, κατά τον συνθέτη, είναι τα εξής τέσσερα: A, B, C, R. Εμφανίζεται, όμως, μια και μοναδική φορά σε τρία μουσικά μέτρα (M.27-M.29) και το σύνολο S, για το οποίο δεν δίδεται καμιά πληροφορία.

Ο συνθέτης το σύνολο R το ονομάζει «αναφορικό» (R=Referential) και μας πληροφορεί πως περιέχει όλους τους φθόγγους του πληκτρολογίου του πιάνου (από  $A_0$  έως  $C_8$ ). Στην πράξη, όμως, τούτο δεν συμβαίνει καθώς δεν εμφανίζονται ούτε μία φορά στο HERMA 15 από αυτούς τους φθόγγους. Από έλεγχο διεπιστώθη ότι οι ελλείποντες φθόγγοι δεν ενυπάρχουν στο S έτσι, ώστε η ένωση R+S να περιλαμβάνει όλους τους φθόγγους του πληκτρολογίου του πιάνου (από  $A_0$  έως  $C_8$ ). Εξ αυτών θεωρείται ως δεδομένο ότι στο σύνολο R ανήκουν όλοι οι 88 φθόγγοι του πληκτρολογίου του πιάνου (από  $A_0$  έως  $C_8$ ), αλλά εξ αυτών εμφανίζονται οι 73 στο HERMA. Κατόπιν όλων αυτών τα σύνολα S, A, B, C θεωρούνται ως γνήσια υποσύνολα του γενικού συνόλου R.

Τα μουσικά μέτρα στο HERMA είναι 219. Τα πρώτα 26 μουσικά μέτρα καταλαμβάνονται από το σύνολο R και τα επόμενα τρία (M.27-M.29) καταλαμβάνονται από το σύνολο S. Από το M.30 και μέχρι του τέλους του έργου εμφανίζονται τα βασικά σύνολα A, B, C και οι λογικές τους πράξεις, οι οποίες αναφέρονται σε ενώσεις, σε τομές και σε συμπληρώματά τους. Συγκεκριμένα εμφανίζονται τα εξής σύνολα:

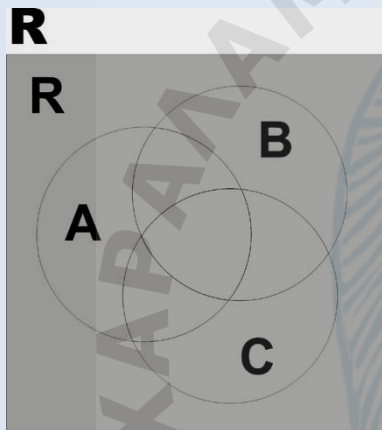
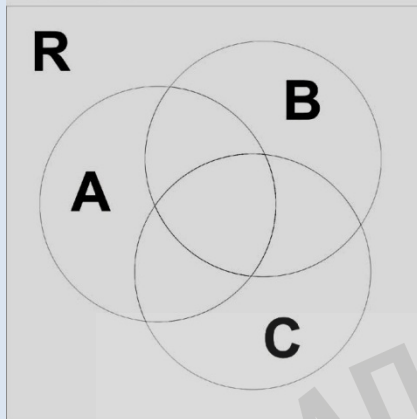
$$R, S, A, B, C, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, AB + \bar{A}\bar{B}, \bar{A}\bar{B} + AB, \\ \overline{ABC}, (AB + \bar{A}\bar{B})C, \bar{BC}, \overline{AB + \bar{A}\bar{B}}, \overline{(AB + \bar{A}\bar{B})C}, \\ \overline{ABC}, \bar{AC}, \bar{AC} + \overline{ABC} \text{ και } F$$

$$F = ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} = (AB + \bar{A}\bar{B})C + \overline{(AB + \bar{A}\bar{B})}\bar{C}$$

Η πράξη της ένωσης συμβολίζεται με «+» αντί « $\cup$ », επί παραδείγματι  $A+B$  αντί  $A \cup B$ . Κατά την πράξη της τομής απλά παρατίθενται τα σύνολα π.χ.  $AB$ . Το συμπλήρωμα ως προς το σύνολο αναφοράς R κάποιου συνόλου συμβολίζεται με μια υπερτιθεμένη παύλα, δηλαδή  $\bar{A}$  = συμπλήρωμα ως προς το σύνολο αναφοράς R του συνόλου A).

Στη συνέχεια παρατίθεται αναλυτική παρουσίαση των φθόγων που ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ και ΠΡΑΚΤΙΚΑ απαρτίζουν όλα τα σύνολα στο HERMA μαζί με τα διαγράμματά τους κατά Venn.

$$\bar{R} = \emptyset$$



Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

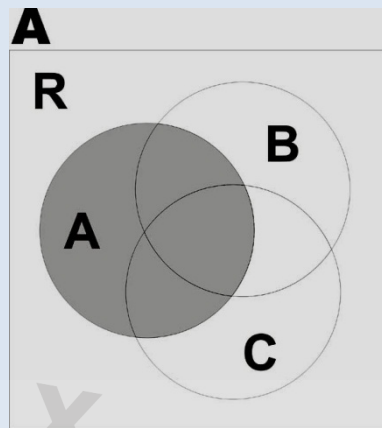
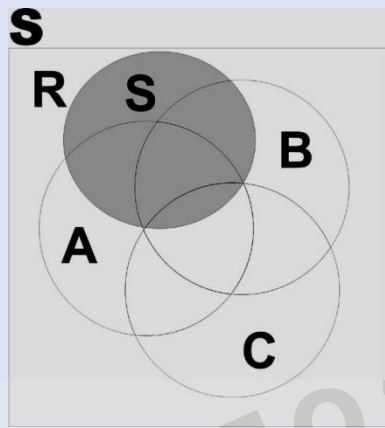
R

Musical score for the first section. It consists of four staves. The first two staves are in bass clef, and the last two are in treble clef. The music features a sequence of notes with various accidentals (sharps, flats, naturals) and rests. A 'Sub' marking is present under the first staff, and an '8va' marking is present above the third staff. A large watermark is visible across the score.

Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

R

Musical score for the second section. It consists of four staves. The first two staves are in bass clef, and the last two are in treble clef. The music features a sequence of notes with various accidentals (sharps, flats, naturals) and rests. A 'Sub' marking is present under the first staff, and an '8va' marking is present above the third staff. A large watermark is visible across the score.



Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

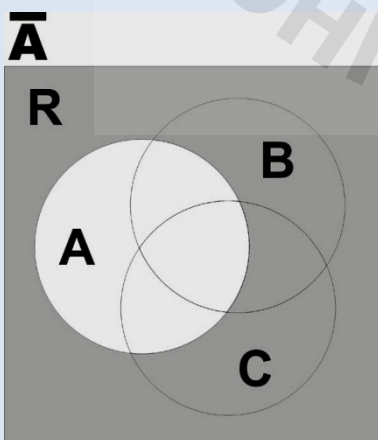
S

Musical score for section S, consisting of three staves. The first staff is in bass clef and contains a sequence of notes: G2, A2, B2, C3, D3, E3, F3, G3, A3, B3, C4, D4, E4, F4, G4, A4, B4, C5. The second staff is in treble clef and contains a sequence of notes: G4, A4, B4, C5, D5, E5, F5, G5, A5, B5, C6, D6, E6, F6, G6, A6, B6, C7. The third staff is in treble clef and contains a sequence of notes: G6, A6, B6, C7, D7, E7, F7, G7, A7, B7, C8, D8, E8, F8, G8, A8, B8, C9. A watermark 'ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΜΕΛΙΣΣΑΤΟΠΟΥΛΟΣ Ε.Κ.Π.Α.' is visible across the score.

Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

A

Musical score for section A, consisting of two staves. The first staff is in bass clef and contains a sequence of notes: G2, A2, B2, C3, D3, E3, F3, G3, A3, B3, C4, D4, E4, F4, G4, A4, B4, C5. The second staff is in treble clef and contains a sequence of notes: G4, A4, B4, C5, D5, E5, F5, G5, A5, B5, C6, D6, E6, F6, G6, A6, B6, C7. A watermark 'ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΜΕΛΙΣΣΑΤΟΠΟΥΛΟΣ Ε.Κ.Π.Α.' is visible across the score.



Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

A

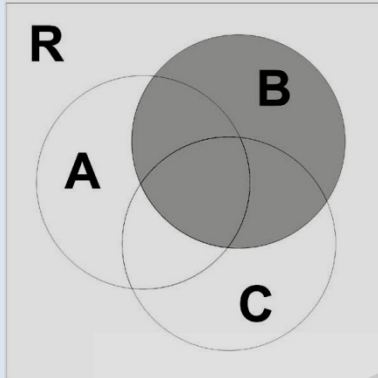
The first section of the musical score consists of four staves. The first two staves are in bass clef, and the last two are in treble clef. The music features a sequence of notes with various accidentals (sharps, flats, and naturals). A dotted line labeled '8va' spans across the first two staves, indicating an octave shift. A large, semi-transparent watermark of a classical head is visible in the background.

Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

A

The second section of the musical score consists of three staves. The first two staves are in bass clef, and the last is in treble clef. The music features a sequence of notes with various accidentals. A dotted line labeled '8va' spans across the first two staves, indicating an octave shift. A large, semi-transparent watermark of a classical head is visible in the background.

**B**



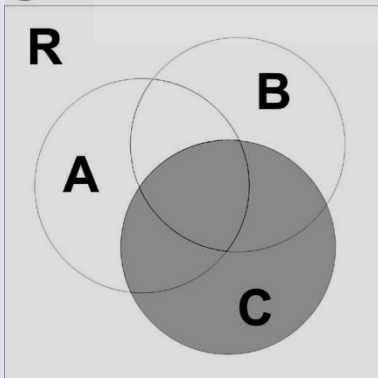
Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

**B**

Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

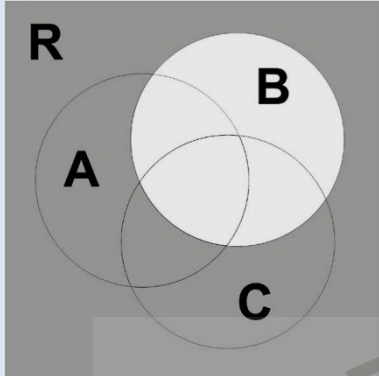
**C**

**C**





**B̄**



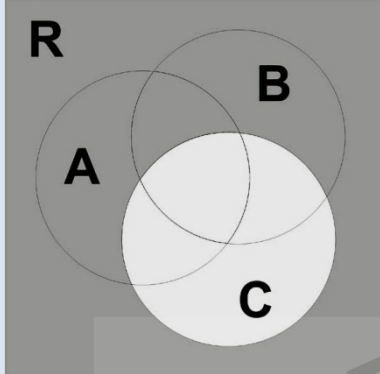
Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

**B̄**

Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

**B̄**

**C**



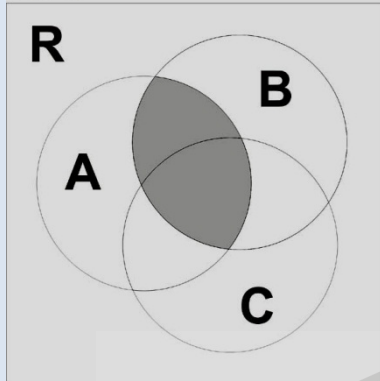
Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$\overline{C}$

Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$\overline{C}$

# AB



Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

AB

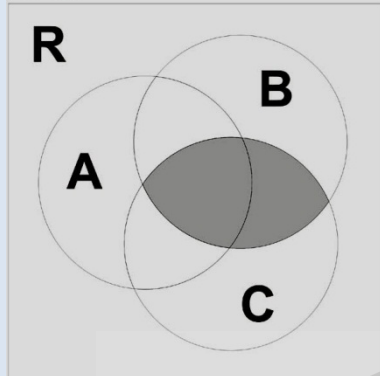


Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

AB



**BC**



Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

**BC**



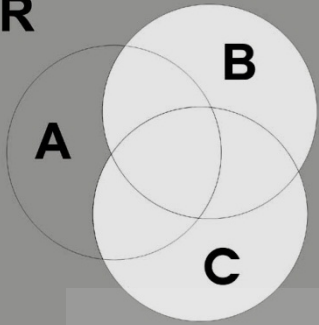
Θεωρητικός προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

**BC**



$\overline{BC}$

R



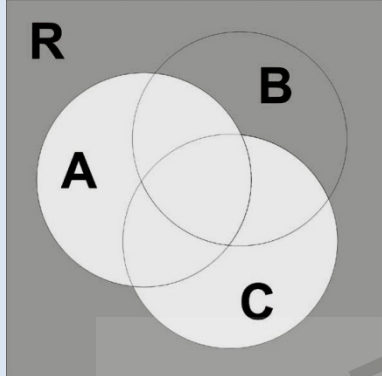
Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$\overline{BC}$

Θεωρητικός προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$\overline{BC}$

$$\overline{AC} = \overline{AC} + \overline{ABC}$$



Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$\overline{AC}$$

Musical notation for the first staff, showing a sequence of notes with accidentals and dynamic markings like 8va and 8vb.

Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$\overline{AC}$$

Musical notation for the second staff, showing a sequence of notes with accidentals and dynamic markings like 8va and 8vb.

Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$\overline{AC} + \overline{ABC}$$

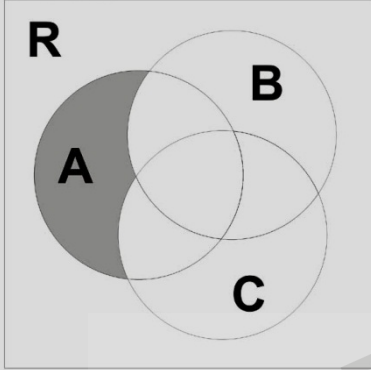
Musical notation for the first system, showing a bass clef and a treble clef with notes and accidentals. A '8va' marking is present above the treble staff.

Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$\overline{AC} + \overline{ABC}$$

Musical notation for the second system, showing a bass clef, a treble clef, and a grand staff with notes and accidentals. '8va' markings are present above the bass and treble staves.

$\overline{ABC}$



Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$\overline{ABC}$



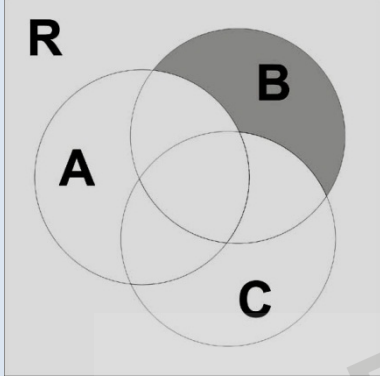
Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$\overline{ABC}$

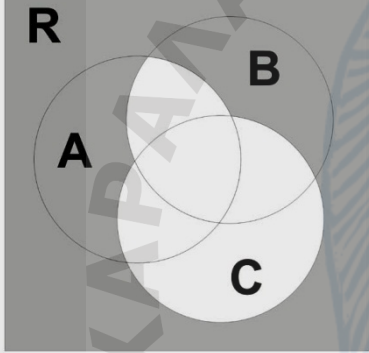




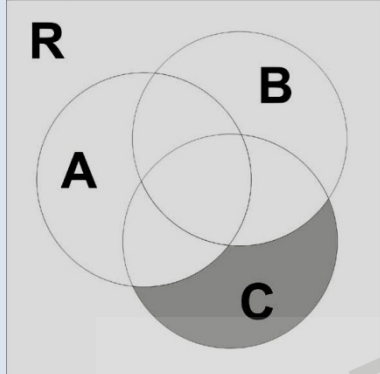
$\overline{A}B\overline{C}$



$\overline{C+AB}$



# ABC



Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

ABC

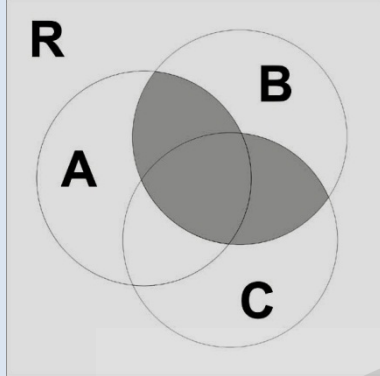


Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

ABC



# AB+BC



Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$BC + AB$$

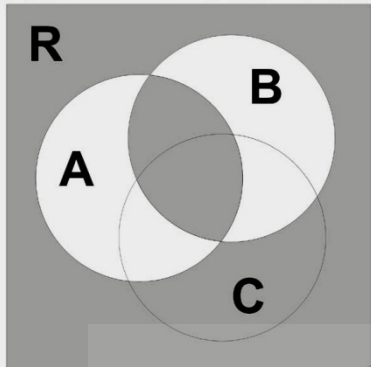


Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$BC + AB$$



$$AB + \bar{A}\bar{B} = \bar{A}\bar{B} + AB$$



$$(\bar{A}\bar{B} + AB) + ABC$$

Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$\bar{A}\bar{B} + AB$$

Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$\bar{A}\bar{B} + AB$$

Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$AB + \overline{AB}$$

The first section of the musical score consists of two staves. The top staff is in bass clef and contains a sequence of notes: G2, A2, B2, C3, D3, E3, F3, G3, A3, B3, C4, D4, E4, F4, G4, A4, B4, C5. The bottom staff is in bass clef and contains a sequence of notes: G3, A3, B3, C4, D4, E4, F4, G4, A4, B4, C5, D5, E5, F5, G5, A5, B5, C6. A watermark 'ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ ΧΑΡΙΔΗΜΑΝΤΙΔΗΣ' is visible across the score.

Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$AB + \overline{AB}$$

The second section of the musical score consists of two staves. The top staff is in bass clef and contains a sequence of notes: G2, A2, B2, C3, D3, E3, F3, G3, A3, B3, C4, D4, E4, F4, G4, A4, B4, C5. The bottom staff is in bass clef and contains a sequence of notes: G3, A3, B3, C4, D4, E4, F4, G4, A4, B4, C5, D5, E5, F5, G5, A5, B5, C6. A watermark 'ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ ΧΑΡΙΔΗΜΑΝΤΙΔΗΣ' is visible across the score.

Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$(\overline{AB} + AB) + ABC$$

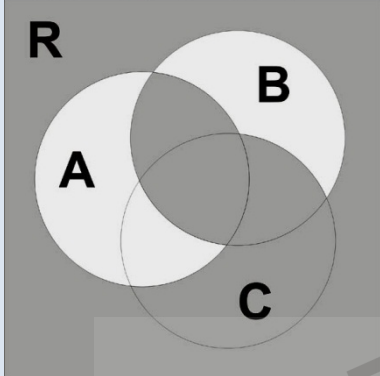
The first system of musical notation consists of two staves. The upper staff is in bass clef and the lower staff is in treble clef. Both staves contain a sequence of notes with various accidentals (sharps and flats). A watermark for the National and Kapodistrian University of Athens is visible in the background.

Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$(\overline{AB} + AB) + ABC$$

The second system of musical notation consists of two staves. The upper staff is in bass clef and the lower staff is in treble clef. Both staves contain a sequence of notes with various accidentals (sharps and flats). A watermark for the National and Kapodistrian University of Athens is visible in the background.

# $AB+BC+\bar{A}\bar{B}$



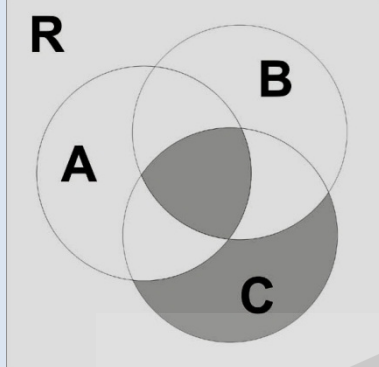
Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$(AB + \bar{A}\bar{B}) + BC$$

Θεωρητικός προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$(AB + \bar{A}\bar{B}) + BC$$

# ABC+ $\overline{A}\overline{B}C$



Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

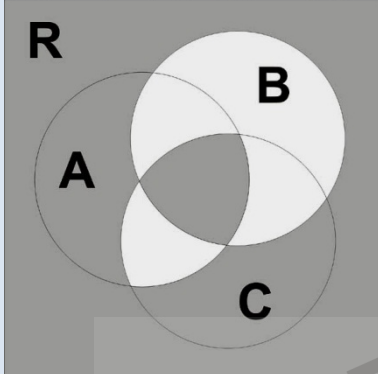
$$(AB + \overline{A}\overline{B})C$$

Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$(AB + \overline{A}\overline{B})C$$



# ABC + $\overline{A}\overline{B}C + \overline{B}\overline{C}$



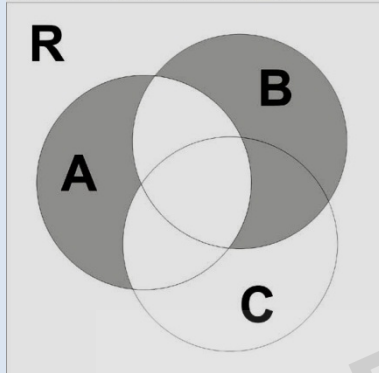
Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$(AB + \overline{A}\overline{B})C + \overline{B}\overline{C}$$

Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$(AB + \overline{A}\overline{B})C + \overline{B}\overline{C}$$

$$\overline{AB} + \overline{A\overline{B}} + \overline{A\overline{B}C}$$



Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$\overline{(AB + A\overline{B})} + \overline{A\overline{B}C}$$

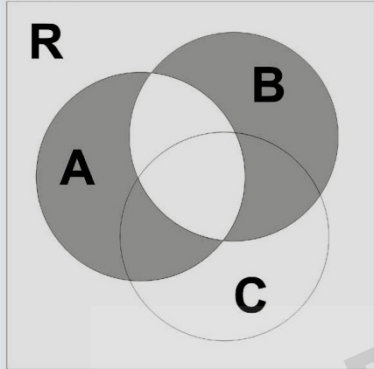


Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$\overline{(AB + A\overline{B})} + \overline{A\overline{B}C}$$



$$\overline{AB + \overline{AB}}$$



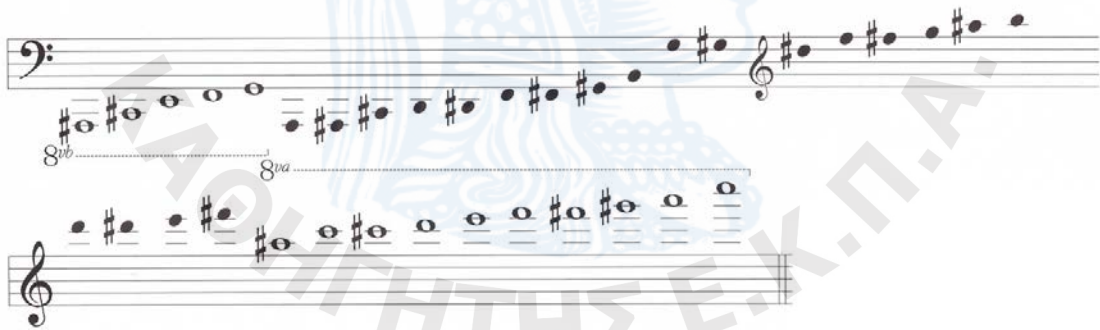
Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$\overline{AB + \overline{AB}}$$

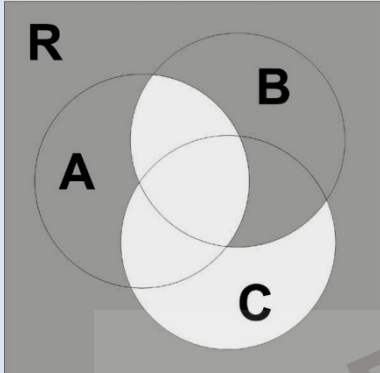


Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$\overline{AB + \overline{AB}}$$



$$AB + \bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C}$$



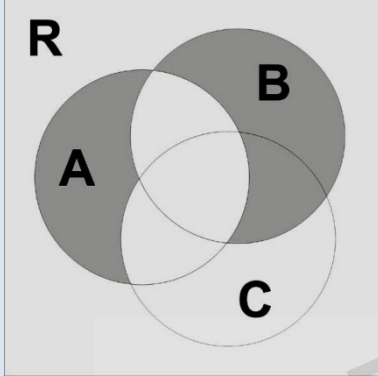
Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$(AB + \bar{A}\bar{B}) + \bar{B}\bar{C}$$

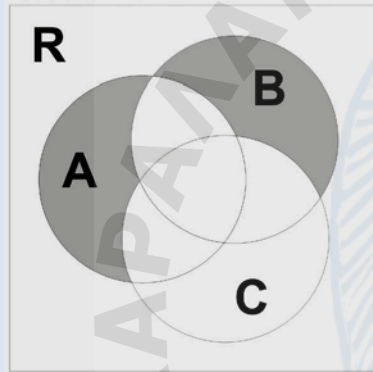
Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$(AB + \bar{A}\bar{B}) + \bar{B}\bar{C}$$

$$\overline{A}B\overline{C} + \overline{A}B$$



$$\overline{(\overline{A}B + \overline{A}\overline{B})C}$$



$$\overline{(\overline{A}B + \overline{A}\overline{B})C} + A\overline{B}\overline{C}$$
$$\overline{(\overline{A}B + \overline{A}\overline{B})C} + \overline{A}B\overline{C}$$



Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$(\overline{AB} + \overline{\overline{AB}})\overline{C}$$

8<sup>va</sup>..... 8<sup>va</sup>.....

Θεωρητικός προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$(\overline{AB} + \overline{\overline{AB}})\overline{C}$$

8<sup>va</sup>..... 8<sup>va</sup>.....

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Κ.Π.Α.

Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$\overline{(AB + \overline{AB})C} + \overline{ABC}$$



Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$\overline{(AB + \overline{AB})C} + \overline{ABC}$$



Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$\overline{(AB + \overline{AB})\overline{C}} + \overline{ABC}$$

Musical notation for the first part of the set. It consists of two staves: a bass staff on the left and a treble staff on the right. The bass staff contains a sequence of notes: G2, A2, B2, C3, D3, E3, F3, G3. The treble staff contains a sequence of notes: A3, B3, C4, D4, E4, F4, G4. Above the treble staff, there is a bracket labeled '8va' spanning the notes A3 through G4. Below the bass staff, there is a bracket labeled '8vb' spanning the notes G2 through G3.

Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$\overline{(AB + \overline{AB})\overline{C}} + \overline{ABC}$$

Musical notation for the second part of the set. It consists of two staves: a bass staff on the left and a treble staff on the right. The bass staff contains a sequence of notes: G2, A2, B2, C3, D3, E3, F3, G3. The treble staff contains a sequence of notes: A3, B3, C4, D4, E4, F4, G4. Above the treble staff, there is a bracket labeled '8va' spanning the notes A3 through G4. Below the bass staff, there is a bracket labeled '8vb' spanning the notes G2 through G3.



Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$(AB + \overline{AB})C + (\overline{AB} + \overline{\overline{AB}})\overline{C}$$

Musical notation for the first section. It consists of two staves. The top staff is a bass clef staff with notes: G2, A2, B2, C3, D3, E3, F3, G3, A3, B3, C4, D4, E4, F4, G4, A4, B4, C5. The bottom staff is a treble clef staff with notes: C4, D4, E4, F4, G4, A4, B4, C5, D5, E5, F5, G5, A5, B5, C6. A '8va' marking is present above the final notes of the treble staff.

Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$(AB + \overline{AB})C + (\overline{AB} + \overline{\overline{AB}})\overline{C}$$

Musical notation for the second section. It consists of three staves. The top staff is a bass clef staff with notes: G2, A2, B2, C3, D3, E3, F3, G3, A3, B3, C4, D4, E4, F4, G4, A4, B4, C5. The middle staff is a treble clef staff with notes: C4, D4, E4, F4, G4, A4, B4, C5, D5, E5, F5, G5, A5, B5, C6. The bottom staff is a treble clef staff with notes: C4, D4, E4, F4, G4, A4, B4, C5, D5, E5, F5, G5, A5, B5, C6. Markings include '8va' above the first notes of the bass staff, '8va' above the final notes of the middle staff, and '(8va)' above the first notes of the bottom staff.

Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$F = (AB + \overline{AB})C + (\overline{AB} + \overline{\overline{AB}})\overline{C}$$

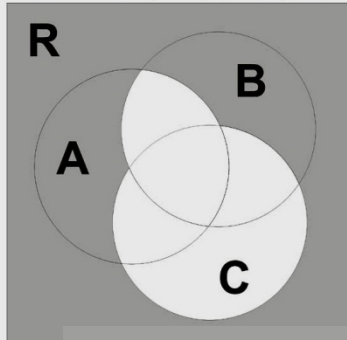
8<sup>va</sup> 8<sup>va</sup> 15<sup>ma</sup>

Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$F = (AB + \overline{AB})C + (\overline{AB} + \overline{\overline{AB}})\overline{C}$$

8<sup>va</sup> 8<sup>va</sup>

$$\overline{A}C + A\overline{B}C = A\overline{B}C + \overline{A}C$$



Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$\overline{A}B\overline{C} + \overline{A}C$$

Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$\overline{A}B\overline{C} + \overline{A}C$$

Τα εμφανιζόμενα στο έργο στοιχεία του συνόλου

$$\overline{AC} + \overline{ABC}$$

A musical staff in bass clef with a key signature of one sharp (F#). The notes are: G2, A2, B2, C3, D3, E3, F#3, G3, A3, B3, C4, D4, E4, F#4, G4, A4, B4, C5. There are two dotted lines above the staff: the first starts at G2 and ends at G3, labeled '8va'; the second starts at G4 and ends at G5, labeled '8va'.

Θεωρητικώς προκύπτοντα στοιχεία του συνόλου

$$\overline{AC} + \overline{ABC}$$

Three musical staves. The top staff is in bass clef with a key signature of one sharp (F#). The notes are: G2, A2, B2, C3, D3, E3, F#3, G3, A3, B3, C4, D4, E4, F#4, G4, A4, B4, C5. There is a dotted line above the staff starting at G2 and ending at G3, labeled '8va'. The middle staff is in bass clef with a key signature of one sharp (F#). The notes are: G2, A2, B2, C3, D3, E3, F#3, G3, A3, B3, C4, D4, E4, F#4, G4, A4, B4, C5. There is a dotted line above the staff starting at G4 and ending at G5, labeled '8va'. The bottom staff is in treble clef with a key signature of one sharp (F#). The notes are: G4, A4, B4, C5, D5, E5, F#5, G5, A5, B5, C6, D6, E6, F#6, G6, A6, B6, C7.

### Μαθηματικά λάθη του συνθέτη

Εξετάζοντας τα στοιχεία των συνόλων του έργου με βάση τη θεωρία των Συνόλων παρατηρούνται τα εξής:

α) ύπαρξη κοινών στοιχείων μεταξύ κάποιων συνόλων και των συμπληρωμάτων τους,  
β) ενδεχόμενη παράλειψη κάποιων στοιχείων (π.χ. το σύνολο R, ενώ αναφέρεται ως γενικό, δεν περιλαμβάνει ως στοιχεία του ορισμένα από τα στοιχεία των άλλων συνόλων).

Όπως έχει αποδειχθεί προηγουμένως, η επιλογή των στοιχείων από ένα σύνολο γίνεται εντελώς κατά τυχαίο τρόπο. Τούτο σημαίνει ότι είναι δυνατόν σ' ένα σύνολο να μην έχουν επιλεγεί όλα του τα στοιχεία, αλλά μικρό ή μεγάλο μέρος αυτών. Έτσι, αβίαστα δικαιολογούνται τυχόν μαθηματικά λάθη της δεύτερης κατηγορίας, που στην ουσία δεν πρόκειται για λάθη.

Η πρώτη, όμως, κατηγορία «λαθών» είναι αδύνατον να δικαιολογηθεί σύμφωνα με τη Θεωρία των Συνόλων (π.χ. στο σύνολο  $\overline{AC}$  δεν επιτρέπεται να ανήκει στοιχείο του συνόλου C). Μπορούμε, όμως, να κάνουμε μια ρεαλιστική, κατά τα άλλα, σκέψη

προκειμένου να αιτιολογήσουμε τα «λάθη» αυτής της κατηγορίας και να δεχθούμε ότι πολύ πιθανόν έγιναν εκ παραδρομής.

Κατά την περίοδο αυτή (1952-1962) που ο Γιάννης Ξενάκης πρωτοτυπεί συνθέτοντας έργα με βάση τα Μαθηματικά, χρησιμοποιεί ηλεκτρονικό υπολογιστή. Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής τότε ήταν αλλιώτικος από τους γνωστούς σημερινούς Η/Υ με το πληκτρολόγιό τους, την οθόνη τους, το ποντίκι τους. Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής τότε ήταν απρόσωπος. Τεράστιες μονάδες κλεισμένες σε ειδικούς χώρους που τους εχειρίζοντο ειδικοί υπάλληλοι. Οι χρήστες έδιναν τα προγράμματά τους με εντολές τρυπημένες σε χιλιάδες κάρτες, που τις τρυπούσαν σε ειδικές διατρητικές μηχανές. Συχνά συνέβαιναν λάθη διατρήσεως λόγω ελαττωματικής λειτουργίας της διατρητικής μηχανής. Αυτό θέλω ειδικαίως να το τονίσω για να γίνουν κατανοητά ορισμένα από τα μαθηματικά λάθη που συναντούμε στο έργο του Ξενάκη.

Επειδή, λοιπόν, το κάθε γεγονός πρέπει να το αντιμετωπίζουμε με βάση τον ιστορικό του περίγυρο, θα ήθελα στο σημείο αυτό να αναφέρω για να θυμίσω ότι τότε, την ίδια περίοδο και μέχρι τις αρχές της δεκαετίας το '70 οι περισσότεροι από εμάς στα Ελληνικά Πανεπιστήμια δεν είχαμε έλθει σε επαφή ακόμη με ηλεκτρονικό υπολογιστή και μας εδίδασκαν πώς να χρησιμοποιούμε τον «λογαριθμικό κανόνα» προκειμένου να εκτελούμε μαθηματικές πράξεις! Τούτο το γεγονός αποτελεί μια ένδειξη της διαφοράς φάσης όσον αφορά στη χρησιμοποίηση της Τεχνολογίας για την παραγωγή έργων τέχνης μεταξύ ημών εν Ελλάδι και του Ξενάκη εν Παρισίοις.

Είναι, λοιπόν, πολύ πιθανόν από τυχαία λάθη διατρήσεως των δεδομένων στις κάρτες να προεκλήθη αλλαγή στοιχείων κάποιου ή κάποιων συνόλων με αποτέλεσμα την εμφάνιση μαθηματικών λαθών της πρώτης κατηγορίας.

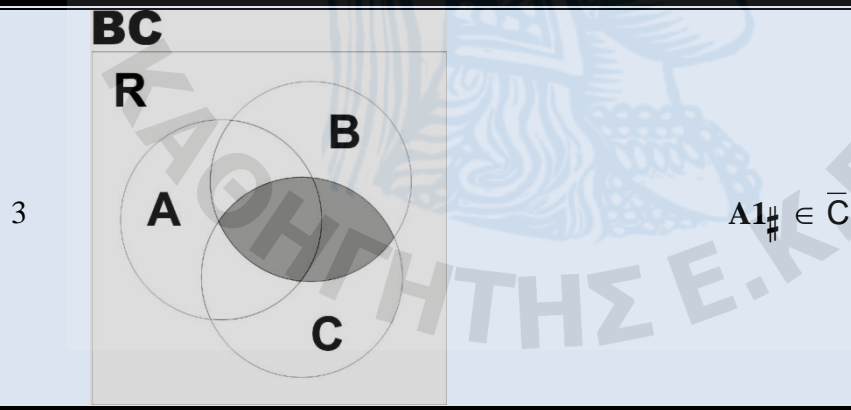
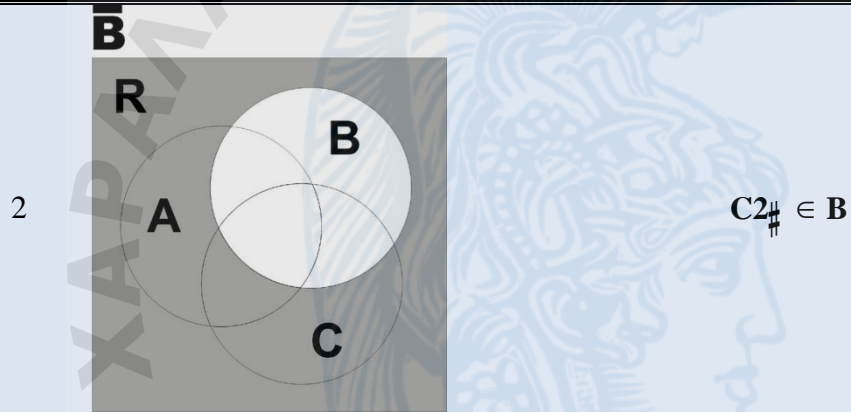
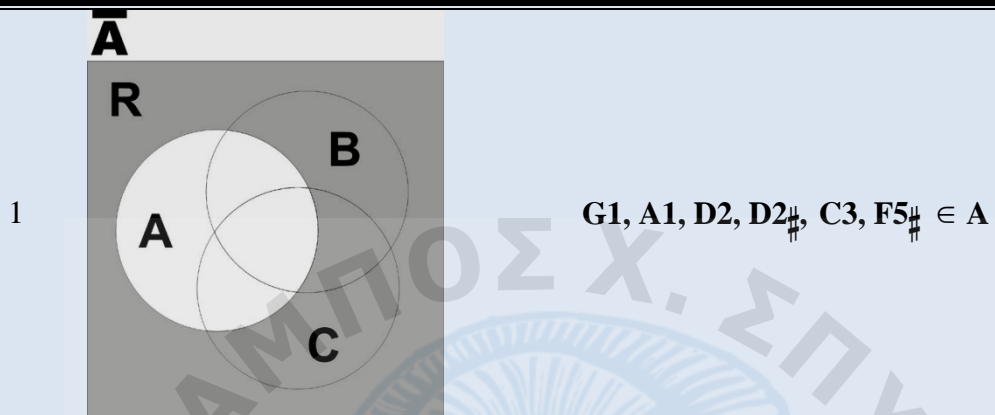
Πρέπει να έχουμε κατά νουν ότι αυτή την περίοδο ο Ξενάκης δέχεται το όποιο output του Η/Υ ως καλλιτεχνικό έργο χωρίς να κάνει καμμία παρέμβαση επ' αυτού, ούτε καν έλεγχο ορθότητας. Κατανοώ ότι σε στοχαστικές διαδικασίες δεν είναι δυνατόν να ελέγξεις το ο,τιδήποτε. Στη Θεωρία Συνόλων, όμως, θα μπορούσε.

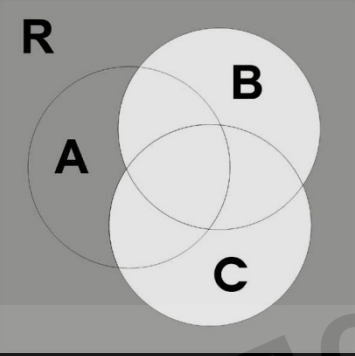
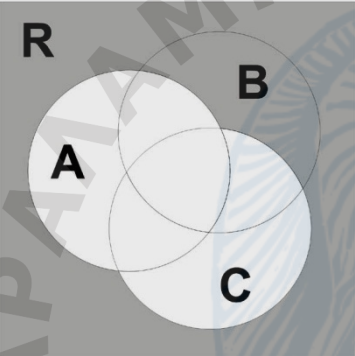
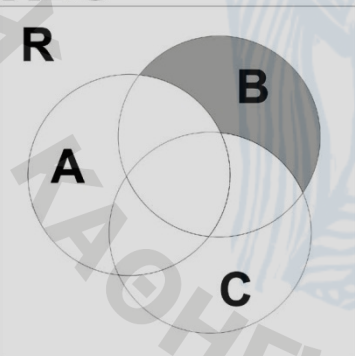
Εξ άλλου δεν πρέπει να ξεχνούμε πως η μελέτη αφορά σε μουσική σύνθεση, δηλαδή έργο που απορρέει κι από παράγοντες ακαθόριστους κι αναξέλεγκτους, ειδικά με μαθηματικά κριτήρια, όπως η έμπνευση κι ο συναισθηματισμός του καλλιτέχνη (εάν πράγματι υπάρχει). Ο Ιάννης Ξενάκης είναι μουσικός αναμφισβήτητα, όσο κι αν προτίθεται, σύμφωνα με την πορεία του στον μουσικό χώρο να υποτάξει τα έργα του σε μια μαθηματική απολυτότητα και κυριαρχία. Τελικά, φαίνεται μάλλον σε μερικά σημεία να υποχωρεί η αυστηρότητα του Μαθηματικού και να υπερισχύει η περόρμηση του καλλιτέχνη. Μια αντίφαση που όχι μόνον δεν είναι σωστό να επικριθεί, αλλά που μάλλον αποτελεί και το πρωτοπόρο στοιχείο της σημαντικής αυτής προσωπικότητας κι ίσως το ερέθισμα του ενδιαφέροντος για μια τόσο προκλητική, με τη θετική έννοια, όσο και προοδευτική συνθετική αντίληψη.

Τα παρατηρηθέντα μαθηματικά λάθη της πρώτης κατηγορίας αναλυτικά παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2: Μαθηματικά λάθη της πρώτης κατηγορίας

ΣΥΝΟΛΟ



4	<p><math>\overline{B}\overline{C}</math></p> 	<p><math>E1, G2_{\#} \in B</math></p>
5	<p><math>\overline{A}\overline{C} = \overline{A}\overline{C} + \overline{A}BC</math></p> 	<p><math>B2, C3_{\#}, A6 \in A</math></p> <p><math>A3_{\#}, E5, G5_{\#}, C8 \in C</math></p> <p><math>F4 \in A, C</math></p>
6	<p><math>\overline{A}BC</math></p> 	<p><math>C2_{\#} \in B, C</math></p> <p><math>C3 \in A, B</math></p> <p><math>A6_{\#} \in \overline{C}</math></p>

## Η Δομή του HERMA

### 1. Η κορύφωση

Το έργο απαρτίζεται από 219 μουσικά μέτρα και εμφανίζει λαβδοειδή (=μορφής Λ) μορφολογική εξέλιξη με την κορύφωσή του να εμφανίζεται σε μουσικό μέτρο που επιβάλλει το θεώρημα της χρυσής τομής.

Το θεώρημα της χρυσής τομής ή το Πρόβλημα της διαιρέσεως ενός ευθυγράμμου τμήματος σε άκρο και μέσο λόγο μας το διασώζει ο Στοιχειωτής Ευκλείδης ως Πρόβλημα 3, στο 6<sup>ο</sup> Βιβλίο των Στοιχείων του.

Eucl. Elem. vi. Def. 3

γ'. "Άκρον και μέσον λόγον εὐθεία τετμηθῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾗ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μείζον τμήμα, οὕτως τὸ μείζον πρὸς τὸ ἔλαττον.

Το θεώρημα αφορά στον χωρισμό ενός ευθυγράμμου τμήματος σε δύο άνισα μέρη, τέτοια ώστε «ο λόγος του μεγαλύτερου προς το μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα να ισούται με το λόγο του όλου προς το μεγαλύτερο ευθύγραμμο τμήμα».

Ο λόγος της χρυσής τομής ισούται με  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,618\dots$  Στις αρχές του 20ού αι.

ο Μαθηματικός Mark Barr ονόμασε τον λόγο της χρυσής τομής Φ προς τιμήν του Έλληνα γλύπτη Φειδία.

Ο αριθμός αυτός αποτελούσε για τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρες, γλύπτες κι αρχιτέκτονες το «δόγμα της ωραιότητας», αφού δημιουργεί την αίσθηση της αρμονίας. Ο αριθμός Φ αναζητήθηκε και βρέθηκε όχι μόνο στην Τέχνη, αλλά και στη φύση. Στην περίπτωση αναλύσεως ή συνθέσεως ενός μουσικού έργου βάσει του θεωρήματος της χρυσής τομής χρησιμοποιείται ο αριθμός φ, που ισούται με το δεκαδικό μέρος του χρυσού αριθμού Φ, δηλαδή φ=0,618...

Έτσι, λοιπόν, η χρυσή τομή τού έργου είναι το μουσικό μέτρο  $135 = \phi \cdot 219 = 0,618 \cdot 219 = 135,342 \cong 135$ , όπου πραγματοποιείται και η μεγάλη στροφή του έργου, όσον αφορά στη μορφολογική του εξέλιξη, αλλά και στην είσοδο των συνόλων.

### 2. Αρχή-Κορύφωση και Κορύφωση-Φινάλε

Το έργο μελετάται ως αλληλουχία δύο ενοτήτων, δηλαδή από την αρχή (Μ.1) μέχρι τη χρυσή τομή (Μ.135) και αμέσως μετά από τη χρυσή τομή (Μ.136) μέχρι το τέλος (Μ.219).

A. Μέτρο 1 έως Μέτρο 135




Μέσα στα μέτρα αυτά κάνουν την εμφάνισή τους τα σύνολα R, S, A, B, C και τα συμπληρώματα  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  των τριών τελευταίων.

Στα πρώτα 29 μέτρα υπάρχει συνεχής αλλαγή μέτρου μέχρι να καθιερωθεί για όλο το έργο στη συνέχεια –πλήν ορισμένων εξαιρέσεων- το μέτρο  $\frac{12}{8}$  στο M.30, όπου εμφανίζεται και το σύνολο A. Ακολουθούν απότομες αλλαγές δυναμικής –που αποτελούν καθ' όλη τη διάρκεια βασικό γνώρισμα του χαρακτήρος του έργου- μέχρι να μονιμοποιηθούν τα ***ff*** στο M.62, που εμφανίζεται το σύνολο  $\bar{A}$ ).

Από το M.73, όπου κάνει την είσοδό του το σύνολο B, ο συνθέτης χρησιμοποιεί σε 5ηχα ογδών ***f*** και ***pp***, ακολουθούν συνεχείς κι απότομες αλλαγές δυναμικής –από το M.84, για να γίνει ***ff*** στο M.99, (όπου εμφανίζεται το σύνολο  $\bar{B}$ ) κι απότομα μετά από μια μεγάλη παύση εμφανίζονται ***ppp*** στο M.110 –όπου εισέρχεται το σύνολο C, εναλλαγές σε ***ppp*** και ***fff***, παύση μεγάλη και ***ff*** στο M.119 –εμφανίζεται το σύνολο  $\bar{C}$ . Ακολουθεί ένα μεγάλο κορύφωμα της έντασης, πύκνωση της γραφής με συνεχή 5ηχα ογδών και μένει μετέωρο με μεγάλη παύση M.135. Συντελείται η βασική στροφή του έργου.

B. Μέτρο 136 έως Μέτρο 219.

Εισαγωγή σε ***ppp*** με το σύνολο AB –ηρεμία μετά την κορύφωση της προηγούμενης ενότητας. Στο M.140 προετοιμάζεται –με την είσοδο του συνόλου BC η άνοδος που θα ακολουθήσει στο M.144 ( $AB + \bar{A}\bar{B}$ ) με  σε ***f*** κι απότομες αλλαγές

***fff***, ***ppp***. Μένουμε έπειτα μετέωροι με παύση στο M.150.

Στο M.151 έρχεται το σύνολο  $\overline{AB} + AB$  με  $ppp$ , ενώ αμέσως μετά το σκηνικό αλλάζει με το σύνολο  $\overline{ABC}$  σε  $fff$ . Παύση 2 μέτρων.

Από το M.156 ( $[AB + \overline{AB}]C$ ) αρχίζουν  $f$  και  $ff$  που σιγά-σιγά χαμηλώνουν στα

M.159β'-162α' με το σύνολο  $\overline{BC}$ , για να καταλήξουν σε  $ppp$  με το σύνολο  $\overline{AB + \overline{AB}}$ .

Αλλαγή με  $fff$  για ένα μέτρο με το σύνολο  $A\overline{BC}$  και πάλι  $ppp$  στο M.166

( $[\overline{AB + \overline{AB}}]$ ). Ακολουθούν απότομες αλλαγές δυναμικής που καταλήγουν σε  $ppp$

(M.167β'-172α').

Στο β' μισό του M.172 εμφανίζεται με  $fff$  το σύνολο  $A\overline{BC}$ . Παύση τεσσάρων

μέτρων. Ακολουθεί  $f$  με όγδοα που καταλήγει σε  $ppp$  (M.182, σύνολο

$[(\overline{AB + \overline{AB}})\overline{C}]$ ). Παύση δύο μέτρων και τρεις νότες σε  $fff$  στα M.185β'+ 186.

Σύνολο  $A\overline{BC}$ . Παρόμοια κίνηση σε  $ppp$  M.188β'-189, σύνολο  $[(\overline{AB + \overline{AB}})\overline{C}]$ . Μέχρι

και το M.192 συμβαίνουν απότομες αλλαγές δυναμικής, που καταλήγουν σε  $ppp$  και

παύση.

Μέτρο 193: Προετοιμάζεται με  $f$  και  $fff$  σε όγδοα με το σύνολο  $\overline{AC}$  η κορύφωση

που ακολουθεί στο M.198 (σύνολο  $\overline{AC} + \overline{ABC}$ ) με  $fff$  σε δέκατα έκτα, που

σταματάει απότομα με παύση τριών μέτρων (M.200, 201 και 202).

Παρατηρείται αραίωμα της γραφής (M.203 έως M.210) με απότομες αλλαγές δυναμικής, που προετοιμάζει μαζί με παύση τεσσάρων μέτρων (M.211 έως M.214) τη μεγάλη και τελική κορύφωση του έργου, που συμβαίνει στο M.215 με την είσοδο του συνόλου  $F = (AB + \overline{AB})C + (\overline{AB} + \overline{AB})\overline{C}$ . Η γραφή δεν είναι τόσο πυκνή, αλλά

χαρακτηρίζεται από μεγαλοπρέπεια. Η δυναμική είναι σταθερή σε  $fff$  και το έργο

τελειώνει με τέταρτο παρεστιγμένο ( $\bullet$ ) και παύση  $\frac{9}{8}$ .

### 3. Εμφάνιση των Συνόλων

Παρακολουθώντας τη δομή κι εξέλιξη του έργου μπορούμε να οδηγηθούμε σε συμπεράσματα, τα οποία αφορούν στη γενική τακτική και ιδεολογία που ακολουθείται από τον συνθέτη. Έτσι, μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

- Στην πρώτη ενότητα του έργου η δομή είναι πιο απλή, όπως είναι και τα σύνολα. Αντίθετα, στα 84 τελευταία μέτρα –όπου κά νουν την είσοδό τους οι τομές ή/και οι ενώσεις των βασικών συνόλων καθώς και τα επιπρόσθετα σύνολα- η δομή γίνεται πολυπλοκότερη και η ένταση μεγαλύτερη.
- Σε όλο το έργο βλέπουμε την προτίμηση του συνθέτη στις ακραίες

δυναμικές, τα  $fff$  είναι πολύ περισσότερα από τα  $f$ , όπως και τα  $ppp$  από

τα  $p$ . Εξίσου αρέσκειται και στην απότομη εναλλαγή τους, στοιχείο που


καθιστά το έργο εξαιρετικά δύσκολο στην εκτέλεσή του. Παρουσιάζει, όμως, μεγάλο ενδιαφέρον για τον ακροατή, καθώς δημιουργεί αγωνία και ανάγκη για χαλάρωση αυτής της έντασης.

- Πολλές φορές, όμως, η χαλάρωση δεν έρχεται ομαλά, αλλά ο συνθέτης χρησιμοποιώντας μια μεγάλης διάρκειας παύση μετά από μια μεγάλης έντασης κορύφωση, αφήνει τον ακροατή μετέωρο, εξάπτοντας, έτσι, περισσότερο την αγωνία του για τη συνέχεια. Αυτό αφορά και σ' εκείνες τις μεγάλες παύσεις που











προετοιμάζουν την κορύφωση, αποτελώντας κατά κάποιο τρόπο αυτά ακριβώς τα κενά προοίμιο μεγάλης ανοδικής πορείας της έντασης και πύκνωσης της γραφής.

- iv. Η ίδια η πύκνωση της γραφής αποτελεί στοιχείο που εξυπηρετεί τον συνθέτη, ώστε να δείξει την κορύφωση. Κι αυτό συμβαίνει, διότι εμπεριέχει το συναίσθημα της επιταχύνσεως, παρόλο που αυτή είναι πλασματική. Χωρίς ένδειξη αλλαγής του μετρονόμου, χωρίς αλλαγή του μέτρου, το άκουσμα φαίνεται ταχύτερο και φορτίζει έντονα τον ακροατή. Θαρρείς πως παρατηρείται κίνηση. Αντιθέτως, με την αραίωση της γραφής επέρχεται η ηρεμία και η στατικότητα, που προετοιμάζουν για την επόμενη κορύφωση και συμπύκνωση της γραφής.

Γενικώς, θα μπορούσαμε να καταλήξουμε πως η συνολική θεώρηση του έργου δείχνει ότι, πέρα από τις όποιες εισόδους και εμφανίσεις συνόλων και στοιχείων που εκπορεύονται από μαθηματικές σχέσεις και λογισμικά ηλεκτρονικού υπολογιστού, η καλλιτεχνική ουσία του έργου, η κίνηση της σύνθεσης, η μετάβαση της δυναμικής, οι εικονοπλαστικές ιδιότητες του ρυθμού και των ήχων, είναι έργο εξ ολοκλήρου του συνθέτη και της δημιουργικής του εμπνεύσεως.

Πίνακας 3: Αναλυτική παρουσίαση των συνόλων στο HERMA		
	ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΕΤΡΟΥ	ΕΜΦΑΝΙΖΟΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ
1	1 έως 26	R
2	27 έως 29	S
3	30 έως 61	A
4	62 έως 72	$\bar{A}$
5	73 έως 98	B
6	99 έως 109	$\bar{B}$
7	110 έως 118	C
8	119 έως 135	$\bar{C}$
9	136 έως 139	AB
10	140 έως 143	BC [142+143: +AB]
11	144 έως 145	$AB + \bar{A}\bar{B}$
12	146 έως 150	$\bar{A}\bar{B} + AB$ [146β' → 147α: +BC, 147β' → 150: +ABC]
13	151 έως 151 -  2  (5ηχου)	$\bar{A}\bar{B} + AB$

Πίνακας 3 (Συνέχεια): Αναλυτική περυσίαση των συνόλων στο HERMA


	ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΕΤΡΟΥ	ΕΜΦΑΝΙΖΟΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ
14	151 (δύο τελευταία  έως 155	$\overline{ABC}$
15	156 έως α' μισό 159	$(AB + \overline{AB})C$ [157 τελευταία  έως 7ο   158: $+BC$ ][159 πρώτα 6  : $+BC$ ]
16	β' μισό 159 έως α' μισό 162	$\overline{BC}$ [161 από 4ο  έως 162α': $\overline{AB + \overline{AB}}$ ]
17	β' μισό 162 έως α' μισό 165	$\overline{AB + \overline{AB}}$ [163 τελευταία 4  έως 165α' : $+ABC$ ]
18	β' μισό 165 έως 172 - 	$(\overline{AB + \overline{AB}})\overline{C}$ [166 β' : $+(AB + \overline{AB})C$ ]
19	172 (τελευταίο  )  έως 181	$\overline{ABC}$ [178 β' → 181: $+AC$ ]
20	182 έως 184	$(\overline{AB + \overline{AB}})\overline{C}$
21	185 έως 187	$\overline{ABC}$
22	188 έως 192	$(\overline{AB + \overline{AB}})\overline{C}$ [189 β' → 190: $+(AB + \overline{AB})C$ ]
23	193 έως 197	$\overline{AC}$ [195 → 196α' : $+ABC$ ]
24	198 έως 202	$\overline{AC} + \overline{ABC}$
25	203 έως 214	$(\overline{AB + \overline{AB}})\overline{C}$ [204 β' → 205 : $+(AB + \overline{AB})C$ 206 : $+ABC$ 207 → 208α' : $+ABC$ ]
26	215 έως 219	$F = ABC + \overline{ABC} + \overline{ABC} + \overline{ABC} = (AB + \overline{AB})C + (\overline{AB + \overline{AB}})\overline{C}$


#### 4. Ενδεικτικά μέτρα

Το έργο αποτελείται από 219 μέτρα. Σε μερικά από αυτά συμβαίνουν κάποια γεγονότα, όπως:

- i. γίνεται η είσοδος κάποιου από τα πέντε βασικά σύνολα R, S, A, B, C.
- ii. εμφανίζονται άλλα σύνολα, που αποτελούν ενώσεις ή/και τομές των βασικών συνόλων.
- iii. γίνεται εισαγωγή –για περιορισμένο αριθμό νοτών- συνόλων, που συνυπάρχουν με τα ήδη έχοντα εμφανισθεί σύνολα.

Παράλληλα συμβαίνουν αλλαγές, που αφορούν στην αισθητική του έργου:

- i. αλλαγές ρυθμικές (π.χ. εκεί που για κάποιο πλήθος μέτρων ο ρυθμός εξεφράζεται με όγδοα (  ), η μορφή του κειμένου αλλάζει και πλεονάζουν

τα δέκατα έκτα (  ),

- ii. αλλαγές στη δυναμική (π.χ. μετά από αρκετά μέτρα σε **ppp** γίνεται απότομη μετάβαση –όχι για μία, αλλά για περισσότερες νότες- σε **fff**),
- iii. αλλαγή μέτρου (π.χ. από τα  $\frac{12}{8}$  περνάμε, έστω και για ένα μέτρο, στα  $\frac{6}{8}$ ).

Τα μέτρα της σύνθεσης αριθμήθηκαν και εξετάστηκαν σύμφωνα με κάποια κριτήρια, τα οποία θα αναφερθούν στη συνέχεια. Τα μέτρα, στα οποία αρχίζουν να συμβαίνουν κάποια από τα προαναφερθέντα μορφολογικά ή αισθητικά γεγονότα, στο εξής θα τα ονομάζουμε «ενδεικτικά μέτρα».

Σε πρώτο επίπεδο τα «ενδεικτικά μέτρα» ταξινομούνται σε δύο κατηγορίες και αυτές σε δύο και έξι υποκατηγορίες, αντιστοίχως:

1α. ενδεικτικά μέτρα όπου συμβαίνει είσοδος συνόλων, είτε αυτό είναι ένα από τα πέντε βασικά, είτε είναι κάποιες μαθηματικές πράξεις μεταξύ ορισμένων εξ αυτών [Πίνακας 4Α].

1β. ενδεικτικά μέτρα όπου συμβαίνει είσοδος επιπροσθέτου συνόλου [Πίνακας 4Β].

Εν συνεχεία, επεμβαίνοντας με προσωπικό και αισθητικό κριτήριο, προχωρώ στην ταξινόμησή τους ως εξής:

2α. εκείνα τα μέτρα, στα οποία παρατηρείται συγχρόνως αλλαγή ρυθμού [Πίνακας 5Α].

2β. εκείνα τα μέτρα, στα οποία παρατηρείται συγχρόνως αλλαγή μέτρου [Πίνακας 5Β].

2γ. εκείνα τα μέτρα, στα οποία παρατηρείται συγχρόνως αλλαγή μέτρου [Πίνακας 5Γ].

2δ. περιλαμβάνονται οι αριθμοί που αντιστοιχούν σε μέτρα, όπου δεν συμβαίνει είσοδος συνόλου, αλλά γίνονται σημαντικές αλλαγές ρυθμού, δυναμικής ή μέτρου [Πίνακας 5Δ].

2ε. εκείνα τα μέτρα στα οποία παρατηρείται συγχρόνως αλλαγή ρυθμού και δυναμικής, ρυθμού και μέτρου ή δυναμικής και μέτρου [Πίνακας 5Ε].

2στ. περιλαμβάνονται ορισμένα μέτρα από το 1 έως το 30, διότι σ' αυτά παρόλο που δεν έχουμε εμφάνιση συνόλων, συμβαίνουν αλληπάλληλες αλλαγές μέτρου [Πίνακας 5Στ].



Πίνακας 4Α		
	ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΕΤΡΟΥ	ΕΜΦΑΝΙΖΟΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ
1	1	R
2	27	S
3	30	A
4	62	$\bar{A}$
5	73	B
6	99	$\bar{B}$
7	110	C
8	119	$\bar{C}$
9	136	AB
10	140	BC
11	144	$AB + \bar{A}\bar{B}$
12	146	$\bar{A}\bar{B} + AB$
13	151;	$\bar{A}BC$
14	156	$(AB + \bar{A}\bar{B})C$
15	159	$\bar{B}\bar{C}$
16	162;	$\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B}$
17	165	$(AB + \bar{A}\bar{B})\bar{C}$
18	172;	$ABC$
19	182	$(\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B})\bar{C}$
20	185	$A\bar{B}\bar{C}$
21	188	$(\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B})\bar{C}$
22	193	$\bar{A}C$
23	198	$\bar{A}C + \bar{A}BC$
24	203	$(\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B})\bar{C}$
25	215	$F = ABC + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = (\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B})C + (\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B})\bar{C}$



Πίνακας 4B		
	ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΕΤΡΟΥ	ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΟ ΕΜΦΑΝΙΖΟΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ
1	142	$BC$ (προστίθεται το $AB$ )
2	146	$\overline{AB} + AB$ (προστίθεται το $BC$ )
3	147	$\overline{AB} + AB$ (προστίθεται το $ABC$ )
4	158	$(AB + \overline{AB})C$ (προστίθεται το $BC$ )
5	159	$(AB + \overline{AB})\overline{C}$ (προστίθεται το $\overline{BC}$ )
6	161	$\overline{BC}$ (προστίθεται το $\overline{AB + \overline{AB}}$ )
7	163	$(AB + \overline{AB})C$ (προστίθεται το $+A\overline{BC}$ )
8	166	$(\overline{AB + \overline{AB}})\overline{C}$ (προστίθεται το $(AB + \overline{AB})C$ )
9	178	$A\overline{BC}$
10	189	$(\overline{AB + \overline{AB}})\overline{C}$ (προστίθεται το $(AB + \overline{AB})C$ )
11	195	$\overline{AC}$ (προστίθεται το $A\overline{BC}$ )
12	204	$(\overline{AB + \overline{AB}})\overline{C}$ (προστίθεται το $(AB + \overline{AB})C$ )
13	206	$(\overline{AB + \overline{AB}})\overline{C}$ (προστίθεται το $A\overline{BC}$ )
14	207	$(\overline{AB + \overline{AB}})\overline{C}$ (προστίθεται το $\overline{A\overline{BC}}$ )

Πίνακας 5A			
ΕΙΣΟΔΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ ή ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΡΥΘΜΟΥ			
ΕΙΣΟΔΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ		ΕΙΣΟΔΟΣ ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ	
1	M. 73	1	M. 178
2	M. 119		
3	M. 144		
4	M. 152		
5	M. 156		
6	M. 162		
7	M. 182		
8	M. 185		

Πίνακας 5B			
ΕΙΣΟΔΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ ή ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ			
ΕΙΣΟΔΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ		ΕΙΣΟΔΟΣ ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ	
1	M. 62	1	M. 163
2	M. 140	2	M. 166
3	M. 193	3	M. 189
		4	M. 195

Πίνακας 5Γ	
ΕΙΣΟΔΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΡΟΥ	
1	M. 173
2	M. 203

Πίνακας 5Δ			
ΜΕΤΡΑ ΜΕ ΑΛΛΑΓΕΣ ΡΥΘΜΟΥ ή ΜΕΤΡΟΥ ΧΩΡΙΣ ΕΙΣΟΔΟ ΣΥΝΟΛΟΥ			
ΑΛΛΑΓΗ ΡΥΘΜΟΥ		ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΡΟΥ	
1	M. 85	1	M. 204

Πίνακας 5Ε			
ΕΙΣΟΔΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ ή ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΜΕ ΑΛΛΑΓΕΣ ΔΥΟ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ			
ΕΙΣΟΔΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ ΚΑΙ ΑΛΛΑΓΗ ΡΥΘΜΟΥ-ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ		ΕΙΣΟΔΟΣ ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΚΑΙ ΑΛΛΑΓΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ-ΜΕΤΡΟΥ	
1	M. 99	1	M. 204 (*)
2	M. 110	ΕΙΣΟΔΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ ΚΑΙ ΑΛΛΑΓΗ ΡΥΘΜΟΥ-ΜΕΤΡΟΥ	
3	M. 136	1	M. 30
4	M. 198		
5	M. 215		

(\*) Το Μ. 204 συναντάται και στην προηγούμενη κατηγορία, επειδή η αλλαγή μέτρου συμβαίνει στην αρχή, ενώ το συμπληρωματικό μέτρο εμφανίζεται στη μέση του Μ. 204.



Πίνακας 5Στ			
ΜΕΤΡΑ ΜΕΤΑΞΥ 1 ΚΑΙ 30 ΜΕ ΑΛΛΑΓΕΣ ΜΕΤΡΟΥ ΧΩΡΙΣ ΕΙΣΟΔΟ ΣΥΝΟΛΟΥ			
1	M. 5	8	M. 19
2	M. 6	9	M. 20
3	M. 12	10	M. 23
4	M. 14	11	M. 24
5	M. 16	12	M. 25
6	M. 17	13	M. 26 (*)
7	M. 18	14	M. 29

(\*) Παρεμβάλλεται το M. 27 όπου υπάρχει αλλαγή μέτρου, αλλά και εισοδος συνόλου (S).

### 5. Γένεση των «ενδεικτικών μέτρων» από το Θεώρημα της χρυσής τομής

Ο Γιάννης Ξενάκης στα δύο έργα Συμβολικής Μουσικής «HERMA» και «EONTA» εμφανίζει τα διάφορα σύνολα φθόγγων σε μουσικά μέτρα ο αύξων αριθμός των οποίων συμπίπτει με κάποιον όρον κάποιας μαθηματικής σειράς αριθμών.

Συγκεκριμένα στο «HERMA» χρησιμοποιεί τη χρυσή σειρά  $1, \phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5, \phi^6, \phi^7$  ( $1, 0,618, 0,382, 0,236, 0,146, \dots$ ), ενώ στα «EONTA» χρησιμοποιεί τη σειρά του Fibonacci

$$\begin{array}{cccccccc}
 F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & \dots \\
 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & \dots
 \end{array}$$

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ και } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ για } n > 2$$

και τη σειρά του Lucas

$$\begin{array}{cccccccc}
 L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & \dots \\
 1 & 3 & 4 & 7 & 11 & 18 & \dots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 L_1 = 1 \\
 L_2 = 3
 \end{array}
 \text{ και } L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ για } n \geq 2$$

Η συμπάθεια του συνθέτου στον αριθμό 7 εμφανίζεται και στα δύο έργα. Στο «HERMA» παίρνει τη χρυσή σειρά μέχρι την 7<sup>η</sup> δύναμη του  $\phi$ , ενώ στα «EONTA» παίζει ένα πιάνο, 3 τρομπέτες, δύο τενόρο τρομπόνια και διευθύνει ένας μαέστρος (άθροισμα 7).

### Διαδικασία Α

1. Λαμβάνεται ως 1 (ολότης) τα μουσικά μέτρα από 1 → 219 και υπολογίζονται τα  $\phi$ ,  $\phi^2$ ,  $\phi^3$ ,  $\phi^4$ ,  $\phi^5$ ,  $\phi^6$ ,  $\phi^7$  αυτής της ολότητας.
2. Λαμβάνεται ως 1 (ολότης) τα μουσικά μέτρα από 135 (=φ 1-219) → 219 και υπολογίζονται τα  $\phi$ ,  $\phi^2$ ,  $\phi^3$ ,  $\phi^4$ ,  $\phi^5$ ,  $\phi^6$ ,  $\phi^7$  αυτής της ολότητας.
3. Λαμβάνεται ως 1 (ολότης) τα μουσικά μέτρα με αρχικό έναν εκ των αριθμών, οι οποίοι προέκυψαν από την αμέσως προηγούμενη διαδικασία και τελικό το μουσικό μέτρο 219. Υπολογίζονται τα  $\phi$ ,  $\phi^2$ ,  $\phi^3$ ,  $\phi^4$ ,  $\phi^5$ ,  $\phi^6$ ,  $\phi^7$  αυτής της ολότητας.  
Οι αριθμοί των «ενδεικτικών μέτρων» που προκύπτουν παρουσιάζονται στον Πίνακα 6Α.



Πίνακας 6Α: ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ «ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΩΝ» ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ Α		
1	M. 30	$\phi^4$ (1-198)
2	M. 84	$\phi^2$ (1-219)
3	M.135	$\phi$ (1-219) Η χρυσή τομή του έργου είναι το M. 135
4	M. 140	$\phi^6$ (135-219)
5	M. 142	$\phi^5$ (135-219)
6	M. 144	$\phi^5$ (135-219)
7	M. 146	$\phi^4$ (135-219)
8	M. 147	$\phi^4$ (135-219)
9	M. 156	$\phi^3$ (135-219)
10	M. 166	$\phi^2$ (135-219)
11	M. 188	$\phi$ (135-219)
12	M. 206	$\phi$ (187-219)
13	M. 207	$\phi$ (187-219)
14	M. 215	$\phi$ (207-219)

Διαδικασία Β. Τώρα τους αριθμούς των «ενδεικτικών μέτρων» από τη διαδικασία Α τους θεωρούμε ως δεδομένους και τους συνδυάζουμε ανά δύο. Κάθε ζεύγος «ενδεικτικών μέτρων» εξ αυτών εκλαμβάνεται ως μία νέα ολόκληρη, της οποίας υπολογίζουμε τα  $\phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \phi^5, \phi^6, \phi^7$ . Έτσι προκύπτουν αριθμοί, οι οποίοι αντιστοιχούν σε ήδη εμφανιζόμενα «ενδεικτικά μέτρα» του έργου. (Πίνακας 6B).

Πίνακας 6B: ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ «ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΩΝ» ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ Β		
1	M. 1	$\phi^7$ (1-33)
2	M. 73	$\phi^2$ (1-189)
3	M. 119	$\phi$ (84-139)
4	M. 152	$\phi$ (142-157)
5	M. 158	$\phi$ (146-165)
6	M. 161	$\phi$ (84-207)
7	M. 162	$\phi$ (155-165)
8	M. 165	$\phi$ (84-214)
9	M. 182	$\phi$ (142-206)
10	M. 185	$\phi$ (147-207)
11	M. 189	$\phi$ (139-219)
12	M. 193	$\phi$ (157-214)
13	M. 195	$\phi$ (155-219)
14	M. 196	$\phi$ (157-219)

Διαδικασία Γ. Καθ' όμοιον τρόπο συνδυάζοντας ανά δύο τους αριθμούς «ενδεικτικών μέτρων», οι οποίοι προέκυψαν εκ των διαδικασιών Α και Β, προκύπτει η τελευταία ομάδα αριθμών «ενδεικτικών μέτρων» του έργου.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να καταστεί σαφές το γεγονός ότι από τη στιγμή που προκύπτει ένας αριθμός «ενδεικτικού μέτρου» με την ανωτέρω διαδικασία των δυνάμεων του χρυσού αριθμού, αρχίζει και αυτός να συμμετέχει στη συνδυαστική διαδικασία ανά δύο των αριθμών των «ενδεικτικών μέτρων». Έτσι εξηγείται το ότι οι αριθμοί των «ενδεικτικών μέτρων» που ακολουθούν στον Πίνακα 6Γ δεν είναι ταξινομημένοι κατ' αύξον μέγεθος, όπως συμβαίνει στις διαδικασίες Α και Β, αλλά κατά τη σειρά εμφανίσεώς τους.

Πίνακας 6Γ: ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ «ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΩΝ» ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ Γ		
1	M. 173	$\phi$ (162-178)
2	M. 178	$\phi$ (135-204)
3	M. 198	$\phi^5$ (196-219)
4	M. 203	$\phi$ (184-214)
5	M. 204	$\phi$ (197-207)
6	M. 26	$\phi^4$ (1-178)
7	M. 110	$\phi$ (26-161)
8	M. 163	$\phi$ (72-219)
9	M. 62	$\phi$ (26-84)
10	M. 159	$\phi$ (61-219)
11	M. 99	$\phi$ (1-159)

Κατ' αυτόν τον τρόπο ολοκληρούνται η εύρεση όλων των αριθμών, που αντιστοιχούν στα «ενδεικτικά μέτρα» του HERMA.

Διαδικασία Δ. Αναφορικά με τους αριθμούς των «ενδεικτικών μέτρων» από το 1<sup>ο</sup> μουσικό μέτρο μέχρι και το 30<sup>ο</sup>, όπου παρουσιάζονται συνεχείς αλλαγές του μέτρου και όχι εμφανίσεις κάποιων νέων συνόλων, ακολουθείται η ίδια διαδικασία των δυνάμεων του χρυσού αριθμού (Πίνακας 6Δ).



Πίνακας 6Δ: ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ «ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΩΝ ΜΕΤΡΩΝ» ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ Δ		
1	M. 5	$\phi^4$ (1-33)
2	M. 6	$\phi^7$ (1-181)
3	M. 12	$\phi^6$ (1-219)
4	M. 14	$\phi^5$ (1-162)
5	M. 16	$\phi^5$ (1-181)
6	M. 17	$\phi^5$ (1-188)
7	M. 18	$\phi^5$ (1-207)
8	M. 19	$\phi^5$ (1-219)
9	M. 20	$\phi^4$ (1-135)
10	M. 23	$\phi^2$ (1-62)
11	M. 24	$\phi^4$ (1-166)
12	M. 25	$\phi^4$ (1-178)
13	M. 26	$\phi^3$ (1-109)
14	M. 27	$\phi^2$ (1-72)

Εν κατακλείδι θα πρέπει να δηλωθεί ότι όλοι οι υπολογισμοί εγένοντο με προσέγγισι μονάδος, διότι, όπως όλοι αντιλαμβανόμεθα, σε ένα μουσικό έργο η έμπνευση του συνθέτη δεν μπορεί να φυλακισθεί σε κελιά με ανελαστικά λόγω μαθηματικών σχέσεων και νόμων, τοιχώματα.