

«Ευθεία και Αντίστροφα δικτυωτά»

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης

Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας,
Τμήματος Μουσικών Σπουδών,
Φιλοσοφικής Σχολής,
Πανεπιστημίου Αθηνών

Η Αρμονική (=Μουσική) ως Μαθηματική Επιστήμη

Η Αρμονική (=Μουσική) κατά τους Πυθαγορείους (Νικόμαχος Γερασηνός, *Αριθμητική Εισαγωγή*) ήτο η τρίτη κατά σειράν εκ των τεσσάρων αδελφών της Μαθηματικής επιστήμης (Αριθμητική, Γεωμετρία, Αρμονική και Σφαιρική), ενώ κατά τον Πλάτωνα ήτο η τετάρτη εκ των πέντε ιδιοτήτων δια των οποίων εξαγνίζεται ο άνθρωπος (Αριθμητική, Γεωμετρία, Στερεομετρία, Μουσική και Αστρονομία). Ο Νικόμαχος επισημαίνει ότι για να λειτουργήσει εκάστη επιστήμη ή ιδιότητα χρειάζεται οπωσδήποτε τις γνώσεις όλων των προηγούμενων της επιστημών ή ιδιοτήτων.

Η Αρμονική, ως ασχολούμενη με την αρμονία (ετυμολογικώς σημαίνει μέσον προς συναρμογήν δια του νοός), ήτο μία καθαρώς μαθηματική επιστήμη βασιζομένη στην Αριθμητική, στη Γεωμετρία και στην Στερεομετρία και δεν ήτο μια δραστηριότητα αποσκοπούσα στην τέρψη και τη διασκέδαση των ανθρώπων.

Η Γεωμετρική αντιμετώπιση του Πλατωνικού προβλήματος «περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου»

Οφείλω να καταθέσω ότι από το έτος 1998 ασχολούμαι ερευνητικά με τη μελέτη 30 στίχων εκ του Πλατωνικού Τιμαίου (35a1-36b6). Το χωρίο αυτό του Τιμαίου, γνωστό και ως «μουσικό χωρίο», αναφέρεται στη δημιουργία και στη σύσταση της Ψυχής του Κόσμου επί τη βάσει ενός αλγορίθμου, βασισμένου σε δύο τετράδες αριθμών, σε δύο τετρακτύες, (1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27) και διατυπωμένου με Πυθαγόρειο μουσική ορολογία. Ο Πρόκλος στο *Υπόμνημα εις τον Πλάτωνος Τιμαίον* αναφέρει ότι ο Πλούταρχος στο έργο του *περί της εν Τιμαίω Ψυχογονίας* σχολιάζει το συγκεκριμένο χωρίο και το χαρακτηρίζει ως ένα από τα πλέον δύσκολα ως προς την κατανόησή του μέσα στο συνολικό Πλατωνικό έργο.

Στο εν λόγω χωρίο και εν γένει εις τον Πλατωνικόν Τιμαίον οι Χριστιανοί επίστευσαν ότι βρήκαν τον Έλληνα Μωσή τους, ο οποίος ομιλεί περί Γενέσεως. Εξ αιτίας αυτού του «πιστεύω» τους ο Πλάτων πολυεμελετήθη και εγένετο γνωστός εις την Ευρώπη. Η ψυχή αντιμετωπίσθη με τον ίδιο τρόπο που αντιμετωπίζεται η ψυχή του ανθρώπου και ο Κόσμος ως το Σύμπαν. Δηλαδή ωμίλουν για ένα έμψυχο Σύμπαν, για το οποίο εχύθη πολλή μελάνη...

Η όλη αντίληψις περί του εμψύχου Σύμπαντος προσωπικώς δεν με ικανοποιούσε και δεν με έπειθε. Δεν λησμονούσα ΠΟΤΕ μου ότι ο Πλάτων, ως Πυθαγόρειος, ωμίλει άλληγορικώς. Επί έτη έψαχνα να ανακαλύψω την αλληγορία.

Μετά τη συνειδητοποίηση του περιεχομένου του αποσπάσματος του Νικομάχου του Γερασηνού «περί των τεσσάρων αδελφών της Μαθηματικής Επιστήμης» το ενδιαφέρον μου μετετοπίσθη από τη θεωρία των μουσικών διαστημάτων προς τη Γεωμετρία, διότι με τη Γεωμετρία οι αρχαίοι Έλληνες επεδίωκαν να κατανοήσουν την αφηρημένη δομή των σημείων και των ευθειών, χωρίς να προσκολλώνται σε συγκεκριμένους τύπους-συνταγές.

Η ανάγκη να απαντήσω στα πάρα πολλά ερωτηματικά, που αντιμετώπισα ασχολούμενος με το εν λόγω Πλατωνικό χωρίο, με ωδήγησε στη σύλληψη και διατύπωση της Γεωμετρίας των *ευθέων* και των *αντιστρόφων δικτυωτών* και στη συγγραφή ενός σχετικού με αυτήν βιβλίου 426 σελίδων με τίτλο «*Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*».

Ως γνωστόν, όλες οι υπάρχουσες Γεωμετρίες, άλλη ολιγότερο και άλλη περισσότερο, περιγράφουν τον φυσικό κόσμο. Η δική μου Γεωμετρία περιγράφει ιδανικά τον κόσμο όλων των μουσικών γεγονότων, δηλαδή τις μουσικές όλων των μουσικών πολιτισμών που υπήρξαν, υπάρχουν και που θα υπάρξουν στον πλανήτη Γη.

Στην παρούσα εισήγηση εκτίθεται η εντελώς πρωτότυπη θεωρία μου περί των «*δικτυωτών*» -ευθέων και αντιστρόφων- στο χώρο της μουσικής. Με την εν λόγω θεωρία παρέχεται με ασφάλεια μια αυστηρώς μαθηματική θέαση της Πυθαγορείου -και όχι μόνον- μουσικής δια της οποίας επιτυγχάνεται η λύση του οποιουδήποτε θεωρητικού μουσικού προβλήματος -και οποιουδήποτε άλλου μουσικού πολιτισμού- με την πλέον λεπτή μέθοδο, με τη συντομότερη ανάλυση, με τη μεγαλύτερη δυνατή σαφήνεια και καλαισθησία και, τέλος, τον μικρότερο πνευματικό κόπο. Για την ορθότητα της θεωρίας των δικτυωτών βεβαιούται κανείς βλέποντας να επαληθεύονται βάσει αυτής όλες οι είκοσι Προτάσεις της Ευκλείδειου πραγματείας *Κατατομή Κανόνος*, η γένεση της Ψυχής του Κόσμου από τον Πλατωνικό Τίμαιο, η αρμονία των σφαιρών κ.λπ. Απόρροια της θεωρίας των δικτυωτών είναι «*Ο Μουσικός Διανυσματικός Λογισμός*» δια του οποίου επιλύονται τα μουσικά προβλήματα, αντιμετωπίζοντας τα μουσικά διαστήματα ως διανύσματα.

Κατά τη θεωρία μου ολόκληρη η Πυθαγόρειος Μουσική αντιμετωπίζεται επί των ευθέων και των αντιστρόφων δικτυωτών με μια Επιπεδομετρία βρόχων και όχι συνεχούς επιπέδου, όπως είναι η Ευκλείδειος. Η μουσική των Φυσικών διαστημάτων, δηλαδή των διαστημάτων του Φυσικού δομικού μουσικού συστήματος, αντιμετωπίζεται με μια στερεομετρία κυψελών και όχι συνεχούς χώρου, όπως είναι η Ευκλείδειος. Η μουσική όλων των άλλων δομικών μουσικών συστημάτων αντιμετωπίζεται στα πλαίσια μη συνεχών υπερχώρων με τέσσερις έως και ένδεκα διαστάσεις.

Ευθύ ή Πυθαγόρειο δικτυωτό

Για την ιστορία του πράγματος, καθώς ξεδίπλωνα τις σκέψεις μου σχετικά με τη διατύπωση της θεωρίας των δικτυωτών για τα μουσικά ύψη, έπρεπε οπωσδήποτε να βρω ένα γεωμετρικό χώρο ισοδύναμο, όσον αφορά στη χρήση του, με τον χώρο των μουσικών υψών. Ο χώρος ευρέθη και είναι αυτός που ονόμασα *ευθύ ή Πυθαγόρειο δικτυωτό*.

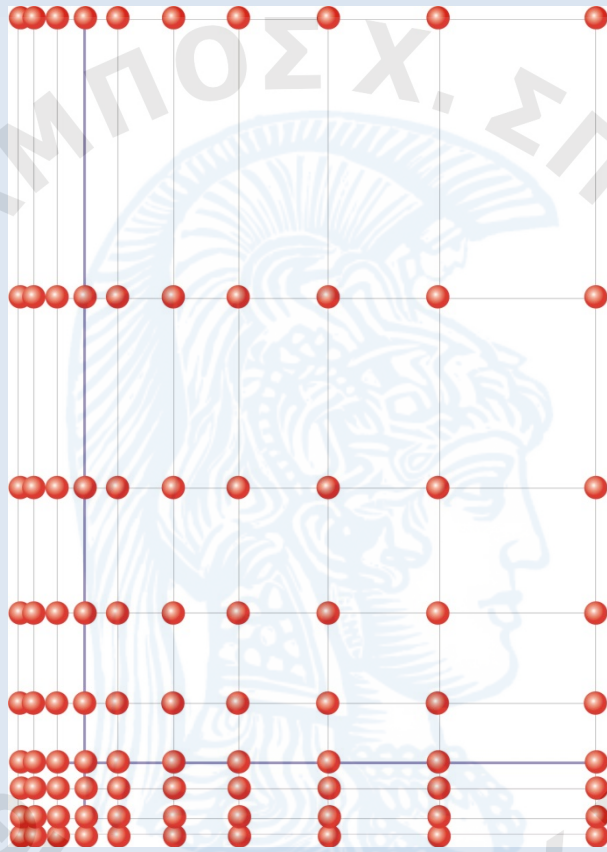
Με τον όρο *ευθύ δικτυωτό* εννοούμε το σύνολο των σημείων που ορίζονται από τις τομές των ευθειών δύο συνεπιπέδων δεσμών παραλλήλων ευθειών, συνήθως ορθογωνίων μεταξύ τους. Λαμβάνομε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy . Λαμβάνομε επίσης μία επίπεδη δέσμη παραλλήλων ευθειών προς τον άξονα $y'Oy$, που τέμνουν τον άξονα

$x'Ox$ κατά επίτριτα μουσικά διαστήματα $\left(\frac{4}{3}\right)$ και μια επίπεδη δέσμη παραλλήλων ευ-

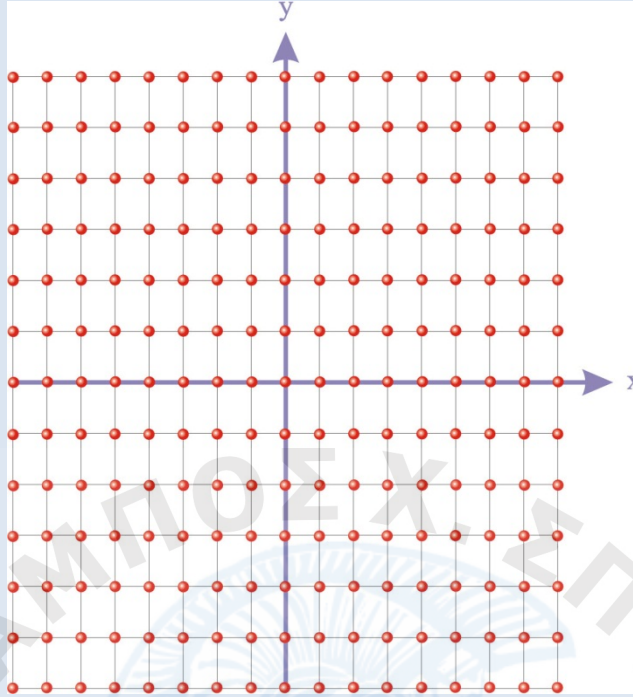
θειών προς τον άξονα $x'Ox$, που τέμνουν τον άξονα $y'Oy$ καθ' ημίολια μουσικά διαστήματα $\left(\frac{3}{2}\right)$. Οι τομές των δύο επιπέδων και ορθογωνίων δεσμών παραλλήλων ευ-

θειών ορίζουν ένα σύνολο ομοεπιπέδων *σημείων* ή *κόμβων*, δηλαδή ορίζουν ένα *επίπεδο δικτυωτό*, το οποίο θα ονομάζουμε *Πυθαγόρειο δικτυωτό* (Σχήμα 1). Ο κάθε κόμβος του Πυθαγορείου δικτυωτού ορίζει ένα *μουσικό ύψος*. Πρέπει να τονισθεί ευθύς εξ αρχής ότι το Πυθαγόρειο δικτυωτό αποτελεί μια αφηρημένη περιοδική διάταξη μουσικών υψών, δηλαδή κόμβων, δια των οποίων υλοποιείται η Πυθαγόρειος μουσική και ΜΟ-

NON. Κατά τη σχεδίαση του Πυθαγορείου δικτυωτού σε γραμμικούς άξονες οι παράλληλες ευθείες των συνεπιπέδων δεσμών απέχουν κατά αποστάσεις ανάλογες του $\left(\frac{a}{b}\right)^k$ $k=1,2,3,\dots$, όπου $\left(\frac{a}{b}\right)$ είναι το χαρακτηριστικό θεμελιώδες μουσικό διάστημα κατά τον αντίστοιχο άξονα. Ως εκ τούτου είναι μεταξύ τους μη ισαπέχουσες. Προκειμένου να καταστεί το Πυθαγόρειο δικτυωτό ευκολότερο στη σχεδίαση και περισσότερο εποπτικό, το σχεδιάζουμε σε ορθογώνιο σύστημα αναφοράς με λογαριθμικούς άξονες (Σχήμα 2).



Σχήμα 1: Το Πυθαγόρειο δικτυωτό σε γραμμική σχεδίαση.



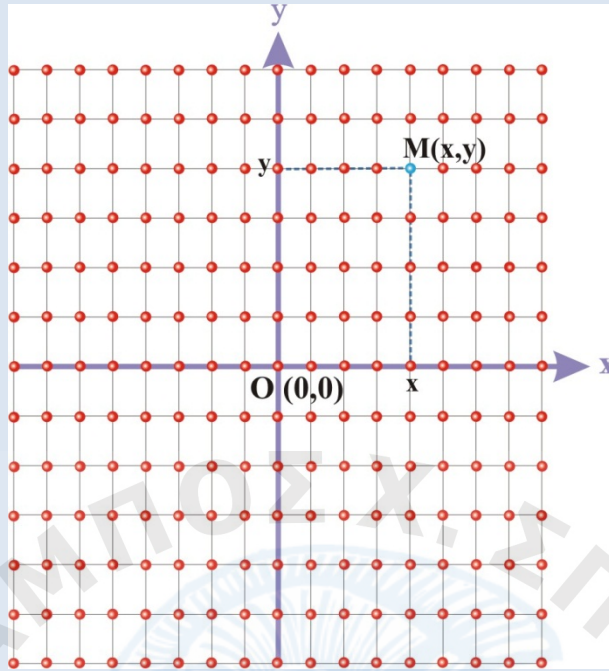
Σχήμα 2: Το Πυθαγόρειο δικτυωτό σε log-log διάγραμμα,

$$\text{όπου } x = \log_{\frac{4}{3}} \left[\left(\frac{4}{3} \right)^x \right] \text{ και } y = \log_{\frac{3}{2}} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^y \right].$$

Στο Πυθαγόρειο δικτυωτό κατά τον άξονα x το βήμα (= η μικρότερη επιτρεπτή μετακίνηση) είναι ένα επίτрито διάστημα και κατά τον άξονα y το βήμα είναι ένα ημιόλιο διάστημα. Αυτά σημαίνουν ότι στο Πυθαγόρειο δικτυωτό οι μετατοπίσεις γίνονται κατά ακέραιο αριθμό βημάτων και MONON. Ένας κόμβος του Πυθαγορείου δικτυωτού με συντεταγμένες x και y συμβολίζεται ως $M(x, y)$ και παριστά το μουσικό ύψος

$$M(x, y) = \left(\frac{4}{3} \right)^x \cdot \left(\frac{3}{2} \right)^y \cdot O(0,0), \text{ αφού υλοποιείται με την εκτέλεση } x \text{ επιτρίτων και } y \text{ ημιολίων}$$

μουσικών διαστημάτων σε σχέση με ένα αρχικό μουσικό ύψος $O(0,0)$, το οποίο εκλαμβάνεται ως μουσικό ύψος αναφοράς (Σχήμα 3).

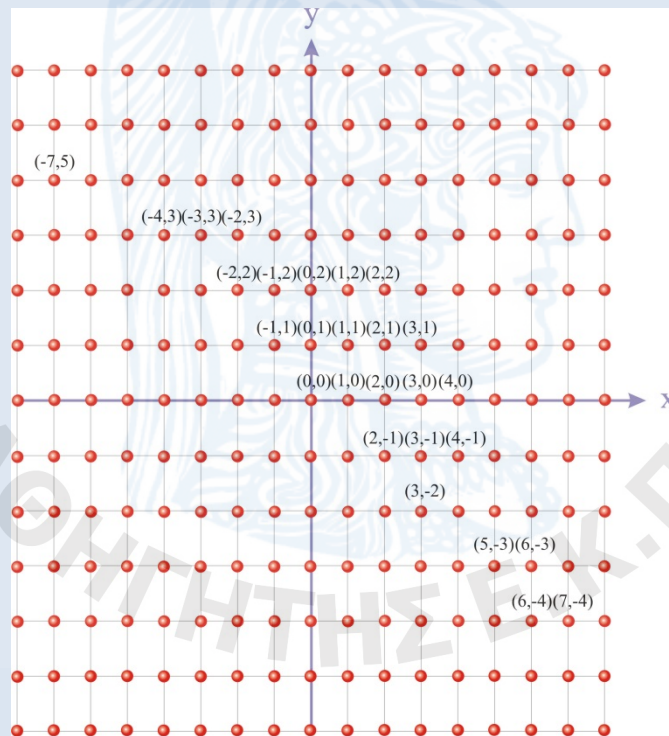


Σχήμα 3: Ένα μουσικό ύψος $M(x,y)$ σε Πυθαγόρειο δικτυωτό, το οποίο σε σχέση με ένα μουσικό ύψος αναφοράς $O(0,0)$ σχηματίζει ένα μουσικό διάστημα.

Προφανώς, οποιοδήποτε Πυθαγόρειο μουσικό διάστημα (Πίνακας 1) εκφράζεται σαν απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κόμβων του Πυθαγορείου δικτυωτού (Σχήμα 4).

Πίνακας 1: Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα.

Πυθαγόρειο μουσικό διάστημα	Αριθμητική έκφραση	Ανάλυση σε επίτριτα και ημιόλια μουσικά διαστήματα
Πυθαγόρειο κόμμα	531441/524288	$x=-7, y=5$
Αποτομή μείζονος τόνου	2187/2048	$x=-4, y=3$
Δίλειμμα	65536/59049	$x=6, y=-4$
Πυθαγόρειος μικρά τρίτη	32/27	$x=2, y=-1$
Πυθαγόρειος ελαττωμένη τετάρτη	8192/6561	$x=5, y=-3$
Πυθαγόρειον δίτονον	81/64	$x=-2, y=2$
Πυθαγόρειον τρίτονον	729/512	$x=-3, y=3$
Πυθαγόρειος μικρά έκτη	128/81	$x=3, y=-1$
Πυθαγόρειος μικρά εβδόμη	243/128	$x=-2, y=3$
Διαπασών	2/1	$x=1, y=1$
Δις διαπασών	4/1	$x=2, y=2$
Διαπασών και δια πέντε	3/1	$x=1, y=2$
Διαπασών και δια τεσσάρων	8/3	$x=2, y=1$



Σχήμα 4: Τοποθέτηση επί του Πυθαγορείου δικτυωτού των Πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων του Πίνακα 1.

Ο μετασχηματισμός του κανόνος (μονοχόρδου)

Κατόπιν προβληματίσθηκα με την ερώτηση:

Γιατί ο Ευκλείδης επιμένει ότι η μονάς δεν διαιρείται;

Τη λύση βρήκα στον Φιλόλαο και στον Ευκλείδη διαβάζοντας περί της μεθόδου της *Ανθυφαιρέσεως* ή της *Ανταναιρέσεως*.

Οι αναζητήσεις μου με καθοδηγούς τον Γαυδέντιο (πυθαγόρειο πείραμα με χορδές), τον Πορφύριο και τον Κλαύδιο Πτολεμαίο ωδήγησαν τα βήματά μου στον *Πυθαγόρειο κανόνα* (μονόχορδο), το όργανο πειραματισμού των «κανονικών» και της πειραματικής θεμελιώσεως της αρχαιοελληνικής Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας (Σχήμα 5).

Η προσπάθεια των Πυθαγορείων σύμφωνα με τις «γραφές» εμφανίζεται να είναι η επιβολή με τη βοήθεια της θεωρίας των λόγων ενός συστήματος προσδιορισμού των μαθηματικών σχέσεων μεταξύ των φθόγγων της κλίμακος. Εκείνο που πρέπει με έμφαση να τονισθεί είναι το γεγονός ότι, χρησιμοποιώντας ως όργανο μετρήσεως το αυτί τους, δεν μπορούσαν επακριβώς να μετρήσουν τις σχέσεις των μουσικών υψών των φθόγγων. Κάποια στιγμή, όμως, αντελήφθησαν ότι, εάν επιδιώκεται η ακρίβεια στις μετρήσεις των σχέσεων των μουσικών υψών των φθόγγων, θα πρέπει να βρεθεί ένας μετασχηματισμός δια του οποίου να μεταφέρονται οι σχέσεις των μουσικών υψών από τον χώρο της ακοής στον χώρο του οφθαλμού, όπου είναι γενικώς αποδεκτό ότι μπορούν να πραγματοποιηθούν ακριβείς μετρήσεις.

ὄφθαλμοὶ γὰρ τῶν ὠτῶν ἀκριβέστεροι μάρτυρες

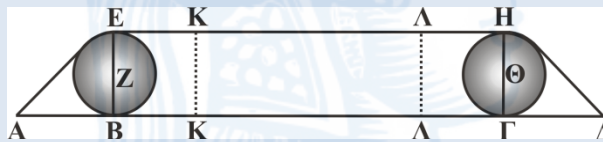
Πολυβίου, *Ιστορία*, 12, 27, 1, 5

[τα μάτια είναι ακριβέστεροι μάρτυρες απ' ό,τι τα αυτιά]

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός υλοποιείται με τον «κανόνα (=μονόχορδο)» και αφορά στον μετασχηματισμό των λόγων μουσικών υψών από τον χώρο της ακοής σε λόγους δονουμένων τμημάτων χορδής στο χώρο της οπτικής δια της σχέσεως:

$\frac{f_1}{f_2} = \frac{L_2}{L_1}$ η οποία εκφράζει τον συζητούμενο μετασχηματισμό, αφού ο λόγος των μηκών

$\frac{L_2}{L_1}$ των δονουμένων τμημάτων χορδής εκφράζει το μουσικό διάστημα στον χώρο της οπτικής.



Σχήμα 5: Ο Κανών κατά τον Κλαύδιο Πτολεμαίο.

Αντίστροφο ή Σπυρίδειο δικτυωτό

Με την εφαρμογή του «μετασχηματισμού του κανόνος» εφ' ενός ευθέος δικτυωτού προκύπτει το αντίστροφο δικτυωτό του. Το αντίστροφο δικτυωτό ενός δοθέντος ευθέος δικτυωτού είναι εξαιρετικά χρήσιμο για τους υπολογισμούς και γενικότερα για τις εφαρμογές που αφορούν σε μήκη δονουμένων τμημάτων χορδών εγχόρδων μουσικών οργάνων χωρίς δεσμούς, όπως είναι επί παραδείγματι ο κανών (=μονόχορδο). Το κάθε αντίστροφο δικτυωτό έχει την ίδια μορφολογικά γεωμετρική κατασκευή που έχει και το αντίστοιχό του ευθύ δικτυωτό με τις εξής δύο χαρακτηριστικές ιδιότητες:

1. Λόγω του μετασχηματισμού του κανόνος, ο κάθε κόμβος του αντιστρόφου δικτυωτού ορίζει ένα μήκος δονουμένου τμήματος χορδής επί του άνευ δεσμών βραχίονος του εγχόρδου οργάνου.
2. Λόγω της Ευκλείδειου μεθόδου της ανθυφαιρέσεως ή της ανταναιρέσεως εκ του συνόλου των κόμβων του αντιστρόφου δικτυωτού φυσική σημασία έχουν μόνο οι κόμβοι, οι οποίοι αντιστοιχούν σε δονούμενα τμήματα χορδής με μήκη εκφραζόμενα δι' ακεραίων αριθμών. Η μικρότερη αριθμητική τιμή αποδεκτού

κόμβου είναι αυτή της μονάδος και εκφράζει το μήκος της «ανθυφαιρετικής» μονάδος.

Στην περίπτωση των δύο διαστάσεων το αντίστροφο δικτυωτό ενός Πυθαγορείου δικτυωτού το ωνόμασα *Σπυρίδειο δικτυωτό*. Και στο Σπυρίδειο δικτυωτό ένας κόμβος M με συντεταγμένες x, y παριστά ένα μήκος δονούμενου τμήματος χορδής, το οποίο υλοποιεί σε σχέση με ένα αρχικό δονούμενο τμήμα χορδής $O(0,0)$, το οποίο εκλαμβάνεται ως δονούμενο τμήμα χορδής αναφοράς, το μουσικό διάστημα

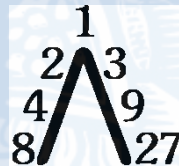
$$\left(\frac{L_M}{L_O}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^y$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού του κανόνος οι αποδεκτοί κόμβοι του Σπυριδείου δικτυωτού μας μεταφέρουν σε ίσου πλήθους κόμβους του Πυθαγορείου δικτυωτού, οι οποίοι εκφράζουν αποδεκτά Πυθαγόρεια μουσικά ύψη. Βεβαίως, για να υπολογισθεί η απόλυτη τιμή αυτών των μουσικών υψών, θα πρέπει να είναι γνωστό το μουσικό ύψος του κόμβου αναφοράς στο Πυθαγόρειο δικτυωτό.

Για την πλήρη μελέτη της παγκοσμίου μουσικής κατά τη θεωρία των δικτυωτών απαιτείται η πλήρης γνώση ενός πολυδιαστάτου συμπαντικού χώρου με ένδεκα το πολύ διαστάσεις -χωρίς σε αυτές να συμπεριλαμβάνεται ο χρόνος-, ενός χώρου μη συνεχούς, μη ευθυγράμμου, μη ευκλειδείου, αλλά ανισοτρόπου, κυψελώδους δομής και καμπύλου.

Κόσμος και Ψυχή

Προβληματιζόμενος με το τέλειο και απόλυτο γεωμετρικό σχέδιο του Κόσμου, εντός του οποίου, κατά τον ισχυρισμόν του Πλουτάρχου (1027 E 9), ο ίδιος ο Πλάτων χρησιμοποιούσε τη λαβδοειδή διάταξη των αριθμών (Σχήμα 6) και, βασιζόμενος επί της συμμετρίας, υποστηρίζω ότι το Σπυρίδειο δικτυωτό είναι ο κατά Πλάτωνα ΚΟΣΜΟΣ.

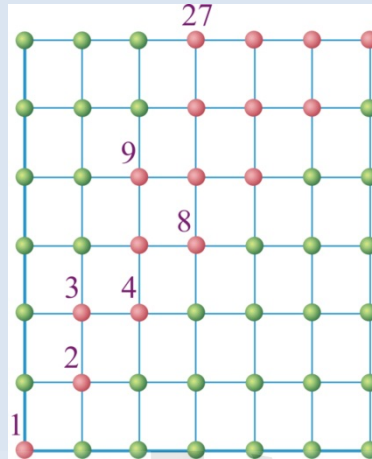


Σχήμα 6: Το λαβδοειδές διάγραμμα του Αδράστου.

Πράγματι, επί του ΚΟΣΜΟΥ ο Πλάτων προσπαθεί να περιχαρακώσει ένα πεδίο τιμών, εντός του οποίου θα ευρίσκονται οι ακέραιες λύσεις του προβλήματός του και οι λύσεις του οποιουδήποτε προβλήματος της Πυθαγορείου μουσικής. Το πεδίο αυτό των ακεραίων τιμών –η κατά Πλάτωνα ΨΥΧΗ- είναι η τριγωνικής μορφής περιοχή του Σπυριδείου δικτυωτού, η οποία έχει κορυφή επί του κόμβου αναφοράς και πλευρές καθοριζόμενες από τις γεννήτριες συναρτήσεις

$$\phi(x) = 2^x \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{και} \quad \rho(y) = 3^y \quad y = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Με δύο τετρακτύες (1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27) –μία εξ εκάστης γεννητρίου συναρτήσεως- ο Πλάτων δομεί την μεγίστη τετρακτύν του 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27 δια της οποίας μας υποδεικνύει τα όρια της Ψυχής του Κόσμου (Σχήμα 7).



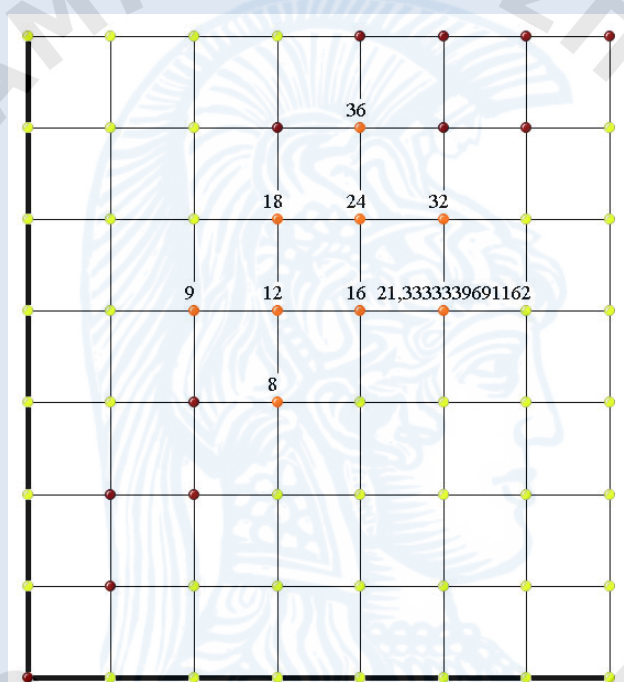
Σχήμα 7: Ο καθορισμός των ορίων της Ψυχής του Κόσμου με τους όρους της μεγίστης τετρακτύος του Πλάτωνος [«μουσικό χωρίο (35a1-36b6)» του διαλόγου του *Τίμαιος*].

Υποστήριξη της θεωρίας των δικτυωτών

Υποστηρίζω την ορθότητα της θεωρίας των δικτυωτών, αναφέρω ότι:

1. Επαληθεύονται βάσει αυτής όλες οι είκοσι Προτάσεις της Ευκλείδειου *Κατατομής του Κανόνος*. Απόρροια της θεωρίας των δικτυωτών είναι «*Ο Μουσικός Διανυσματικός Λογισμός*» δια του οποίου επιλύονται τα μουσικά προβλήματα, αντιμετωπίζοντας τα μουσικά διαστήματα ως διανύσματα.
2. Παρέχεται η δυνατότητα να ερμηνεύει με μοναδικό τρόπο τη θέση των «σφαιρών» κατά την αρμονία των σφαιρών στον συμπαντικό χώρο κατά τον Κλαύδιο Πτολεμαίο (*Μουσικά*, 24, 1-11) ακόμη και της περιέργου θέσεως του Άρεως. (Βλέπε Πίνακα 2 και Σχήμα 8).

Πίνακας 2: Κλαύδιος Πτολεμαίος, <i>Μουσικά</i> , 24, 1-11		
Φθόγγοι έστῶτες	Ἀριθμοί	Σφαίραι
νήτη ὑπερβολαίων	λζ (36)	ἀπλανῶν
νήτη ὑπερβολαίων	λβ (32)	κρόνου
νήτη διεζυγμένων	κδ (24)	διός
νήτη συνημμένων	κα γ $\left(21\frac{1}{3}=21,3333\right)$	ἄρεως
παράμεσος	ιη (18)	ἡλίου
μέση	ιζ (16)	ἀφροδίτης
ὑπάτη μέσων	ιβ (12)	έρμοῦ
ὑπάτη ὑπατῶν	θ (9)	σελήνης
προσλαμβανόμενος	η (8)	πυρὸς ἀέρος ὑδατος γῆς



Σχῆμα 8: Το Αντίστροφο δισδιάστατο δικτυωτό με τις σχετικές αποστάσεις των σφαιρῶν ὡς πρὸς τὴ Γῆ κατὰ τὸν Κλαύδιο Πτολεμαίῳ.

Απόρροια τῆς θεωρίας μου περί των ευθέων και αντιστρόφων δικτυωτῶν εἶναι ἡ διαπίστωση ὅτι ὁ Πλάτων εἶναι ὁ ευρετῆς των *συστημάτων αναφοράς* στα Μαθηματικά, αυτῶν που σήμερα ονομάζονται «*καρτεσιανὰ*», εἴκοσι και δύο αἰῶνες πρὸ του Rene Descartes (1596-1650) (Εἰκόνα 1).



Εικόνα 1: Rene Descartes (1596-1650)

3. Δια της Ψυχής του Κόσμου επί του Σπυριδείου δικτυωτού επαληθεύονται με τον απλούστατο τρόπο όλα όσα αναφέρει ο Πυθαγόρειος φιλόσοφος Νικόμαχος ο Γερασηνός -πέντε ή έξι αιώνες μετά τον Πλάτωνα- και τα οποία αφορούν αφενός μεν εις τη διδασκαλία των ταυτοτήτων $(x+1)^ν$, αφετέρου δε εις τη δημιουργία επιμορίων σχέσεων αριθμών εκ μιας γεωμετρικής αναλογίας. Στη συγκεκριμένη περίπτωση του ημιολίου $\left(\frac{3}{2}\right)$.
4. Στις αναλυτικές εκφράσεις αυτών των ταυτοτήτων οι συντελεστές των όρων $2^ν$ $ν = 1, 2, 3, \dots$ και της μονάδος δομούν το σήμερα ονομαζόμενο «*τρίγωνο του Pascal*»!
5. Τέλος, η Ψυχή του Κόσμου, όταν λάβομε υπ' όψιν μας τα μουσικά διαστήματα τα οποία εκφράζουν οι αριθμοί της, γεννά τον κύκλο των πεμπτών (αγνοουμένων των πολλαπλών οκτάβων) (Πίνακας 3), αφού, όπως προαναφέρθη, η ημιόλιος είναι η επιμόρια σχέση που γεννάται από τους αριθμούς της Ψυχής του Κόσμου.

Πίνακας 3: Ο κύκλος των πεμπτών γεννάται από τους αριθμούς της Ψυχής του Κόσμου.

B 1									
B 2	E 3								
B 4	E 6	A 9							
B 8	E 12	A 18	D 27						
B 16	E 24	A 36	D 54	G 81					
B 32	E 48	A 72	D 108	G 162	C 243				
B 64	E 96	A 144	D 216	G 324	C 486	F 729			
B 128	E 192	A 288	D 432	G 648	C 972	F 1458	Bb 2187		

B 256	E 384	A 576	D 864	G 1296	C 1944	F 2916	Bb 4374	Eb 6561	
B 512	E 768	A 1152	D 1728	G 2592	C 3888	F 5832	Bb 8748	Eb 13122	Ab 19683
B 1024	E 1536	A 2304	D 3456	G 5184	C 7776	F 11664	Bb 17496	Eb 26244	Ab 39366
B 2048	E 3072	A 4608	D 6912	G 10368	C 15552	F 23328	Bb 34992	Eb 52488	Ab 78732
B 4096	E 6144	A 9216	D 13824	G 20736	C 31104	F 46656	Bb 69984	Eb 104976	Ab 157464
B 8192	E 12288	A 18432	D 27648	G 41472	C 62208	F 93312	Bb 139968	Eb 209952	Ab 314928

Επίλογος

Απευθυνόμενος προς τους φοιτητές μου θα ήθελα αφενός μεν να τους θυμίσω τη λατινική ρήση «*ignoramus et ignorabimus*» [είμαστε και θα παραμείνουμε αδαείς] με την έννοια ότι υπάρχουν όρια στην ικανότητά μας να κατανοήσουμε τη φύση, αφετέρου δε να τους συμβουλέψω να μη διστάζουν να ασχολούνται με τα μεγάλα προβλήματα, διότι έτσι δεν αποκλείεται να ανακαλύψουν καθ' οδόν κάτι το ενδιαφέρον.