ΜΙΑ «ΤΕΤΡΑΚΤΥΣ» ΠΑΡΑΛΕΙΠΟΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΝ *ΚΑΤΑΤΟΜΗΝ ΚΑΝΟΝΟΣ*

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης,

Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής,
Διευθυντής Τομέως Τεχνολογίας Ήχου, Μουσικοπαιδαγωγικής & Βυζαντινής Μουσικολογίας,
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας
Τμήματος Μουσικών Σπουδών
Φιλοσοφικής Σχολής
Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

hspyridis@music.uoa.gr

1.1. Εισαγωγικά

Μοχθώντας επί μία τριακονταετία στον επιστημονικό στίβο, επεξέτεινα την ερευνητική, διδακτική και συγγραφική μου δραστηριότητα όχι στους μαθηματικούς της ελληνικής αρχαιότητος μόνον, μάλιστα εις αυτούς, οι οποίοι ενδιέτριψαν στη μουσική ακουστική θεωρία, αλλά και στην αρχαία ελληνική γραμματεία εν γένει, αφού ούτως ή άλλως, υπό το πρίσμα αυτής εξετάζονται οι μουσικές θεωρίες των επιφανών Ελλήνων φιλοσόφων, μαθηματικών και φυσικών -θεωρίες σύμμεικτες εν πολλοίς με την προσωδία, τη μετρική και τη ρυθμική.

Χρησιμοποιώντας τη Φυσική και τα Μαθηματικά σε αγαστή συνάρτηση με τη Μουσική, οδηγήθηκα στη σπουδή του μοναδικού «μουσικομαθηματικού» έργου του Ευκλείδου, την *Κατατομή Κανόνος* (του μονοχόρδου)[1] (*section canonis*).

Στην παρούσα εργασία προσπαθώ να καταστήσω σαφή μία τετράδα (τετρακτύ) είτε αδυνάτων, είτε αναποδείκτων δηλώσεων ή τμημάτων Προτάσεων της Ευκλειδείου πραγματείας, προκειμένου να συμβάλλω στην καλυτέρα κατανόηση αυτής. Η αδύνατη δήλωση εμπεριέχεται στην εισαγωγή της πραγματείας και τα τρία αναπόδεικτα τμήματα

---

[1] Πτολεμαίος, Νικόμαχος, Ιάμβλιχος, Πολυδεύκης.

Προτάσεων αναφέρονται στην μαθηματική Πρόταση ια και στις μουσικές Προτάσεις περί του εναρμονίου γένους ιζ και ιη.

1.2. Ευκλείδειος κατατομή κανόνος

Ο Ευκλείδης (330 με 270 π.Χ.) υπήρξε μέγιστος Έλληνας διδάσκαλος των Μαθηματικών κατά τους Αλεξανδρινούς χρόνους. Η φήμη του, ως γεωμέτρου, διεδόθη παντού. Από τα μέσα ήδη της Ελληνιστικής εποχής και καθ΄ όλον τον μεσαίωνα το όνομά του στη Δύση ήτο ταυτόσημο με τη Γεωμετρία. Αλλά και μέχρι των ημερών μας απανταχού της γης δεν επεσκιάσθη το όνομα του μαθηματικού και γεωμέτρου Ευκλείδου.

Η «*κατατομή κανόνος*» θα πρέπει να έχει γραφεί γύρω στο 300 π.Χ. Πρόκειται για μια πυθαγόρειο πραγματεία επάνω στη σχέση, η οποία συνδέει μαθηματικές και ακουστικές αλήθειες, αποτελώντας, έτσι, τη βάση για την ακουστική επιστήμη του Δυτικού κόσμου. Είναι γραμμένη με το ίδιο ύφος που είναι γραμμένα τα «Στοιχεία» του Ευκλείδου και γι’ αυτό αποδίδεται σ’ αυτόν. Κάποιοι το αμφισβητούν και αντιπροτείνουν ως συγγραφέα τον Κλεωνίδη[2] ή τον Ζώσιμο τον Πανοπολίτη[3].

Η πραγματεία διασώζεται από τρεις ξεχωριστές πηγές:

1. μια μεγάλης εκτάσεως έκδοση, η οποία αποδίδεται στον Ευκλείδη,
2. μια συντομοτέρα Ελληνική έκδοση, η οποία εμπεριέχεται στο υπόμνημα του Πορφυρίου[4] «*Εις τα αρμονικά Πτολεμαίου*»[5] και

[2] Κλεωνίδης ή Κλεονείδης. Μουσικός συγγραφέας που έζησε στις αρχές του Β’ μ.Χ. αιώνα. Σ’ αυτόν αποδίδεται το έργο «*Εισαγωγή αρμονική*» που περιεσώθη, ενώ άλλοι το αποδίδουν είτε στον Ευκλείδη, είτε στον Πάππο, είτε στον Ζώσιμο. Το έργο είναι μεγάλης σπουδαιότητος, διότι μας γνωρίζει την αρμονική θεωρία των Πυθαγορείων. Η πρώτη του έκδοση έγινε το 1497 μ.Χ. από τον G. Valla “*Cleonidae harmonicum introductorium*”, ενώ το 1895 έγινε από τον Carl Jan η άριστη έκδοσή του “*Musici scriptores Graeci*”. Το 1884 ο Ruelle εξέδωσε γαλλική μετάφρασή του με πολύ σπουδαία σχόλια.

[3] Ζώσιμος ο Πανοπολίτης. Ο αρχαιότερος των αλχημιστών συγγραφέων. Γεννήθηκε στις αρχές του 4ου μ.Χ. αιώνος στην Πανόπολη της Άνω Αιγύπτου. Τον αναφέρουν ο Γεώργιος Σύγκελλος και Φώτιος. Όλοι οι αλχημισταί ομιλούν γι’ αυτόν με βαθύτατο σεβασμό. Είναι ο πρώτος που διαχωρίζει τις επιστήμες Φυσική και Χημεία και ο πρώτος που αναφέρει τον όρο «Χημεία». Κατά τον Σουίδα ο Ζώσιμος συνέγραψε 28 βιβλία για την αλχημεία με τον γενικό τίτλο «*Χειρόκμητα*» και βιογραφία του Πλάτωνος. Των περισσοτέρων έργων του σώζονται μόνον περιλήψεις και τίτλοι. Μας σώζεται η περιγραφή κατασκευής διυλιστηρίου. Σ’ αυτόν αποδίδεται από μερικούς το έργο «*Εισαγωγή αρμονική*» που περιεσώθη, ενώ άλλοι το αποδίδουν είτε στον Κλεωνίδη, είτε στον Ευκλείδη, είτε στον Πάππο.

[4] Πορφύριος ο Τύριος ή Φοίνιξ ή Βατανιώτης. Νεοπλατωνικός φιλόσοφος, ο πιο σημαντικός από τους μαθητές του Πλωτίνου. Εγεννήθη περίπου το 232 και απέθανε στη Ρώμη γύρω στο 304 μ.Χ. Διετέλεσε στην αρχή μαθητής του Λογγίνου στην Αθήνα και από την ηλικία των 30 ετών μαθητής του Πλωτίνου στη Ρώμη. Έγραψε πολλά έργα στα οποία πραγματεύεται φιλοσοφικά, μαθηματικά, αστρονομικά, ιστορικά και γραμματικά θέματα. Από τα έργα του εσώθησαν ελάχιστα. Από το έργο του «*Φιλοσόφου ιστορίας*», στο οποίο εξέθετε τον βίο και τη διδασκαλία των σπουδαιοτέρων φιλοσόφων της αρχαιότητος, διεσώθη μόνον ο «*Πυθαγόρειος βίος*». Άλλα έργα του είναι «*Σχόλια εις το έργον του Πλωτίνου*», «*Σχόλια εις το έργον περί Μουσικής του Πτολεμαίου*», «*Εισαγωγή*» στο έργο «*Κατηγορίαι*» του Αριστοτέλους, «*Βίος Πλωτίνου*» κ.λπ. Ο Πορφύριος υπήρξε από τους σφοδροτέρους πολεμίους του Χριστιανισμού. Έγραψε 15 βιβλία κατά των Χριστιανών, τα οποία ερίφθησαν στην πυρά και εκάησαν με διάταγμα που εξεδόθη το έτος 448 των αυτοκρατόρων Θεοδοσίου Β’ (408-450 μ.Χ.) της Ανατολής και του Ουαλεντινιανού (425-455 μ.Χ.) της Δύσεως.

[5] Το χειρόγραφο αποδίδεται στον Ευκλείδη από τον Πορφύριο, ο οποίος το παραθέτει κατά κόρον (Comm. 98.14-103.25 εμπεριέχει τις πρώτες δεκαέξι προτάσεις και υπάρχουν περιληπτικά αποσπάσματα και αλλού). Το κείμενο που παραθέτει ο Πορφύριος περιλαμβάνει –πιθανώς λανθασμένα- την πρόταση (Κανένα πολλαπλάσιο διάστημα πλην μόνον της διαπασών δεν δομείται από επιμόρια διαστήματα).

3. μια Λατινική έκδοση, η οποία εμπεριέχεται στο έργο «*De institutione musica*» του Βοηθίου[6].

Μερικοί σχολιαστές αμφιβάλλουν, όσον αφορά στον ένα και μοναδικό συγγραφέα της πραγματείας, ακόμη και εάν γράφτηκε σε μία και μόνον περίοδο. Το μόνο σίγουρο είναι ότι η εν λόγω πραγματεία βασίζεται επί εργασιών παλαιοτέρων συγγραφέων. Η κατατομή κανόνος με το Ευκλείδειο ύφος, τη σπονδυλωτή και ουσιαστικά Πυθαγόρειο φύση αποτελεί έργο αναφοράς από την αρχαιότητα και έχει έλξει την προσοχή και το ενδιαφέρον πολλών μουσικολόγων, φιλολόγων, μαθηματικών και ιστορικών της επιστήμης. Έτσι, η κατατομή κανόνος έχει πολυμελετηθεί, αφού πρώτα πολυαντιγραφήθηκε.

Το πρώτο μεγάλο μέρος της Ευκλειδείου πραγματείας αντιμετωπίζεται ως μια ενιαία ολότητα, ως εισαγωγή. Στην εισαγωγή διατυπώνεται μια θεωρία για τη φυσική αιτία των ήχων και των μουσικών τους υψών, έτσι σχεδιασμένη, ώστε να αιτιολογεί τη χρήση των μουσικών υψών ως σχετικών ποσοτήτων και των μεταξύ τους διαστημάτων ως αριθμητικών λόγων. Εν συνεχεία, με ένα επιχείρημα –το οποίο θα αποτελέσει το επίκεντρο της παρούσης εργασίας- συσχετίζονται τα εύφωνα (σύμφωνα) διαστήματα με ορισμένους αριθμητικούς λόγους[7].

Ο συγγραφέας της Ευκλειδείου πραγματείας[8], προκειμένου να αποδείξει συστηματικά και τυπικά τις προτάσεις, οι οποίες αποτελούν τη βάση της Πυθαγορείου και της

[6] Βοήθιος -του οποίου το πλήρες όνομα είναι Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius- Ρωμαίος φιλόσοφος και πολιτικός που έζησε από το 480 έως το 524 μ.Χ. Εγεννήθη στη Ρώμη και είχε τη σπουδαία τύχη να σπουδάσει στην Αθήνα. Θεώρησε ως αποκλειστικό του πνευματικό καθήκον να μεταλαμπαδεύσει την ελληνική φιλοσοφία στη Δύση. Υπήρξε σύμβουλος του βασιλέα των Οστρογότθων Θεοδωρίχου κοντά στον οποίον εγνώρισε δόξες, τιμές, αλλά και την ατίμωση, τη φυλάκιση και το θάνατο με φρικτά βασανιστήρια. Το έργο του έγκειται σε μεταφράσεις και υπομνήματα Ελλήνων συγγραφέων. Μετέφρασε στη λατινική την «*Αριθμητικήν Εισαγωγήν*» του Νικομάχου του Γερασηνού («*Institutio arithmetica*») και το χαμένο μουσικό έργο του ιδίου «*Μουσικήν Εισαγωγήν*» («*Institutio musica*»). Το μουσικό έργο αυτό είναι πολύτιμη πηγή πληροφορίας για την αρχαία μουσική και αποτέλεσε τη βάση των μουσικών μελετών κατά τον μεσαίωνα. Το πιο γνωστό από όλα τα έργα του («*Παραμυθία της Φιλοσοφίας*») «*Consolatio Philosophiae*», το έγραψε για παρηγοριά του στη φυλακή και είναι πεζό και έμμετρο κείμενο. Βοηθήματά του για τη συγγραφή αυτού του έργου είχε τον «*Προτρεπτικό*» του Αριστοτέλους, τον Πλάτωνα, τον Κικέρωνα και τον Πλωτίνο. Κύριο τμήμα του έργου του Βοηθίου σχετίζεται με τη *Λογική* του Αριστοτέλους και τους σχολιαστές της.
Το πολυδιαδεδομένο έργο του Βοηθίου μεταφράσθηκε σε πάρα πολλές γλώσσες και σχολιάσθηκε από πολλούς σχολιαστές. Πρέπει να τονισθεί το γεγονός ότι σήμερα υπάρχουν περισσότερα από 400 χειρόγραφά του στη λατινική γλώσσα και δεν είναι λίγα τα χειρόγραφα στην ελληνική γλώσσα, που τα μετέφρασε τον 14ο αιώνα ο μοναχός Μάξιμος Πλανούδης. Πρέπει να τονισθεί με έμφαση ότι επί αιώνες ο Αριστοτέλης, η βάση της μεσαιωνικής φιλοσοφίας, ήταν γνωστός από τις μεταφράσεις και τις πρωτότυπες εργασίες του Βοηθίου. Τον Βοήθιο, που άλλοι τον αποκαλούν τελευταίο Ρωμαίο και άλλοι πρώτο σχολαστικό, μερικές εκκλησίες της Ιταλίας τον θεώρησαν μάρτυρα και άγιο του Χριστιανισμού.

[7] Περισσότερο από όλα τα μέρη της πραγματείας αμφισβητείται η εισαγωγή. Βέβαια είναι ένα ευφυές τμήμα της πραγματείας, και ως πρόλογος είναι απαραίτητο, αφού περιλαμβάνει κάποιες λεπτομέρειες αναγκαίες για την κατανόηση των προτάσεων. Αλλά θα μπορούσε η εισαγωγή να φανεί ως πολύ συντομογραφημένη και μερικά από τα επιχειρήματα, έτσι, όπως διατυπώνονται σε αυτήν, πολύ αδύναμα για να θεωρηθεί έργο ενός συγγραφέα, ο οποίος με περισσή προσοχή διετύπωσε και απέδειξε τα θεωρήματα. Ο Πορφύριος και οι πηγές του παραφράζουν μέρη της εισαγωγής. Πιθανώς να πρόκειται για μια μεταγενέστερη περίληψη ή παράφραση της αρχικής εισαγωγής.

[8] Η πραγματεία δομείται από την εκτεταμένη εισαγωγή και είκοσι Προτάσεις. Εκ των Προτάσεων οι α-θ είναι μαθηματικές, οι ι-ις μουσικές (εισάγονται μουσικές έννοιες), οι ιζ-ιη είναι μουσικές και αναφέρονται στο εναρμόνιο γένος, οι ιθ-κ αναφέρονται στην κατατομή του κανόνος κατά το Τέλειον Αμετάβολον Σύστημα.

Πλατωνικής παραδόσεως[9], βασίζεται κυρίως σε αποδεκτά γεγονότα της εμπειρικής παρατηρήσεως[10] καθώς επίσης σε φυσικές και σε γενικής φύσεως θεωρήσεις. Έτσι, τα συμπεράσματά του δεν είναι καθαρά «ορθολογιστικά» και τα επιχειρήματά του δεν αναπληρώνουν τη μουσική εμπειρία, αλλά απλά αποτελούν μια προσπάθεια να μεταφράσουν τις αλήθειες αυτών των εμπειριών στη γλώσσα των Μαθηματικών, ώστε οι επαγωγές και οι αμοιβαίες σχέσεις να μπορούν να μελετηθούν σχολαστικά.

3. Πυθαγόρειος κανών[11] ή μονόχορδο

Στις διάφορες διηγήσεις συναντούμε να γίνεται λόγος για τη χρήση του μονοχόρδου από τους Πυθαγορείους. Όπως λέει και το όνομά του, πρόκειται για ένα έγχορδο όργανο με μία και μοναδική χορδή[12]. Ο Πυθαγόρειος κανών[13] ή μονόχορδο ήτο ένα

---

[9] Όποιος και εάν είναι ο συγγραφέας αυτής της πραγματείας, το βέβαιον είναι ότι εγνώριζε καλά το έργο του Αρχύτου του Ταραντίνου και του Ευκλείδου. Η πρόταση 3 είναι μια εκδοχή ενός σημαντικού θεωρήματος, το οποίον ο Αρχύτας είχε αποδείξει και αρκετές προτάσεις χρησιμοποιούν θεωρήματα γνωστά από τα Στοιχεία του Ευκλείδου. Αλλά ο Ευκλείδης παρεκκλίνει από τον Αρχύτα στην ανάλυσή του για το εναρμόνιο και το διατονικό γένος (πρόταση ιζ, πρόταση κ). Οι διαιρέσεις του αντιστοιχούν σε αυτές του Φιλολάου (1.12 απόσπ. 6) και του Πλάτωνα (2.3 Τίμ. 35b-36b) και των μεταγενεστέρων Πλατωνικών Πυθαγορείων, όπως σχολιάζει ο Θέων ο Σμυρναίος (Άδραστος 9.2-9.3, Θράσυλλος 9.4-9.5) και ο Νικόμαχος στο Εγχειρίδιο. Πάλι, παρόλο που οι εισαγωγικές προτάσεις είναι προφανώς αναπολήσεις του 1.19 Αρχύτας απόσπ. 1, ο Ευκλείδης διαφοροποιείται από τον Αρχύτα και από την ισχύουσα παράδοση γενικώς, όσον αφορά στη θεωρία του μουσικού ύψους, την οποία η εισαγωγή προχωρεί να σκιαγραφήσει. Υπάρχουν υπομνήσεις της ιδίας ιδέας και αλλού, αλλά καμία άλλη πηγή δεν την εκφράζει καθαρά και κατηγορηματικά και η ανάπτυξή της σε μία πλήρως αρθρωτή υπόθεση ίσως είναι κατόρθωμα αυτού καθαυτού του Ευκλείδου.

[10] Πρέπει να εστιάσομε την προσοχή μας κυρίως σε μία αδυναμία(;) αυτής της πραγματείας, η οποία αφορά στη μη ικανοποιητική φύση των απόψεων, που συνδέουν τις συμφωνίες με τους πολλαπλασίους και τους επιμορίους λόγους στο τέλος της εισαγωγής. Η εν λόγω αδυναμία οδήγησε σε ένα σοβαρό πρόβλημα σχετικά με το εάν είναι ή δεν είναι εύφωνο διάστημα το διάστημα της οκτάβας+τετάρτη (8:3).

[11] Κάννα ή κάννη, ης, η, Λατινικά canna: καλάμι (ή με εξομοίωση κάθε ευθεία ράβδο, η οποία χρησιμεύει ιδιαιτέρως στο να τηρεί κάτι ίσιο). Αυτή η ευθύτητα του καλαμιού δίδει τη λέξη κανών με τη σημασία του χάρακα, της ρήγας ή με τη σημασία του ίσιου, του ορθού και του δικαίου. Ο κανών εχρησιμοποιείτο από τους κτίστες ή τους τέκτονες και διέφερε από το νήμα της στάθμης. Στη μουσική κανών ήτο το μονόχορδο, δηλαδή το όργανο για την πειραματική μελέτη όλων των μουσικών διαστημάτων. Η λέξη πάλι κανών σχετίζεται με τη λέξη κενεός ή κενός, δηλαδή άδειος, ακριβώς επειδή δηλώνει το κούφιο του στελέχους του καλαμιού. Την ίδια σημασία έχουμε και στη λέξη αυλός, που επίσης σημαίνει καλάμι, φλογέρα, σωλήνα ή καθετί αυτής της μορφής. Κανόνες εκαλούντο και οι οπές ή τα κλειδιά του αυλού.

[12] Βλέπε Sigfrid Wanzloeben, *Das Monochord als Instrument und als System*, Halle 1911.

[13] Τὸ μὲν οὖν ὄργανον τῆς τοιαύτης ἐφόδου καλεῖται κανὼν ἁρμονικός,
ἀπὸ τῆς κοινῆς κατηγορίας καὶ τοῦ κανονίζειν τὰ ταῖς αἰσθήσεσιν ἐνδέ-
οντα πρός τήν αλήθειαν παρειλημμένος.
Πτολεμαίος, *Αρμονικά*, 1, 2, 2-4.

Τὸ ὄργανον τῆς ἐφόδου φησίν, ἣν ὁ λόγος ἐξεῦρέ τε καὶ δέδωκε ταῖς
αἰσθήσεσι πρὸς τὸ κανονίζειν τὰ ἐνδέοντα αὐταῖς πρὸς τὴν ἀλήθειαν,
κανὼν καλεῖται ἁρμονικὸς ἀπὸ τῆς κοινῆς προσηγορίας τοῦ εὑρίσκοντος
ὀργάνου τὸ ἐλλεῖπον ταῖς αἰσθήσεσιν εἰς τὴν ἀκρίβειαν, ὃ καλεῖται κανών,
οὕτω κεκλημένος. πάντα γὰρ τὰ πρὸς τοῦτο ἐπιτήδεια ὄργανα ταῖς
αἰσθήσεσι <οὕτω> καλεῖται. οὐ γὰρ δὴ κανών, οὐδὲ κανονικὴ αἰσθήσει
ἔφοδος κέκληται ἡ κατὰ τὴν ἁρμονικὴν θεωρίαν ἀπὸ τοῦ κατὰ τὰς
κιθάρας καλουμένου κανόνος, ἔνθα διατείνονται αἱ χορδαί, ἀλλ᾽ οἱ Πυθα-

όργανο[14]-εργαλείο[15], που χρησίμευε στη μέτρηση, τις δοκιμές και την απόδειξη των αριθμητικών σχέσεων των μουσικών διαστημάτων[16]. Η μακρόχρονη και επίπονη ενασχόληση του Πυθαγόρου με τη μουσική και τους πειραματισμούς του στο μονόχορδο έφερε ως αποτέλεσμα την υποταγή του κατ' εξοχήν φευγαλέου και ασύλληπτου μουσικού ήχου στον άτεγκτο νόμο των αριθμών[17].

γόρειοι, οἵπερ καὶ μάλιστα τὴν ἔφοδον εὗρον, κανονικὴν μὲν ἐκάλουν, ἣν νῦν ἁρμονικὴν λέγομεν θεωρίαν συνωνύμως, κανόνα δὲ τὸ τῆς ὀρθότητος τῶν συμμετριῶν μέτρον, ὃ καὶ ὁρίζονταί τινες αὐτῶν οὕτω. «κανών ἐστι μέτρον ὀρθότητος τῶν ἐν τοῖς φθόγγοις ἡρμοσμένων διαφορῶν, αἳ θεωροῦνται ἐν λόγοις ἀριθμῶν.
Πορφυρίου, *Εις τα Αρμονικά Πτολεμαίου Υπόμνημα*, 22.10-22.

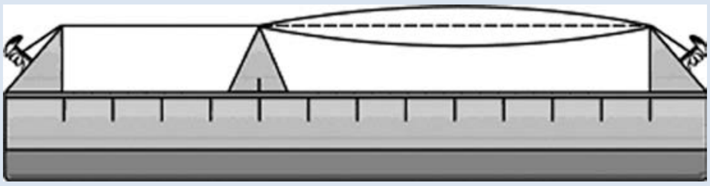
γράφει γέ τοι περὶ τούτου (sc. τοῦ κανόνοσ) καὶ Πτολεμαῖος ἡ Κυρηναία ἐν τῇ Πυθαγορικῇ τῆς μουσικῆς στοιχειώσει ταῦτα· «Ἡ οὖν κανονικὴ πραγματεία, κατὰ τίνας μᾶλλόν ἐστι; καθόλου κατὰ τοὺς Πυθαγορικούς· ἣν γὰρ νῦν ἁρμονικὴν λέγομεν, ἐκεῖνοι κανονικὴν ὠνόμαζον. ἀπὸ τίνος κανονικὴν αὐτὴν λέγομεν; οὐκ ὡς ἔνιοι νομίζουσι ἀπὸ τοῦ κανόνος ὀργάνου παρονομασθεῖσαν, ἀλλ' ἀπὸ τῆς εὐθύτητος ὡς διὰ ταύτης τῆς πραγματείας τὸ ὀρθὸν τοῦ λόγου εὑρόντος καὶ τὰ τοῦ ἡρμοσμένου παραπήγματα.
Πτολεμαῒς, *Αποσπάσματα Μουσικής*, 243.12-18.

[14] Νικομάχου Γερασηνού, Αρμονικόν εγχειρίδιον 6. K. von Jan, Musici Scriptores Graeci, Leipzig 1895, σ. 248. Σ' αυτή την περίπτωση μάλλον θα πρέπει να ανήκε στην οικογένεια των μονοχόρδων λαουτοειδών. Βλ. Reinach, Theodore (1999). *Η ελληνική μουσική*. μετάφραση Καραστάθη, Αναστασία-Μαρία. Αθήνα: Παπαδήμα, σ. 158 και West, M. L. (1999). *Αρχαία ελληνική μουσική*. Μετάφραση Στάθη Κομνηνού, Αθήνα, σσ. 112-113.

[15] Με την έννοια του οργάνου μετρήσεως. Έτσι, βέβαια, επιβίωσε μέχρι την Αναγέννηση και συνέβαλε καθοριστικά στη διαμόρφωση της θεωρίας της δυτικής μουσικής. Βλ. Jacques Chailley, «*Το μονόχορδο και η μουσική θεωρία*», στο Organicae voces, Festschrift Joseph Smits van Waesberghe, Amsterdam 1963, σσ. 11-20. Εξακολουθούσε να χρησιμοποιείται ακόμη και τον 19ο αιώνα κυρίως για τη διδασκαλία, το κούρδισμα και τον πειραματισμό, ώσπου να επινοηθούν ακριβέστερα όργανα. Βλ. Cecil Adkins, "Monochord", The New Grove Dictionary of Music and Musicians, London 1980.

[16] Οι Πυθαγόρειοι με το μονόχορδο απέκτησαν τη δυνατότητα να επαληθεύσουν και να συγκεκριμενοποιήσουν τα δεδομένα που είχαν συλλέξει από τις παρατηρήσεις τους στα διάφορα μουσικά όργανα. Βλ. B. L. van der Waerden, *Die Pythagoreer*, Zurich 1979, s. 370.

[17] Ο Αριστοτέλης στα Μετά τα φυσικά 985 b 31 αναφέρει: «τῶν ἁρμονιῶν ἐν ἀριθμοῖς ὁρῶντες τὰ πάθη καὶ τοὺς λόγους» [βλέποντας στους αριθμούς τις μεταβολές και τους λόγους των αρμονιών]. Η ρήση αυτή του Αριστοτέλους μας προβληματίζει, διότι, ενώ φαίνεται ότι ο Αριστοτέλης εγνώριζε το μονόχορδο, δεν το μνημονεύει ρητά πουθενά. Ότι πρόκειται για οπτική παρατήρηση ενισχύεται από το γεγονός ότι ο Αριστόξενος ειρωνεύεται τους μουσικούς που υπολογίζουν σαν γεωμέτρες και χρησιμοποιούν για τις αποδείξεις τους ένα «οφθαλμοειδές έργο», ενώ θα έπρεπε να ακούν σωστά. Επίσης ο Θέων ο Σμυρναίος ομιλεί για διαστήματα «αισθητά και ορατά» [Βλ. Annie Belis, Aristoxene de Tarente et Aristote. Le traite d' Harmonique, Paris 1986, σσ. 65-67]. Βλέπε επίσης Rudolf Schafke, *Geschichte der Musicasthetik in Umrissen*, Tutzing 1964, σ. 3. Anne Gabriele Wersinger, "Les measures de l' infini. Remarques sur la musique grecque ancienne", Philosophie 1998, σ. 77.



Σχήμα 1. Το μονόχορδο για τη μελέτη των νόμων των χορδών.

Με τη χρήση του μονοχόρδου οι Πυθαγόρειοι κατάφεραν να μεταφέρουν την ακουστική εμπειρία, με τη βοήθεια της Γεωμετρίας, σε οπτική παρατήρηση, γεγονός εξαιρετικά σημαντικό, αφού η όραση είναι ο πιο αξιόπιστος μάρτυρας ανάμεσα στις αισθήσεις μας. Σχετική είναι η ρήση του προσωκρατικού φιλοσόφου Ηρακλείτου του Εφεσίου (540-480), όπως μας τη διασώζει ο Πολύβιος στο έργο του «Ιστορίαι».

ὀφθαλμοὶ γὰρ τῶν ὤτων ἀκριβέστεροι μάρτυρες

Πολυβίου, *Ιστορίαι*, 12, 27, 1, 5

[*τα μάτια είναι ακριβέστεροι μάρτυρες απ᾿ ό,τι τα αυτιά*]

1.4. Σχετική ποσότητα (=λόγος) - Είδη μεγαλύτερης ανισότητος[18]

Ό,τι μετρείται, συγκρινόμενο με μια άλλη ποσότητα, είναι είτε ίσο, είτε άνισο. Η συγκρινόμενη ποσότητα δεν έχει διαφορετική ονομασία από αυτήν με την οποία συγκρίνεται.

Ίσο είναι κάθε τι που, όταν συγκρίνεται με κάτι άλλο, δεν είναι ούτε μικρότερο, ούτε μεγαλύτερο. Στην περίπτωση αυτή ομιλούμε για ισότητα των δύο οντοτήτων.

Εάν η σύγκριση δεν οδηγεί σε ισότητα, θα οδηγεί σε ανισότητα. Στην κάθε ανισότητα διακρίνεται το μεγαλύτερο και το μικρότερο, τα οποία ονομάζονται αντίθετα το ένα προς το άλλο.

Συσχετίζοντας σε μία ανισότητα το μεγάλο ως προς το μικρό, οδηγούμεθα σε πέντε είδη της αποκαλούμενης μεγαλύτερης ανισότητας. Αυτά τα πέντε είδη είναι:

1. το πολλαπλάσιο,
2. το επιμόριο,
3. το επιμερές,
4. το πολλαπλασιεπιμόριο
5. το πολλαπλασιεπιμερές.

1.4.1 Πολλαπλάσιοι αριθμοί[19]

Το πολλαπλάσιο είναι το πρώτο είδος της μεγαλύτερης ανισότητος.

---

[18] Thomas Taylor, 1995, *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων*, Εκδόσεις Ιάμβλιχος, Αθήνα, Κεφάλαιο XVI.
Ο Νικόμαχος έγραψε πραγματεία σε δύο βιβλία υπό τον τίτλο *Αριθμητική Εισαγωγή*, η οποία μεταφράσθηκε και στα Λατινικά από τον Ρωμαίο φιλόσοφο Βοήθιο (Boethius, 480-524). Με την έννοια «λόγος» ο Νικόμαχος επιθυμεί να επιτύχει μια συστηματική κατάταξη των διαφόρων ειδών κλασμάτων, τα οποία είναι είτε μεγαλύτερα, είτε μικρότερα της μονάδος, δίδοντας εις αυτά τα ονόματα που είχαν καθιερώσει παλαιότεροι μαθηματικοί. Αξίζει να ασχοληθεί κανείς με αυτή την ονοματολογία, προκειμένου να αντιληφθεί τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι παλαιοί Έλληνες μαθηματικοί στην προσπάθειά τους να επιτύχουν τη θεμελίωση της μαθηματικής επιστήμης.

[19] Αυτόθι, Κεφάλαιο XVII.

Ο πολλαπλάσιος αριθμός είναι τέτοιος που, συγκρινόμενος με έναν άλλον, τον περιέχει περισσότερο από μια φορά. Δηλαδή $\alpha = \nu \cdot \beta \quad \alpha, \beta, \nu \in \mathrm{N} \quad \& \ \alpha > \beta$[20]

Ονομασία: Διπλάσιος, τριπλάσιος, τετραπλάσιος κ.ο.κ.

1.4.2 Επιμόριοι αριθμοί[21]

Όταν ένας αριθμός α εμπεριέχει ολόκληρον έναν άλλον μικρότερό του αριθμό β και επί πλέον ένα μόνον μέρος αυτού, τότε ο α ονομάζεται επιμόριος του β.

Δηλαδή $\alpha = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \cdot \beta = \left(\frac{\nu + 1}{\nu}\right) \cdot \beta \quad \alpha, \beta, \nu \in \mathrm{N} \quad \& \ \alpha > \beta$

Η ονομασία των επιμορίων αριθμών επιτυγχάνεται με τη χρήση της προθέσεως **επί** και το τακτικό αριθμητικό[22] του παρονομαστού του συμμετέχοντος μέρους του αριθμού.

Εάν $\nu = 3$, ο επιμόριος αριθμός λέγεται επίτριτος $\left(1 + \frac{1}{3} = \frac{3+1}{3}\right)$, εάν $\nu = 4$, επιτέταρτος $\left(1 + \frac{1}{4} = \frac{4+1}{4}\right)$, εάν $\nu = 15$, επιπεντεκαιδέκατος $\left(1 + \frac{1}{15} = \frac{15+1}{15}\right)$. Ειδική περίπτωση ονοματολογίας επιμορίου αποτελεί η περίπτωση κατά την οποία $\nu = 2$. Ο επιμόριος $\left(1 + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2}\right)$ ονομάζεται ημιόλιος (όλος και ήμισυς).

1.4.3 Επιμερείς αριθμοί[23]

Αυτό το είδος αριθμών εμφανίζεται όταν ένας αριθμός α, συγκρινόμενος με άλλον μικρότερό του αριθμό β, τον περιέχει ολόκληρο και επί πλέον κάποια μέρη αυτού, όπως δύο ή τρία ή τέσσερα ή οποιοδήποτε άλλο μέρος μπορεί να προκύψει από τη σύγκριση.

Δηλαδή $\alpha = \left(1 + \frac{\mu}{\mu + \nu}\right) \cdot \beta = \left(\frac{2\mu + \nu}{\mu + \nu}\right) \cdot \beta \quad \alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathrm{N} \quad \& \ \alpha > \beta$. Αυτή η κατάσταση ξεκινά από τα δύο τρίτα, δηλαδή $(\mu = 2, \ \nu = 1)$.

Εάν ένας αριθμός εμπεριέχει έναν άλλον αριθμό και επιπλέον δύο μέρη αυτού $\alpha = \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot \beta$, ονομάζεται επιδιμερής ή επιδίτριτος ή δισεπίτριτος. Εάν ένας αριθμός εμπεριέχει έναν άλλον αριθμό και επιπλέον τρία μέρη αυτού $\alpha = \left(1 + \frac{3}{4}\right) \cdot \beta$, ονομάζεται επιτριμερής ή επιτριτέταρτος ή τρισεπιτέταρτος. Εάν ένας αριθμός εμπεριέχει έναν άλ-

---

[20] Όπου N είναι το σύνολον των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, …, το οποίο οι αρχαίοι Έλληνες ωνόμαζαν *φυσικόν χύμα*.

[21] Αυτόθι, Κεφάλαιο XVIII.

[22] Τα τακτικά αριθμητικά επίθετα φανερώνουν την τάξη ή τη σειρά που έχει ένα αντικείμενο σε σχέση με άλλα ομοειδή αντικείμενα, π.χ. πρώτο, δεύτερο, ένατο κ.λπ. Προσοχή στο ότι από το 13 έως το 19 τα τακτικά αριθμητικά επίθετα ονομάζονται περιφραστικά, δηλαδή 13ος =τρίτος και δέκατος, 15ος =πέντε και δέκατος, 19ος =ένατος και δέκατος.

[23] Αυτόθι, Κεφάλαιο XX.

λον αριθμό και επιπλέον τέσσερα μέρη αυτού $\alpha = \left(1+\frac{4}{5}\right)\cdot\beta$, ονομάζεται επιτετραμερής ή επιτετράπεμπτος.

Στην περίπτωση κατά την οποία $(\nu > 1)$, τότε είναι δυνατόν να εμφανισθούν περιπτώσεις ως: τρισεπίπεμπτος $\alpha = \left(1+\frac{3}{5}\right)\cdot\beta$.

1.4.4 Πολλαπλασιεπιμόριοι αριθμοί[24]

Αυτό το είδος αριθμών εμφανίζεται όταν ένας αριθμός α, συγκρινόμενος με έναν άλλον μικρότερό του αριθμό β, περιέχει αυτόν περισσότερο από μία φορά και επί πλέον ένα μέρος αυτού, δηλαδή περιέχει το διπλάσιο ή το τριπλάσιο ή το τετραπλάσιο ή κάποιο άλλο πολλαπλάσιο αυτού κι επί πλέον ένα μέρος του, όπως το ήμισυ ή το ενα τρίτο ή το ένα τέταρτο ή κάποιο άλλο μέρος.

Δηλαδή $\alpha = \left(\mu + \frac{1}{\nu}\right)\cdot\beta = \left(\frac{\mu\nu+1}{\nu}\right)\cdot\beta \quad \alpha,\beta,\mu,\nu \in \mathrm{N} \ \ \& \ \alpha > \beta$

Ο αριθμός, επομένως, που περιέχει το διπλάσιο ενός άλλου αριθμού και το ένα δεύτερο αυτού ονομάζεται διπλασιεφήμισυς $\alpha = \left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot\beta$. Εκείνος που περιέχει το διπλάσιο και το ένα τρίτο, ονομάζεται διπλασιεπίτριτος $\alpha = \left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\beta$. Εκείνος που περιέχει το διπλάσιο και το ένα τέταρτο, ονομάζεται διπλασιεπιτέταρτος $\alpha = \left(2+\frac{1}{4}\right)\cdot\beta$ κ.ο.κ.

Επίσης, εάν ένας αριθμός περιέχει το όλον ενός άλλου αριθμού τρεις φορές και το μισό ή το ένα τρίτο ή το ένα τέταρτο αυτού, ονομάζεται τριπλασιεφήμισυς, τριπλασιεπίτριτος, τριπλασιεπιτέταρτος, αντιστοίχως.

Κατά τον ίδιο τρόπο ονομάζονται και οι υπόλοιποι.

1.4.5 Πολλαπλασιεπιμερείς αριθμοί[25]

Αυτό το είδος αριθμών εμφανίζεται όταν ένας αριθμός α, συγκρινόμενος με έναν άλλον μικρότερό του αριθμό β, περιέχει ολόκληρο τον αριθμό β περισσότερο από μία φορά, και δύο ή τρία ή οσαδήποτε άλλα μέρη αυτού, σύμφωνα με το είδος του επιμερούς αριθμού.

Δηλαδή $\alpha = \left(\rho + \frac{\mu}{\mu+\nu}\right)\cdot\beta \quad \alpha,\beta,\mu,\nu,\rho \in \mathrm{N} \ \ \& \ \alpha > \beta$. Στους πολλαπλασιεπιμερείς αριθμούς δεν πρόκειται να υπάρχουν ούτε δύο ημίση, ούτε δύο τέταρτα, ούτε δύο έκτα. Αντιθέτως, θα υπάρχουν δύο τρίτα, δύο πέμπτα, δύο έβδομα (δηλαδή πάντοτε ανάγωγα κλάσματα).

Οι εν λόγω αριθμοί ονομάζονται ανάλογα με τα μέρη τους: διπλασι(ο)επιδιμερής $\alpha = \left(2+\frac{2}{3}\right)\cdot\beta$, διπλασι(ο)επιτριμερής, διπλασι(ο)επιτετραμερής κ.ο.κ. Και πάλι, ονομά-

---

[24] Αυτόθι, Καφάλαιο XXI.

[25] Αυτόθι, Καφάλαιο XXI.

ζονται τριπλασι(ο)επιδιμερής, τριπλασι(ο)επιτριμερής, τριπλασι(ο)επιτετραμερής $\alpha = \left(3 + \frac{4}{5}\right) \cdot \beta$ κ.λπ.

Παράδειγμα: Η σχέση $8:3 = 2 + \frac{2}{3}$ αποτελεί ένα διπλασιεπιδιμερή λόγο.

1.5. Θεμελιώδες Πυθαγόρειο αξίωμα για τη μουσική συμφωνία

Στο δεύτερο μισό της εισαγωγής της πραγματείας *«Κατατομή κανόνος»* αναφέρεται *το θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας* περί ευφωνίας ή συμφωνίας. Οι Πυθαγόρειοι εξέφραζον τα μουσικά διαστήματα ως λόγους[26] ακεραίων αριθμών, δηλαδή έναν ακέραιο αριθμό εν σχέσει με έναν άλλον.

πάντα δὲ τὰ ἐκ μορίων συγκείμενα ἀριθμοῦ
λόγῳ λέγεται πρὸς ἄλληλα, ὥστε καὶ τοὺς φθόγγους
ἀναγκαῖον ἐν ἀριθμοῦ λόγῳ λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους·
τῶν δὲ ἀριθμῶν οἱ μὲν ἐν πολλαπλασίῳ λόγῳ λέγονται,
οἱ δὲ ἐν ἐπιμορίῳ, οἱ δὲ ἐν ἐπιμερεῖ, ὥστε καὶ τοὺς
φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν τοῖς τοιούτοις λόγοις λέγεσθαι
πρὸς ἀλλήλους. τούτων δὲ οἱ μὲν πολλαπλάσιοι καὶ ἐπι-
μόριοι ἑνὶ ὀνόματι λέγονται πρὸς ἀλλήλους.
Γινώσκομεν δὲ καὶ τῶν φθόγγων τοὺς μὲν συμφώ-
νους ὄντας, τοὺς δὲ διαφώνους, καὶ τοὺς μὲν συμφώνους
μίαν κρᾶσιν τὴν ἐξ ἀμφοῖν ποιοῦντας, τοὺς δὲ διαφώ-
νους οὔ. τούτων οὕτως ἐχόντων εἰκὸς τοὺς συμφώνους
φθόγγους, ἐπειδὴ μίαν τὴν ἐξ ἀμφοῖν ποιοῦνται κρᾶσιν
τῆς φωνῆς, εἶναι τῶν ἐν ἑνὶ ὀνόματι πρὸς ἀλλήλους
λεγομένων ἀριθμῶν, ἤτοι πολλαπλασίους ὄντας ἢ ἐπι-
μορίους.

Νεοελληνική απόδοση[27].

[Όλα όσα δε συνίστανται από τμήματα εκφράζονται μεταξύ τους με έναν αριθμητικό λόγο (=μια αριθμητική σχέση)[28], ώστε είναι απαραίτητο και οι φθόγγοι με έναν αριθμητικό λόγο να εκφράζονται μεταξύ τους[29]. Από τους αριθμούς άλλοι μεν σχετίζο-

---

[26] Οι Πυθαγόρειοι διαχώριζαν τη Μαθηματική επιστήμη σε τέσσερα μέρη. Το ένα από τα μέρη της το απέδιδαν στο πόσα πολλά και το άλλο στο πόσο πολύ. Διαχώριζαν πάλι σε δύο το καθένα απ' αυτά τα δύο μέρη, διότι έλεγαν ότι το πόσα πολλά δηλαδή μια ποσότητα είτε υφίσταται αυτή καθεαυτή, είτε μελετάται σε σχέση με κάτι άλλο και ότι το πόσο πολύ είτε είναι σταθερό, είτε είναι σε κίνηση. Επίσης έλεγαν ότι η Αριθμητική ερευνά το πόσα πολλά που υφίστανται καθεαυτά, ενώ η Μουσική ερευνά το πόσα πολλά που υφίστανται αναφορικά προς κάτι άλλο. Η Γεωμετρία μελετά το πόσο πολύ που είναι ακίνητο, αλλά η Αστρονομία μελετά το πόσο πολύ που είναι από μόνο του ή κατ' ουσίαν κινητό.

[27] Οι νεοελληνικές αποδόσεις των αρχαιοελληνικών κειμένων εγένοντο από τον συγγραφέα της παρούσης εργασίας.

[28] Για να μπορεί να προσδιορισθεί το μέγεθος του τμήματος σε σχέση με το όλον.

[29] Αφού φθόγγος είναι και το ηχούν, δηλαδή το δονούμενο, τμήμα της χορδής και αυτό είναι μέρος του όλου μήκους της χορδής, πρέπει να προσδιορισθεί με έναν αριθμητικό λόγο ως προς αυτό.

νται με λόγο πολλαπλάσιο, άλλοι δε με λόγο επιμόριο και άλλοι με λόγο επιμερή, ώστε είναι απαραίτητο και οι σχέσεις των φθόγγων να εκφράζονται με τέτοιου είδους λόγους. Από αυτούς τους λόγους οι πολλαπλάσιοι και οι επιμόριοι προφέρονται μονολεκτικά. Επιπροσθέτως γνωρίζομε ότι από τους φθόγγους[30] άλλοι μεν είναι σύμφωνοι, άλλοι δε διάφωνοι και οι μεν σύμφωνοι φθόγγοι μια συγχώνευση[31] των δύο δημιουργούν, οι δε διάφωνοι όχι[32]. Έτσι εχόντων των πραγμάτων (των σχετικών με τους φθόγγους), είναι φυσικό οι σύμφωνοι φθόγγοι, επειδή οι δύο τους δημιουργούν μία συγχώνευση της φωνής, να εκφράζονται με τους αριθμητικούς λόγους, που προφέρονται μονολεκτικά, δηλαδή αυτούς που είναι πολλαπλάσιοι ή επιμόριοι[33]].

---

[30] Με τον όρο φθόγγος στην κατατομή κανόνος δυνατόν να υπονοείται:
η νότα,
το τάστο (=δεσμός, μπερντές, fret),
το μη ηχούν, δηλαδή το ακίνητο, τμήμα της χορδής,
το ηχούν, δηλαδή το δονούμενο, τμήμα της χορδής.
Φθόγγος στο σημείο αυτό σημαίνει τον ήχο, τη νότα.

[31] κρᾶσις, -εως, ἡ (εκ του ρήματος κεράννυμι –επί υγρών και ιδίως επί οίνου και ύδατος, καθώς επίσης επί μετάλλων-=αναμειγνύω κάτι σε κάτι άλλο) = η ανάμειξη, η συνένωση, η μείξη, η συγχώνευση. Οι αρχαίοι Έλληνες θεωρητικοί κάνουν διάκριση ανάμεσα στη λέξη κρᾶσις, -εως και στη λέξη μῖξις, ορθότερον μεῖξις, -εως (εκ του ρήματος μείγνυμι -επί υγρών ή και στερεών-=ανακατώνω κάτι με κάτι άλλο). Κατά μεν την κράση τα διάφορα συστατικά ομογενοποιούμενα χάνουν τις δικές τους ιδιότητες, κατά δε τη μίξη τα διάφορα συστατικά αφενός μεν δεν ομογενοποιούνται, αφετέρου δε εξακολουθούν να διατηρούν τις δικές τους ιδιότητες. Γι’ αυτό η λέξη κράση εκφράζει απόλυτα το εύφωνον της συνακροάσεως δύο ήχων, κατά την οποίαν ο καθένας από τους δύο παύει να ακούγεται ως ξέχωρο ηχητικό γεγονός, αλλά ως συμμέτοχος μη διακρινόμενος ενός ευφώνου ηχητικού γεγονότος.

[32] οὐ πάντως τὸ διάστημα καὶ συμφωνίαν ἔχει. δυνατὸν δέ γε διάστημά τι ἅμα καὶ σύμφωνον εἶναι, ὥστ' εἰ μέν τί ἐστι σύμφωνον, τοῦτο καὶ διάστημα περιέχει, εἰ δέ τί ἐστι διάστημα, οὐ πάντως ἐστὶ σύμφωνον. συμφωνία δ' ἐστὶ δυεῖν φθόγγων ὀξύτητι καὶ βαρύτητι διαφερόντων κατὰ τὸ αὐτὸ πτῶσις καὶ κρᾶσις. δεῖ γὰρ τοὺς φθόγγους συγκρουσθέντας ἕν τι ἕτερον εἶδος φθόγγου ἀποτελεῖν παρ' ἐκείνους, ἐξ ὧν φθόγγων ἡ συμφωνία γέγονεν. ὥσπερ γὰρ εἴ τις βούλοιτο οἰνόμελι ποιῆσαι ποσόν τι μέλιτος λαβὼν καὶ ποσὸν οἴνου, ὅταν οὕτω κεράσῃ, ὥστε μὴ ἐπικρατεῖν τὸν οἶνον μήτε τὸ μέλι, ἀλλά τινι συμμετρίᾳ κραθῇ, τρίτον τι γίνεται κρᾶμα, ὃ μήτε οἶνος μήτε μέλι ἐστίν· οὕτως ὅταν ὀξὺς καὶ βαρὺς φθόγγος κρουσθέντες ἕν τι τῇ ἀκοῇ παρασχῶσι κρᾶμα μὴ δ' ἑτέρου τῶν φθόγγων τὴν ἰδίαν παρεμφαίνοντος δύναμιν, ἀλλὰ τρίτον ἐξηχῇ τῇ ἀκοῇ παρὰ τὸν βαρὺν καὶ τὸν ὀξὺν φθόγγον, τότε καλεῖται σύμφωνον. ἐὰν δ' ἡ ἀκοὴ τοῦ βαρέος μᾶλλον ἀντίληψιν ποιῆται ἢ πάλιν τοῦ ὀξέος, ἀσύμφωνόν ἐστι τὸ τοιοῦτο διάστημα
Πορφύριος, *Υπόμνημα εις τα Αρμονικά του Πτολεμαίου*, 35, 23 – 36, 3.

[33] συμφωνοῦσι δὲ φθόγγοι πρὸς ἀλλήλους, ὧν θατέρου κρουσθέντος ἐπί τινος ὀργάνου τῶν ἐντατῶν καὶ ὁ λοιπὸς κατά τινα οἰκειότητα καὶ συμπάθειαν συνηχεῖ· κατὰ ταὐτὸ δὲ ἀμφοῖν ἅμα κρουσθέντων ἡδεῖα καὶ προσηνὴς ἐκ τῆς κράσεως ἐξακούεται φωνή. τῶν δὲὲ κατὰ τὸ ἑξῆς ἡρμοσμένων φθόγγων πρῶτοι μὲν οἱ τέταρτοι τάξει συμφωνοῦσι πρὸς ἀλλήλους, συμφωνοῦσι δὲ συμφωνίαν τὴν δι' αὐτὸ τοῦτο διὰ τεσσάρων λεγομένην, ἔπειτα οἱ πέμπτοι τὴν διὰ πέντε, καὶ μετὰ ταῦτα οἱ περιλαμβάνοντες ἀμφοτέρας τὰς συμφωνίας, γινόμενοι δ' ἀπ' ἀλλήλων ὄγδοοι, τὴν διὰ πασῶν,

Ο συγγραφεύς της πραγματείας συμπεραίνει ότι οι ήχοι –με την έννοια του δονουμένου τμήματος της χορδής- συνίστανται από «μόρια (=υποπολλαπλάσια τμήματα)», του όλου μήκους της χορδής. Ήχοι διαφορετικού μουσικού ύψους πρέπει τότε να είναι ικανοί να αλληλοσυσχετισθούν με αριθμητικούς λόγους, όπως ακριβώς συμβαίνει σε όλα τα πράγματα, που συνίστανται από τμήματα.

Αμέσως μετά ο συγγραφεύς της πραγματείας εισέρχεται στο θέμα των ευφώνων και των διαφώνων φθόγγων. Λέει ότι εύφωνοι είναι οι φθόγγοι τα στοιχεία των οποίων σχηματίζουν έναν ομοιογενή σύνθετο ήχο, κάτι που δεν συμβαίνει με τους διαφώνους φθόγγους. Με ένα σ υ γ κ ε χ υ μ έ ν ο επιχείρημα ο συγγραφεύς της πραγματείας εντάσσει τα εύφωνα διαστήματα στις δύο πρώτες κλάσεις λόγων, διότι έχουν μεταξύ τους κάτι το κοινό, που δεν το μοιράζονται με την τρίτη. Είναι η ασάφεια, η λακωνικότητα και η αδύναμη αποδεικτικότητα αυτής της παραγράφου που δημιουργεί υποψίες ότι αυτή η παράγραφος δεν στέκει ως καρπός σκέψεως του λεπτολόγου συγγραφέως των *Στοιχείων*. Παρόλ’ αυτά η παράγραφος περιέχει το κυρίαρχο στοιχείο, την ουσία στην ανάλυση που ακολουθεί. Επί πλέον η απουσία της θα συνεπάγετο την κατάρρευση του μεθοδολογικού πλαισίου ολοκλήρου της πραγματείας.

Από τα πέντε αυτά είδη της μεγαλύτερης ανισότητος τα δύο τελευταία δεν μνημονεύονται καθόλου στην Ευκλείδειο πραγματεία *«Κατατομή κανόνος»*. Τα δύο πρώτα, όμως, με τη σειρά που τα αναφέρουμε, τα συνδέει ο Ευκλείδης, βάσει εμπειρικών πυθαγορείων παρατηρήσεων, με την *ευφωνία* ή *συμφωνία*.

Κατά την Πυθαγόρειο μουσική θεωρία τα μουσικά διαστήματα κατετάσσοντο σε δύο βασικές κατηγορίες τις *ευφωνίες* ή *συμφωνίες* και τις *διαφωνίες* ή *ασυμφωνίες*. Οι συμφωνίες εκ του ρήματος συμφωνέω_ῶ, συμφωνία, σύμφωνος· (σὺν+φωνὴ)[34] φωνῶ ὁμοῦ, ὁ συμφωνῶν κατὰ τὸν ἦχον, μουσικὴ συμφωνία.

οὕτω προσαγορευθεῖσαν ἐπειδὴ τὸ πρῶτον ἀπὸ τῆς ὀκταχόρδου λύρας ὁ πρῶτος καὶ βαρύτατος φθόγγος, καλούμενος ὑπάτη, τῷ τελευταίῳ καὶ ὀξυτάτῳ, τουτέστι τῇ νήτῃ, τὴν αὐτὴν εὑρέθη συνέχων συμφωνίαν κατ' ἀντίφωνον.

Θέων Σμυρναίος, *Τα κατά το μαθηματικόν χρησίμων*, 50, 22 – 51, 15.

[34] Μήπως αφενός μεν από την ετυμολογία της λέξεως «συμφωνία» αφετέρου δε από τις παραπομπές, που ακολουθούν, πρέπει ν’ αρχίσουμε να υποψιαζόμαστε και να ψάχνουμε εάν η αρχαία ελληνική μουσική δεν ήταν μονοφωνική;

Εκτός του Ευκλείδου εις το πολύφωνον (τουλάχιστον δίφωνον) της αρχαιοελληνικής μουσικής αναφέρονται και άλλοι.

Ο Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.) (Προβλ. ΧΙΧ, 38) υποστηρίζει πως "ο λόγος για τον οποίον απολαμβάνουμε τη συμφωνία είναι το ότι είναι ανάμειξη αντιθέτων (φθόγγων) που έχουν σχέση ο ένας με τον άλλον"· και στα Μουσικὰ Προβλήματα ΧΙΧ, 35, λέει ότι η διὰ πασῶν είναι η πιο ωραία συμφωνία.

Ο Νικόμαχος (1ος μ.Χ. αιώνας) (Εγχειρ. 12) υποστηρίζει ότι σύμφωνα συστήματα είναι εκείνα των οποίων οι συστατικοί φθόγγοι, όταν παιχθούν μαζί ("ἅμα κρουσθέντες"), αναμειγνύονται ο ένας με τον άλλον κατά τέτοιο τρόπο, ώστε δίνουν την εντύπωση ενός μόνον ήχου ("ἑνοειδῆ φωνὴν") (πρβ. Αριστείδης, Περὶ μουσ. 12 Μβ και Γαυδ. Εισαγ. 8).

Ο Κλεονείδης (2ος μ.Χ. αιώνας) (Εισαγ. 5) δίνει τον ακόλουθο ορισμό της συμφωνίας: "ἔστι δὲ συμφωνία μὲν κρᾶσις δύο φθόγγων ὀξυτέρου καὶ βαρυτέρου" (συμφωνία είναι η ανάμειξη δύο φθόγγων, από τους οποίους ο ένας είναι ψηλότερος και ο άλλος χαμηλότερος).

Ο Πορφύριος (232-304 μ.Χ.) μνημονεύει τον ορισμό του Αιλιανού (από το έργο του Τίμαιος): "Συμφωνία είναι σύμπτωση και ανάμειξη ("ἐπὶ τὸ αὐτὸ πτῶσις καὶ κρᾶσις") δύο φθόγγων διαφορετικών ως προς την οξύτητα και τη βαρύτητα", δηλαδή δύο φθόγγων διαφορετικού μουσικού ύψους.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι σύμφωνα με *το θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας* περί ευφωνίας ή συμφωνίας ΜΟΝΟ μία *πολλαπλάσιος* ή *επιμόριος* σχέση αφενός μεν μεταξύ των αριθμών των ενσαρκωτών της *ιεράς τετρακτύος* (1, 2, 3, 4), αφετέρου δε μεταξύ των γεωμετρικών στοιχείων *του κύβου* («γεωμετρική αρμονία»)[35] εκφράζει ένα σύμφωνο μουσικό διάστημα. Αυτό συμβαίνει στα διαστήματα *δις διαπασών* $\left(\frac{4}{1}\right)$, *διαπασών* $\left(\frac{2}{1}\right)$, *ημιόλιον*[36] $\left(\frac{3}{2}\right)$, *επίτριτον*[37] $\left(\frac{4}{3}\right)$. Έτσι, λοιπόν, σύμφωνα με το *θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας* περί ευφωνίας ή συμφωνίας το διάστημα του επογδόου τόνου $\left(\frac{9}{8}\right)$, παρόλο που αποτελεί μια επιμόριο σχέση, το κατέτασσαν στις διαφωνίες ή ασυμφωνίες, επειδή οι ακέραιοι αριθμοί 8 και 9, που το εξέφραζαν, δεν συγκαταλέγονται μεταξύ των αριθμών των ενσαρκωτών της *ιεράς τετρακτύος* (1, 2, 3, 4).

Στα σύμφωνα μουσικά διαστήματα συγκαταλέγοντο και τα σύνθετα των παραπάνω συμφώνων διαστημάτων με την οκτάβα[38]. Έτσι, λοιπόν, η δις διαπασών (=διαπασών+διαπασών) εκφράζεται με πολλαπλάσια σχέση $\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{1}=\frac{4}{1}\right)$ και εντάσσεται στα σύμφωνα διαστήματα, η διαπασών και δια πέντε (=διαπασών+δια πέντε) εκφράζεται με πολλαπλάσια σχέση $\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{1}\right)$ και εντάσσεται στα σύμφωνα διαστήματα, η διαπασών και δια τεσσάρων (=διαπασών+δια τεσσάρων)[39] εκφράζεται με πολλαπλασιεπιμερή σχέση $\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}=2+\frac{2}{3}\right)$, παραβιάζει το *Θεμελιώδες Πυθαγόρειο αξίω-*

---

[35] Κύβος, η «Γεωμετρική Αρμονία»: (Νικόμαχος, ό.π. 26,2) «γεωμετρικὴν ἁρμονίαν φασὶ τὸν κύβον ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸ τρία διαστήματα ἡρμόσθαι ἰσάκις. ἐν γὰρ παντὶ κύβῳ ἥδε ἡ μεσότης ἐνοπτρίζεται. πλευραὶ μὲν γὰρ παντὸς κύβου εἰσὶν ιβ', γωνίαι δὲ η, ἐπίπεδα δὲ ς᾽. μεσότης ἄρα ὁ η' τῶν ς' καὶ τῶν ιβ' κατὰ τὴν ἁρμονικήν». Δηλαδή στον κύβο προχωρώντας κατά το μήκος, το πλάτος και το ύψος κατά ίσα διαστήματα, προκύπτει στερεό που συμφωνεί με τον εαυτό του. Στον κάθε κύβο διακρίνονται 12 ακμές, 8 κορυφές και 6 έδρες. Οι αριθμοί 6, 8, 12 συνιστούν αρμονική αναλογία, διότι 12/6=(12-8)/(8-6). Στην εν λόγω σειρά αριθμών διακρίνονται όλες οι μουσικές συμφωνίες. Η δια τεσσάρων συμφωνία είναι ο λόγος 8:6, επειδή είναι ένας επίτριτος λόγος. Η δια πέντε συμφωνία είναι ο λόγος 12:8, επειδή είναι ένας ημιόλιος λόγος. Η δια πασών συμφωνία εκφράζεται με τον λόγο 12:6. Η δια πασών και η δια πέντε συμφωνία δηλαδή η 3:1 εκφράζεται με το λόγο των διαφορών (12-6)/(8-6). Η δις δια πασών συμφωνία είναι ορατή στο λόγο 8/(8-6). Βάσει αυτών καταφαίνεται ότι σωστά η συγκεκριμένη αναλογικότητα ονομάζεται αρμονική και το ότι τον κύβο τον ονόμαζαν οι Πυθαγόρειοι «Γεωμετρική Αρμονία».

[36] Πυθαγόρειος πέμπτη ή διοξεία.

[37] Πυθαγόρειος τετάρτη ή συλλαβά.

[38] Με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι δεν παραβιάζεται το Θεμελιώδες Πυθαγόρειο αξίωμα για τη μουσική συμφωνία.

[39] Η περίπτωση αυτή από πολλούς λέγεται ότι αποτελεί την «αχίλλειο πτέρνα» του Θεμελιώδους Πυθαγορείου αξιώματος για τη μουσική συμφωνία.

μα για τη μουσική συμφωνία και γι' αυτό εντάσσεται στα διάφωνα ή ασύμφωνα διαστήματα.

Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος επικυρώνει ότι *το θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας* περί ευφωνίας ή συμφωνίας, όπως ακριβώς το διατυπώσαμε παραπάνω, ήταν το κεντρικό δόγμα της Πυθαγορείου μουσικής ομολογίας πίστεως, επικρίνει τους Πυθαγορείους που περιορίζουν αυθαιρέτως την ευφωνία ή συμφωνία μόνο στους όρους της ιεράς τετρακτύος και διερωτάται γιατί οι Πυθαγόρειοι δεν εντάσσουν στα εύφωνα ή σύμφωνα διαστήματα τον επιμόριο $\left(\frac{5}{4}\right)$ (επιτέταρτο) και τον πολλαπλάσιο $\left(\frac{5}{1}\right)$ (πενταπλάσιο). Επίσης τους κατηγορεί που εξαιρούν από τα εύφωνα ή σύμφωνα μουσικά διαστήματα το διάστημα της διαπασών και δια τεσσάρων, υποστηρίζοντας ότι η διαπασών δεν αλλοιώνει τον εύφωνο ή διάφωνο χαρακτήρα του μουσικού διαστήματος, στο οποίο προστίθεται. Από αυτήν την οπτική γωνία, λοιπόν, η διαπασών και δια τεσσάρων είναι ένα σύμφωνο μουσικό διάστημα.

Η έκφραση «Τῶν ἐν ἑνὶ ὀνόματι πρὸς ἀλλήλους λεγομένων ἀριθμῶν», η οποία υπάρχει στο τέλος του παρατεθέντος αποσπάσματος της εισαγωγής της πραγματείας *«Κατατομή κανόνος»*, ακόμη και σήμερα αποτελεί ένα άλυτο μυστήριο, το οποίο απασχόλησε και εξακολουθεί να απασχολεί αναριθμήτους μελετητές. Τι να εννοούσε άραγε ο Ευκλείδης με αυτήν τη φράση;

Πρέπει να σημειωθεί ότι η Λατινική έκδοση της πραγματείας δεν περιέχει αυτή την έκφραση και διερωτάται ο ερευνητής «γιατί;». Και ο Βοήθιος παραλείπει την εν λόγω έκφραση, επίσης, είτε ίσως επειδή προβληματίσθηκε πολύ με το νόημά της, είτε ίσως επειδή αποτελούσε πλεονασμό ως κάτι το αυτονόητο. Μόνον η Ελληνική έκδοση συνδέει την ευφωνία δύο φθόγγων με την πολλαπλάσιο ή επιμόριο αριθμητική τους σχέση.

Οι Karl von Jan και Thomas Mathiesen προτείνουν αντί της εκφράσεως «ἐν ἑνὶ ὀνόματι» τις λέξεις «κρεῖττον» και «σύμφωνον», αντίστοιχα.

Στις αρχές του 20ου αιώνα οι Louis Laloy, Edward Lippman και Andrew Barker διετύπωσαν την άποψη ότι στην αρχαία εποχή μόνον οι πολλαπλάσιοι και οι επιμόριοι αριθμοί θα εξεφωνούντο μονολεκτικά, ενώ οι επιμερείς, οι πολλαπλασιεπιμόριοι και οι πολλαπλασιεπιμερείς αριθμοί θα εξεφωνούντο με περισσότερες της μιας λέξεις.

Εάν έτσι είχαν τα πράγματα, τότε καλώς την εν λόγω πρόταση την παραλείπει, ως αυτονόητη, ο Βοήθιος. Αλλά αυτή η βολική άποψη ανατρέπεται από την ονοματολογία των πολλαπλασίων, των επιμορίων, των επιμερών, των πολλαπλασιεπιμορίων και των πολλαπλασιεπιμερών αριθμών, την οποία μας παραθέτει ο Νικόμαχος ο Γερασηνός[40]

[40] Νικόμαχος ο Γερασηνός. Πυθαγόρειος φιλόσοφος από τα Γέρασα της Πετραίας Αραβίας. Έζησε ή το δεύτερο μισό του Α' μ.Χ. αιώνα ή γύρω στο μέσον του Β' μ.Χ. αιώνα. Έγραψε πλήθος σημαντικών έργων εκ των οποίων σώζονται: «*Αριθμητική Εισαγωγή*» σε δύο βιβλία, μια μεταφυσική των αριθμών, που εκδόθηκε από τον Hoche το 1864 στη Λειψία. Το έργο αυτό αληθινά αξιόλογο, το υπομνημάτισε ο Ιάμβλιχος και ο Φιλόπονος, μεταφράσθηκε δε από τον Απουλήιο στη Λατινική γλώσσα. Στο έργο αυτό εμπεριέχεται και το «*θεώρημα του Νικομάχου*» κατά το οποίο κάθε κύβος φυσικού αριθμού μπορεί να εκφρασθεί ως άθροισμα ορισμένων διαδοχικών περιττών αριθμών κατά το γενικό σχήμα:

$$\nu^3 = [\nu(\nu-1)+1] + [\nu(\nu-1)+3] + \ldots + [\nu(\nu-1)+2\nu-1]$$

οπότε:

στο έργο του «*Αριθμητική εισαγωγή*» και η οποία για όλους αυτούς τους αριθμούς είναι μονολεκτική, όπως δια παραδειγμάτων προανεφέρθη.

Ως αντίλογος υποστηρίζεται η άποψη ότι πράγματι στην αρχαία εποχή μόνον οι πολλαπλάσιοι και οι επιμόριοι αριθμοί εξεφωνούντο μονολεκτικά, ενώ οι επιμερείς, οι πολλαπλασιεπιμόριοι και οι πολλαπλασιεπιμερείς αριθμοί εξεφωνούντο με περισσότερες της μιας λέξεις και ότι ο Νικόμαχος ο Γερασηνός (50-120 μ.Χ.) επενόησε κατά τη συγγραφή του έργου του «*Αριθμητική εισαγωγή*» τον μονολεκτικό τρόπο εκφωνήσεως όλων των πέντε ειδών αριθμών της καλουμένης *μεγαλύτερης ανισότητας*.

Προσωπικώς τον παραπάνω αντίλογο δεν τον αποδέχομαι. Πιστεύω ακραδάντως ότι, εάν ο Νικόμαχος επινοούσε κάτι το διαφορετικό από τό ό,τι ήτο αποδεκτό από τους «παλαιούς» σε σχέση με την ονομασία και εκφώνηση των πέντε ειδών των αριθμών της καλουμένης μεγαλύτερης ανισότητος, αφενός μεν θα το εδήλωνε, κι αφετέρου θα παρέθετε και τον «παλαιό» τρόπο εκφωνήσεως του αριθμού δίπλα στο νεοεισαγόμενο δικό του τρόπο. Υποστηρίζω την άποψη ότι και τα πέντε είδη των αριθμών της καλουμένης μεγαλύτερης ανισότητος εξεφωνούντο μονολεκτικώς, αλλά ο Ευκλείδης αποδέχεται μόνον τα δύο πρώτα είδη των αριθμών, διότι αυτά και μόνον αυτά οδηγούν σε αριθμητικές σχέσεις εκφρασμένες με τους ενσαρκωτές της ιεράς τετρακτύος (1, 2, 3, 4), οι οποίες υποδηλώνουν το σύμφωνον ή το διάφωνον ενός μουσικού διαστήματος.

Πράγματι, οι πολλαπλάσιοι αριθμοί $\dfrac{\alpha}{\beta}=n \;\; \gamma\iota\alpha \;\; n=1,2,3,4$ θεωρούνται από τους Πυθαγορείους ότι εκφράζουν εύφωνα ή σύμφωνα διαστήματα και συγκεκριμένα την ταυτοφωνία ή ομοφωνία, τη διαπασών, τη διαπασών και δια πέντε (διαπασών+δια πέντε) και τη δις διαπασών, αντίστοιχα.

Οι επιμόριοι αριθμοί $\dfrac{\alpha}{\beta}=1+\dfrac{1}{n} \;\; \gamma\iota\alpha \;\; n=1,2,3$ θεωρούνται από τους Πυθαγορείους ότι εκφράζουν τα εύφωνα ή σύμφωνα διαστήματα διαπασών $\left(\dfrac{2}{1}\right)$, δια πέντε σε σχέση ημιόλιον $\left(\dfrac{3}{2}\right)$, δια τεσσάρων σε σχέση επίτριτον $\left(\dfrac{4}{3}\right)$, αντίστοιχα.

$1^3=1$

$2^3=3+5$

$3^3=7+9+11$

$4^3=13+15+17+19$

....

....

«*Εγχειρίδιον Αρμονικής*» σε δύο βιβλία, που εκδόθηκε στη συλλογή των μουσικών συγγραφέων από τους Meibom και Carl Jan το έτος 1895, «*Συλλογήν Πυθαγορείων δογμάτων*» κ.α. Εκτός από τα έργα αυτά ο Φώτιος αναφέρει και το έργο «*Αριθμητικά θεολογούμενα*», που πραγματεύεται τη μυστική σημασία των αριθμών.

Ο μικρότερος ε π ι μ ε ρ ή ς αριθμός είναι ο $\frac{\alpha}{\beta}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$, που κατά τους Πυθαγορείους, αφού εμπεριέχει τον αριθμό 5, ο οποίος δεν είναι ένας από τους αριθμούς της ιεράς τετρακτύος, δεν μπορεί να εκφράζει εύφωνο ή σύμφωνο διάστημα.

Ο μικρότερος π ο λ λ α π λ α σ ι ε π ι μ ό ρ ι ο ς αριθμός είναι ο $\frac{\alpha}{\beta}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$, που κατά τους Πυθαγορείους, αφού εμπεριέχει τον αριθμό 5, ο οποίος δεν είναι ένας από τους αριθμούς της ιεράς τετρακτύος, δεν μπορεί να εκφράζει εύφωνο ή σύμφωνο διάστημα.

Ο μικρότερος π ο λ λ α π λ α σ ι ε π ι μ ε ρ ή ς αριθμός είναι ο $\frac{\alpha}{\beta}=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$, που κατά τους Πυθαγορείους, αφού εμπεριέχει αριθμό που δεν συμπίπτει με έναν από τους αριθμούς της ιεράς τετρακτύος, δεν μπορεί να εκφράζει εύφωνο ή σύμφωνο διάστημα[41].

Αφού, λοιπόν, οι μικρότεροι των επιμερών, των πολλαπλασιεπιμορίων και των πολλαπλασιεπιμερών αριθμών δεν είναι δυνατόν να εκφράζουν σύμφωνα μουσικά διαστήματα, κατά μείζονα λόγον κι όλοι οι αντίστοιχοι μεγαλύτεροί τους αριθμοί δεν μπορούν, κατά την άποψη των Πυθαγορείων, να εκφράζουν σύμφωνα μουσικά διαστήματα.

Για την κατανόηση των παραπάνω να μη διαφεύγει της προσοχής μας ότι οι «κανονικοί», δηλαδή οι ερευνητές που χρησιμοποιούσαν τον κανόνα (=μονόχορδο) για ακουστικά πειράματα, στην αρχή χρησιμοποιούσαν τον αρχέγονο κανόνα, τον Πυθαγόρειο, που ητο διηρημένος σε τέσσερα ίσα μέρη. Τούτο σημαίνει ότι ο κανών έφερε δεσμούς (=τάστα) με τις αριθμήσεις 1, 2, 3, 4 και υποστήριζε στη μουσική πράξη εύφωνα μουσικά διαστήματα εκφραζόμενα ΜΟΝΟ με σχέσεις μεταξύ των αριθμών της ιεράς τετρακτύος[42]. Σ’ αυτό συνηγορούν το Πυθαγόρειο πείραμα κατά Γαυδέντιον με τα δονούμενα τμήματα της χορδής του μονοχόρδου και η ρήση του Φιλολάου «ἁρμονίας δὲ μέγεθος συλλαβὰ καὶ δι' ὀξειᾶν»[43] (Νικόμαχος, Εγχειρίδιον Αρμονικής, 9.1.14-15).

---

[41] Μη λησμονούμε ότι αυτό το διάστημα είναι το διαπασών και δια τεσσάρων (διαπασών + τετάρτη) $\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}=2+\frac{2}{3}\right)$, το οποίο, επειδή εκφράζεται με πολλαπλασιεπιμερή σχέση, εντάσσεται στα διάφωνα ή ασύμφωνα διαστήματα.

[42] Οἱ παλαιότεροι γοῦν τῶν ἁρμονικῶν, καὶ μάλιστα οἱ τῆς τοῦ Πυθαγόρου αἱρέσεως, οἵτινες ὡς ἀρχὴν τῶν ὅλων τὸν ἀριθμὸν ὑπελάμβανον, οὐδαμῶς παρεδέχοντο ὡς σύμφωνον τὸ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ τεσσάρων σύστημα, ἐπειδήπερ ὁ λόγος αὐτοῦ οὐκ ἐν ἐπιμορίοις συνίσταται λόγοις, ὡς τὰ λοιπὰ σύμφωνα, τὸ μὲν διὰ τεσσάρων ἐν ἐπιτρίτῳ, τὸ δὲ διὰ πέντε ἐν ἡμιολίῳ, τὸ διὰ πασῶν ἐν ἡμιολίῳ καὶ ἐπιτρίτῳ, τὸ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ πέντε ἐν ἡμιολίῳ, ἐπιτρίτῳ καὶ ἡμιολίῳ, καὶ τὸ δὶς διὰ πασῶν ἐν ἡμιολίῳ, ἐπιτρίτῳ καὶ ἡμιολίῳ καὶ ἐπιτρίτῳ, καὶ ὅτι οὐκ ἐν τοῖς ἀπὸ μονάδος μέχρι τετράδος ἀριθμοῖς, καθάπερ καὶ τῶν ἄλλων ἁπάντων ἁρμονικῶν συστημάτων ἕκαστον τεθεώρηται, διότι καὶ ὁ τέσσαρα τελειωτικὸς τοῦ δέκα ἐστί. Πῶς δὲ αἱ συμφωνίαι πᾶσαι ἐντὸς τῆς τετράδος τεθεώρηνται, ἢ ὁ μὲν ἐπίτριτος τοῦ διὰ τεσσάρων λόγος ἀπὸ τοῦ δ πρὸς τὸν γ, ὁ δὲ ἡμιόλιος τοῦ διὰ πέντε λόγος ἀπὸ τοῦ γ πρὸς τὸν β, ὁ δὲ διπλάσιος τοῦ διὰ πασῶν λόγος ἀπὸ τοῦ δ πρὸς τὸν β, καὶ ἀπὸ τοῦ β πρὸς τὸν ἕνα· ὁ δὲ τριπλάσιος τοῦ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ πέντε λόγος ἀπὸ τοῦ τρία πρὸς τὸ ἕν· ὁ δὲ τετραπλάσιος τοῦ δὶς διὰ πασῶν λόγος ἀπὸ τοῦ δ πρὸς τὸ ἕν;
Γεωργίου Παχυμέρη, *Περί Αρμονικής,* Κεφάλαιο Ι, Στίχοι 9-23.

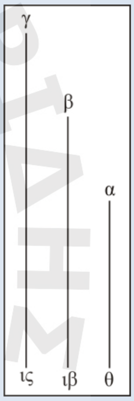
[43] Οι έννοιες «ἁρμονία», «συλλαβὰ» και «δι' ὀξειᾶ» σχετίζονται με τα μεγέθη των μουσικών διαστημάτων «διαπασών», «διατεσσάρων» και «διαπέντε», αντιστοίχως.

1.6. Θεμελιώδες Πυθαγόρειο αξίωμα για τη μουσική συμφωνία και η θεωρία των διακροτημάτων του Hermann von Helmholtz[44]

Ένας σύνθετος ήχος χαρακτηρίζεται από την αρμονική του δομή, δηλαδή από τον θεμέλιό του και το πλήθος των αρμονικών του. Όταν δύο σύνθετοι ήχοι συνηχούν, ο θεμέλιος και οι αρμονικοί εκάστου ήχου συμμετέχουν στο ερέθισμα, που φθάνει στο αυτί του ακροατού. Γενικώς, όσο μικρότεροι είναι οι αριθμοί που εκφράζουν το λόγο των θεμελίων των δύο συνθέτων ήχων, τόσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός της συμφωνίας του διαστήματός των, διότι κατά τη θεωρία των διακροτημάτων οι μικροί αριθμοί συνεπάγονται την απουσία των ενοχλητικών διακροτημάτων μεταξύ των υψηλοτέρας τάξεως αρμονικών.

2.1 Η ακουστική πρόταση υπ' αριθμόν ια.

Στην πρόταση αυτή ο Ευκλείδης με την αποδεικτική διαδικασία της εις άτοπον απαγωγής αποδεικνύει ότι το διά τεσσάρων διάστημα είναι επιμόριον. Θεωρώντας, όμως, ευκολοαπόδεικτη τη διαδικασία που αφορά και εις το διά πέντε διάστημα, την παραλείπει. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο συγγραφεύς της πραγματείας αναφέρεται σε ονόματα των φθόγγων του αρχαιοελληνικού Τελείου Αμεταβόλου Συστήματος[45].

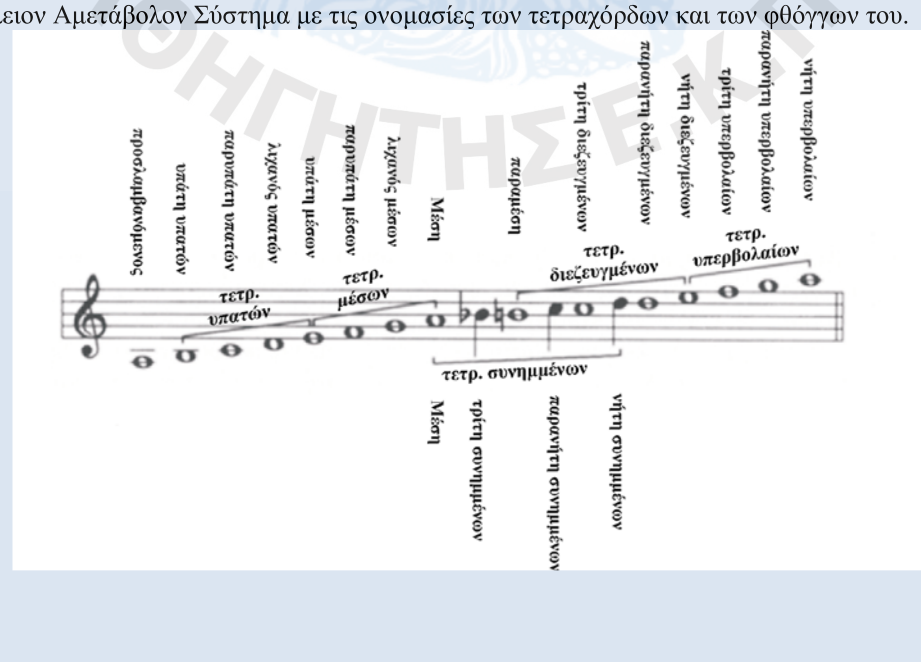


ια. Τὸ διὰ τεσσάρων διάστημα καὶ τὸ διὰ πέντε ἑκάτερον ἐπιμόριόν ἐστιν.
ἔστω γὰρ νήτη μὲν συνημμένων ὁ α, μέση δὲ ὁ β, ὑπάτη δὲ μέσων ὁ γ. τὸ ἄρα αγ διάστημα δὶς διὰ τεσσάρων ὄν ἐστι διάφωνον· οὐκ ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον. ἐπεὶ οὖν δύο διαστήματα ἴσα τὰ αβ, βγ συντεθέντα τὸ ὅλον μὴ ποιεῖ πολλαπλάσιον, οὐδὲ ἄρα τὸ αβ ἐστι πολλαπλάσιον. καί ἐστι σύμφωνον· ἐπιμόριον ἄρα. ἡ αὐτὴ δὲ ἀπόδειξις καὶ ἐπὶ τοῦ διὰ πέντε.

---

[44] Βλέπε Σπυρίδης, Χαράλαμπος (2005). *Φυσική και Μουσική Ακουστική*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Grapholine. σ. 622 κ.ε.

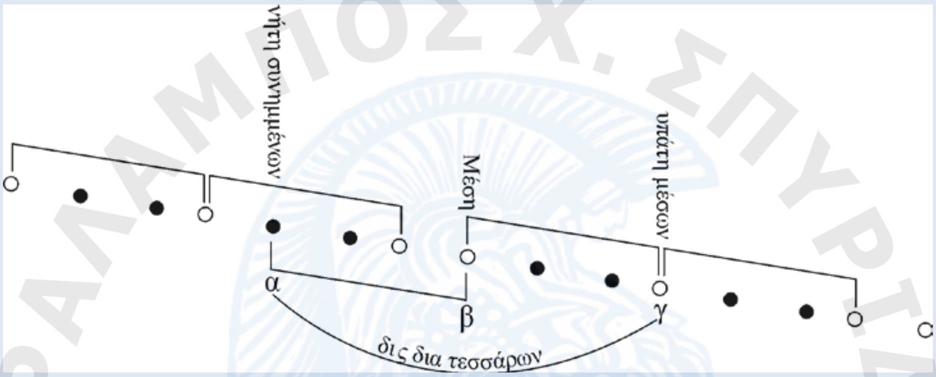
[45] Το Τέλειον Αμετάβολον Σύστημα με τις ονομασίες των τετραχόρδων και των φθόγγων του.



2.1.1. Νεοελληνική απόδοση και απόδειξη της Προτάσεως ια δια το επί διά τεσσάρων διάστημα

Το[46] δια τεσσάρων διάστημα και το δια πέντε (διάστημα) το καθένα τους είναι επιμόριο (διάστημα). Διότι[47] έστω ότι ο μεν α (είναι) νήτη συνημμένων (βλέπε βοηθητικό σχήμα 2), μέση δε ο β, υπάτη δε μέσων ο γ[48]. Άρα[49] το διάστημα αγ, όντας δις δια τεσσάρων, είναι διάφωνο[50]. Δεν είναι συνεπώς πολλαπλάσιο. Επειδή, λοιπόν, δύο ίσα διαστήματα τα αβ και βγ, συνενούμενα δημιουργούν ολικό διάστημα μη πολλαπλάσιο, συμπεραίνεται ότι ούτε το διάστημα αβ είναι πολλαπλάσιο[51]. Είναι και σύμφωνο[52]. Άρα[53] είναι επιμόριο[54].

Η ίδια απόδειξη και για το δια πέντε (διάστημα).



Σχήμα 2: Το τμήμα του αρχαιοελληνικού Τελείου Αμεταβόλου Συστήματος για την απόδειξη του δια τεσσάρων διαστήματος.

---

46 Αρχίζει η πρότασις.

47 Αρχίζει η έκθεσις.

48 Τα διαστήματα υπάτη μέσων-μέση και μέση-νήτη συνημμένων στο Τέλειον Αμετάβολον Σύστημα των αρχαίων Ελλήνων είναι δια τεσσάρων σε σχέση επίτριτο (τετράχορδα). Τα συγκεκριμένα δύο τετράχορδα είναι συνημμένα.

49 Δεν υπάρχει διορισμός. Αρχίζουν η κατασκευή και η απόδειξις.

50 Το συμπέρασμα αυτό προέρχεται από τη μουσική εμπειρία και την πρόταση δ της πραγματείας.

51 Συνέπεια της προτάσεως ε της πραγματείας. Εδώ τελειώνει η κατασκευή.

52 Εδώ τελειώνει η απόδειξις.

53 Αρχίζει το συμπέρασμα.

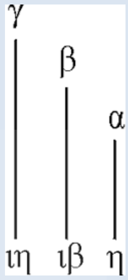
54 Προκύπτει από το αξίωμα που ετέθη στην εισαγωγή της πραγματείας, ότι δηλαδή τα σύμφωνα (=εύφωνα) διαστήματα είτε είναι πολλαπλάσια, είτε είναι επιμόρια.

2.1.2. Διατύπωση, νεοελληνική απόδοση και απόδειξη της Προτάσεως ια δια το επί δια πέντε διάστημα[55]

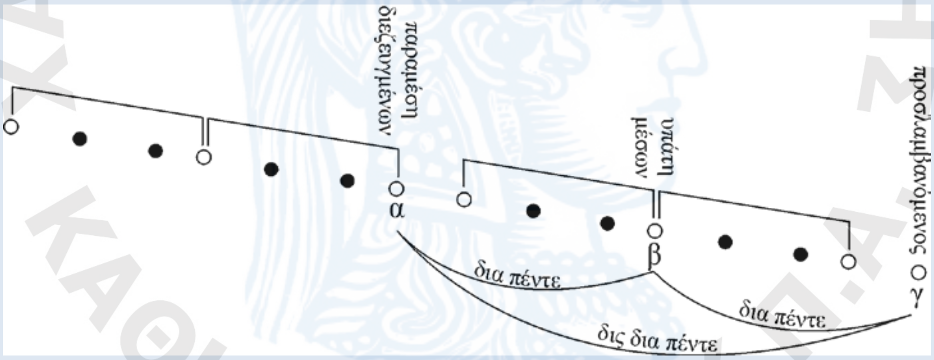
Για έναν σύγχρονο μελετητή της κατατομής κανόνος, ο οποίος δεν γνωρίζει καλώς τα περί των αρχαιοελληνικών μουσικών συστημάτων, η αποδεικτική διαδικασία για το δια πέντε διάστημα δεν είναι κάτι το ευκολοαπόδεικτο.

Θεώρησα, λοιπόν, καλό να διατυπώσω την σχετική αποδεικτέα πρόταση για το διά πέντε διάστημα και να προβώ στην απόδειξή της.

Ἔστω γὰρ παραμέση μὲν διεζευγμένων ὁ α, ὑπάτη δὲ μέσων ὁ β, προσλαμβανόμενος δὲ ὁ γ. τὸ ἄρα αγ διάστημα δὶς διὰ πέντε ὄν ἐστὶ διάφωνον· οὐκ ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον. ἐπεὶ οὖν δύο διαστήματα ἶσα τὰ αβ βγ συντεθέντα τὸ ὅλον μὴ ποιεῖ πολλαπλάσιον, οὐδὲ ἄρα τὸ αβ ἐστὶ πολλαπλάσιον. καὶ ἔστι σύμφωνον· ἐπιμόριον ἄρα.



[Διότι έστω ότι ο μεν α (είναι) παραμέση διεζευγμένων (βλέπε βοηθητικό σχήμα 3), υπάτη δε μέσων ο β, προσλαμβανόμενος δε ο γ. Άρα το διάστημα αγ, όντας δις δια πέντε, είναι διάφωνο. Δεν είναι, συνεπώς, πολλαπλάσιο. Επειδή, λοιπόν, δύο ίσα διαστήματα τα αβ και βγ, συνενούμενα δημιουργούν ολικό διάστημα μη πολλαπλάσιο, συμπεραίνεται ότι ούτε το διάστημα αβ είναι πολλαπλάσιο. Είναι και σύμφωνο. Άρα είναι επιμόριο].



Σχήμα 3: Το τμήμα του αρχαιοελληνικού Τελείου Αμεταβόλου Συστήματος για την απόδειξη του δια πέντε διαστήματος.

Για τον υπολογισμό των αριθμητικών τιμών των μηκών η, ιβ, ιη, των ταλαντουμένων τμημάτων χορδής ενεργούμε ως εξής:

Πρώτος τρόπος: Ως πρώτος ακέραιος που διαιρείται δια του 2 λαμβάνεται ο αριθμός 8. Αυτού ο ημιόλιος προκύπτει ότι είναι ο 12. Και του 12 ο ημιόλιος προκύπτει ότι είναι ο 18.

[55] Η απόδειξη στηρίζεται στο γεγονός ότι αυτά είναι τα μοναδικά πεντάχορδα (ένα πλήρες τετράχορδο συν ένας επόγδοος τόνος) που μπορεί να επιλέξει κανείς ανεξαρτήτως είτε της κατανομής των τόνων και του λείμματος στο κάθε τετράχορδο (τ,τ,λ τ,λ,τ λ,τ,τ), είτε του γένους (διατονικό, χρωματικό, εναρμόνιο) των τετραχόρδων.

8 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 8=\frac{3}{2}\cdot 8=12$

8 12 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 12=\frac{3}{2}\cdot 12=18$

η *ιβ* *ιη*

Δεύτερος τρόπος: Ο πρώτος ακέραιος που διαιρείται δια του 2 είναι ο αριθμός 2. Αυτού ο ημιόλιος προκύπτει ότι είναι ο 3. Επειδή ο 3 δεν διαιρείται δια του 2, προκειμένου να ευρεθεί ο ημιόλιός του, διπλασιάζουμε τους ευρεθέντες αριθμούς και προχωρούμε κατά τα γνωστά, οπότε προκύπτουν οι τρεις αριθμοί 4, 6 και 9, δηλαδή οι δ, ς, θ. Μια οκτάβα χαμηλότερα από αυτούς τους αριθμούς (αφού οι αριθμοί εκφράζουν παλλόμενα μήκη τμημάτων χορδής) είναι οι αριθμοί 8, 12, 18, δηλαδή οι η, ιβ, ιη.

2 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 2=\frac{3}{2}\cdot 2=3$

4 6 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 6=\frac{3}{2}\cdot 6=9$ *ή* 8 12 18

δ *ς* *θ* *η* *ιβ* *ιη*

Τρίτος τρόπος: Ο τρόπος αυτός παραλαμβάνεται από το Κεφάλαιο Α’ της Πραγματείας «*Η Αρμονική*» του Γεωργίου Παχυμέρη[56], όπως έχει αναφερθεί στην Πρόταση θ΄, και αποτελεί μια τροποποίηση του δεύτερου τρόπου, που εξετέθη προηγουμένως.

Επειδή αναζητούνται δύο ημιόλιοι αριθμοί, ο Παχυμέρης ξεκινά από τον δεύτερο διπλάσιο, δηλαδή ξεκινάει από τον αριθμό $2^2=4$. Μ’ αυτόν τον τρόπο, υπερπηδά όλη τη διαδικασία, που εξετέθη στον δεύτερο τρόπο, και ξεκινά από το τέλος αυτής. Με άλλα λόγια ο δεύτερος διπλάσιος είναι ο αριθμός $2^2=4$ και οι δύο ημιόλιοι, που δομούνται με βάση αυτόν, είναι οι:

$4\cdot\frac{3}{2}=6$

$6\cdot\frac{3}{2}=9$

Μια οκτάβα χαμηλότερα από αυτούς τους αριθμούς είναι οι αριθμοί 8, 12, 18, δηλαδή οι η, ιβ, ιη.

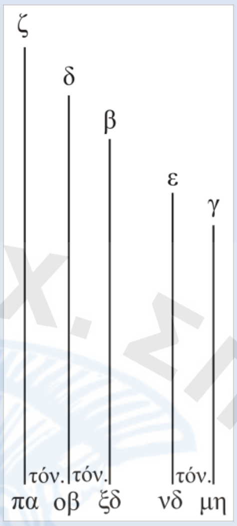
3.1 Η μουσική πρόταση υπ’ αριθμόν ιζ περί του εναρμονίου γένους.

Στην πρόταση αυτή ο Ευκλείδης τοποθετεί τον λιχανό σε εναρμόνιο τετράχορδο «μετακινούμενος» κατά διαστήματα διατεσσάρων και διαπέντε, δηλαδή κατά σύμφωνα

[56] Βλέπε Μαρία Χ. Παπαδοπούλου, «*Η Αρμονική – Μουσική τάξη κατά τον σοφώτατο, πρωτέκδικο και δικαιοφύλακα Γεώργιο Παχυμέρη*», Διδακτορική Διατριβή υπό την επίβλεψη του καθηγητού Χαράλαμπου Χ. Σπυρίδη στο Τμήμα Μουσικών Σπουδών του Πανεπιστημίου Αθηνών, 2007.

διαστήματα μέσα σε δύο συνημμένα τετράχορδα εκατέρωθεν της μέσης του Τελείου Αμεταβόλου Συστήματος. Θεωρώντας, όμως, ευκολοαπόδεικτη τη διαδικασία που αφορά και εις την τοποθέτηση σε εναρμόνιο τετράχορδο της παρανήτης, η οποία είναι ομόλογος φθόγγος του λιχανού στα τετράχορδα άνωθεν της μέσης, την παραλείπει.

ιζ. Αἱ παρανῆται αἱ καὶ λιχανοὶ ληφθήσονται διὰ συμφωνίας οὕτως. ἔστω γὰρ μέση ὁ β. ἐπιτετάσθω διὰ τεσσάρων ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ ἀνείσθω διὰ πέντε ἐπὶ τὸ δ. τόνος ἄρα ὁ βδ. πάλιν δὲ ἀπὸ τοῦ δ διὰ τεσσάρων ἐπιτετάσθω ἐπὶ τὸ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ ε ἀνείσθω ἐπὶ τὸ ζ διὰ πέντε. τόνος ἄρα τὸ ζδ. δίτονος ἄρα τὸ ζβ. λιχανὸς ἄρα τὸ ζ. ὁμοίως ἂν καὶ αἱ παρανῆται ληφθήσονται.



3.1.1. Νεοελληνική απόδοση και απόδειξη της Προτάσεως ιζ[57] δια την λήψη των λιχανών

Οι[58] παρανήτες και οι λιχανοί θα ληφθούν με τη βοήθεια των συμφωνιών ως ακολούθως (βλέπε βοηθητικό σχήμα 4):

Έστω[59], λοιπόν, μέση ο β. Ανεβείτε[60] κατά δια τεσσάρων[61] στο γ, και από το γ κατεβείτε[62] δια πέντε στο δ. Άρα το βδ (διάστημα) είναι τόνος[63]. Πάλι δε από το δ δια

---

57 Η Πρόταση ιζ δεν αναφέρεται από τον Πορφύριο. Πρέπει να σημειωθεί ότι μόνον οι Προτάσεις ιζ και ιη αναφέρονται στο εναρμόνιο γένος των αρχαίων Ελλήνων.

58 Αρχίζει η πρότασις.

59 Αρχίζει η έκθεσις.

60 Δεν υπάρχουν διορισμός και κατασκευή. Αρχίζει η απόδειξις.
Επίτασις: το τέντωμα της χορδής. Πρόκειται για έναν όρο, που εχρησιμοποιείτο και για τα πνευστά μουσικά όργανα, ακόμη και για την ανθρώπινη φωνή. Με το τέντωμα της χορδής επιτυγχάνεται η μετάβαση από ένα χαμηλό σε ένα υψηλότερο φθόγγο. Για την επίταση ομιλούν ο Αριστόξενος (Αρμ. I, Mb. 10, 24-25), ο Βακχείος (Εις. 45), ο Αριστείδης (Περί Μουσικής, 8 Mb. 7 R.P.W.-I.).
Ο Αριστόξενος (I, 10, 35) μας πληροφορεί ότι πολλοί κατά λάθος ταυτίζουν την επίταση με την οξύτητα (ύψος) και την άνεση με τη βαρύτητα του ήχου.
Αξίζει να σχολιασθεί το παρακάτω απόσπασμα από την Αρμονική Εισαγωγή του Γαυδεντίου, του φιλοσόφου:
1. 22 ἡ δὲ τῆς φωνῆς κίνησις ἐκ βαρυτέρου μὲν εἰς ὀξύτερον ἰούσης τόπον ἐ π ί τ α σ ι ς , ἀνάπαλιν δὲ ἄ ν ε σ ι ς καλεῖταί τε καὶ ἐστίν. ἐπίτασις μὲν οὖν ὀξύτητος ποιητική, καὶ βαρύτητος δὲ ἡ ἄνεσις. διαφέρει δὲ βαρύτης μὲν ἀνέσεως, ὀξύτης δὲ ἐπιτάσεως οὐ μόνον ὅτι ἐξ ἑκατέρου τούτων ἑκάτερον ἀποτελεῖται, ἀλλ' ὅτι τῆς τε ἐπιτάσεως παυσαμένης καὶ μηκέτι οὔσης ὀξύτης γέγονέ τε καὶ ἐστί, καὶ τῆς ἀνέσεως ὁμοίως ἡ βαρύτης. κοινὸν δὲ ἀμφοτέραις συμβέβηκεν ἡ τ ά σ ι ς · ἦτε γὰρ ὀξύτης καὶ ἡ βαρύτης τάσιν ἔχουσαί τινα φαίνονται.
[Η δε κίνηση της φωνής με κατεύθυνση από ένα βαρύτερο τόπο προς έναν οξύτερο τόπο (και καλείται και είναι) ε π ί τ α σ η , η αντίστροφη κίνηση και καλείται και είναι ά ν ε σ η . Η επίταση, λοιπόν, είναι η ικανή να δημιουργήσει την ο ξ ύ τ η τ α και η άνεση (είναι η ικανή να δημιουργήσει) τη β α ρ ύ τ η - τ α . Διαφέρει μάλιστα η μεν βαρύτητα από την άνεση, η δε οξύτητα από την επίταση όχι μόνον επειδή η

τεσσάρων ανεβείτε στο ε, και από το ε κατεβείτε στο ζ δια πέντε. Άρα τόνος (είναι) το ζδ (διάστημα). Δίτονο[64] άρα (είναι) το ζβ (διάστημα). Λιχανός[65] συνεπώς (είναι) το ζ. Παρομοίως θα μπορούσαν και οι παρανήτες να ληφθούν.

καθεμία, χωριστά λαμβανόμενη, εμπεριέχει και στοιχεία της άλλης, αλλά διότι, όταν η επίταση παύσει και να επενεργεί και να υφίσταται πλέον, τότε και έχει γίνει και είναι η οξύτητα και ομοίως (όταν) η άνεση (παύσει και να επενεργεί και να υφίσταται πλέον, τότε και έχει γίνει και είναι) η βαρύτητα. Κοινή παράμετρος και στις δύο έχει εμφανισθεί η τ ά σ η , διότι και η οξύτητα και η βαρύτητα φαίνεται να έχουν κάποια τάση].

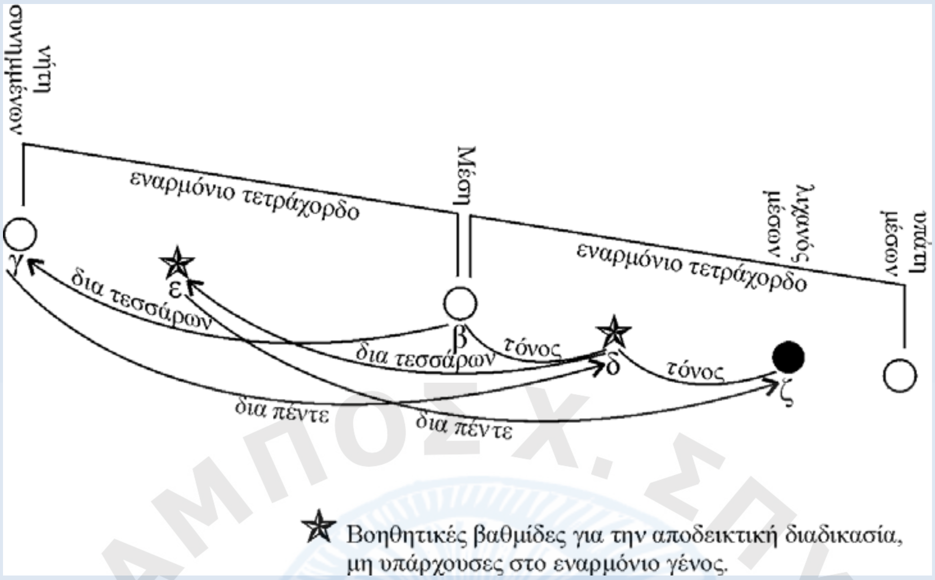
[61] Οι όροι δια τεσσάρων, δια πέντε και συμφωνιών παραπέμπουν στην αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων ως μήκη μη ηχούντων τμημάτων χορδής.

[62] Άνεσις: η χαλάρωση μιας χορδής (από το ρήμα ανίημι που έχει και τη σημασία του χαλαρώνω). Με τη χαλάρωση της χορδής επιτυγχάνεται η μετάβαση από έναν υψηλο σε ένα χαμηλότερο φθόγγο. Μ' αυτή τη σημασία αντιμετωπίζεται ο όρος από όλους σχεδόν τους αρχαίους θεωρητικούς [Αριστόξενος (Αρμ. I, 10 Mb.), Αριστείδης (Mb. II, 8, R.P.W. –I. 6-7), Βακχείος (Εις. Mb. 12, C.v.J. 302)].
Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινισθούν δύο κινήσεις αντιθέτου φοράς. Η μία κίνηση αφορά στη θέση των χορδών του μουσικού οργάνου σε σχέση με το σώμα του εκτελεστού και αναφέρεται σε κατασκευαστικά στοιχεία του εγχόρδου οργάνου, η άλλη κίνηση αφορά στο άκουσμα και σχετίζεται με τη συχνότητα του παραγομένου κάθε φορά ήχου.
Πράγματι, οι χορδές που παρήγαγαν ήχους χαμηλού μουσικού ύψους ήσαν τοποθετημένες ψηλά στο μάνικο του οργάνου, όπως συμβαίνει και σήμερα, ή μακρυά από το σώμα του μουσικού, όπως συνέβαινε π.χ. στη λύρα, και γι' αυτό ονομαζόντουσαν Υπάτες. Αντιθέτως, οι χορδές που παρήγαγαν ήχους υψηλού μουσικού ύψους, ήσαν τοποθετημένες χαμηλά στο μάνικο ή πλησιέστερα στο σώμα του μουσικού.
Συνώνυμο του ανιέναι είναι το παρανιέναι [Πλούταρχος (Περί μουσ. 1145D, 39)].
Τώρα μπορεί να κατανοηθεί η χρήση του ρήματος ανίημι (=ανέρχομαι) που σημαίνει ανέρχομαι και κτυπώ όλο και υψηλότερα ευρισκόμενη χορδή, οπότε παράγεται ήχος όλο και χαμηλοτέρου μουσικού ύψους. Και σήμερα όσο ψηλότερα προς τα κλειδιά κινείται το χέρι του εκτελεστού, τόσο και χαμηλοτέρου μουσικού ύψους ήχος παράγεται, διότι δονείται μεγαλυτέρου μήκους τμήμα χορδής.

[63] Ο φθόγγος δ καθώς και ο φθόγγος ε, παρακάτω, δεν είναι πραγματικοί φθόγγοι του εναρμονίου τετραχόρδου, αλλά νοητοί φθόγγοι που βοηθούν και εξυπηρετούν την αποδεικτική διαδικασία. Εάν υπήρχαν αυτοί οι φθόγγοι, τότε στο τετράχορδο θα υπήρχαν πέντε φθόγγοι και το διάστημα του διτόνου π.χ. μεταξύ λιχανού μέσων και της μέσης από ασύνθετο, θα ήταν σύνθετο. Στα παρεμβαλλόμενα δικά μου βοηθητικά σχήματα τους φθόγγους αυτούς τους συμβολίζω με αστέρι.

[64] Το δίτονον είναι το χαρακτηριστικό διάστημα ενός τετραχόρδου με δομή εναρμονίου γένους. Το δίτονο εμφανίζεται μεταξύ του λιχανού και του φθόγγου κορυφής του τετραχόρδου π.χ. μεταξύ λιχανού μέσων και της μέσης. Βλέπε και 7 Αριστοξ. Στοιχ. Αρμον. 22.27-23.22, 50.22-25. Στον Αρχύτα 1.21 και Πτολ. Αρμον. 30.9ff αναφέρεται αντί διτόνου (9:8)X(9:8)=81:64, το διάστημα 80:64=5:4, το οποίο είναι κατά (81:64):(80:64)=(81:80) –ένα κόμμα- μικρότερο του διτόνου. Το υπόλοιπο διάστημα του εναρμονίου τετραχόρδου, το ονομαζόμενον πυκνόν, δηλαδή το διάστημα λιχανός-υπάτη έχει μέγεθος ενός λείμματος (256:243), βλέπε Φιλόλαο (1.12 αποσπ. 6), Πλάτωνα (2.3 Τίμ. 35b-36c) και την Πρόταση 20 στην Ευκλείδου κατατομή κανόνος.

[65] Αρχίζει το συμπέρασμα.
Οι λιχανοί για τα δύο συνημμένα τετράχορδα υπατών και μέσων και οι παρανήτες για τα δύο συνημμένα τετράχορδα διεζευγμένων και υπερβολαίων καθώς και για το τετράχορδο συνημμένων του Τελείου Αμεταβόλου Συστήματος είναι οι πλέον σημαντικοί μετακινούμενοι φθόγγοι, αφού ανάλογα με τη θέση που κατέχουν, χαρακτηρίζουν το γένος του τετραχόρδου. Ίσως γι' αυτόν τον λόγο ο Αριστόξενος (Αρμονικά 1.22-26) ασχολείται διεξοδικά με τις θέσεις αυτών των φθόγγων σε σχέση με αυτό που κάνει για τις θέσεις των παρυπατών και των τριτών (Αρμονικά 1. 26-27).
κινεῖται δὲ ἡ μὲν λιχανὸς ἐν τονιαίῳ τόπῳ, ἡ δὲ παρυπάτη ἐν διεσιαίῳ. λιχανὸς μὲν οὖν ἐστιν ὀξυτάτη ἡ τόνον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἀπέχουσα τῶν τὸ τετράχορδον περιεχόντων, βαρυτάτη δὲ ἡ δίτονον.
Κλεονίδης, Εισαγωγή Αρμονική, 6, 11-14.



Σχήμα 4: Η λήψη των λιχανών εντός του εναρμονίου τετραχόρδου.

3.1.2. Διατύπωση, νεοελληνική απόδοση και απόδειξη της Προτάσεως ιζ δια την λήψη των παρανητών

Για έναν σύγχρονο μελετητή της κατατομής κανόνος, ο οποίος δεν γνωρίζει καλώς τα περί του πυκνού[66] του πυθαγορείου εναρμονίου γένους, θεώρησα απαραίτητο να διατυπώσω την σχετική αποδεικτέα πρόταση για τη λήψη των παρανητών και να προβώ στην απόδειξή της.

---

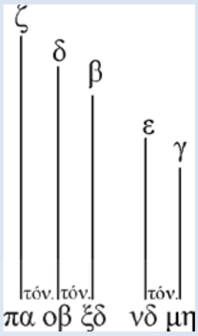
[66] Πυκνόν: όταν το άθροισμα των δύο μικρών μουσικών διαστημάτων ενός τετραχόρδου ήταν μικρότερο από το τρίτο μουσικό διάστημα αυτού, τότε μιλούσαν για το πυκνόν (μέρος) του τετραχόρδου. Αυτό συμβαίνει ΜΟΝΟΝ στο εναρμόνιο (παράδειγμα α΄) και στο χρωματικό (παράδειγμα β΄) γένος του τετραχόρδου.

Στο πρώτο παράδειγμα το άθροισμα των δύο μικρών μουσικών διαστημάτων του τετραχόρδου είναι ίσο με $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\right)$ του τόνου, δηλαδή με ένα ημιτόνιο, ενώ το υπόλοιπο μέρος του τετραχόρδου ισούται με ένα δίτονο. Στο δεύτερο παράδειγμα το άθροισμα των δύο μικρών μουσικών διαστημάτων του τετραχόρδου είναι ίσο με $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\right)$ τόνο, ενώ το υπόλοιπο μέρος του τετραχόρδου ισούται με ένα τόνο και μισό. Στο διατονικό γένος ΔΕΝ υπάρχει πυκνόν, διότι δεν ισχύει η τεθείσα προϋπόθεση. Πράγματι $\left(\frac{1}{2}+1=1\frac{1}{2}>1\right)$.

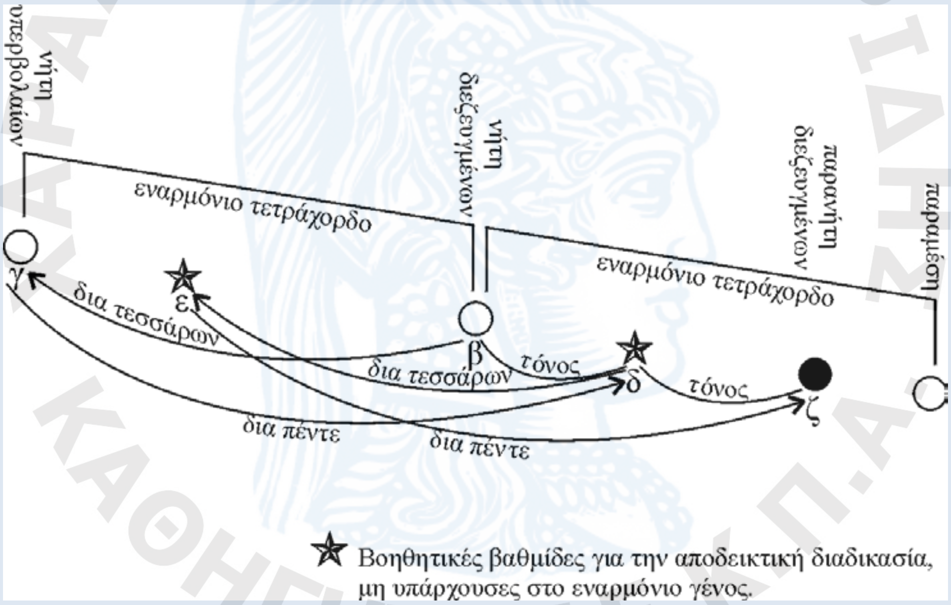
Οι χαμηλότεροι φθόγγοι του πυκνού ελέγοντο βαρύπυκνοι, οι μεσαίοι ελέγοντο μεσόπυκνοι και οι υψηλότεροι ελέγοντο οξύπυκνοι. Άπυκνοι ελέγοντο οι φθόγγοι που δεν είχαν καμμία σχέση με το πυκνό.

Στην πρόταση αυτή ο Ευκλείδης τοποθετεί την παρανήτη σε εναρμόνιο τετράχορδο «μετακινούμενος» κατά διαστήματα διατεσσάρων και διαπέντε, δηλαδή κατά σύμφωνα διαστήματα μέσα σε δύο συνημμένα τετράχορδα εκατέρωθεν της νήτης διεζευγμένων του Τελείου Αμεταβόλου Συστήματος (βλέπε βοηθητικό σχήμα 5).

Ἔστω γὰρ νήτη διεζευγμένων ὁ β. ἐπιτετάσθω διὰ τεσσάρων ἐπὶ τὸ γ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ ἀνείσθω διὰ πέντε ἐπὶ τὸ δ. τόνος ἄρα ὁ βδ. πάλιν δὲ ἀπὸ τοῦ δ διὰ τεσσάρων ἐπιτετάσθω ἐπὶ τὸ ε, καὶ ἀπὸ τοῦ ε ἀνείσθω ἐπὶ τὸ ζ διὰ πέντε. τόνος ἄρα τὸ ζδ. δίτονος ἄρα τὸ ζβ. παρανήτη ἄρα τὸ ζ.



[Έστω, λοιπόν, νήτη διεζευγμένων ο β. Ανεβείτε κατά δια τεσσάρων στο γ, και από το γ κατεβείτε δια πέντε στο δ. Άρα το βδ (διάστημα) είναι τόνος. Πάλι δε από το δ δια τεσσάρων ανεβείτε στο ε, και από το ε κατεβείτε στο ζ δια πέντε. Άρα τόνος (είναι) το ζδ (διάστημα). Δίτονο άρα (είναι) το ζβ (διάστημα). Παρανήτη συνεπώς (είναι) το ζ].



Σχήμα 5: Η λήψη των παρανητών εντός του εναρμονίου τετραχόρδου.

Ο υπολογισμός των αριθμητικών τιμών μη, νδ, ξδ, οβ, πα για τους λιχανούς και τις παρανήτες του εναρμονίου γένους βάσει των αντιστοίχων γραμμικών σχημάτων γίνεται ως εξής:

Πρώτος τρόπος:

$$\gamma \Rightarrow \chi \qquad \varepsilon\acute{\alpha}\nu\ \ \chi = 48 \qquad \gamma \Rightarrow 48\ \ \mu\eta$$

$$\varepsilon \Rightarrow \chi \cdot \frac{9}{8} \qquad \varepsilon \Rightarrow 54\ \ \nu\delta$$

$$\beta \Rightarrow \chi \cdot \frac{4}{3} \qquad \beta \Rightarrow 64\ \ \xi\delta$$

$$\delta \Rightarrow \chi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} = \chi \cdot \frac{9}{6} = \chi \cdot \frac{3}{2} \qquad \delta \Rightarrow 72\ \ o\beta$$

$$\zeta \Rightarrow \chi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = \chi \cdot \frac{27}{16} = \chi \cdot \left(1 + \frac{11}{16}\right) \qquad \zeta \Rightarrow 81\ \ \pi\alpha$$

Δεύτερος τρόπος:

$$8 \qquad \left(1 + \frac{1}{8}\right) \cdot 8 = 9$$

τριπλασιάζω τους ευρεθέντες αριθμούς

$$24 \quad 27 \quad \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot 24 = \frac{4}{3} \cdot 24 = 32$$

$$24 \quad 27 \quad 32 \quad \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 24 = \frac{3}{2} \cdot 24 = 36$$

προκειμένου ο 24 να διαιρείται δια 16, πολλαπλασιάζω επί 2

$$48 \quad 54 \quad 64 \quad 72 \quad \left(1 + \frac{11}{16}\right) \cdot 48 = \frac{27}{16} \cdot 48 = 81$$

$$48 \quad 54 \quad 64 \quad 72 \quad 81$$

$$\mu\eta \quad \nu\delta \quad \xi\delta \quad o\beta \quad \pi\alpha$$

<u>Σημείωση</u>: Όλες οι παραπάνω αριθμητικές σχέσεις (επιμόριες κι επιμερείς) έχουν εκφρασθεί συναρτήσει του πρώτου αριθμού και στους δύο τρόπους της αποδείξεως.

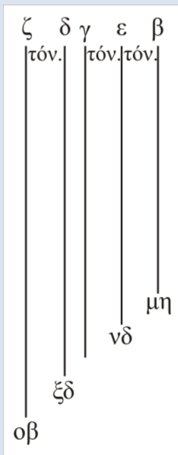
4.1 Η μουσική πρόταση υπ’ αριθμόν ιη[67] περί του εναρμονίου γένους.

Στην πρόταση αυτή ο Ευκλείδης τοποθετεί την παρυπάτη σε εναρμόνιο τετράχορδο «μετακινούμενος» κατά διαστήματα διατεσσάρων και διαπέντε, δηλαδή κατά σύμφωνα διαστήματα μέσα σε δύο συνημμένα τετράχορδα κάτωθεν της μέσης του Τελείου Αμεταβόλου Συστήματος (σχήμα 6). Θεωρώντας, όμως, ευκολοαπόδεικτη τη διαδικασία που αφορά και εις την τοποθέτηση σε εναρμόνιο τετράχορδο της τρίτης, η οποία είναι ομόλογος φθόγγος της παρυπάτης στα τετράχορδα άνωθεν της μέσης, την παραλείπει.

ιη. Αἱ παρυπάται καὶ αἱ τρίται οὐ διαιροῦσι τὸ πυκνὸν
εἰς ἴσα.
ἐστω γὰρ μέση μὲν ὁ β, λιχανὸς δὲ ὁ γ, ὑπάτη δὲ
ὁ δ. ἀνείσθω ἀπὸ τοῦ β διὰ πέντε ἐπὶ τὸ ζ. τόνος ἄρα

[67] Πρέπει να σημειωθεί ότι μόνον οι Προτάσεις ιζ και ιη αναφέρονται στο εναρμόνιο γένος των αρχαίων Ελλήνων. Η Πρόταση ιη, όπως και η Πρόταση ιζ, δεν αναφέρονται από τον Πορφύριο. Επειδή ο Ευκλείδης πουθενά προηγουμένως δεν κάνει ονομαστικά μνεία των γενών, υπάρχει η άποψη ότι αυτές οι τέσσερις Προτάσεις δεν είναι μέρος της αρχικής πραγματείας, αλλά ότι είναι κατοπινά ενθέματα.

ὁ ζδ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ διὰ τεσσάρων ἐπιτετάσθω ἐπὶ τὸ ε. τόνος ἐστὶν ἄρα τὸ ζδ διάστημα καὶ τὸ βε. κοινὸν προσκείσθω τὸ δγ. τὸ ἄρα ζε ἴσον ἐστὶ τῷ δβ. διὰ τεσσάρων δὲ τὸ ζε˙ οὐκ ἄρα μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει τις τῶν ζε˙ ἐπιμόριον γὰρ τὸ διάστημα. καί ἐστιν ἴσος ὁ δβ τῷ ζε˙ οὐκ ἄρα τοῦ δγ μέσος ἐμπεσεῖται, ὅ ἐστιν ἀπὸ ὑπάτης ἐπὶ λιχανόν. οὐκ ἄρα ἡ παρυπάτη διελεῖ τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα. ὁμοίως οὐδὲ ἡ τρίτη.



4.1.1. Νεοελληνική απόδοση και απόδειξη της Προτάσεως ιη δια την λήψη των παρυπατών

Οι[68] παρυπάτες και οι τρίτες δεν διαιρούν το πυκνόν[69] σε ίσα (διαστήματα). Διότι[70] έστω μέση μεν ο β, λιχανός δε ο γ, υπάτη δε ο δ. Κατεβείτε[71] από τον β δια πέντε[72] στον ζ. Τόνος άρα (είναι το διάστημα) ζδ[73]. Και από τον ζ ανεβείτε δια τεσσάρων στον ε. Τόνος άρα (είναι) το διάστημα ζδ και το βε. Κοινό ας παραμένει το δγ (διάστημα). Το (διάστημα) λοιπόν ζε είναι ίσο προς το δβ[74]. Δια τεσσάρων δε (είναι το διάστημα) ζε. Συνεπώς[75] δεν παρεμβάλλεται κάποιος μέσος ανάλογος στους ζε, διότι επιμόριο (είναι) το διάστημα[76]. Και είναι ίσο το δβ προς το ζε. Συνεπώς δεν θα παρεμβάλλεται μέσος ανάλογος στο δγ[77], το οποίο είναι από την υπάτη έως τον λιχανό. Κατά[78] συνέπεια η παρυπάτη δεν θα διαιρεί το πυκνόν σε ίσα (διαστήματα)[79].

---

68 Αρχίζει η πρότασις.

69 Βλέπε και 7 Αριστοξ. Στοιχ. Αρμον. 24.11-14, 48.26-31, 50.15-19, 51.19-21.

70 Αρχίζει η έκθεσις.

71 Δεν υπάρχει διορισμός. Αρχίζει η απόδειξις.

72 Οι όροι δια πέντε και δια τεσσάρων παραπέμπουν στην αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων ως μήκη μη ηχούντων τμημάτων χορδής.

73 Ο φθόγγος ζ καθώς και ο φθόγγος ε, παρακάτω, δεν είναι πραγματικοί φθόγγοι του εναρμονίου τετραχόρδου, αλλά νοητοί φθόγγοι που βοηθούν και εξυπηρετούν την αποδεικτική διαδικασία. Εάν υπήρχαν αυτοί οι φθόγγοι, τότε στο τετράχορδο θα υπήρχαν, όπως έχει ήδη λεχθεί, πέντε φθόγγοι και το διάστημα του διτόνου π.χ. μεταξύ λιχανού μέσων και της μέσης από ασύνθετο, θα ήταν σύνθετο. Στα παρεμβαλλόμενα δικά μου βοηθητικά σχήματα τους φθόγγους αυτούς τους συμβολίζω με αστέρι.

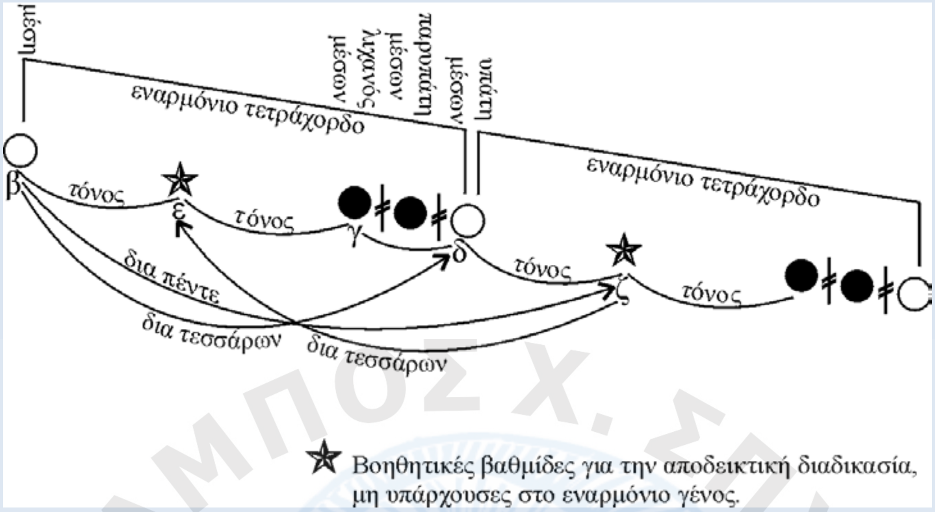
74 Το διάστημα βδ είναι δια τεσσάρων. Το διάστημα εζ είναι και αυτό δια τεσσάρων, διότι αρχίζει από το ε, που είναι ένα τόνο χαμηλότερα του β, και τελειώνει στο ζ, που είναι ένα τόνο χαμηλότερα του δ (βλέπε σχήμα 6).

75 Αρχίζει η κατασκευή.

76 Πρόταση γ. Τελειώνει η κατασκευή.

77 Το διάστημα εζ=εγ+γδ+δζ=τόνος+γδ+τόνος.
Εάν το διάστημα εζ εδιχοτομείτο με την παρεμβολή κάποιου μέσου αναλόγου, τότε αναγκαστικά και το διάστημα γδ θα εδιχοτομείτο για να ισχύει η εξίσωση τόνος+$\frac{\gamma\delta}{2}=\frac{\gamma\delta}{2}$+τόνος. Αφού, όμως, το διάστημα εζ δεν διχοτομείται με την παρεμβολή κάποιου μέσου αναλόγου, έπεται ότι και το διάστημα γδ δεν διχοτομείται.

Παρομοίως ούτε η τρίτη (θα διαιρεί το πυκνόν σε ίσα διαστήματα).



Σχήμα 6: Η λήψη των παρυπατών εντός του πυκνού του εναρμονίου τετραχόρδου.

4.1.2. Διατύπωση, νεοελληνική απόδοση και απόδειξη της Προτάσεως ιη δια την λήψη των τριτών

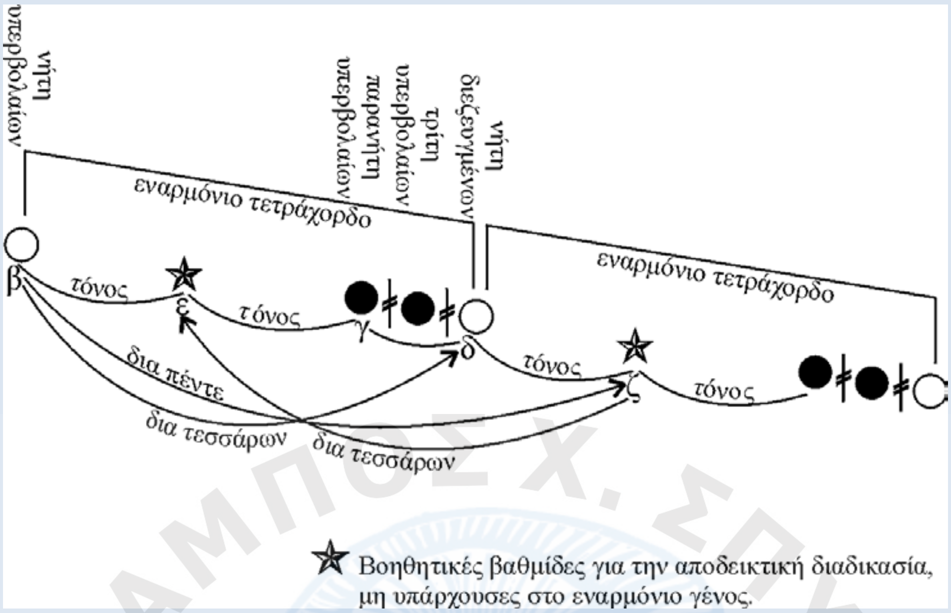
Η διατύπωση της σχετικής αποδεικτέας προτάσεως για τη λήψη των τριτών εντός του πυκνού του εναρμονίου τετραχόρδου και η απόδειξή της έπονται. Στην πρόταση αυτή ο Ευκλείδης τοποθετεί την τρίτη στο πυκνό του εναρμονίου τετραχόρδου «μετακινούμενος» κατά διαστήματα διατεσσάρων και διαπέντε, δηλαδή κατά σύμφωνα διαστήματα μέσα σε δύο συνημμένα τετράχορδα άνωθεν της μέσης του Τελείου Αμεταβόλου Συστήματος (βλέπε βοηθητικό σχήμα 7).

Αἱ τρίται οὐ διαιροῦσι τὸ πυκνὸν εἰς ἶσα.
Ἔστω γὰρ νήτη ὑπερβολαίων μὲν ὁ β, παρανήτη ὑπερβολαίων δὲ ὁ γ, νήτη διεζευγμένων δὲ ὁ δ. ἀνείσθω ἀπὸ τοῦ β διὰ πέντε ἐπὶ τὸ ζ. τόνος ἄρα ὁ ζδ. καὶ ἀπὸ τοῦ ζ διὰ τεσσάρων ἐπιτετάσθω ἐπὶ τὸ ε. τόνος ἐστὶν ἄρα τὸ ζδ διάστημα καὶ τὸ βε. κοινὸν προσκείσθω τὸ δγ. τὸ ἄρα ζε ἶσὸν ἐστι τῷ δβ. διὰ τεσσάρων δὲ τὸ ζε· οὐκ ἄρα μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει τις τῶν ζε· ἐπιμόριον γὰρ τὸ διάστημα. καὶ ἔστιν ἶσος ὁ δβ τῷ ζε· οὐκ ἄρα τοῦ δγ μέσος ἐμπεσεῖται, ὅ ἐστιν ἀπὸ νήτης διεζευγμένων ἐπὶ παρανήτην ὑπερβολαίων. οὐκ ἄρα ἡ τρίτη ὑπερβολαίων διελεῖ τὸ πυκνὸν εἰς ἶσα.

---

[78] Αρχίζει το συμπέρασμα.

[79] Το πυκνόν διαιρείται από τις παρυπάτες στα τετράχορδα υπατών και μέσων και από τις τρίτες στα τετράχορδα συνημμένων, διεζευγμένων και υπερβολαίων σε δύο διαστήματα. Στην Πυθαγόρειο θεωρία τα δύο αυτά διαστήματα είναι άνισα, αλλά στην Αριστοξένειο θεωρία τα δύο αυτά διαστήματα είναι ίσα μεταξύ τους. Ίσως λόγω αυτού του συγκερασμού ο Αριστόξενος (Αρμονικά 1.22-26) ασχολείται διεξοδικά με τις θέσεις των λιχανών και των παρανητών σε σχέση με αυτό που κάνει για τις θέσεις των παρυπατών και των τριτών (Αρμονικά 1. 26-27).



Σχήμα 7: Η λήψη των τριτών εντός του πυκνού του εναρμονίου τετραχόρδου.

[Οι τρίτες δεν διαιρούν το πυκνόν σε ίσα (διαστήματα). Διότι έστω νήτη υπερβολαίων μεν ο β, παρανήτη υπερβολαίων δε ο γ, νήτη διεζευγμένων δε ο δ. Κατεβείτε από τον β δια πέντε στον ζ. Τόνος άρα (είναι το διάστημα) ζδ. Και από τον ζ ανεβείτε δια τεσσάρων στον ε. Τόνος άρα (είναι) το διάστημα ζδ και το βε. Κοινό ας παραμένει το δγ (διάστημα). Το (διάστημα) λοιπόν ζε είναι ίσο προς το δβ. Δια τεσσάρων δε (είναι το διάστημα) ζε. Συνεπώς δεν παρεμβάλλεται κάποιος μέσος ανάλογος στους ζε, διότι επιμόριο (είναι) το διάστημα. Και είναι ίσο το δβ προς το ζε. Συνεπώς δεν θα παρεμβάλλεται μέσος ανάλογος στο δγ, το οποίο είναι από τη νήτη διεζευγμένων έως την παρανήτη υπερβολαίων. Κατά συνέπεια η τρίτη υπερβολαίων δεν θα διαιρεί το πυκνόν σε ίσα (διαστήματα)].

Ο υπολογισμός των αριθμητικών τιμών μη, νδ, ξδ, οβ για τους φθόγγους του εναρμονίου τετραχόρδου βάσει των αντιστοίχων γραμμικών σχημάτων έχει ως ακολούθως:

$$\beta \Rightarrow \chi$$

$$\gamma \Rightarrow \chi \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2 = \chi \cdot \frac{81}{64}$$

$$\delta \Rightarrow \chi \cdot \frac{4}{3}$$

$$\zeta \Rightarrow \chi \cdot \frac{3}{2}$$

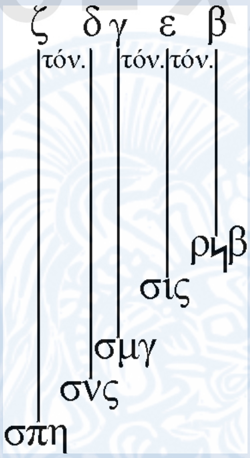
$$\varepsilon \Rightarrow \chi \cdot \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} = \chi \cdot \frac{9}{8}$$

Εάν τεθεί χ=48, τότε προκύπτουν οι εξής ακέραιες τιμές για τους φθόγγους (υπαρκτούς ή μη) του εναρμονίου τετραχόρδου:

β	ε	γ	δ	ζ
48	54	–	64	72
$\mu\eta$	$\nu\delta$	–	$\xi\delta$	$o\beta$

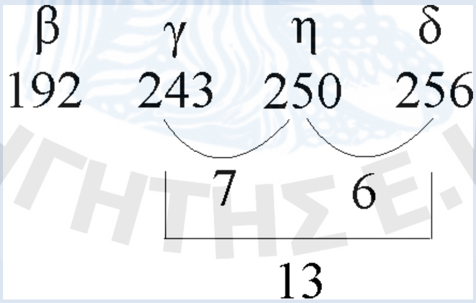
Παρατηρούμε ότι για το φθόγγο γ δεν προκύπτει ακέραια τιμή. Προκειμένου να προκύψει ακέραια τιμή και για το φθόγγο γ λαμβάνουμε ως τιμή του χ την τιμή του Ε.Κ.Π.=192 των παρονομαστών των παραπάνω κλασμάτων. Οπότε προκύπτουν οι παρακάτω ακέραιες τιμές, οι οποίες φαίνονται στο γραμμικό διάγραμμα του σχήματος 8

β	γ	δ	ζ	ε
192	243	256	288	216
$\rho h\beta$	$\sigma\mu\gamma$	$\sigma\nu\varsigma$	$\sigma\pi\eta$	$\sigma\iota\varsigma$



Σχήμα 8: Οι υπολογισθείσες τιμές μη, νδ, ξδ, οβ για τους φθόγγους του εναρμονίου τετραχόρδου.

Εάν η είναι η παρυπάτη του εναρμονίου τετραχόρδου, τότε η δομή αυτού έχει ως εξής



Το διάστημα γδ χωρίζεται με την παρυπάτη η γραμμικώς μεν σε δύο άνισα διαστήματα με μήκη 7 και 6 μονάδες, αντίστοιχα, δια των λόγων δε σε δύο άνισα διαστήματα με λόγους $\frac{250}{243} > \frac{256}{250}$.