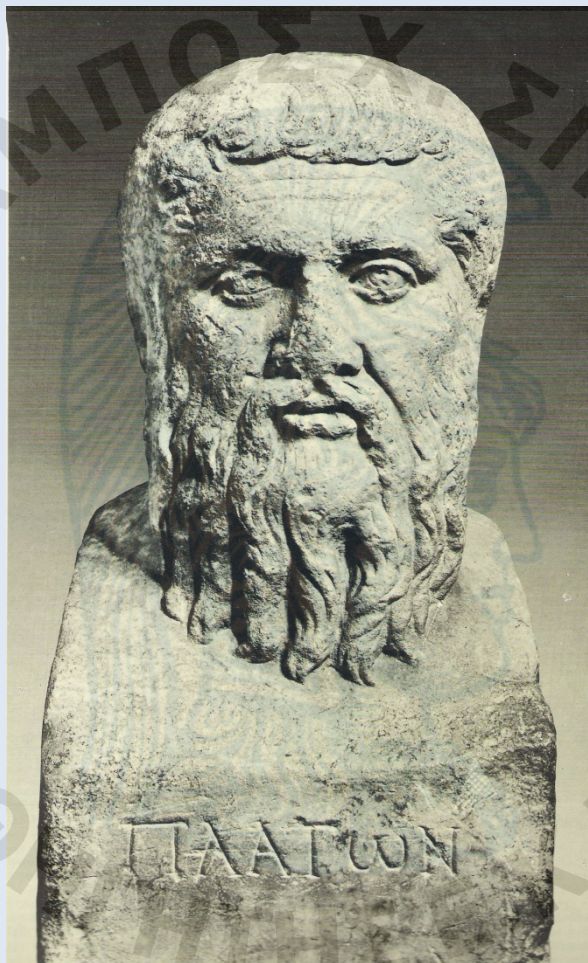


«Ευθέα και Αντίστροφα δικτυωτά»

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης

Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας,
Τμήματος Μουσικών Σπουδών,
Φιλοσοφικής Σχολής,
Πανεπιστημίου Αθηνών
hspyridis@music.uoa.gr



Αριστοκλής, ο μετονομασθείς Πλάτων

Ο Αριστοκλής (Αθήνα 427-347 π.Χ.) του Αρίστωνος και της Περικτιόνης, ο μετονομασθείς Πλάτων υπό του διδασκάλου της πάλης Αρίστωνος, λόγω του ευρέος στέρνου και μετώπου του, έλαβε παιδείαν ανάλογον των προσόντων των απαιτούμενων για ν' αφοσιωθεί στα κοινά. Ο δεύτερος σύζυγος της μητρός του, ο Πυριλάμης, ήτο σημαντικό στέλεχος της δημοκρατικής παρατάξεως, ενώ οι ολιγαρχικοί συγγενείς εξ αυτής, Χαρμίδης και Κριτίας, ευνοούσαν την είσοδόν του στα κοινά.

Έκπαλαι εν Ελλάδι ευνοείται κληρονομικώ τω τρόπω το πολιτεύεσθαι!

Όμως, υπό του Σωκράτους εδιδάχθη την Φιλοσοφία, υπό του Αρχύτου του Ταραντίνου εμνήθη εις τον Πυθαγορισμόν και, ιδρύων την Ακαδημίαν του –το πρώτο Ευρω-

παϊκό Πανεπιστήμιο-, κατέστη ο πρώτος ιθύνων ενός μονίμου Ιδρύματος για την προαγωγή της γνώσεως και ιδίως της επιστημονικής μελέτης.

Το βασικό δόγμα, το οποίο διατρέχει τα γραπτά του Πλάτωνος, είναι ο δυϊσμός μεταξύ αισθητού και νοητού, τον οποίον ο Πυθαγορισμός, μήτρα πολλών φιλοσοφιών, είχε πρώτος εισαγάγει στον ελληνικόν κόσμον. Δόγματα ωσάν αυτό φαίνεται να διαμορφώνουν έναν φιλοσοφικό πυρήνα στο έργο του Πλάτωνος, η κατανόηση του οποίου από τους αμυήτους είναι δύσκολη καθώς τα πάντα δίνονται υπό μορφήν αλληγοριών και αινιγμάτων. Τούτο παραπέμπει στην αινιγματική διάσταση της προφορικής διδασκαλίας των πυθαγορείων, η οποία είναι αδιαχώριστη από την πρακτική του απορρήτου, αφού ο Πλάτων ήτο μεμνημένος Πυθαγόρειος.

Οί Πυθαγορικοί, οἷς πολλαχῆ ἔπεται Πλάτων

Θέων Συμπυθναίος, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων*, 12, 10.

Αριθμοί και Αλληγορία

Ανέκαθεν οι κοσμοθεωρίες των κατ' ἔθνη ιερατειῶν εβασίζοντο στον συμβολισμό. Για τον λόγον αυτόν τα ιερά κείμενά των είναι ἄρρηκτα συνδεδεμένα με σημεία, σύμβολα, αριθμούς και αστερισμούς προκειμένου να προστατευθούν αλήθειες και ιδανικά που, διαφορετικά, με το πέρασμα των χρόνων θα υφίσταντο διαστρέλωση.

Υπάρχουν κρίσιμες περικοπές ιερῶν κειμένων και κειμένων της παγκοσμίου λογοτεχνίας -Βέδδες, Αιγυπτιακό βιβλίο των Νεκρῶν, Βίβλος, Πλάτων- που πραγματεύονται αριθμούς. Επί πλέον η επανάληψη ταυτοσήμων και ομοίων αριθμῶν στη Βαβυλώνα, την Αίγυπτο, την Ελλάδα και την Παλαιστίνη επιβεβαιώνουν τις κάποτε αναπτυχθείσες θεωρήσεις, οι οποίες είχαν ιστορική συνέχεια και προσανατολισμό μιας βασικής πνευματικής παραδόσεως.

Οι περικοπές αυτές αντιμετωπίζονται με μια νέα οπτική, η οποία αναγνωρίζει τη μουσική ως μία δύναμη ικανή να προβάλλει μια φιλοσοφική σύνθεση. Η οπτική αυτή προέκυψε λαμβάνοντας κατά λέξη τον Πλάτωνα, ο οποίος μας εκληροδότησε ένα απόθεμα αριθμολογίας και συσχέτισε μια μυθολογία με μαθηματικές αλληγορίες. Υποστηρίζω την άποψη ότι ο Πλάτων είναι η πολύτιμη στήλη της Ροζέττης δια της οποίας θα κατανοήσομε την περισσότερο δυσνόητη επιστήμη των πρωιμοτέρων πολιτισμῶν.

Επί παραδείγματι, ο Πλάτων αλληγορικῶς δηλώνει ότι ο τύραννος είναι 729 φορές χειρότερος από τον χειρότερο βασιλέα (Stephanus 587, d, 12 - e, 4). Τί ἄραγε να εννοεῖ;

Οι φιλόλογοι αποφεύγουν την εμβάθυνση «*απλουστεύοντες το κείμενο*» και οι μαθηματικοί το αντιμετωπίζουν «*ποιητική αδεία*». Ο πεπαιδευμένος μουσικός, ὅμως, γνωρίζει ότι κάθε φθόγγος χαρακτηρίζεται από μια ποσότητα (αριθμητική σχέση) και από μία ποιότητα. Μόνη της, είτε η ποσότητα, είτε η ποιότητα χαρακτηρίζει τον φθόγγο μονομερῶς, δεδομένου ότι αμφοτέρως αποτελούν τις δύο ὄψεις του αυτού νομίσματος και αμοιβαίως η μία φωτίζει την ἄλλη.

Αναφορικά με τον αριθμό 729, που επέλεξε ο Πλάτων. Από τη σκοπιά τη φιλολογική ο αριθμός αυτός εκφράζεται με τη λέξη «*ΕΝΝΕΑΚΑΙΕΙΚΟΣΙΚΑΙΕΠΤΑΚΟΣΙΟΠΛΑΣΙΑΚΙΣ*», την οποία δομούν 35 γράμματα και είναι η μοναδική με το μεγαλύτερο μήκος λέξη σε ολόκληρο το Πλατωνικό έργο. Από τη σκοπιά της μουσικής αυτός ο αριθμός ως προς ένα μοναδιαίο μήκος ταλαντουμένης χορδής αντιστοιχεί στο μουσικό διάστημα:

$$729 = 9^3 = \frac{9^3}{8^3} \cdot 8^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot (2^3)^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^9$$

το οποίο είναι ένα τρίτονο (αυξημένη τετάρτη) συν εννέα οκτάβες.

Το τρίτονο είναι το πλέον διάφωνο μουσικό διάστημα του μουσικού συστήματος που ήτο γνωστό στον Πλάτωνα. Εξακολουθεί και σήμερα να φέρει τον ίδιο διάφωνο χαρακτήρα (*diabolus in musica*) στο δυτικό τονικό σύστημα 2.500 χρόνια μετά απ' αυ-

τόν. Αυτό που ο Πλάτων εξετίμησε με τον αριθμό 729 ήτο η σχέση μεταξύ δύο πολιτειακών συστημάτων και τη θεωρεί ως τη μεγίστη δυνατή ένταση και διαφωνία μέσα σε ένα πολιτισμένο σύστημα.

Στην αρχαιότητα ο μουσικός συμβολισμός εγένετο άμεσα κατανοητός από τους μεμνημένους και γι' αυτό ο Πλάτων τον χρησιμοποιεί συχνά. Όταν κατά τον ρούν της Ιστορίας ο ρόλος της μουσικής από πνευματική ή ψυχική δύναμη, που εναρμόνισε τους ουρανοί με τη μουσική κλίμακα και το ημερολόγιο, εθυσιάσθη στον βωμό της ατομικής εκφράσεως και απολαύσεως, η ερμηνεία των άλλοτε ξεκάθαρων κειμένων κατέστη δύσκολη κι ενίοτε ακατόρθωτη.

Ο Πυθαγόρειος Πλάτων είναι αδύνατον να κατανοηθεί μόνον με υποκείμενο, ρήμα, αντικείμενο. Ο καθηγητής του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Στυλιανός Νεγρεπόντης λέει: «... Αν έχω δίκαιο στην ερμηνεία μου για την Πλατωνική διαλεκτική, τότε όλη η μέχρι σήμερα Πλατωνική γραμματεία ελάχιστα έχει επιτύχει να διεισδύσει στην ουσία της Πλατωνικής σκέψης. Αν η δική μου ερμηνεία για την φιλοσοφία του Πλάτωνος είναι η ορθή (και πρέπει να πω ότι δεν έχω καμία αμφιβολία γι' αυτό), τότε όλες οι μέχρι σήμερα ερμηνείες, ακόμη και αυτές των διασημοτέρων μελετητών, ελέγχονται ως ανεπαρκείς ή λανθασμένες, ή -στην καλύτερη των περιπτώσεων- ως επιφανειακές προσεγγίσεις... Οι μεταφράσεις του Πλάτωνος έχουν απονευρώσει και συσκοτίσει τον γεωμετρικό πυρήνα της Πλατωνικής σκέψης...».

Κυρίες και κύριοι συνάδελφοι, στην εισήγησή μου θα κινηθώ στο ίδιο μήκος κύματος με τον καθηγητή κ. Στυλιανό Νεγρεπόντη και θα προσπαθήσω να σας αποδείξω πόσο αδικήσαμε τον μέγιστον κατά πρώτον Μαθηματικόν και δευτερευόντως κορυφαίο Φιλόσοφο Πλάτωνα, παρανοούντες τα αινιγματικά γραφόμενά του ιδιαιτέρως εις τον διάλογόν του Τίμαιος.

Η Αρμονική (=Μουσική) ως Μαθηματική Επιστήμη

Κατά τους Πυθαγορείους η Αριθμητική, η Γεωμετρία, η Αρμονική και η Σφαιρική ήσαν αδελφές επιστήμες: «ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι ἡμεν ἀδελφεὰ» (Αρχύτας ο Ταραντίνος, Σπάραγμα 1, 20-21).

Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός (*Αριθμητική Εισαγωγή*) τονίζει ότι η κή (=Μουσική) ήτο η τρίτη κατά σειράν εκ των τεσσάρων αδελφών της Μαθηματικής επιστήμης και ο Πλάτων, κατά τον Θέωνα τον Σμυρναίον, δέχεται την Αρμονική ως την τετάρτη εκ των πέντε ιδιοτήτων δια των οποίων εξαγνίζεται ο άνθρωπος (Αριθμητική, Γεωμετρία, Στερεομετρία, Μουσική και Αστρονομία) «ὧν χωρὶς οὐχ οἶον εἶναι τυχεῖν τοῦ ἀρίστου βίου» (*Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων 2, 1*). Μάλιστα ο Νικόμαχος επισημαίνει ότι για να λειτουργήσει εκάστη επιστήμη ή ιδιότης χρειάζεται οπωσδήποτε τις γνώσεις όλων των προηγουμένων αυτής επιστημών ή ιδιοτήτων.

Η Αρμονική, λοιπόν, δηλαδή η Πυθαγόρειος μουσική, ως ασχολουμένη με την αρμονία (ετυμολογικώς σημαίνει μέσον προς συναρμογήν δια του νοός), ήτο μία καθαρὸς μαθηματικὴ επιστήμη βασιζομένη στην Αριθμητική, στη Γεωμετρία και στην Στερεομετρία και δεν ήτο μια δραστηριότης απλῶς αποσκοπούσα στην τέρψη και τη διασκέδαση των ανθρώπων, ὅπως ἐπρέσβευον οἱ Αριστοξένειοι.

Το μουσικό χωρίο 35a1-36b6 εκ του Πλατωνικού Τιμαίου

Οφείλω να καταθέσω ότι από το έτος 1998 ασχολούμαι ερευνητικά με τη μελέτη των 30 στίχων του «μουσικού χωρίου» εκ του Πλατωνικού Τιμαίου (35a1-36b6), το οποίον αναφέρεται στη δημιουργία και τη σύσταση της Ψυχῆς του Κόσμου επί τη βάσει ενός αλγορίθμου, στηριζομένου σε δύο τετράδες αριθμῶν, σε δύο τετρακτῆς, (1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27) και διατυπωμένου με Πυθαγόρειο μουσική ορολογία. Ο Πρόκλος στο *Υπόμνημα εις τον Πλάτωνος Τίμαιον* αναφέρει ότι ο Πλούταρχος στο έργο του *περί της εν*

Τιμαίω Ψυχογονίας σχολιάζει το συγκεκριμένο χωρίο και το χαρακτηρίζει ως ένα από τα πλέον δύσκολα ως προς την κατανόησή του μέσα στο συνολικό Πλατωνικό έργο.

τῆς ἀμερίστου

καὶ ἀεὶ κατὰ ταῦτὰ ἐχούσης οὐσίας καὶ τῆς αὖ περὶ τὰ σώματα γιγνομένης μεριστῆς τρίτον ἐξ ἀμφοῖν ἐν μέσῳ συνεκεράσατο οὐσίας εἶδος, τῆς τε ταύτου φύσεως [αὐτὴν] καὶ τῆς τοῦ ἑτέρου, καὶ κατὰ ταῦτὰ συνέστησεν ἐν μέσῳ τοῦ τε ἀμεροῦς αὐτῶν καὶ τοῦ κατὰ τὰ σώματα μεριστοῦ· καὶ τρία λαβὼν αὐτὰ ὄντα συνεκεράσατο εἰς μίαν πάντα ἰδέαν, τὴν θατέρου φύσιν δύσμεικτον οὖσαν εἰς ταὐτὸν συναρμόττων βίᾳ. μειγνὺς δὲ μετὰ τῆς οὐσίας καὶ ἐκ τριῶν ποιησάμενος ἐν, πάλιν ὅλον τοῦτο μοίρας ὅσας προσήκεν διένειμεν, ἐκάστην δὲ ἕκ τε ταύτου καὶ θατέρου καὶ τῆς οὐσίας μεμειγμένην. ἤρχετο δὲ διαιρεῖν ὧδε. μίαν ἀφείλεν τὸ πρῶτον ἀπὸ παντὸς μοῖραν, μετὰ δὲ ταύτην ἀφῆρει διπλασίαν ταύτης, τὴν δ' αὖ τρίτην ἡμιολίαν μὲν τῆς δευτέρας, τριπλασίαν δὲ τῆς πρώτης, τετάρτην δὲ τῆς δευτέρας διπλῆν, πέμπτην δὲ τριπλῆν τῆς τρίτης, τὴν δ' ἕκτην τῆς πρώτης ὀκταπλασίαν, ἑβδόμην δ' ἑπτακαικεκοσιπλασίαν τῆς πρώτης· μετὰ δὲ ταῦτα συνεπληροῦτο τὰ τε διπλάσια καὶ τριπλάσια διαστήματα, μοίρας ἔτι ἐκείθεν ἀποτέμνων καὶ τιθεὶς εἰς τὸ μεταξὺ τούτων, ὥστε ἐν ἐκάστῳ διαστήματι δύο εἶναι μεσότητος, τὴν μὲν ταύτῳ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην, τὴν δὲ ἴσῳ μὲν κατ' ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην. ἡμιολίων δὲ διαστάσεων καὶ ἐπιτρίτων καὶ ἐπογδῶν γενομένων ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν, τῷ τοῦ ἐπογδῶν διαστήματι τὰ ἐπιτρίτα πάντα συνεπληροῦτο, λείπων αὐτῶν ἐκάστου μόριον, τῆς τοῦ μορίου ταύτης διαστάσεως λειφθείσης ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἐχούσης τοὺς ὄρους ἐξ καὶ πενήκοντα καὶ διακοσίων πρὸς τρία καὶ τετταράκοντα καὶ διακόσια. καὶ δὴ καὶ τὸ μειχθέν, ἐξ οὗ ταῦτα κατέτεμνεν, οὕτως ἤδη πᾶν κατανηλώκει.

Απόδοση στη νεοελληνική

Από την αδιαίρετη και πάντοτε αμετάβλητη Ουσία και από τη διαιρετή και μεταβαλλόμενη στα φυσικά σώματα Ουσία συνέθεσε (ο θεός) ένα τρίτο είδος Ουσίας, ενδιάμεσο, αποτελούμενο και από τις δύο. Στην περίπτωση πάλι της Ταυτότητας και της Διαφοράς, ακολουθώντας την ίδια αρχή, συνέθεσε ενδιάμεσα μείγματα, που αποτελούνται από το αδιαίρετο και από το διαιρετό στα σώματα τμήμα τους. Παίρνοντας έπειτα τα τρία αυτά συστατικά τα συνέπτυξε σε μια μορφή, αναγκάζοντας τη Διαφορά, που είναι από τη φύση της δύσμεικτη, να ενωθεί με την Ταυτότητα και, στη συνέχεια, το μείγμα των δύο να ενωθεί με την Ουσία.

Έχοντας φτιάξει λοιπόν ένα μείγμα από τρία συστατικά, το διένειμε ξανά σε όσα κομμάτια έπρεπε –το καθένα από αυτά τα κομμάτια αποτελείτο και από την Ταυτότητα και από τη Διαφορά και από την Ουσία-. Άρχισε να διαιρεί το μείγμα ως εξής: πρώτα αφείρεσε ένα κομμάτι [1x] από το σύνολο του μείγματος, κατόπιν αφείρεσε ένα δεύτερο κομμάτι διπλάσιο από το πρώτο [2x], το τρίτο κομμάτι ήταν μιάμιση φορά το δεύτερο και τριπλάσιο του πρώτου [3x], το τέταρτο διπλάσιο του δευτέρου [4x], το πέμπτο τριπλάσιο του τρίτου [9x], το έκτο οκταπλάσιο του πρώτου [8x] και το έβδομο ήταν είκοσι εφτά φορές το πρώτο [27x] (Πίνακας 1).

Έπειτα συμπλήρωσε τα διπλάσια και τα τριπλάσια διαστήματα κόβοντας και άλλα κομμάτια από το αρχικό μείγμα και τοποθετώντας τα ανάμεσα στα κομμάτια της πρώ-

της διαιρέσεως, με τέτοιο τρόπο, ώστε να υπάρχουν δύο μέσοι σε κάθε διάστημα. Ο πρώτος [αρμονικός μέσος] χωρίζει το διάστημα σε δύο μέρη, τα οποία έχουν τον ίδιο λόγο με τον λόγο των δύο ακραίων αριθμών του διαστήματος, και ο δεύτερος [αριθμητικός μέσος] απέχει εξ ίσου από τους δύο ακραίους αριθμούς. Αυτοί οι δεσμοί δημιούργησαν τμήματα $3/2$ (ημιόλια), $4/3$ (επίτριτα) και $9/8$ (επόγδοα) με τα αρχικά διαστήματα. Συμπλήρωσε όλα τα επίτριτα διαστήματα ($4/3$) με επόγδοα διαστήματα ($9/8$), αφήνοντας υπόλοιπο ένα τμήμα, το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί με το κλάσμα $256/243$ (λείμμα ή έλασσον ημιτόνιο). Έτσι εξαντλήθηκε όλο το αρχικό μείγμα από το οποίο είχε αρχίσει να κόβει τα κομμάτια αυτά.

(Βασίλης Κάλφας, *Πλάτωνος Τίμαιος*)

Πίνακας 1: Οι αλγεβρικοί παράγοντες από την εκφώνηση του Πλατωνικού προβλήματος.

1x	2x	3x	4x	9x	8x	27x
----	----	----	----	----	----	-----

Η Γεωμετρική αντιμετώπιση του Πλατωνικού προβλήματος «περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου»

Στο εν λόγω χωρίο και εν γένει εις τον Πλατωνικόν Τίμαιον οι Χριστιανοίπίστευσαν ότι βρήκαν εις το πρόσωπον του Πλάτωνος τον Έλληνα Μωυσή τους, ο οποίος ομιλεί περί Γενέσεως. Εξ αιτίας αυτού του «πιστεύω» τους ο μέχρι τότε άγνωστος Πλάτων πολυεμελετήθη και κατέστη παγκοσμίως γνωστός. Η ψυχή αντιμετωπίσθη με τον ίδιο τρόπο που αντιμετωπίζεται η ψυχή του ανθρώπου και ο Κόσμος ως το Σύμπαν. Δηλαδή ωμίλουν για ένα έμψυχο Σύμπαν, για το οποίο εχύθη πολλή μελάνη...

Η όλη αντίληψη περί του έμψυχου Σύνπαντος προσωπικώς δεν με ικανοποιούσε και δεν με έπειθε. Δεν λησμονούσα ΠΟΤΕ μου ότι ο Πλάτων, ως Πυθαγόρειος, ωμίλει αλληγορικώς. Επί πολύν καιρόν έψαχνα να ανακαλύψω την αλληγορία.

Γνωρίζων την αριθμοσοφία των Πυθαγορείων, κατά την ανάλυση του Πλατωνικού αλγορίθμου επέμεινα στην ανάμειξη του «**ταυτού**» -της μονάδος- με το «**θάτερον**» -τη δυάδα- προκειμένου να προκύψει η «**ουσία**» -ο αριθμός-. Με αυτήν την ανάμειξη ο Πλάτων δομεί μια θεωρία αριθμών και κατασκευάζει τα κύρια εργαλεία για τη δημιουργία της Ψυχής του Κόσμου, που είναι οι φυσικοί αριθμοί, οι εκφραστές της ποσότητας με όλες τους τις ιδιότητες -άρτιοι περιττοί, τετράγωνοι, κύβοι κ.λπ.- και, κατ' επέκταση, κατασκευάζει το δεκαδικό αριθμητικό σύστημα με βάση τη δεκάδα, την οποία οι Πυθαγόρειοι μεταξύ των άλλων ονομάζον, την αποκαλούσαν **ΚΟΣΜΟ** (Ανατόλιος εις τα περί δεκάδος).

Μετά τη συνειδητοποίηση του περιεχομένου του αποσπάσματος του Νικομάχου του Γερασηνού «περί των τεσσάρων αδελφών της Μαθηματικής Επιστήμης» το ενδιαφέρον μου μετετοπίσθη από τη θεωρία των μουσικών διαστημάτων προς τη Γεωμετρία, διότι με τη Γεωμετρία οι αρχαίοι Έλληνες επεδίωκαν να κατανοήσουν την αφηρημένη δομή των σημείων και των ευθειών, χωρίς να προσκολλώνται σε συγκεκριμένους τύπους-συνταγές.

Η ανάγκη να απαντήσω στα πάρα πολλά ερωτηματικά, που αντιμετώπισα ασχολούμενος με το εν λόγω Πλατωνικό χωρίο, με ωδήγησε στη σύλληψη και διατύπωση της Γεωμετρίας των *ευθέων* και των *αντιστρόφων δικτυωτών* και στη συγγραφή ενός σχετικού με αυτήν βιβλίου 426 σελίδων με τίτλο «*Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*» (Εικόνα 1).



Εικόνα 1: Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΑΤΡΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΜΟΥΣΙΚΗ, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη, 2006.

Ως γνωστόν, όλες οι υπάρχουσες Γεωμετρίες, άλλη ολιγότερον και άλλη περισσό-
τερον, περιγράφουν τον φυσικό κόσμο. Η δική μου Γεωμετρία περιγράφει ιδανικά τον
κόσμο όλων των μουσικών γεγονότων, δηλαδή τις μουσικές όλων των μουσικών πολι-
τισμών που υπήρξαν, υπάρχουν και που θα υπάρξουν στον πλανήτη Γη.

Στην παρούσα εισήγηση εκτίθεται η εντελώς πρωτότυπη θεωρία μου περί των «δι-
κτυωτών» -ευθέων και αντιστρόφων- στο χώρο της μουσικής. Με την εν λόγω θεωρία
παρέχεται με ασφάλεια μια αυστηρώς μαθηματική θέαση της Πυθαγορείου -και όχι μό-
νον- μουσικής δια της οποίας επιτυγχάνεται η λύση του οποιουδήποτε θεωρητικού
μουσικού προβλήματος -και οποιουδήποτε άλλου μουσικού πολιτισμού- με την πλέον
λεπτή μέθοδο, με τη συντομότερη ανάλυση, με τη μεγαλύτερη δυνατή σαφήνεια και
καλαισθησία και, τέλος, τον μικρότερο πνευματικό κόπο.

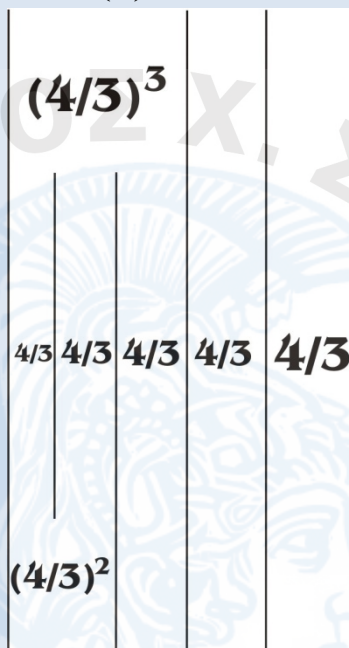
Κατά τη θεωρία μου ολόκληρη η Πυθαγόρειος Μουσική αντιμετωπίζεται επί των
ευθέων και των αντιστρόφων δικτυωτών με μια Επιπεδομετρία βρόχων και όχι συνε-
χούς επιπέδου, όπως είναι η Ευκλείδειος. Η μουσική των Φυσικών διαστημάτων, δηλα-
δή των διαστημάτων του Φυσικού δομικού μουσικού συστήματος, αντιμετωπίζεται με
μια στερεομετρία κυψελών και όχι συνεχούς χώρου, όπως είναι η Ευκλείδειος. Η μου-
σική όλων των άλλων δομικών μουσικών συστημάτων αντιμετωπίζεται στα πλαίσια μη
συνεχών υπερχώρων με τέσσερις έως και ένδεκα διαστάσεις.

Ευθύ ή Πυθαγόρειο δικτυωτό

Αναζητούσα να βρω έναν γεωμετρικό χώρο ισοδύναμο, όσον αφορά στη χρήση του,
με τον χώρο των μουσικών υψών. Ο χώρος ευρέθη και είναι αυτός που ωνόμασα *ευθύ ή
Πυθαγόρειο δικτυωτό*.

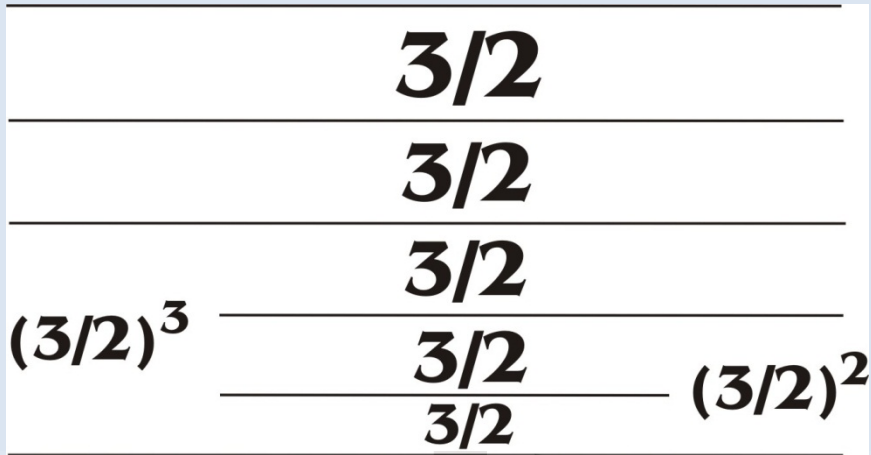
Για τα ακόλουθα έστωσαν υπ' όψιν σας ότι: οι αριθμητικές σχέσεις των μουσικών διαστημάτων προστίθενται δια πολλαπλασιασμού, αφαιρούνται δια διαιρέσεως και πολλαπλασιάζονται επί αριθμόν δι' υψώσεως εις δύναμιν, διότι την «Άλγεβρα» των μουσικών διαστημάτων χαρακτηρίζει η λογαριθμικότητα.

Με τον όρο *ευθύ δικτυωτό* θα εννοούμε το σύνολο των σημείων που ορίζονται από τις τομές των ευθειών δύο συνεπιπέδων δεσμών παραλλήλων ευθειών, συνήθως ορθογωνίων μεταξύ τους. Λαμβάνομε ορθογώνιο σύστημα αξόνων $x'Ox$. Λαμβάνομε επίσης μία επίπεδη δέσμη παραλλήλων ευθειών προς τον άξονα $y'Oy$, που τέμνουν τον άξονα $x'Ox$ κατ' επίτριτα μουσικά διαστήματα $\left(\frac{4}{3}\right)$ (Σχήμα 1)



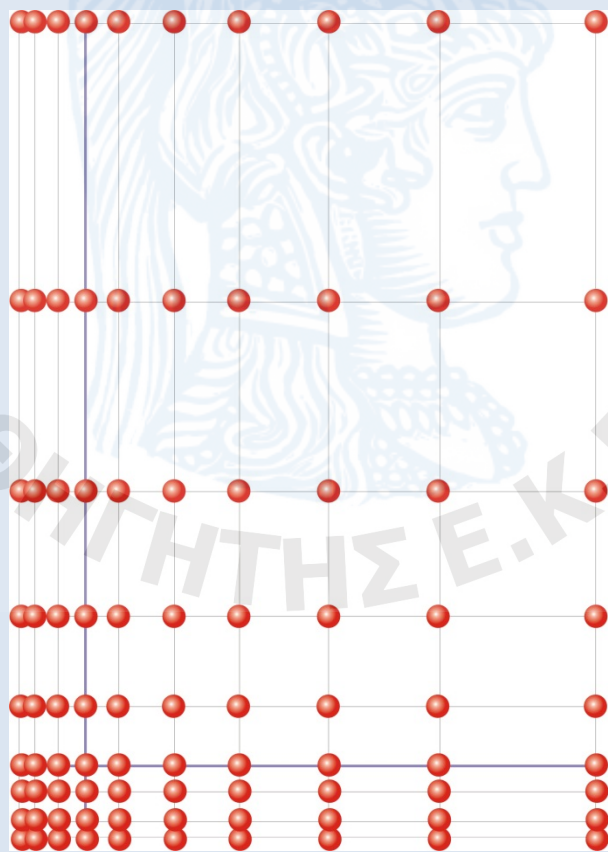
Σχήμα 1: Μία επίπεδη δέσμη παραλλήλων ευθειών προς τον άξονα $y'Oy$, που τέμνουν τον άξονα $x'Ox$ κατ' επίτριτα μουσικά διαστήματα $\left(\frac{4}{3}\right)$.

και μια επίπεδη δέσμη παραλλήλων ευθειών προς τον άξονα $x'Ox$, που τέμνουν τον άξονα $y'Oy$ καθ' ημιόλια μουσικά διαστήματα $\left(\frac{3}{2}\right)$ (Σχήμα 2).



Σχήμα 2: Μια επίπεδη δέσμη παραλλήλων ευθειών προς τον άξονα $x'Ox$, που τέμνουν τον άξονα $y'Oy$ καθ' ημιόλια μουσικά διαστήματα $\left(\frac{3}{2}\right)$.

Οι τομές των δύο επιπέδων και ορθογωνίων δεσμών παραλλήλων ευθειών ορίζουν ένα σύνολο ομοεπιπέδων σημείων ή κόμβων, δηλαδή ορίζουν ένα επίπεδο δικτυωτό, το οποίο θα ονομάζουμε Πυθαγόρειο δικτυωτό (Σχήμα 3).

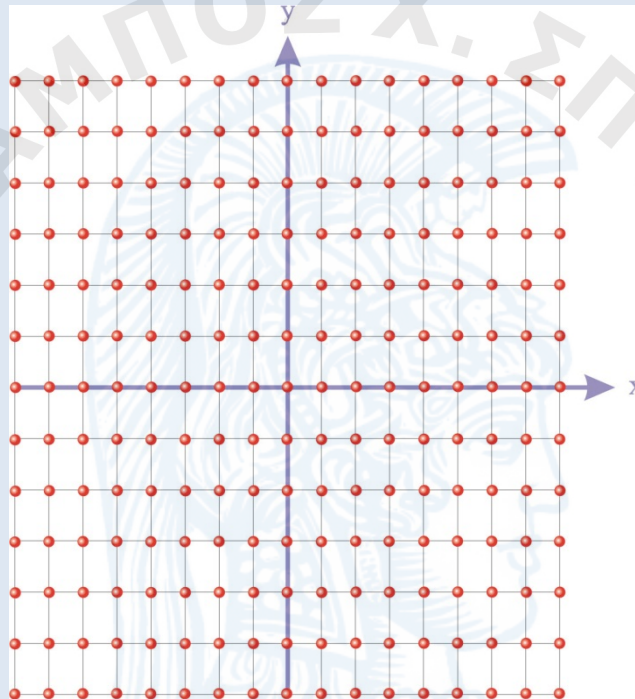


Σχήμα 3: Το Πυθαγόρειο δικτυωτό σε γραμμική σχεδίαση.

Ο κάθε κόμβος του Πυθαγορείου δικτυωτού ορίζει ένα μουσικό ύψος. Πρέπει να τονισθεί ευθύς εξ αρχής ότι το Πυθαγόρειο δικτυωτό αποτελεί μια αφηρημένη περιοδική διάταξη μουσικών υψών, δηλαδή κόμβων, δια των οποίων υλοποιείται η Πυθαγόρειος μουσική και MONON.

Κατά τη σχεδίαση του Πυθαγορείου δικτυωτού σε γραμμικούς άξονες οι παράλληλες ευθείες των συνεπιπέδων δεσμών απέχουν κατά αποστάσεις ανάλογες του $\left(\frac{a}{b}\right)^k$ $k=1,2,3,\dots$, όπου $\left(\frac{a}{b}\right)$ είναι το χαρακτηριστικό θεμελειώδες μουσικό διάστημα κατά τον αντίστοιχο άξονα. Ως εκ τούτου είναι μεταξύ τους μη ισαπέχουσες.

Προκειμένου να καταστεί το Πυθαγόρειο δικτυωτό ευκολότερο στη σχεδίαση και περισσότερο εποπτικό, το σχεδιάζουμε σε ορθογώνιο σύστημα αναφοράς με λογαριθμικούς άξονες (Σχήμα 4).

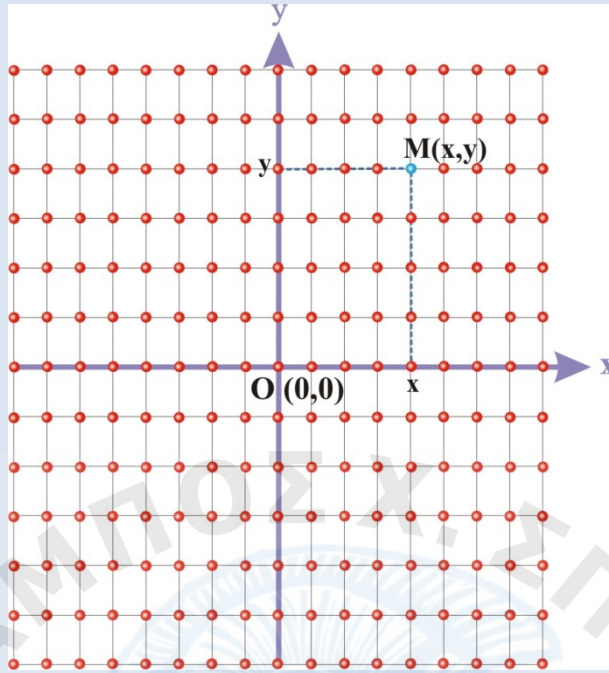


Σχήμα 4: Το Πυθαγόρειο δικτυωτό σε log-log διάγραμμα,

$$\text{όπου } x = \log_{\frac{4}{3}} \left[\left(\frac{4}{3} \right)^x \right] \text{ και } y = \log_{\frac{3}{2}} \left[\left(\frac{3}{2} \right)^y \right].$$

Στο Πυθαγόρειο δικτυωτό κατά τον άξονα x το βήμα (= η μικρότερη επιτρεπτή μετακίνηση) είναι ένα επίτριτο διάστημα και κατά τον άξονα y το βήμα είναι ένα ημιόλιο διάστημα. Αυτά σημαίνουν ότι στο Πυθαγόρειο δικτυωτό οι μετατοπίσεις γίνονται κατά ακέραιο αριθμό βημάτων και MONON.

Ένας κόμβος του Πυθαγορείου δικτυωτού με συντεταγμένες x και y συμβολίζεται ως $M(x, y)$ και παριστά το μουσικό ύψος $M(x, y) = \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^y \cdot \mathcal{O}(0,0)$, αφού υλοποιείται με την εκτέλεση x επιτρίτων και y ημιολίων μουσικών διαστημάτων σε σχέση με ένα αρχικό μουσικό ύψος $\mathcal{O}(0,0)$, το οποίο εκλαμβάνεται ως μουσικό ύψος αναφοράς (Σχήμα 5).



Σχήμα 5: Ένα μουσικό ύψος $M(x,y)$ σε Πυθαγόρειο δικτυωτό, το οποίο σε σχέση με ένα μουσικό ύψος αναφοράς $O(0,0)$ σχηματίζει ένα μουσικό διάστημα.

Προφανώς, οποιοδήποτε Πυθαγόρειο μουσικό διάστημα εκφράζεται σαν απόσταση μεταξύ δύο καταλλήλων κόμβων του Πυθαγορείου δικτυωτού.

Ο μετασχηματισμός του κανόνος (μονοχόρδου)

Κατόπιν προβληματίστηκα με την ερώτηση: Γιατί ο Ευκλείδης εις την μουσική του πραγματεία «Κατατομή κανόνος» επιμένει ότι η μονάς δεν διαιρείται;

Τη λύση βρήκα στον Φιλόλαο και στα «Στοιχεία» του Ευκλείδου διαβάζοντας περί της μεθόδου της *Ανθυφαιρέσεως* ή της *Ανταναιρέσεως*.

Οι αναζητήσεις μου με καθοδηγούς τον Γαυδέντιο (πυθαγόρειο πείραμα με χορδές), τον Πορφύριο και τον Κλαύδιο Πτολεμαίο ωδήγησαν τα βήματά μου στον *Πυθαγόρειο κανόνα* (μονόχορδο), το όργανο πειραματισμού των «κανονικών» και της πειραματικής θεμελιώσεως της αρχαιοελληνικής Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας (Σχήμα 6).

Η προσπάθεια των Πυθαγορείων σύμφωνα με τις «γραφές» εμφανίζεται να είναι η επιβολή με τη βοήθεια της θεωρίας των λόγων ενός συστήματος προσδιορισμού των μαθηματικών σχέσεων μεταξύ των φθόγγων της κλίμακος. Εκείνο που πρέπει με έμφαση να τονισθεί είναι το γεγονός ότι, χρησιμοποιώντας ως όργανο μετρήσεως το αυτί τους, δεν μπορούσαν επακριβώς να μετρήσουν τις σχέσεις των μουσικών υψών των φθόγγων. Κάποια στιγμή, όμως, αντελήφθησαν ότι, εάν επιδιώκεται η ακρίβεια στις μετρήσεις των σχέσεων των μουσικών υψών των φθόγγων, θα πρέπει να βρεθεί ένας μετασχηματισμός δια του οποίου να μεταφέρονται οι σχέσεις των μουσικών υψών από τον χώρο της ακοής στον χώρο του οφθαλμού, όπου είναι γενικώς αποδεκτό ότι μπορούν να πραγματοποιηθούν ακριβείς μετρήσεις.

ὄφθαλμοὶ γὰρ τῶν ὄτων ἀκριβέστεροι μάρτυρες

Πολυβίου, *Ιστορίαι*, 12, 27, 1, 5

[τα μάτια είναι ακριβέστεροι μάρτυρες απ' ό,τι τα αυτιά]

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός υλοποιείται με τον «κανόνα (=μονόχορδο)» και αφορά στον μετασχηματισμό των λόγων μουσικών υψών από τον χώρο της ακοής σε λόγους δονουμένων τμημάτων χορδής στο χώρο της οπτικής δια της σχέσεως:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{L_2}{L_1} \text{ η οποία εκφράζει τον συζητούμενο μετασχηματισμό, αφού ο λόγος των}$$

συχνοτήτων $\frac{f_1}{f_2}$ εκφράζει το μουσικό διάστημα στον χώρο της Ακουστικής, ενώ ο λό-

γος των μηκών $\frac{L_2}{L_1}$ των δονουμένων τμημάτων χορδής, τα οποία δύνανται να μετρη-

θούν επακριβώς, εκφράζει το μουσικό διάστημα στον χώρο της Οπτικής.



Σχήμα 6: Ο Κανών κατά τον Κλαύδιο Πτολεμαίο.

Αντίστροφο ή Σπυρίδειο δικτυωτό

Με την εφαρμογή του «μετασχηματισμού του κανόνος» εφ' ενός ευθέος δικτυωτού προκύπτει το αντίστροφο δικτυωτό του. Το αντίστροφο δικτυωτό ενός δοθέντος ευθέος δικτυωτού είναι εξαιρετικά χρήσιμο για τους υπολογισμούς και γενικότερα για τις εφαρμογές που αφορούν σε μήκη δονουμένων τμημάτων χορδών εγχόρδων μουσικών οργάνων χωρίς δεσμούς, όπως είναι επί παραδείγματι ο πυθαγόρειος κανών της αρχαιότητας, η αρχαιοελληνική «πανδουρίς» ή η «θαμπούρα» των Βυζαντινών. Το κάθε αντίστροφο δικτυωτό έχει την ίδια μορφολογικά γεωμετρική κατασκευή που έχει και το αντίστοιχό του ευθύ δικτυωτό με τις εξής δύο χαρακτηριστικές ιδιότητες:

1. Λόγω του μετασχηματισμού του κανόνος, ο κάθε κόμβος του αντιστρόφου δικτυωτού ορίζει ένα μήκος δονουμένου τμήματος χορδής επί του άνευ δεσμών βραχίονος του εγχόρδου οργάνου.
2. Λόγω της Ευκλείδειου μεθόδου της ανθυφαιρέσεως ή της ανταναιρέσεως εκ του συνόλου των κόμβων του αντιστρόφου δικτυωτού φυσική σημασία έχουν μόνο οι κόμβοι, οι οποίοι αντιστοιχούν σε δονούμενα τμήματα χορδής με μήκη εκφραζόμενα δι' **ακεραίων** αριθμών. Η μικρότερη αριθμητική τιμή αποδεκτού κόμβου είναι αυτή της μονάδος και εκφράζει το μήκος της «ανθυφαιρετικής» μονάδος, η οποία δια τούτο είναι και αδιαίρετη.

Στην περίπτωση των δύο διαστάσεων το αντίστροφο δικτυωτό ενός Πυθαγορείου δικτυωτού το ονόμασα *Σπυρίδειο δικτυωτό*. Και στο Σπυρίδειο δικτυωτό ένας κόμβος Μ με συντεταγμένες x, y παριστά ένα μήκος δονουμένου τμήματος χορδής, το οποίο υλοποιεί σε σχέση με ένα αρχικό δονούμενο τμήμα χορδής $L_0(0,0)$, το οποίο εκλαμβάνεται ως δονούμενο τμήμα χορδής αναφοράς, το μουσικό διάστημα

$$\left(\frac{L_M}{L_0}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^y$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού του κανόνος οι αποδεκτοί κόμβοι του Σπυρίδειου δικτυωτού μας μεταφέρουν σε ίσου πλήθους κόμβους του Πυθαγορείου δικτυωτού, οι οποίοι εκφράζουν αποδεκτά Πυθαγόρεια μουσικά ύψη. Βεβαίως, για να υπολο-

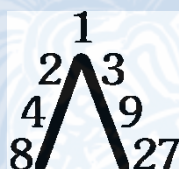
γισθεί η απόλυτη τιμή αυτών των μουσικών υψών, θα πρέπει να είναι γνωστό το μουσικό ύψος του κόμβου αναφοράς στο Πυθαγόρειο δικτυωτό.

Για την πλήρη μελέτη της παγκοσμίου μουσικής κατά τη θεωρία των δικτυωτών απαιτείται η πλήρης γνώση ενός πολυδιαστάτου συμπαντικού χώρου με ένδεκα το πολύ διαστάσεις -χωρίς σε αυτές να συμπεριλαμβάνεται ο χρόνος-, ενός χώρου μη συνεχούς, μη ευθυγράμμου, μη ευκλειδείου, αλλά ανισοτρόπου, κυψελώδους δομής και καμπύλου.

Ασχολούμενος με την επίλυση του Πλατωνικού προβλήματος επί του **Σπυριδείου δικτυωτού** ευρίσκεισαι αντιμέτωπος με ένα θαυμάσιο **πρόβλημα της θεωρίας αριθμών** που είναι εξ ίσου διαχρονικό μ' ένα αληθινό έργο τέχνης και αισθάνεσαι την ανάγκη να αναφωνήσεις: *«Αυτά δεν είναι Μαθηματικά. Αυτά είναι Θεολογία!»*.

Κόσμος και Ψυχή

Προβληματιζόμενος με το τέλει και απόλυτο γεωμετρικό σχέδιο του Κόσμου, εντός του οποίου, κατά τον ισχυρισμόν του Πλουτάρχου (1027 Ε 9), ο ίδιος ο Πλάτων χρησιμοποιούσε τη λαβδοειδή διάταξη των αριθμών (Σχήμα 7) και, βασιζόμενος επί της συμμετρίας, υποστηρίζω ότι το Σπυρίδειο δικτυωτό είναι ο κατά Πλάτωνα ΚΟΣΜΟΣ.

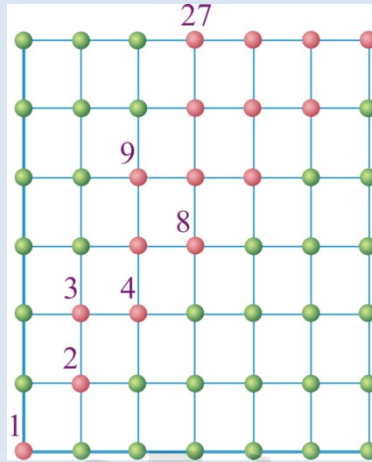


Σχήμα 7: Το λαβδοειδές διάγραμμα του Αδράστου.

Πράγματι, επί του ΚΟΣΜΟΥ ο Πλάτων προσπαθεί να περιχαρακώσει ένα πεδίο τιμών, εντός του οποίου θα ευρίσκονται οι ακέραιες λύσεις του προβλήματός του και οι λύσεις του οποιουδήποτε προβλήματος της Πυθαγορείου μουσικής. Το πεδίο αυτό των ακεραίων τιμών –η κατά Πλάτωνα ΨΥΧΗ- είναι η τριγωνικής μορφής περιοχή του Σπυριδείου δικτυωτού, η οποία έχει κορυφή επί του κόμβου αναφοράς και πλευρές καθοριζόμενες από τις γεννήτριες συναρτήσεις

$$\phi(x) = 2^x \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{και} \quad \rho(y) = 3^y \quad y = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Με δύο τετρακτύες (1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27) –μία εξ εκάστης γεννητρίου συναρτήσεως- ο Πλάτων δομεί την μεγίστη τετρακτύν του 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27 δια της οποίας μας υποδεικνύει τα όρια της Ψυχής του Κόσμου (Σχήμα 8).



Σχήμα 8: Ο καθορισμός των ορίων της Ψυχής του Κόσμου με τους όρους της μεγίστης τετρακτύος του Πλάτωνος [«μουσικό χωρίο (35a1-36b6)» του διαλόγου του *Τίμαιος*].

Υποστήριξη της θεωρίας των δικτυωτών

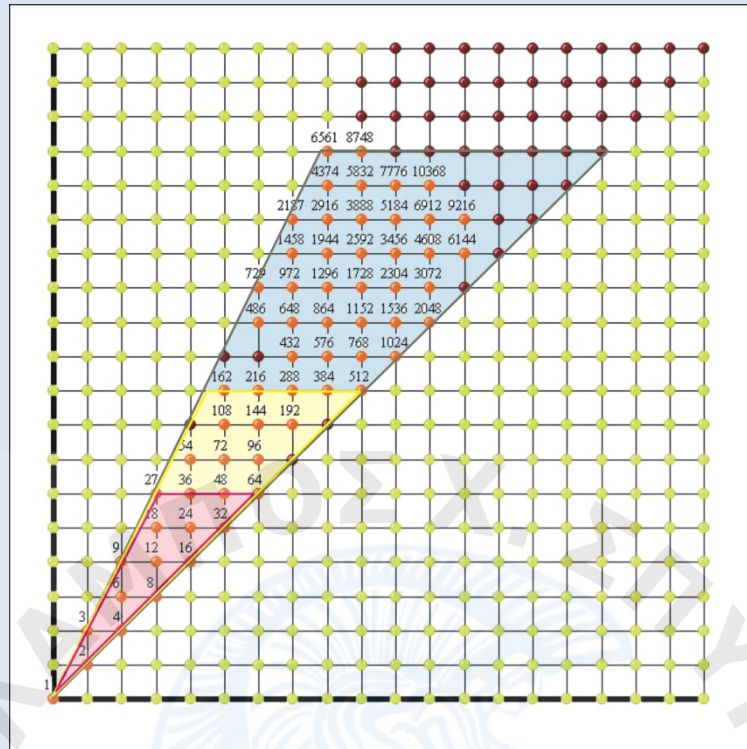
Υποστηρίζω την ορθότητα της θεωρίας των δικτυωτών, αναφέρω ότι:

1. Είναι η μοναδική θεωρία που παρέχει τη λαβδοειδή διάταξη όλων των αριθμών για τη λύση του Πλατωνικού προβλήματος περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου. Πράγματι, υπάρχει δυϊσμός, όσον αφορά στην κατάστρωση των αριθμών για τη λύση του Πλατωνικού προβλήματος από ανθρώπους τόσο κοντά στον Πλάτωνα. Συγκεκριμένα, ο Μαθηματικός ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος τοποθετεί τους αριθμούς επ' ευθείας, αναμειγνύων αρτίους με περιττούς αριθμούς, ενώ ο Άδραστος και ο Κράντωρ τους τοποθετούν λαβδοειδώς, βάζοντας επί του ενός σκέλους του Λ τους αρτίους και επί του άλλου σκέλους του τους περιττούς αριθμούς και εις την κορυφή του τη μονάδα (Σχήμα 7), αλλά οι πληροφορίες μας περιορίζονται στους αριθμούς της μεγίστης τετρακτύος και μόνον.

2. Μας παρέχει για πρώτη φορά την γραφική παράσταση (Σχήμα 9) της Προκλείου ρήσεως:

«Άδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ καὶ ἐν τρισὶ τριγώνοις ἐκτίθεται τοὺς ὅρους, ἐπὶ μὲν τοῦ ἐντὸς αὐτοῦ τοὺς ἐν τοῖς μοναδικοῖς ἀριθμοῖς λόγους, ἐπὶ δὲ τοῦ μετὰ τοῦτο τοὺς ἐξαπλασίους τούτων, τοὺς ἔχοντας δύο μεσότητας καθ' ἕκαστον διάστημα τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον, ἐπὶ δὲ τοῦ ἐξωτάτῳ τοὺς ποιοῦντας ὅλον τὸ διάγραμμα τὸ εἰρημένον».

Πρόκλου *Εἰς τον Τίμαιον* Γ [Tim 35B] 197C5-12

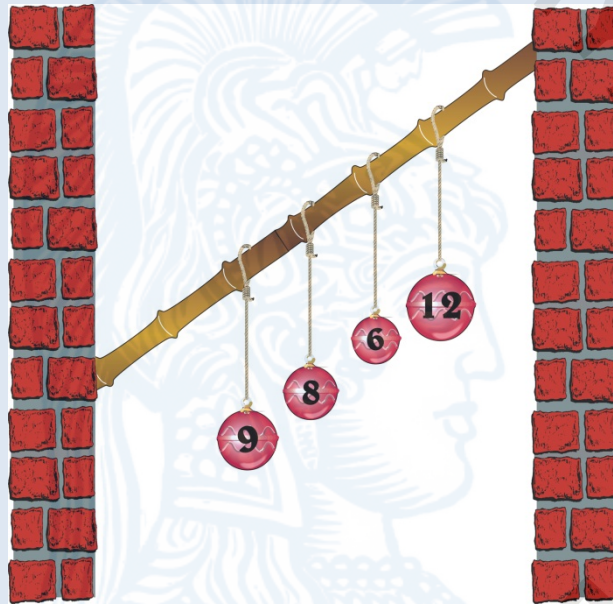
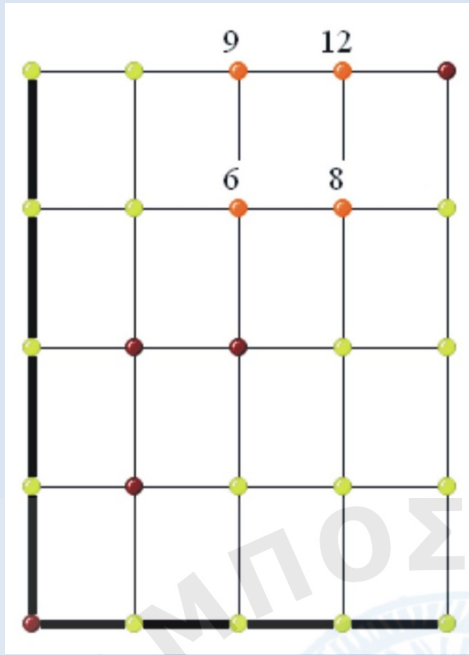


Σχήμα 9: Η γραφική παράσταση της Προκλείου ρήσεως:

«Ἄδραστος δὲ φιλοτεχνῶν, λαβδοειδὲς τὸ σχῆμα ποιεῖ καὶ ἐν τρισὶ τριγώνοις ἐκτίθεται τοὺς ὄρους, ἐπὶ μὲν τοῦ ἐντὸς αὐτοῦ τοὺς ἐν τοῖς μοναδικοῖς ἀριθμοῖς λόγους, ἐπὶ δὲ τοῦ μετὰ τοῦτο τοὺς ἑξαπλασίους τούτων, τοὺς ἔχοντας δύο μεσότητας καθ’ ἕκαστον διάστημα τὸ διπλάσιον ἢ τριπλάσιον, ἐπὶ δὲ τοῦ ἐξωτάτῳ τοὺς ποιοῦντας ὅλον τὸ διάγραμμα τὸ εἰρημένον».

Πρόκλου Εἰς τὸν Τίμαιον Γ [Tim 35B] 197C5-12

3. Διὰ τῆς Ψυχῆς τοῦ Κόσμου ἐπὶ τοῦ Σπυριδείου δικτυωτοῦ παρέχεται μεγίστη ευκολία υπολογισμοῦ τοῦ αριθμητικοῦ καὶ τοῦ αρμονικοῦ μέσου δύο διπλασίων αριθμῶν, αφοῦ σὲν κάθε ἀπλὴ κυψελίδα τὴν χαμηλοτέρα κορυφὴ κατέχει ὁ μικρότερος τῶν αριθμῶν, τὴν ἀντιδιαγώνιον τῆς κορυφῆν κατέχει ὁ διπλασίος του, τὴν δεξιόθεν τῆς διαγωνίου κορυφῆν κατέχει ὁ αρμονικός τῶν μέσος καὶ τὴν ἀντιδιαγώνιον αὐτῆς κορυφῆν κατέχει ὁ ἀριθμητικός τῶν μέσος.
4. Ἡ πρώτη πλήρης ἀπλὴ κυψελίδα εἰς τὴν Ψυχὴν τοῦ Κόσμου φέρει τοὺς ἀριθμοὺς 6, 8 (αρμονικός μέσος), 9 (ἀριθμητικός μέσος), 12 (διπλασίος) διὰ τῶν ὁποίων –εἰς ἓνα πρῶτο ἐπίπεδο– ἀποκωδικοποιεῖται τὸ κατὰ τὸν νεοπλατωνικὸν Ἰάμβλιχον (3^{ος} αἰ. μ.Χ.) Πυθαγόρειον πείραμα μετὰ τὰ σφυριά στο χαλκοτυπεῖο (*Βίος Πυθαγορικός*) (Σχήματα 10, 11, 12)



Σχήματα 10, 11, 12. Πυθαγόρειο πείραμα με τα σφυριά στο χαλκοτυπείο (Ιάμβλιχος, *Βίος Πυθαγορικός*).

και σε βαθύτερο επίπεδο αποκωδικοποιείται ολόκληρη η θεωρία των αναλογιών του Πυθαγόρου (Αριθμητική, Γεωμετρική, Υπενάντιος) και ολόκληρη η Αρμονική Επιστήμη των Πυθαγορείων (Σχήμα 13).



Σχήμα 13: Του δις διατεσσάρων ($4^2 : 3^2$) αφαιρουμένου από το διαπασών ($12 : 6$), ο μείζων τόνος (ε-
πόγδος) ($9 : 8$).

Όροι $12 : 6$, εν διπλασίω

Πρόσδος $9 : 6$, $12 : 8$, εν ημιολίω

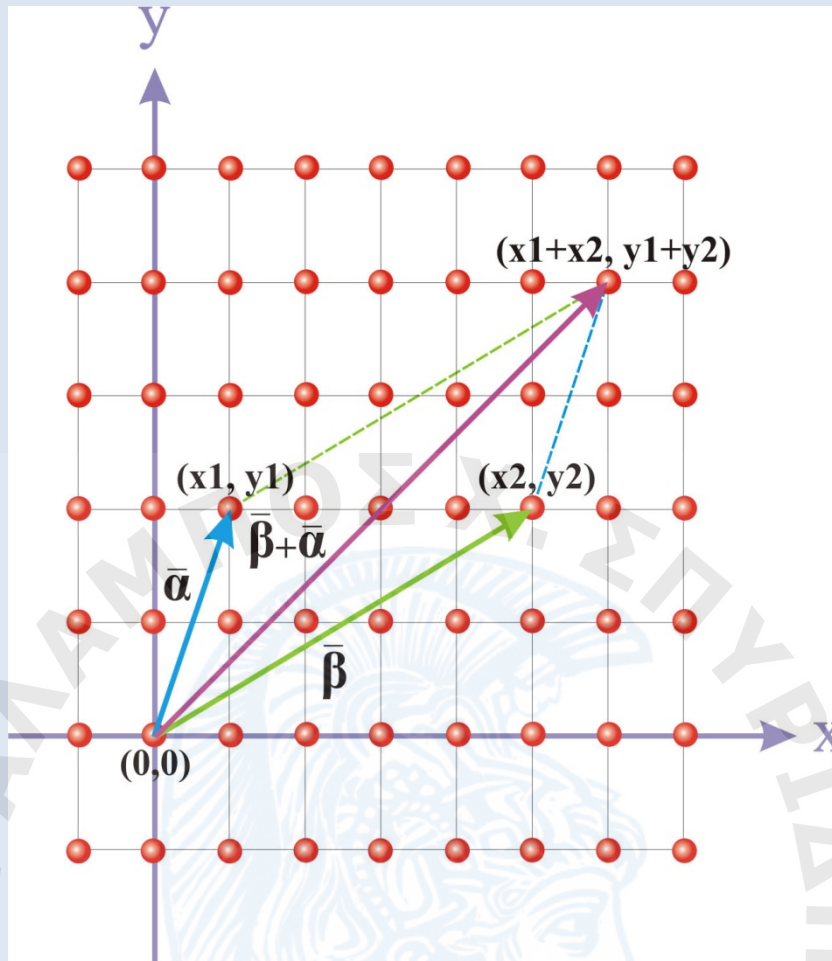
Υπόλοιπα $8 : 6$, $12 : 9$, εν επιπρίτω

Διαφοραί

$$6 : 9 : 12 \Rightarrow (9 - 6) : (12 - 9) \Rightarrow 3 : 3 \text{ εν ίσω}$$

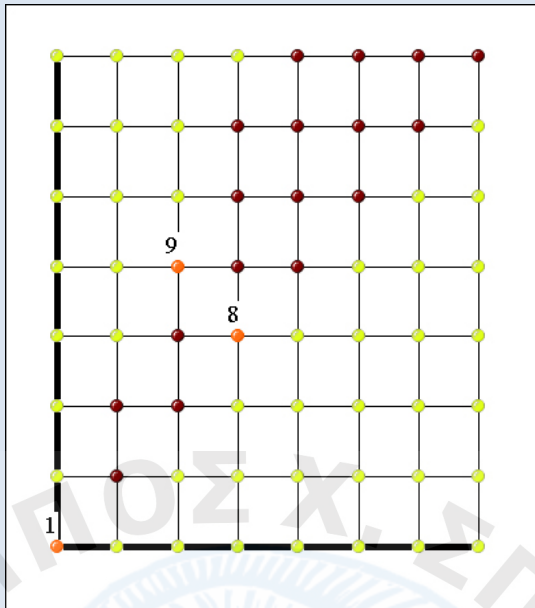
$$6 : 8 : 12 \Rightarrow (8 - 6) : (12 - 8) \Rightarrow 2 : 4 \text{ εν διπλασίω}$$

5. Επαληθεύονται βάσει της θεωρίας των δικτυωτών όλες οι είκοσι Προτάσεις της Ευκλείδειου *Κατατομής του Κανόνος*.
6. Ο Αριστόξενος διήρεσε τη μουσική κλίμακα εις 24 τέταρτα του τόνου ή 12 ημί-
τονα ίσα, συγκεκριάσας αυτήν για πρώτη φορά στην ιστορία της μουσικής. Ο ίδι-
ος, λοιπόν, προς ευκολίαν των μαθητευομένων, διήρεσε εις φανταστικά ίσα
τμήματα ή μόρια το διαπασών (οκτάβα) ως εξής: τον τόνον εις 24 (12), το ημί-
τονον εις 12 (6) και ολόκληρη την οκτάβα εις 144 (72) τμήματα ή μόρια. Να
σημειωθεί ότι οι αναφερθέντες αριθμοί 6, 12, 24, 72, 144 δεν επελέγησαν τυ-
χαίως, αλλ' είναι εκ των αριθμών της Ψυχής του Πλατωνικού Κόσμου.
7. Απόρροια της θεωρίας των δικτυωτών είναι «Ο Μουσικός Διανυσματικός Λογι-
σμός» δια του οποίου επιλύονται τα μουσικά προβλήματα, αντιμετωπίζοντας τα
μουσικά διαστήματα ως διανύσματα (Σχήμα 14). Εις αυτό το δικτυωτό επίπεδο
αντιλαμβάνεται κανείς ότι ο κανών του παραλληλογράμμου για την πρόσθεση
των μουσικών διανυσμάτων είναι μια φυσική συνέπεια και όχι αξίωμα.

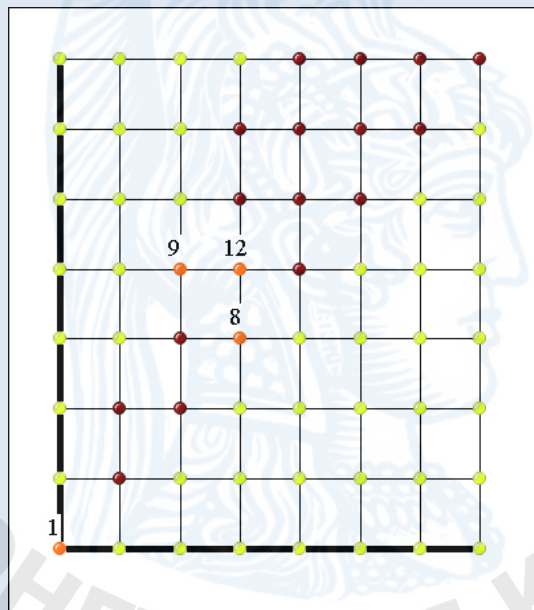


Σχήμα 14: Πρόσθεση «δυνάμει» δύο μουσικών διανυσμάτων που έχουν κοινή αρχή.

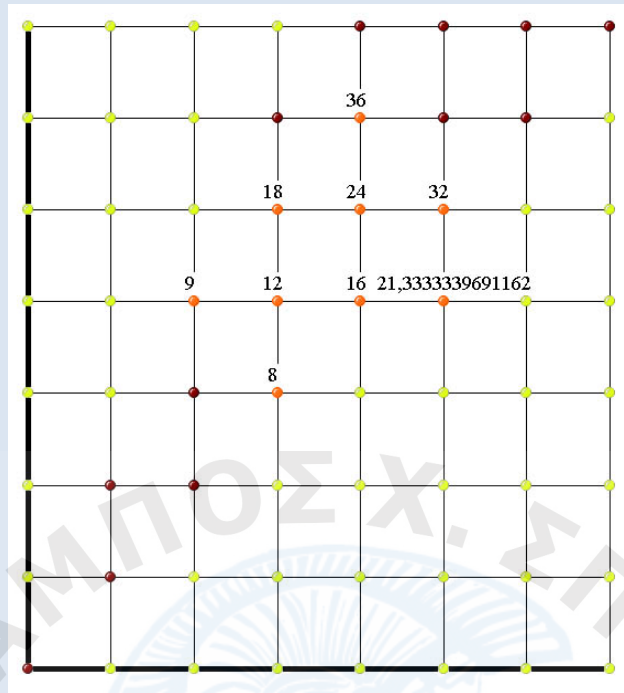
8. Επιστεύετο υπό των Πυθαγορείων η θεωρία της «αρμονίας των σφαιρών», ότι δηλαδή οι πλανήτες, καθώς περιφέρονται στο σύμπαν, παράγουν διαφόρους «ήχους». Παρέχεται υπό της θεωρίας των δικτυωτών η δυνατότητα να ερμηνεύει με μοναδικό τρόπο τη θέση των «σφαιρών» κατά την αρμονία των σφαιρών στον συμπαντικό χώρο κατά τον Κλαύδιο Πτολεμαίο (*Μουσικά*, 24, 1-11) ακόμη και της περιέργου θέσεως του Άρεως. (Βλέπε Πίνακα 2 και Σχήματα 15, 16 και 17). Είναι μέχρι στιγμής ανεξήγητη η μη ακεραία τιμή (21,333...) ενός κόμβου, ο οποίος εκφράζει σχετική απόσταση του Άρεως ως προς τη Γη κατά τη θεωρία των δικτυωτών, γεγονός, όμως, που με τον ίδιο αριθμό μνημονεύει και ο Κλαύδιος Πτολεμαίος στο έργο του Μουσικά (Πίνακας 2).



Σχήμα 15: Το Αντίστροφο δισδιάστατο δικτυωτό με τις σχετικές αποστάσεις της Σελήνης ως προς τη Γη.



Σχήμα 16: Το Αντίστροφο δισδιάστατο δικτυωτό με τις σχετικές αποστάσεις του Ερμού ως προς τη Γη.



Σχήμα 17: Το Αντίστροφο διαδιάστατο δικτυωτό με τις σχετικές αποστάσεις του Άρεως ως προς τη Γη κατά τον Κλαύδιο Πτολεμαίο.

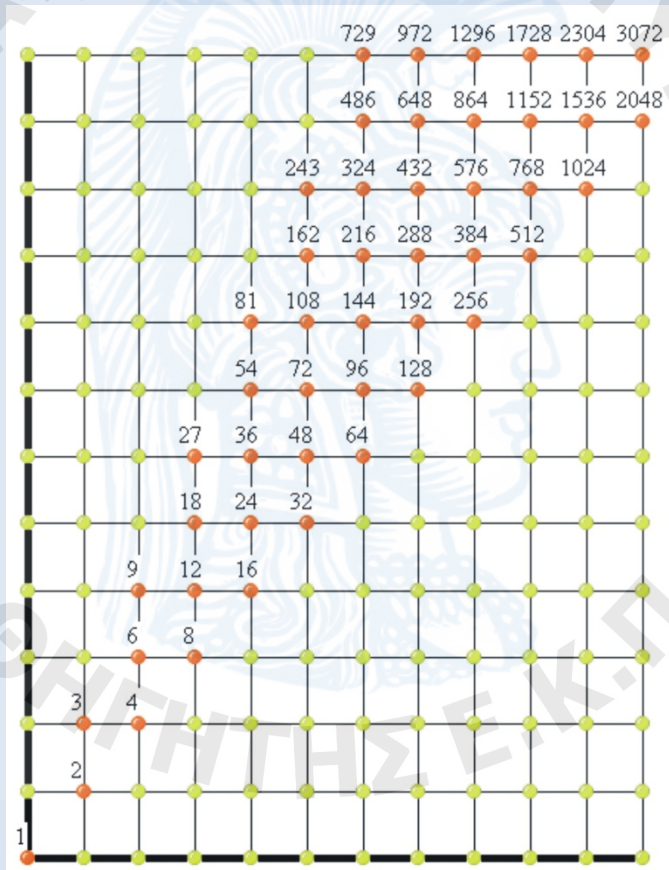
Πίνακας 2: Κλαύδιος Πτολεμαίος, <i>Μουσικά</i> , 24, 1-11		
Φθόγγοι έστῶτες	Άριθμοί	Σφαίραι
νήτη ὑπερβολαίων	λζ (36)	ἀπλανῶν
νήτη ὑπερβολαίων	λβ (32)	κρόνου
νήτη διεζευγμένων	κδ (24)	διός
νήτη συνημμένων	κα γ $\left(21\frac{1}{3}=21,3333\right)$	ἄρεως
παράμεσος	ιη (18)	ἡλίου
μέση	ις (16)	ἀφροδίτης
ὑπάτη μέσων	ιβ (12)	έρμοῦ
ὑπάτη ὑπατῶν	θ (9)	σελήνης
προσλαμβανόμενος	η (8)	πυρὸς ἀέρος ὔδατος γῆς

9. Απόρροια της θεωρίας μου περί των ευθέων και αντιστρόφων δικτυωτῶν είναι η διαπίστωση ὅτι ο Πλάτων είναι ο ευρετής των *συστημάτων αναφοράς* στα Μαθηματικά, εἴκοσι και δύο αἰῶνες προ του Rene Descartes (1596-1650) (Εικόνα 2).



Εικόνα 2: Rene Descartes (1596-1650)

10. Δια της Ψυχής του Κόσμου επί του Σπυριδείου δικτυωτού (Σχήμα 18) επαληθεύονται με τον απλούστατο τρόπο όλα όσα αφορούν εις τη διδασκαλία των ταυτοτήτων $(x+1)^y$.



Σχήμα 18: Ακέραιοι αριθμοί της Ψυχής του Κόσμου, περιβαλλόμενοι υπό των όρων της μεγίστης τετρακτύος, δια των οποίων εκφράζει την όλη μουσική του φιλοσοφία και διδασκαλία ο Πλάτων [«μουσικό χωρίο (35a1-36b6)» του διαλόγου του *Τίμαιος*].

Πράγματι, εκκινώντας από τη γεννήτρια συνάρτηση $\phi(x) = 2^x$, $x = 0, 1, 2, \dots$ της Ψυχής του Κόσμου, βάσει μιας αλληλουχίας διαδικασιών παρουσιαζομένων στον Πίνακα 3, προκύπτει η γενικευμένη μορφή της Ψυχής του Κόσμου.

Πίνακας 3: Παραγωγή της γενικευμένης μορφής της Ψυχής του Κόσμου.

1	2	2^2	2^3	...	$2^ν$
	2+1	$2^2 + 2$	$2^3 + 2^2$...	$2^ν + 2^{ν-1}$
		$2^2 + 2 \cdot 2 + 1$	$2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2$...	$2^ν + 2 \cdot 2^{ν-1} + 2^{ν-2}$
			$2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$...	$2^ν + 3 \cdot 2^{ν-1} + 3 \cdot 2^{ν-2} + 2^{ν-3}$
				...	$2^ν + ν \cdot 2^{ν-1} + \frac{ν(ν-1)}{2} \cdot 2^{ν-2} + \dots + 1$

Εις το τελευταίο κελί εκάστης στήλης ευρίσκεται ανεπτυγμένη μία ταυτότης της μορφής $(2+1)^ν$ (Πίνακας 4).

Πίνακας 4: Αναπτύγματα των ταυτοτήτων της μορφής $(2+1)^ν$.

1	2+1	$2^2 + 2 \cdot 2 + 1$	$2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$...	$2^ν + ν \cdot 2^{ν-1} + \frac{ν(ν-1)}{2} \cdot 2^{ν-2} + \dots + 1$
1	$(2+1)^1$	$(2+1)^2$	$(2+1)^3$		$(2+1)^ν$

Στη γενική περίπτωση, εκκινούντες από μία οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδο της μορφής $\phi(x) = x^ν$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$ και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, καταλήγουμε στο ανάπτυγμα των ταυτοτήτων της μορφής $(x+1)^ν$.

Πέντε ή έξι αιώνες μετά τον Πλάτωνα, ο Πυθαγόρειος φιλόσοφος Νικόμαχος ο Γερασηνός στο έργο του *Αριθμητική Εισαγωγή*, II, 3, 1, 1 κ.ε.) αναφέρεται λεπτομερώς σε όλα τα παραπάνω.

Βάσει αυτών, στις αναλυτικές εκφράσεις αυτών των ταυτοτήτων (Πίνακας 3) οι συντελεστές των όρων που είναι δυνάμεις του 2 δομούν το σήμερα ονομαζόμενο «*τρίγωνο του Pascal*»!

11. Τέλος, η Ψυχή του Κόσμου, λαμβανομένων υπ' όψιν των μουσικών φθόγγων, που εκφράζουν οι αριθμοί της, γεννά τον κύκλο των πεμπτών (Πίνακας 5), αφού η ημιόλιος είναι η επιμόριος σχέση που συμμετέχει στη γένεση των αριθμών της Ψυχής του Κόσμου.

Πίνακας 5: Ο κύκλος των πεμπτών γεννάται από τους αριθμούς της Ψυχής του Κόσμου.

B 1									
B 2	E 3								
B 4	E 6	A 9							
B 8	E 12	A 18	D 27						
B 16	E 24	A 36	D 54	G 81					
B 32	E 48	A 72	D 108	G 162	C 243				
B 64	E 96	A 144	D 216	G 324	C 486	F 729			
B 128	E 192	A 288	D 432	G 648	C 972	F 1458	Bb 2187		
B 256	E 384	A 576	D 864	G 1296	C 1944	F 2916	Bb 4374	Eb 6561	
B 512	E 768	A 1152	D 1728	G 2592	C 3888	F 5832	Bb 8748	Eb 13122	Ab 19683
B 1024	E 1536	A 2304	D 3456	G 5184	C 7776	F 11664	Bb 17496	Eb 26244	Ab 39366
B 2048	E 3072	A 4608	D 6912	G 10368	C 15552	F 23328	Bb 34992	Eb 52488	Ab 78732
B 4096	E 6144	A 9216	D 13824	G 20736	C 31104	F 46656	Bb 69984	Eb 104976	Ab 157464
B 8192	E 12288	A 18432	D 27648	G 41472	C 62208	F 93312	Bb 139968	Eb 209952	Ab 314928

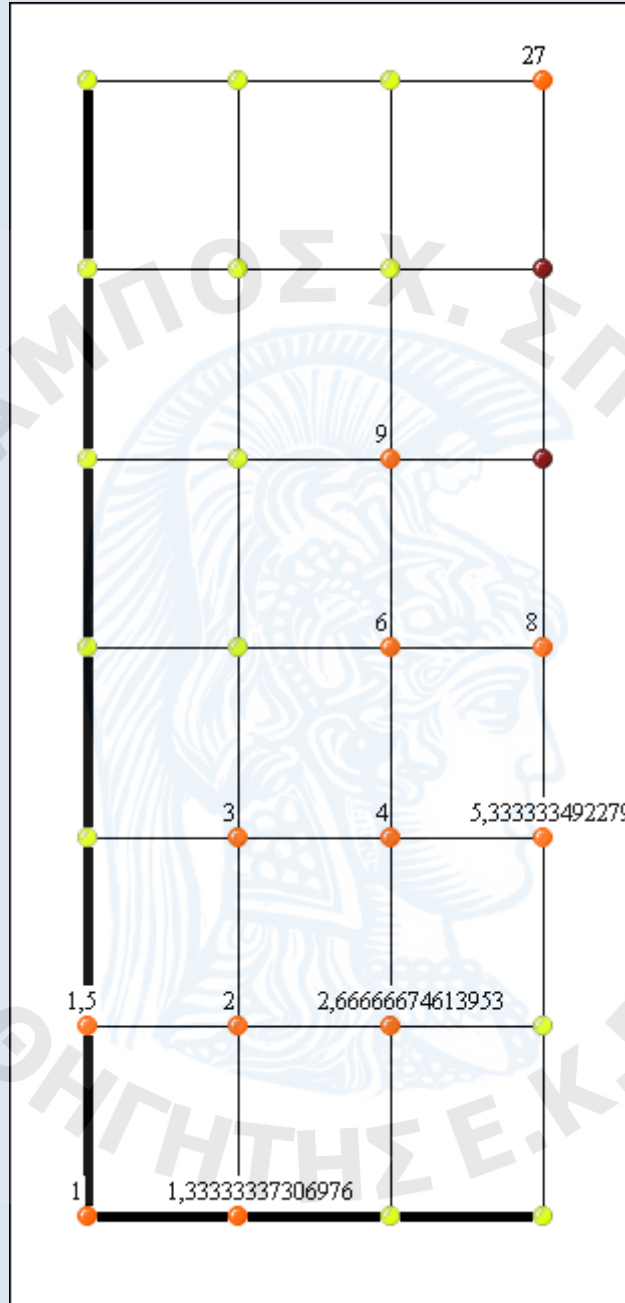
Επίλογος

Κυρίες και κύριοι συνάδελφοι, απευθυνόμενος προς υμάς επιτρέψατε αφενός μεν να σας θυμίσω τη λατινική ρήση «*ignoramus et ignorabimus*» [είμαστε και θα παραμείνουμε αδαείς] με την έννοια ότι υπάρχουν όρια στην ικανότητά μας να κατανοήσουμε τη φύση, αφετέρου δε να σας συστήσω να μη διστάζετε να ασχολείσθε με τα μεγάλα προβλήματα, διότι έτσι δεν αποκλείεται να ανακαλύψετε καθ' οδόν κάτι το ενδιαφέρον. Δια της Ψυχής του Κόσμου επί του Σπυριδείου δικτυωτού παρέχεται μεγίστη ευκολία υπολογισμού του αριθμητικού και του αρμονικού μέσου δύο διπλασίων ή τριπλασίων αριθμών, διότι:

- ☉ Στην κάθε απλή κυψελίδα διπλασίων αριθμών, στην οποία δηλαδή την κάτω αριστερή κορυφή κατέχει ένας αριθμός (x) και την αντιδιαγώνιων της κορυφήν (επάνω δεξιά) κατέχει ο διπλάσιός του ($2x$), τότε την δεξιόθεν της διαγωνίου κορυφήν (κάτω δεξιά) κατέχει ο αρμονικός των μέσων

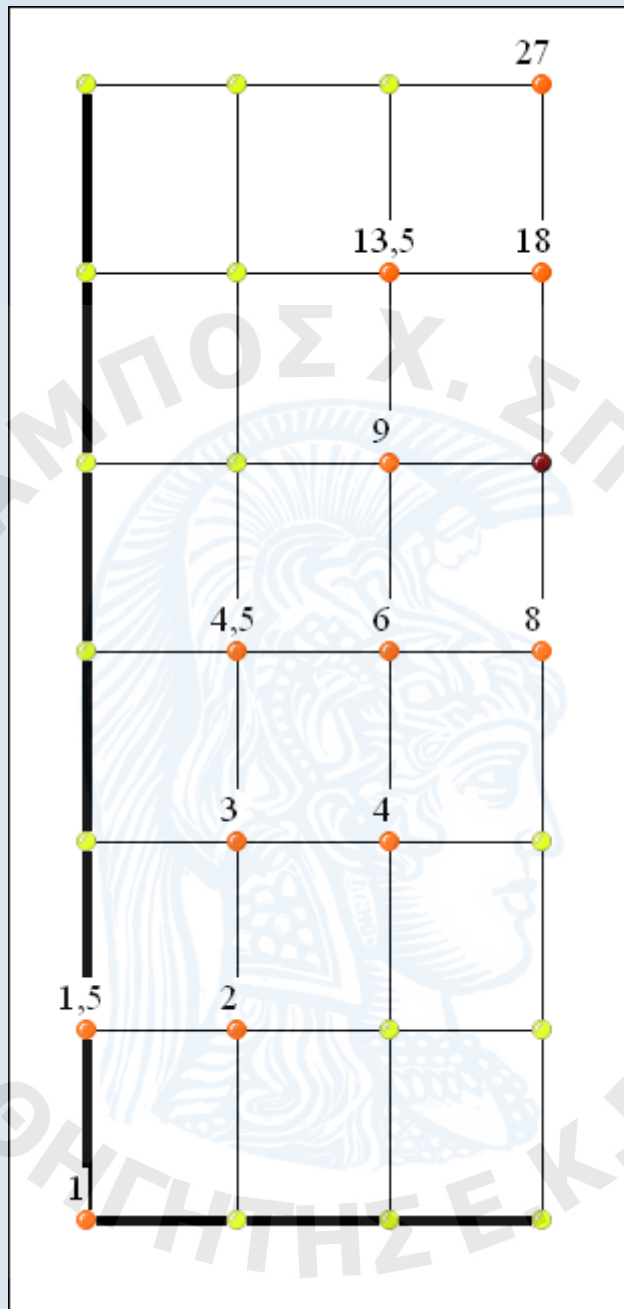
$$\left(\frac{2 \cdot x \cdot 2x}{x+2x}\right) = \frac{4}{3} \cdot x \text{ και την αντιδιαγώνιον αυτής κορυφήν (επάνω αριστε-}$$

$$\text{ρά) κατέχει ο αριθμητικός των μέσος } \left(\frac{x+2x}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot x.$$



- ⊗ Δύο απλές κυψελίδες διπλασίων αριθμών, η μία επάνω από την άλλη, δομούν μια σύνθετη κυψελίδα τριπλασίων αριθμών, στην οποία δηλαδή την χαμηλότερα αριστερή κορυφή κατέχει ένας αριθμός (x) και την υψηλότερη δεξιά κορυφή κατέχει ο τριπλάσιός του (3x).
- ⊗ Στην κάθε σύνθετη κυψελίδα τριπλασίων αριθμών οι μέσοι (αριθμητικός και αρμονικός) αυτών ευρίσκονται επί της πλευράς, η οποία την χωρίζει σε δύο απλές κυψελίδες διπλασίων αριθμών και μάλιστα επάνω από τον

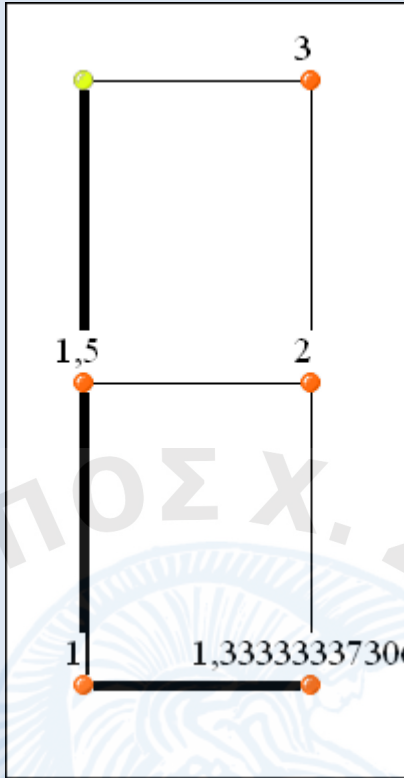
μικρότερο αριθμό ευρίσκεται ο αρμονικός μέσος και κάτω από τον μεγαλύτερο ευρίσκεται ο αριθμητικός μέσος.



Τα ανωτέρω, συνδυαζόμενα, οδηγούν στο κάτωθι θεώρημα το οποίο αναφέρει ο Πλάτων στο μουσικό χωρίο:

Ἐστωσαν δύο αριθμοὶ που εἶναι, αντιστοίχως, ο διπλάσιος και ο τριπλάσιος ενός δοθέντος αριθμοῦ. Εάν στο διπλάσιο διάστημα ληφθεῖ ο αριθμητικός μέσος των ἄκρων του, τότε:

- ⊗ Αυτός ο αριθμητικός μέσος (στο διπλάσιο διάστημα) καθίσταται αρμονικός μέσος για το τριπλάσιο διάστημα.
- ⊗ Ο μεγαλύτερος των ακραίων αριθμῶν του διπλασίου διαστήματος καθίσταται αριθμητικός μέσος του τριπλασίου διαστήματος.



ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΜΠΥΡΙΔΗΣ
 ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Κ.Π.Α.