

Η Θεωρία των φιλίων και των ατελώς φιλίων αριθμών εις τα Ομηρικά έπη (Ιλιάς και Οδύσσεια)

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης
Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας,
Τμήματος Μουσικών Σπουδών, Φιλοσοφικής Σχολής, Πανεπιστημίου Αθηνών.

A. Προλεγόμενα

Στην παρούσα εργασία ως δεδομένα (data) ελήφθησαν ολόκληρα τα κείμενα της Ιλιάδος και της Οδύσσειας και επεξεργάστησαν με ένα εξαιρετικά «έξυπνο» και «ευέλικτο» λογισμικό, το οποίο συνέγραψα με τον συνεργάτη μου κ. Πέτρο Κ. Μουστάκα, Μουσικολόγο.

Στόχος της εργασίας είναι η επισήμανση λέξεων και στίχων των δύο Ομηρικών επών, με συγκεκριμένες αριθμητικές ιδιότητες σύμφωνα με μια πτυχή της «Θεωρίας των Αριθμών» κατά τους αρχαίους Έλληνες¹, που ενδεχομένως χρησιμοποίησε ο Όμηρος κατά τη συγγραφή των δύο ποιημάτων του.

Όλο το ερευνητικό υλικό τίθεται στη διάθεση των ειδικών επί του Ομηρικού προβλήματος για περαιτέρω έρευνα.

B. Απαραίτητες γνώσεις

B.1. Το ελληνικό αριθμητάριο

Οι Έλληνες, εφαρμόζοντας τη φιλοσοφία της ολιγοσημίας, χρησιμοποιούν ένα και το αυτό σύνολο 24+3 συμβόλων και για τη γραφή (αλφάβητο) και για την αρίθμηση (αριθμητάριο) και για τη μουσική (παρασημαντική). Πρόκειται για τα 24 γράμματα του Ιωνικού αλφαβήτου που εμπλουτίζονται με άλλα 3 σύμβολα [το δίγαμμο φ (στο Βυζάντιο στίγμα ς , το κόππα φ ή $\dot{\iota}$ και το παρακύσισμα ή σαμπί Ϝ] - που προέρχονται από αρχαιότερο αλφάβητο, το οποίο εγκαταλείφθηκε- χρησιμοποιούνται για τη γραφή των αριθμών. Το καθένα σύμβολο έχει μια συγκεκριμένη αριθμητική αξία. Ο Πίνακας V δείχνει την αντιστοιχία μεταξύ της ελληνικής και της ινδοαραβικής² γραφής των αριθμών.

Πίνακας V: Η αντιστοιχία μεταξύ της ελληνικής και της ινδοαραβικής γραφής των αριθμών.

A	α	1	I	ι	10	P	ρ	100
B	β	2	K	κ	20	Σ	σ	200
Γ	γ	3	Λ	λ	30	T	τ	300
Δ	δ	4	M	μ	40	Y	υ	400
E	ε	5	N	ν	50	Φ	φ	500
F	ς	6	Ξ	ξ	60	X	χ	600
Z	ζ	7	O	ο	70	Ψ	ψ	700
H	η	8	Π	π	80	Ω	ω	800
Θ	θ	9	ϙ	Ͱ	90	Ϝ		900
						,A	, α	1.000

¹ Νικομάχου του Γερασηνού, Αριθμητική Εισαγωγή, (Recensvit Ricardus Hoche) (in Aedibus B. G. Teubneri), Lipsiae 1866.

² Ο Leonardo Fibonacci ή Leonardo ο εκ Πίζης (1180-1250) συνέβαλε στο να επικρατήσει στην Ευρώπη το ινδοαραβικό αριθμητικό σύστημα.

B.2. Λεξάρημοι

Η κάθε μία ελληνική λέξη σχηματίζεται από την παράθεση ορισμένου πλήθους γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου. Με την αντιμετώπιση του κάθε γράμματος της λέξης ως αριθμού, κατά το ελληνικό αριθμητάριο, η λέξη από σύνολο παρατιθεμένων γραμμάτων μετασχηματίζεται σε σύνολο παρατιθεμένων αριθμών, το άθροισμα των οποίων δίνει τον *λεξάρημο* της συγκεκριμένης λέξης.

Όταν δύο ή περισσότερες λέξεις εμφανίζονται να έχουν τον ίδιο λεξάρημο, τότε λέμε ότι έχουμε *λεξαριθμική ισοψηφία* ή *λεξαριθμική ταυτότητα*³ μεταξύ αυτών των λέξεων.

Το άθροισμα των λεξαριθμών των λέξεων, που απαρτίζουν ένα στίχο, ονομάζεται *λεξαριθμικόν άθροισμα του στίχου*.

Πυθμενικός λεξάρημος μιας λέξης ή ενός στίχου είναι ο τελικός μονοψήφιος φυσικός αριθμός που προκύπτει από τις διαδοχικές αθροίσεις των ψηφίων του λεξαριθμού μιας λέξης ή ενός στίχου.

Παράδειγμα: Ο λεξάρημος της λέξης *ΟΔΥΣΣΕΥΣ* είναι ο φυσικός αριθμός 1479, ενώ ο πυθμενικός λεξάρημος της ίδιας λέξης είναι ο φυσικός αριθμός 3, διότι:

$$1+4+7+9=21 \Rightarrow 2+1=3.$$

Αυστηρά μαθηματικά ο Πυθμενικός λεξάρημος μιας λέξης ή ενός στίχου, που έχει λεξάρημο τον φυσικό αριθμό χ , είναι το υπόλοιπον της διαιρέσεως του λεξαριθμού χ δια του αριθμού 9 $[(\chi \bmod 9)]$. Στην περίπτωση που ως υπόλοιπο προκύπτει ο αριθμός μηδέν $(\chi \bmod 9 = 0)$, ως πυθμενικός λεξάρημος της λέξεως ή του στίχου λαμβάνεται ο αριθμός 9.

B.3. Φίλοι ή φίλιοι αριθμοί

Ο Ιάμβλιχος στην πραγματεία του *Περί της Νικομάχου Αριθμητικής Εισαγωγής* παρατηρεί:

... άλλους γάρ
τινας ἄντικρυς φίλους ἀριθμοὺς καλοῦσιν ἐν τῷ
προσοικειοῦν τὰς τε ἀρετὰς καὶ τὰς ἀστείας ἔξεις τοῖς
ἀριθμοῖς, οἷον τὸν σπδ καὶ τὸν σκ γεννητικὰ γὰρ
ἀλλήλων τὰ ἑκατέρου αὐτῶν μέρη κατὰ τὸν τῆς φιλίας
λόγον, ὥς Πυθαγόρας ἀπεφίνατο ἐρομένου γάρ τινος
«τί ἐστι φίλος» εἶπεν «ἕτερος ἐγώ», ὅπερ ἐπὶ
τούτων τῶν ἀριθμῶν δείκνυται.

Ιάμβλιχος, *Περί της Νικομάχου Αριθμητικής Εισαγωγής* Σελίς 34 Στίχος 26 - Σελίς 35 Στίχος 5.

Δυστυχώς, πουθενά στην εν λόγω πραγματεία, αλλά και σε κανένα άλλο σωζόμενο έργο του Ιαμβλίχου δεν αναφέρει τίποτα σχετικά με αυτή τη θαυμάσια και εκλεπτυσμένη Πυθαγόρεια θεωρία. Στους φίλιους αριθμούς αναφέρεται περισσότερο ολοκληρωμένα ο Γάλλος Μαθηματικός Jacques Ozanam⁴ (1640-1717) στο έργο του *Μαθηματικές Ψυχαγωγίες* δίνοντας τον ακόλουθο ορισμό: Ονομάζονται φίλιοι δύο αριθμοί, όταν το άθροισμα των γνησίων διαιρετών⁵ του πρώτου αριθμού ισούται με τον δεύτερο αριθμό και το άθροισμα των γνησίων διαιρετών του δεύτερου αριθμού ισούται με τον πρώτο αριθμό.

³ Αργυρόπουλος Ελευθέριος, (2001), *Η Μαθηματική αποκωδικοποίησης της Ελληνικής γλώσσας*, Αυτοέκδοση, Αθήνα.

⁴ Thomas Taylor, *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων*, (1995), Εκδόσεις Ιάμβλιχος, Αθήνα, σελ. 190.

⁵ Από την Αριθμητική είναι γνωστόν ότι κάθε αριθμός διαιρείται με τη μονάδα και τον εαυτό του, οπωσδήποτε, και, πιθανώς, από ένα πλήθος άλλων αριθμών. Οι αριθμοί, που διαιρούν ένα δοθέντα αριθμό, ονομάζονται διαιρέτες του δοθέντος αριθμού. Όλοι οι διαιρέτες ενός αριθμού, που είναι διαφορετικοί από τον ίδιο, ονομάζονται γνήσιοι διαιρέτες του.

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί είχαν βρει μόνο ένα ζεύγος φίλων αριθμών [σκ' (220) και σπδ' (284)], (Πίνακας VI).

Πίνακας VI: Απόδειξη ότι οι αριθμοί 220 και 284 είναι φίλοι.

Φίλοι αριθμοί	Γνήσιοι διαιρέτες											Άθροισμα γνησίων διαιρετών
220	1	2	4	5	10	11	20	22	44	55	110	284
284	1	2	4	71	142							220

Το 1636 ο Fermat βρήκε το ζεύγος των φίλων αριθμών 17296 και 18416. Ο Descartes (1596-1650) βρήκε τρία ζεύγη φίλων αριθμών και ο Euler (1707-1783) βρήκε άλλα 61 ζεύγη φίλων αριθμών. Στην εποχή μας με τη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών έχουν ανακαλυφθεί άλλα 536 ζεύγη φίλων αριθμών.

Στον Πίνακα VII παρατίθενται 20 ζεύγη φίλων αριθμών, που υπολογίσαμε συγγράφοντας κατάλληλο λογισμικό.

Πίνακας VII: Είκοσι ζεύγη φίλων αριθμών των Χ. Χ. Σπυρίδη και Π. Κ. Μουστάκα.

α/α	Φίλοι Αριθμοί			α/α	Φίλοι Αριθμοί	
1	284	220		11	76084	63020
2	1210	1184		12	87633	69615
3	2924	2620		13	88730	79750
4	5564	5020		14	123152	122368
5	6368	6232		15	124155	100485
6	10856	10744		16	139815	122265
7	14595	12285		17	153176	141664
8	18416	17296		18	168730	142310
9	66992	66928		19	176336	171856
10	71145	67095		20	180848	176272

Ο Thomas Taylor⁶ αναφέρει μια παρεμφερή κατηγορία αριθμών με τους φίλους αριθμούς, τους οποίους ονομάζει ατελώς φίλους αριθμούς.

Ενώ στους φίλους αριθμούς το άθροισμα των γνησίων διαιρετών του ενός αριθμού ισούται με τον άλλον αριθμό, στους ατελώς φίλους αριθμούς το άθροισμα των γνησίων διαιρετών τους είναι απλώς το ίδιο, χωρίς να συμπίπτει με κανέναν από τους δύο αριθμούς.

Παράδειγμα ζεύγους ατελώς φίλων αριθμών αναλυτικώς παρουσιάζεται στον Πίνακα VIII.

Πίνακας VIII: Οι αριθμοί 1001 και 578 αποτελούν ζεύγος ατελώς φίλων αριθμών

Ατελώς Φίλοι αριθμοί	Γνήσιοι διαιρέτες							Άθροισμα γνησίων διαιρετών
1001	1	7	11	13	77	91	143	343
578	1	2	17	34	289			343

Καθώς οι φίλοι αριθμοί σκιαγραφούν την τέλεια φιλία, η οποία βρίσκεται στην αρετή, οι ατελώς φίλοι αριθμοί αποτελούν ευκρινείς εικόνες της φιλίας που υφίσταται ανάμεσα σε φαύλους χαρακτήρες⁷.

⁶ Αυτόθι, σελ. 196.

⁷ Ε. Σ. Σταμάτη, Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, εν Αθήναις, 1980, σελ. 59.

Γ. Το Πρόβλημα

Ο Ρωμαίος συγγραφέας Aulus G. Gellius (2^{ος} μ.Χ. αι.) εσπούδασε στην Αθήνα, στην Ακαδημία του Πλάτωνος, και συνέγραψε μία δίτομη πραγματεία με τον τίτλο «*Noctes Atticae*» (Αττικές νύκτες)⁸. Στο δεύτερο τόμο της πραγματείας του (XIV κεφ. 6 παραγρ. 4) αναφέρει ότι πήρε να μελετήσει ένα βιβλίο από κάποιον φίλο του, στο οποίο ο φίλος του είχε συγκεντρώσει εξαιρετικά ενδιαφέρουσες και σπάνιες πληροφορίες. Μια πληροφορία ανεφέρετο στους λεξαριθμούς. Η προμνημονευθείσα πληροφορία αναφερόταν στην ύπαρξη στίχων στα έπη του Ομήρου με τον αυτόν λεξαριθμό.

Αυτή η μαθηματική παρατήρηση, καθώς και άλλες πολλές, προκάλεσαν το εξαιρετικό ενδιαφέρον πολλών μελετητών των Ομηρικών επών από την αρχαιότητα μέχρι τους αιώνες της ύστερης αρχαιότητας, το οποίο συνεχίζει να υπάρχει και επί των ημερών μας.

Στην αρχαιότητα υπήρχαν επιγραμματοποιοί, οι οποίοι έγραφαν επιγράμματα με συγκεκριμένο λεξαριθμικό άθροισμα –κατά παραγγελία. Ένας από τους ικανότερους επιγραμματοποιούς ήταν ο μαθηματικός και αστρονόμος Λεωνίδας ο Αλεξανδρεύς (1^{ος} μ.Χ. αι.)⁹, ο οποίος συνέθετε επιγράμματα τετράστιχα ή δίστιχα. Στα τετράστιχα επιγράμματα οι δύο πρώτοι στίχοι είχαν το ίδιο λεξαριθμικό άθροισμα με τους δύο επόμενους. Στα δίστιχα επιγράμματα οι δύο στίχοι είχαν το ίδιο λεξαριθμικό άθροισμα.

Ο Ευάγγελος Σ. Σταμάτης¹⁰ ευλόγως διερωτάται, αφού ο Λεωνίδας ο Αλεξανδρεύς είχε την ικανότητα να συνθέτει στίχους ισόψηφους ή δίστιχα ισόψηφα, γιατί να αποκλείσουμε την ικανότητα αυτήν από τον Όμηρο;

Εάν πράγματι χρησιμοποιήθηκαν λεξαριθμοί ή λεξαριθμικά αθροίσματα στίχων ή λεξαριθμικές ισοψηφίες μεταξύ λέξεων ή/και στίχων, μήπως χρησιμοποιήθηκαν φίλια ζεύγη λεξαριθμών ή φίλια ζεύγη λεξαριθμικών αθροισμάτων στίχων;

Μήπως ακόμη χρησιμοποιήθηκαν ατελώς φίλια ζεύγη λεξαριθμών ή ατελώς φίλια ζεύγη λεξαριθμικών αθροισμάτων στίχων;

Δ. Αποτελέσματα

Προκειμένου να μπορούν να μελετηθούν τα ομηρικά έπη με βάση τους λεξαριθμούς των λέξεων και τα λεξαριθμικά αθροίσματα των στίχων από τους σύγχρονους ερευνητές συνέγραψα τρία βιβλία¹¹ με όλες τις σχετικές πληροφορίες.

Στην παρούσα εργασία η έρευνα συνεχίζεται για τον εντοπισμό τυχόν ζευγών φιλίων λεξαριθμών ή ζευγών φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων στίχων ή ζευγών ατελώς φιλίων λεξαριθμών ή ζευγών ατελώς φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων στίχων.

Από τη μελέτη των λεξαριθμών των λέξεων, των τύπων λέξεων και των λεξαριθμικών αθροισμάτων των στίχων προκύπτει ότι:

Οι λεξαριθμοί των ομηρικών λέξεων ανήκουν στο κλειστό διάστημα [1, 3331]. Δηλαδή ο μικρότερος λεξαριθμός είναι ο φυσικός αριθμός 1 για τη λέξη «Α», που εμφανίζεται στην μεν

⁸ Αυτόθι σελ. 198.

⁹ Τον αναφέρουν οι: Στοβαίος, Ιωάννης Τζέτζης και Βιτρούβιος.

¹⁰ Ευαγγέλου Σ. Σταμάτη, (1980), Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών (Αριθμητικά-Αι αρχαί της Ελληνικής Γεωμετρίας), Δευτέρα Έκδοσις, Αθήνα, σελίδες 59-63.

¹¹ Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, Η ΣΤΙΧΟΓΡΑΦΙΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΟΜΗΡΟΥ ΙΛΙΑΔΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΥΛΩΝΑ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ, Ομηρικοί στίχοι: κατ' επικλήν ακολουθίαν, επαναλαμβανόμενοι, κοινοί, Συνάριθμοι (λεξαριθμικά αθροίσματα) ομηρικών στίχων, Ομηρικοί στίχοι κατά συνάριθμον, Αθήνα (εν χροίς). Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, Η ΣΤΙΧΟΓΡΑΦΙΑ ΕΙΣ ΤΗΝ ΟΜΗΡΟΥ ΟΔΥΣΣΕΙΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΥΛΩΝΑ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ, Ομηρικοί στίχοι: κατ' επικλήν ακολουθίαν, επαναλαμβανόμενοι, κοινοί, Συνάριθμοι (λεξαριθμικά αθροίσματα) ομηρικών στίχων, Ομηρικοί στίχοι κατά συνάριθμον, Αθήνα (εν χροίς). Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, Η ΟΜΗΡΙΚΗ ΛΕΞΙΚΟΓΡΑΦΙΑ (ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ) ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΥΛΩΝΑ ΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ, Ομηρικοί λέξεις κατ' αλφαβητική σειρά (με λεξαριθμόν και συχνότητα εμφανίσεως ανά έπος, ραψωδία, στίχο), κατά συχνότητα εμφανίσεως, κατά λεξαριθμόν, κατ' αντιστροφήν, Αθήνα (εν χροίς).

Ιλιάδα 28 φορές, στη δε Οδύσσεια 30 φορές και ο μεγαλύτερος λεξάριθμος είναι ο φυσικός αριθμός 3331 για τη λέξη «ΧΑΛΚΟΧΙΤΩΝΩΝ», που εμφανίζεται στην μεν Ιλιάδα 29 φορές, στη δε Οδύσσεια 2 φορές.

Μεταξύ των λεξάριθμων 1 και 3331 εντοπίζονται μόνο τα δύο ζεύγη φιλίων λεξάριθμων (284, 220) και (1210, 1184) τόσο στην Ιλιάδα, όσο και στην Οδύσσεια (Πίνακες ΙΧ και Χ).

Με λεξάριθμο 284 ισοψηφούν λεξαριθμικά στην Ιλιάδα 20 λέξεις και στην Οδύσσεια 17 λέξεις.

Με λεξάριθμο 220 ισοψηφούν λεξαριθμικά στην Ιλιάδα 22 λέξεις και στην Οδύσσεια 21 λέξεις.

Με λεξάριθμο 1210 ισοψηφούν λεξαριθμικά στην Ιλιάδα 14 λέξεις και στην Οδύσσεια 6 λέξεις.

Με λεξάριθμο 1184 ισοψηφούν λεξαριθμικά στην Ιλιάδα 7 λέξεις και στην Οδύσσεια 4 λέξεις.

Πίνακας ΙΧ: Φίλιες λέξεις στην Ιλιάδα		
α/α	Λέξη με λεξάριθμο	Λέξη με λεξάριθμο
1	(284) ΑΝΑΘΗΣΕΙ, ΕΠΕΠΙΘΟΜΕΝ, ΑΙΓΟΣ, ΠΑΡΕΙΠΗ, ΑΓΑΘΟΣ, ΘΕΟΣ, ΠΟΘΕΟΝ, ΑΓΕΙΡΟΜΕΝ, ΠΑΡΑΒΛΗΔΗΝ, ΔΕΔΙΑΣΙΝ, ΝΑΙΟΜΕΝΗΝ, ΑΝΕΕΡΓΟΝ, ΕΖΕΣΘΗΝ, ΔΙΟΣ, ΕΙΣΙΔΕΝ, ΕΝΗΚΑΣ, ΠΡΟΕΗΚΑ, ΠΕΡΙΟΙΔΕ, ΑΙΔΕΣΘΕΝ, ΔΕΙΔΙΣΑΝ	(220) ΠΙΟΝΙ, ΕΚΜΟΛΕΝ, ΑΕΙΡΑΜΕΝΗ, ΑΒΑΡΒΑΡΗ, ΟΙΝΕΙΔΑΟ, ΕΜΕΝΟΝ, ΕΞΕΛΟΝ, ΕΚΛΕΛΑΘΟΝ, ΕΙΣΕ, ΡΕΕΘΡΑ, ΘΗΒΑΣ, ΕΕΙΠΟΝ, ΠΟΙΚΙΑ΄, ΟΙΚΟΝ, ΠΑΙΗΟΝΑ, ΒΙΗΣ, ΠΑΘΟΙΜΙ, ΔΙΑΔΡΑΚΟΙ, ΘΕΡΜΗΝΗ, ΜΟΙΡ΄, ΕΡΡΕΙ, ΠΕΙΡΗΘΗ
2	(1210) ΕΝΕΤΩΝ, ΕΤΕΡΩ, ΕΚΚΑΤΙΔΩΝ, ΥΠΕΞΕΦΕΡΕΝ, ΠΡΟΕΡΥΣΣΕΝ, ΤΕΤΕΛΕΣΜΕΝΟΣ, ΦΥΛΟΙΣ, ΙΠΠΟΛΟΧΟΣ, ΦΡΙΧ΄, ΕΡΧΟΜΕΝΟΙΣΙΝ, ΤΡΩΙ, ΦΙΛΟΥΣ, ΕΝΩΡΣΕΝ, ΖΥΓΩ	(1184) ΜΟΝΩΘΕΙΣ, ΤΟΙΩΔ΄, ΠΟΔΩΚΕΕΣ, ΔΡΥΤΟΜΟΣ, ΥΠΕΡΘΥΜΟΙΟ, ΚΗΩΝΤΑ, ΕΠΙΘΥΟΥΣΙ

Πίνακας Χ: Φίλιες λέξεις στην Οδύσσεια		
α/α	Λέξη με λεξάριθμο	Λέξη με λεξάριθμο
1	(284) ΠΕΡΙΟΙΔΕ, ΕΖΕΣΘΗΝ, ΑΓΑΘΟΣ, ΑΛΛΗΛΗΣΘΕ, ΠΡΟΗΚΕΑ, ΘΕΟΣ, ΔΙΕΔΡΑΜΟΝ, ΔΙΟΣ, ΜΗΛΕΑΣ, ΕΙΣΙΔΕΝ, ΑΝΙΕΙΗΣ, ΝΟΜΟΝΔ΄, ΝΑΙΟΜΕΝΗΝ, ΑΝΙΗΣΕΙ, ΑΓΕΙΡΟΜΕΝ, ΕΓΡΟΜΕΝΑΙ, ΑΙΓΟΣ	(220) ΕΕΙΠΟΝ, ΟΙΚΟΝ, ΔΑΙΔΑΣ, ΜΟΙΡ΄, ΕΛΚΟΜΕΝ, ΡΕΕΘΡΑ, ΠΟΙΚΙΑ΄, ΕΞΕΛΘΕΜΕΝΑΙ, ΒΙΗΣ, ΕΙΣΕ, ΑΓΑΑΣΘΕ, ΕΞΕΛΟΝ, ΕΝΕΜΟΝ, ΠΙΟΙΜΙ, ΑΡΓΑΛΕΟΙ, ΗΓΑΓΕΣ, ΑΕΙΡΑΜΕΝΗ, ΝΕΙΚΕΙΟΝ, ΕΠΟΙΕΝ, ΠΙΟΝΙ, ΕΠΗΓΑΓΟΝ
2	(1210) ΝΑΥΣΙΘΟΟΥ, ΕΤΕΡΩ, ΕΜΦΟΡΕΟΝΤΟ, ΔΙΟΙΣΤΕΥΣΑΙ, ΤΙΝΩΝ, ΦΙΛΟΥΣ	(1184) ΚΗΩΝΤΑ, ΓΛΑΦΥΡΟΙΟ, ΥΠΕΡΘΥΜΟΙΟ, ΤΟΙΩΔ΄

Μεταξύ των φυσικών αριθμών 1 και 3331 με κατάλληλο λογισμικό εντοπίζονται 2118 ζεύγη ατελώς φιλίων αριθμών. Ως ενδεικτικό παράδειγμα αναφέρεται ο φυσικός αριθμός 3131, με τον οποίον σχηματίζονται τα έξι ζεύγη ατελώς φιλίων αριθμών του Πίνακα ΧΙ.

Πίνακας XI: Τα έξι ζεύγη ατελώς φιλίων αριθμών που σχηματίζονται με τον φυσικό αριθμό 3131.

α/α	Πρώτος αριθμός	Δεύτερος αριθμός	Άθροισμα γνησίων διαιρετών
1	3131	425	133
2	3131	635	133
3	3131	1331	133
4	3131	2147	133
5	3131	2507	133
6	3131	2987	133

Εξ αυτών των έξι ζευγών φυσικών αριθμών μόνον τα ζεύγη 1, 2, 3 και 5 συμπίπτουν με υπάρχοντες λεξαριθμούς (είτε από την Ιλιάδα, είτε από την Οδύσσεια, είτε και από τα δύο έπη) και, έτσι, σχηματίζονται τα εξής τέσσερα ζεύγη ατελώς φιλίων λεξαριθμών (3131,425), (3131,635), (3131, 1331), (3131, 2507) (Πίνακας XII).

Πίνακας XII: Τα τέσσερα ζεύγη ατελώς φιλίων λεξαριθμών που σχηματίζονται με τον λεξαριθμό 3131.

α/α	Λέξη με λεξαριθμο	Λέξη με λεξαριθμο
1	(3131) ΧΑΛΚΟΧΙ-ΤΩΝΩΝ	(425) ΑΓΟΝΤΑ, ΑΓΥΙΑΙ, ΑΝΔΡΟΣ, ΓΥΓΑΙΗ, ΔΕΥΕΑΙ, ΔΙΑΚΡΙΝΕΕ-ΣΘΑΙ, ΕΔΕΙΣΑΣ, ΕΚΠΕΡΣΕΙ, ΕΝΙΣΠΟΙ, ΕΝΤΟ, ΕΞΕΠΡΑΘΟ-ΜΕΝ, ΕΟΝΤ', ΕΠΕΣΠΕΝ, ΕΠΙΒΗΣΟΝ, ΕΡΝΟΣ, ΕΤΕΙΡΕ, Ε-ΤΕΛΛΕΝ, ΘΝΗΤΗΝ, ΙΔΥΙΑ, ΙΜΕΡΟΣ, ΚΑΤΑΛΕΞΗ, ΚΕΙΝΟΙ-ΣΙΝ, ΛΕΚΤΟ, ΛΙΠΕΤ', ΠΑΡΗΛΑΣΕ, ΠΕΙΚΕΤΕ, ΤΕΟΝ, ΤΙΝΕΙΝ, ΥΙΕΙ
2	(3131) ΧΑΛΚΟΧΙ-ΤΩΝΩΝ	(635) ΑΠΟΠΤΑΜΕΝΗ, ΕΙΡΟΠΟΚΟΙΣ, ΕΚΤΕΛΕΣΕΙΕΝ, ΕΛΥΣ', ΕΛΧ', ΕΠΙΚΕΙΣΕΤ', ΕΡΡΟΝΤΙ, ΕΥΡΟΙΜΙ, ΗΙΧΘΗ, ΙΔΟΝΤΑΣ, ΙΟ-ΝΤΕΣ, ΙΡΕΥΟΝ, ΙΦΙΜΕΔΕΙΑΝ, ΚΑΤΘΕΤ', ΚΛΕΙΤΟΣ, ΛΥΣΕ, ΜΙΝΥΕΙΟΝ, ΟΚΡΙΟΕΝΤΙ, ΟΛΥΜΠΙΕ, ΟΜΟΣΣΕΝ, ΟΝΕΙΡΟ-ΠΟΛΟΙΟ, ΟΡΕΣΣΙΝ, ΠΛΑΓΚΤΑΣ, ΠΥΕΛΟΝ, ΣΕΙΟΝΤ', ΤΙΚΤΕ, ΥΠΕΔΡΑΜΕ, ΥΠΟΔΕΞΕΑΙ
3	(3131) ΧΑΛΚΟΧΙ-ΤΩΝΩΝ	(1331) ΑΜΥΜΩΝ, ΑΝΤΙΛΟΧΟΣ, ΑΠΟΛΛΩΝΟΣ, ΑΠΟΣΤΕΙΧΕΙΝ, ΑΥΤΟΦΙΝ, ΒΟΥΛΥΤΟΝΔΕ, ΕΚΧΕΥΑΤ' ΕΠΙΠΩΛΕΙΤΑΙ, Ε-ΦΗΜΟΣΥΝΗΝ, ΕΧΕΦΡΟΝΑ, ΚΑΛΛΙΧΟΡΟΥ, ΚΑΜΟΝΤΩΝ, ΚΑΤΑΧΘΟΝΙΟΣ, ΚΡΟΤΑΦΟΙΣΙΝ, ΜΑΧΕΟΥΜΕΝΟΝ, ΝΕΜΕ-ΣΙΖΕΣΘΩ, ΝΟΣΦΙΣΑΤ', ΟΡΘΟΚΡΑΙΡΑΩΝ, ΠΑΣΣΩΝ, ΠΑ-ΤΡΩΝ, ΠΙΦΑΥΣΚΟΝ, ΠΡΟΣΩΠΑ, ΠΡΟΥΦΑΙΝΟΝ, ΣΤΟΜΑ-ΧΟΝ, ΥΣΤΑΤΙΟΝ, ΦΟΡΥΞΑΣ, ΦΥΟΝΤΑΙ, ΦΩΚΑΙ, ΩΚΙΣΤΑ
4	(3131) ΧΑΛΚΟΧΙ-ΤΩΝΩΝ	(2507) ΣΥΒΩΤΕΩ

Στην Ιλιάδα οι στίχοι Γ127, Γ131, Γ251 και Θ71 έχουν το μεγαλύτερο λεξαριθμικό άθροισμα, ίσο προς 8018, ενώ στην Οδύσσεια ο στίχος ν228 έχει το μεγαλύτερο λεξαριθμικό άθροισμα, ίσο προς 7876.

Στην Ιλιάδα ο στίχος Η416 έχει το μικρότερο λεξαριθμικό άθροισμα, ίσο προς 849, ενώ στην Οδύσσεια ο στίχος γ365 έχει το μικρότερο λεξαριθμικό άθροισμα, ίσο προς 826.

Στην Ιλιάδα μεταξύ των λεξαριθμικών αθροισμάτων 849 και 8018 εντοπίζεται μόνον ένα ζεύγος φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων, το (2924, 2620).

Με λεξαριθμικό άθροισμα 2924 ισοψηφούν επτά στίχοι, ενώ με λεξαριθμικό άθροισμα 2620 ισοψηφούν τρεις στίχοι.

Στην Οδύσσεια μεταξύ των λεξαριθμικών αθροισμάτων 826 και 7876 εντοπίζονται δύο ζεύγη φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων, το (2924, 2620) και το (5564, 5020).

Με λεξαριθμικό άθροισμα 2924 ισοψηφούν τέσσερις στίχοι και με λεξαριθμικό άθροισμα 2620 ισοψηφούν πάλι τέσσερις στίχοι.

Με λεξαριθμικό άθροισμα 5564 εμφανίζεται ένας στίχος και με λεξαριθμικό άθροισμα 5020 ισοψηφούν δύο στίχοι (Πίνακας XIII).

Πίνακας XIII: Φίλιοι στίχοι στα Ομηρικά έπη (Ιλιάδα και Οδύσσεια)

Στίχος		Λεξαριθμικό άθροισμα
Π651	Η ΕΤΙ ΚΑΙ ΠΛΕΟΝΕΣΣΙΝ ΟΦΕΛΛΕΙΕΝ ΠΟΝΟΝ ΑΙΠΥΝ	2620
Κ140	ΕΚ Δ' ΗΛΘΕ ΚΛΙΣΙΗΣ ΚΑΙ ΣΦΕΑΣ ΠΡΟΣ ΜΥΘΟΝ ΕΕΙΠΕ	
Α270	ΤΗΛΟΘΕΝ ΕΞ ΑΠΙΗΣ ΓΑΙΗΣ ΚΑΛΕΣΑΝΤΟ ΓΑΡ ΑΥΤΟΙ	
Χ451	ΑΙΔΟΙΗΣ ΕΚΥΡΗΣ ΟΠΟΣ ΕΚΛΥΟΝ ΕΝ Δ' ΕΜΟΙ ΑΥΤΗ	2924
Χ104	ΝΥΝ Δ' ΕΠΕΙ ΩΛΕΣΑ ΛΑΟΝ ΑΤΑΣΘΑΛΙΗΣΙΝ ΕΜΗΣΙΝ	
Υ356	ΑΡΓΑΛΕΟΝ ΔΕ ΜΟΙ ΕΣΤΙ ΚΑΙ ΙΦΘΙΜΩ ΠΕΡ ΕΟΝΤΙ	
Ν562	ΕΓΓΥΘΕΝ ΟΡΜΗΘΕΙΣ ΑΜΕΝΗΝΩΣΕΝ ΔΕ ΟΙ ΑΙΧΜΗΝ	
Μ410	ΑΡΓΑΛΕΟΝ ΔΕ ΜΟΙ ΕΣΤΙ ΚΑΙ ΙΦΘΙΜΩ ΠΕΡ ΕΟΝΤΙ	
Λ149	ΤΗ Ρ' ΕΝΟΡΟΥΣ' ΑΜΑ Δ' ΑΛΛΟΙ ΕΥΚΝΗΜΙΔΕΣ ΑΧΑΙΟΙ	
Γ172	ΑΙΔΟΙΟΣ ΤΕ ΜΟΙ ΕΣΣΙ ΦΙΛΕ ΕΚΥΡΕ ΔΕΙΝΟΣ ΤΕ	
ψ170	ΕΛΘΟΙ ΕΕΙΚΟΣΤΩ ΕΤΕΙ ΕΣ ΠΑΤΡΙΔΑ ΓΑΙΑΝ	2620
ψ102	ΕΛΘΟΙ ΕΕΙΚΟΣΤΩ ΕΤΕΙ ΕΣ ΠΑΤΡΙΔΑ ΓΑΙΑΝ	
ψ38	ΜΟΥΝΟΣ ΕΩΝ ΟΙ Δ' ΑΙΕΝ ΑΟΛΛΕΕΣ ΕΝΔΟΝ ΕΜΙΜΝΟΝ	
ν407	ΔΗΕΙΣ ΤΟΝ ΓΕ ΣΥΕΣΣΙ ΠΑΡΗΜΕΝΟΝ ΑΙ ΔΕ ΝΕΜΟΝΤΑΙ	2924
τ117	ΜΗ ΜΟΙ ΜΑΛΛΟΝ ΘΥΜΟΝ ΕΝΙΠΛΗΣΗΣ ΟΔΥΝΑΩΝ	
π74	Η ΑΥΤΟΥ ΠΑΡ' ΕΜΟΙ ΤΕ ΜΕΝΗ ΚΑΙ ΔΩΜΑ ΚΟΜΙΖΗ	
δ432	ΚΑΙ ΤΟΤΕ ΔΗ ΠΑΡΑ ΘΙΝΑ ΘΑΛΑΣΣΗΣ ΕΥΡΥΠΟΡΟΙΟ	
β122	ΗΔΗ ΑΤΑΡ ΜΕΝ ΤΟΥΤΟ Γ' ΕΝΑΙΣΙΜΟΝ ΟΥΚ ΕΝΟΗΣΕ	5020
ω225	ΩΧΟΝΤ' ΑΥΤΑΡ Ο ΤΟΙΣΙ ΓΕΡΩΝ ΟΔΟΝ ΗΓΕΜΟΝΕΥΕ	
ε466	ΕΙ ΜΕΝ Κ' ΕΝ ΠΟΤΑΜΩ ΔΥΣΚΗΔΕΑ ΝΥΚΤΑ ΦΥΛΑΣΣΩ	
ι289	ΣΥΝ ΔΕ ΔΥΩ ΜΑΡΨΑΣ ΩΣ ΤΕ ΣΚΥΛΑΚΑΣ ΠΟΤΙ ΓΑΙΗ	5564

Μεταξύ των φυσικών αριθμών 849 και 8018 εντοπίζονται 5636 ζεύγη ατελώς φιλίων αριθμών. Στην πλέον ευνοϊκή περίπτωση κατά την οποίαν όλα αυτά τα ζεύγη συμπίπτουν με λεξαριθμικά αθροίσματα στίχων της Ιλιάδος, τότε στην Ιλιάδα μεταξύ των λεξαριθμικών αθροισμάτων 849 και 8018 θα υπάρχουν 5636 ζεύγη ατελώς φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων.

Μεταξύ των φυσικών αριθμών 826 και 7876 εντοπίζονται 5508 ζεύγη ατελώς φιλίων αριθμών. Στην πλέον ευνοϊκή περίπτωση κατά την οποίαν όλα αυτά τα ζεύγη συμπίπτουν με λεξαριθμικά αθροίσματα στίχων της Οδύσσειας, τότε στην Οδύσσεια μεταξύ των λεξαριθμικών αθροισμάτων 826 και 7876 θα υπάρχουν 5508 ζεύγη ατελώς φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων.

Ως ενδεικτικό παράδειγμα αναφέρεται ο φυσικός αριθμός 4961, με τον οποίον σχηματίζονται τα τέσσερα ζεύγη ατελώς φιλίων αριθμών του Πίνακα XIV.

Πίνακας XIV: Τα τέσσερα ζεύγη ατελώς φιλίων αριθμών που σχηματίζονται με τον φυσικό αριθμό 4961.

α/α	Πρώτος αριθμός	Δεύτερος αριθμός	Άθροισμα γνησίων διαιρετών
1	4961	1587	625
2	4961	3095	625
3	4961	3479	625
4	4961	4319	625

Εξ αυτών των τεσσάρων ζευγών φυσικών αριθμών μόνον τα ζεύγη 2, 3 και 4 συμπίπτουν με υπάρχοντα λεξαριθμικά αθροίσματα και, έτσι, σχηματίζονται τα εξής τρία ζεύγη ατελώς φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων (4961,3095), (4961, 3479), (4961, 4319) (Πίνακας XV).

Πίνακας XV: Τα τρία ζεύγη ατελώς φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων που σχηματίζονται με τον λεξάριθμο 4961.

α/α	Στίχος με λεξαριθμικό άθροισμα	Στίχος με λεξαριθμικό άθροισμα
1	(4961) K177, Y373, μ38	(3095) N664, O251, O604, P370, Ω802, δ189, η24, ο270
2	(4961) K177, Y373, μ38	(3479) E899, K41, Π801, Ψ494, α283, θ114, π233, φ417
3	(4961) K177, Y373, μ38	(4319) Θ503, Λ466, α130, γ63, ι99, π418, σ47, φ372

Ε. Επιλεγόμενα

Στην παρούσα εργασία είχα σκοπό να διαρθρώσω λόγο χρήσης ειδικών Μαθηματικών θεωριών, στη συγκεκριμένη περίπτωση της θεωρίας των φιλίων αριθμών, από τον Όμηρο στη συγγραφή του έπους της Ιλιάδος και του έπους της Οδύσσειας.

Για την επίτευξη του σκοπού αυτού έπρεπε να εργασθώ σε δύο φάσεις.

Κατά την πρώτη φάση έπρεπε

α. Να υπολογίσω τους λεξαρίθμους όλων των λέξεων των δύο επών και να τους αξιολογήσω με βάση τη θεωρία των φιλίων αριθμών και των ατελώς φιλίων αριθμών, ώστε να εντοπίσω τις φίλιες λέξεις και τις ατελώς φίλιες λέξεις στα δύο Ομηρικά έπη.

β. Να υπολογίσω τα λεξαριθμικά αθροίσματα όλων των στίχων των δύο επών και να τα αξιολογήσω με βάση τη θεωρία των φιλίων αριθμών και των ατελώς φιλίων αριθμών, ώστε να εντοπίσω τους φίλιους στίχους και τους ατελώς φίλιους στίχους στα δύο Ομηρικά έπη.

Κατά τη δεύτερη φάση έπρεπε να μελετηθούν «νοηματικά» ή «λειτουργικά» ή άλλως πώς μεταξύ τους οι φίλιες λέξεις, οι ατελώς φίλιες λέξεις, οι φίλιοι στίχοι και οι ατελώς φίλιοι στίχοι, ώστε να καταλήξω, πιθανώς, σε συσχετίσεις οι οποίες θα στήριζαν ή θα απέρριπταν την υπόθεση χρήσης της θεωρίας των φιλίων αριθμών από τον Όμηρο στη συγγραφή των δύο επών.

Ολοκλήρωσα πλήρως την πρώτη φάση της εργασίας καταλήγοντας στο ότι:

- Μεταξύ των λεξαρίθμων 1 και 3331 των λέξεων των δύο επών εντοπίζονται μόνο δύο ζεύγη φιλίων λεξαρίθμων [(284, 220) και (1210, 1184)] τόσο στην Ιλιάδα, όσο και στην Οδύσσεια.
- Μεταξύ των λεξαρίθμων εντοπίζονται λιγότερα από 2118 ζεύγη ατελώς φιλίων λέξεων.
- Στην Ιλιάδα μεταξύ των λεξαριθμικών αθροισμάτων 849 και 8018 των στίχων της εντοπίζεται μόνον ένα ζεύγος φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων, το (2924, 2620). Με

λεξαριθμικό άθροισμα 2924 ισοψηφούν επτά στίχοι, ενώ με λεξαριθμικό άθροισμα 2620 ισοψηφούν τρεις στίχοι.

- Στην Οδύσσεια μεταξύ των λεξαριθμικών αθροισμάτων 826 και 7876 των στίχων της εντοπίζονται δύο ζεύγη φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων, το (2924, 2620) και το (5564, 5020). Με λεξαριθμικό άθροισμα 2924 ισοψηφούν τέσσερις στίχοι και με λεξαριθμικό άθροισμα 2620 ισοψηφούν πάλι τέσσερις στίχοι. Με λεξαριθμικό άθροισμα 5564 εμφανίζεται ένας στίχος και με λεξαριθμικό άθροισμα 5020 ισοψηφούν δύο στίχοι.
- Μεταξύ των λεξαριθμικών αθροισμάτων των στίχων των δύο επών εντοπίζονται λιγότερα από 5636 ζεύγη ατελώς φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων στην Ιλιάδα και λιγότερα από 5508 ζεύγη ατελώς φιλίων λεξαριθμικών αθροισμάτων στην Οδύσσεια .

Για την ολοκλήρωση της δεύτερης φάσης –και την επίτευξη του σκοπού της έρευνας- χρειάζεται οπωσδήποτε η γνώση των ειδικών επί του Ομηρικού προβλήματος. Θέτω όλο το ερευνητικό υλικό στη διάθεσή των «Ομηριστών» προκειμένου με σημαντική βεβαιότητα να γίνει αποδεκτή ή να απορριφθεί η αρχική υπόθεση ότι δηλαδή ο Όμηρος κατά τη συγγραφή των δύο επών χρησιμοποίησε μια πτυχή της «Θεωρίας των Αριθμών» κατά τους αρχαίους Έλληνες, τη θεωρία των φιλίων αριθμών, είτε για τις λέξεις, είτε για τους στίχους, είτε και για τα δύο.