

Ο ΣΠΥΡΙΔΕΙΟΣ ΑΒΑΣ ΤΟΥ ΛΑΥΡΙΟΥ

**ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ Χ. ΣΠΥΡΙΔΗΣ**  
**ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ**

ΤΜΗΜΑ ΜΟΥΣΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΣΧΟΛΗ,  
ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΠΟΛΗ ΖΩΓΡΑΦΟΥ Τ.Κ. 157 84  
email: hspyridis@music.uoa.gr  
tel/fax: 210-72.77.832

ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ,  
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ  
ΜΟΥΣΙΚΗΣ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

## Εισαγωγή

Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός στην πραγματεία του «Αριθμητική Εισαγωγή» αναφέρει ότι χαρακτηριστικά γνωρίσματα των όντων είναι *το πλήθος* και *το μέγεθος*. Το ορισμένο πλήθος αποτελεί το ποσό και το ορισμένο μέγεθος είναι το πηλίκο. Με το πλήθος, δηλαδή τον απόλυτο αριθμό, ασχολείται η Αριθμητική, η πρώτη από τις τέσσερις αδελφές επιστήμες. Με το πηλίκον, δηλαδή τον σχετικό αριθμό, ασχολείται η Αρμονική (=Μουσική), η τέταρτη από τις τέσσερις αδελφές επιστήμες.

Ο Νικόμαχος, όπως και όλοι οι αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί, δεν θεωρούσαν το λόγο δύο μεγεθών ως αριθμό, διότι ως αριθμούς θεωρούσαν μόνον το *Φυσικόν χύμα*, δηλαδή μόνον τους θετικούς ακεραίους αριθμούς, με άλλα λόγια αυτό που σήμερα ονομάζουμε *σύνολο των φυσικών αριθμών*.

Θεωρούσαν τη μονάδα ως αρχή κάθε αριθμού (*αρχοειδής μονάς*), που αυξάνεται ανά μονάδα κατά μία διεύθυνση. Έτσι, διάστημα πρώτα συναντούμε στο 2, μετά στο 3 κ.ο.κ., διότι διάστημα είναι αυτό που υπάρχει μεταξύ δύο αριθμών<sup>1</sup> «δυοίν αριθμών μεταξύτης».

Στην Αριθμητική

- την γραμμικότητα εκφράζει μια οποιαδήποτε αναλογία κατά ποσότητα, δηλαδή μια οποιαδήποτε αριθμητική πρόοδος π.χ. το Φυσικόν χύμα ή αλλιώς η σειρά των φυσικών αριθμών (1, 2, 3, 4, ...). και
- τη λογαριθμικότητα εκφράζει μια οποιαδήποτε αναλογία κατά ποιότητα, δηλαδή μια οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδος π.χ. η  $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{k-1}$ , η οποία έχει πρώτον όρο τη μονάδα και λόγο τον ακέραιο αριθμό  $\omega$ <sup>2</sup>.

Στην αριθμητική πρόοδο το μεν διάστημα μεταξύ των διαδοχικών όρων είναι σταθερό ( $2-1=1, 4-3=1$  κ.λ.π.)<sup>3</sup>, ο δε λόγος τους όχι  $\left(\frac{2}{1} > \frac{4}{3}\right)$  κ.λ.π.). Στη γεωμετρική πρόοδο το μεν διάστημα μεταξύ των διαδοχικών όρων είναι μη

<sup>1</sup> «Διάστημα γαρ εστι δυοίν όρων το μεταξύ θεωρούμενον». Αυτόθι, Βιβλίον β, §6.

<sup>2</sup> Η Αριθμητική των αρχαίων Ελλήνων στην πλειονότητά της είναι Αριθμητική των ακεραίων αριθμών.

<sup>3</sup> Εξού αναλογία κατά ποσότητα.

σταθερό ( $\omega - 1 < \omega^3 - \omega^2 = \omega^2(\omega - 1)$  κ.λ.π.), ο δε λόγος τους είναι σταθερός  $\left(\frac{\omega}{1} = \frac{\omega^3}{\omega^2} = \omega$  κ.λ.π.)<sup>4</sup>.

Από πολύ παλιά, πριν τον 6<sup>ο</sup> π.Χ. αιώνα κατά τον οποίον έζησε ο φιλόσοφος Πυθαγόρας, οι πρόγονοί μας είχαν αντιμετωπίσει το μουσικό διάστημα με γραμμικό τρόπο και ο Πυθαγόρας, έχοντας επισημάνει τις μεγάλες αδυναμίες αυτού του γραμμικού τρόπου αντιμετώπισης του μουσικού διαστήματος, όρισε το μουσικό διάστημα ως λόγο δύο ομοειδών μεγεθών, εισηγούμενος έτσι αυτό που σήμερα θα λέγαμε τον λογαριθμικό τρόπο αντιμετώπισης του μουσικού διαστήματος.

### **Η έννοια «διάστημα» ως σχέσεως δύο αριθμών προς αλλήλους. (Λογαριθμική αντιμετώπιση του μουσικού διαστήματος).**

Κατά την Πυθαγόρειο άποψη το κάθε μουσικό διάστημα ορίζεται από δύο αριθμούς. Η σχέση μεταξύ δύο αριθμών στη Πυθαγόρειο θεωρία της Μουσικής και σε αυτήν ακόμη την πραγματεία του Ευκλείδου με τίτλο «Κατατομή Κανόνος» εκκαλείτο «διάστημα»<sup>5</sup>.

Δύο σχόλια του Πορφυρίου στην περί της αρμονίας διδασκαλία του Πτολεμαίου αναφέρουν «καὶ τῶν κανονικῶν<sup>6</sup> δὲ καὶ πυθαγορείων οἱ πῆιούς τὰ διαστήματα ἀντὶ τῶν ῥόγων ῥέγουσιν» και «τὸν ῥόγον καὶ τὴν σχέσιν τῶν πρὸς ἀλλήλους ὄρων τὸ διάστημα καθοῦσι» γεγονός που σημαίνει ότι στην Πυθαγόρειο μουσική θεωρία, η οποία θεμελιούται πειραματικά επί του μονόχορδου, οι έννοιες «διάστημα (= διάσταση)» και «λόγος (= αριθμητική σχέση ή αναλογία)» είναι ταυτόσημες ή εναλλάσσονται ισοδυνάμως.

Αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι συμβαίνει και στην «Κατατομή Κανόνος» του Ευκλείδου, η οποία αναφέρεται επίσης σε μονόχορδο όργανο, τον κανόνα, δηλαδή αντί της λέξεως «λόγος (= αριθμητική σχέση ή αναλογία)» χρησιμοποιείται πάντοτε η λέξη «διάστημα (= διάσταση)». Ο Ευκλείδης, χρησιμοποιώντας τον μονόχορδο κανόνα, ασχολείται διεξοδικώτατα με τον δυνισμό του μουσικού διαστήματος, δηλαδή αντιμετωπίζει το μουσικό διάστημα αφενός μεν ως μία σχέση δύο αριθμών προς αλλήλους, αφετέρου δε ως μία απόσταση μεταξύ δύο σημείων επί του κανόνος.

Έχει καταστεί πλέον συνείδηση ότι η αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων με τους λόγους είναι περισσότερο «εύπλαστη» κατά τη μαθηματική της επεξεργασία και προτιμάται από τους Μαθηματικούς, ενώ η αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων με τις αποστάσεις μεταξύ σημείων είναι περισσότερο «κατανοητή» από τους μη κατέχοντες μαθηματικές γνώσεις μουσικούς εκτελεστές. Έτσι, Ο Ευκλείδης επιλέγει να αντιμετωπίσει

<sup>4</sup> Εξού αναλογία κατά ποιότητα.

<sup>5</sup> Αργότερα η σχέση μεταξύ δύο αριθμών στην Αριθμητική και τη Γεωμετρία πήρε το όνομα «λόγος».

<sup>6</sup> Αυτοί που πειραματίζονται χρησιμοποιώντας τον κανόνα.

πρώτα<sup>7</sup> τα μουσικά διαστήματα ως σχέσεις αριθμητικών δυάδων. Στη συνέχεια, προκειμένου να δείξει την ισχύν του δυϊσμού των μουσικών διαστημάτων, αντιμετωπίζει τα ίδια μουσικά διαστήματα ως αποστάσεις μεταξύ δύο σημείων επί του κανόνος<sup>8</sup>.

Οι θεωρητικοί της Μουσικής αυτής της περιόδου, όταν η μουσική καθίσταται πλέον πολυφωνική και τα όργανα αποκτούν πολλές χορδές, ενδιαφέροντο κυρίως για τα ονομαζόμενα σύμφωνα ή εύφωνα διαστήματα ή συμφωνίες εκ του **συμφωνέω\_ω̃, συμφωνία, σύμφωνος (σύν+φωνή) φωνῶ ὁμοῦ, ὁ συμφωνῶν κατὰ τὸν ἦχον, μουσική συμφωνία (ἄρμονία)**. Τώρα καθίσταται επιτακτική η ανάγκη έκφρασης των μουσικών διαστημάτων ως λόγων ακεραίων αριθμών.

Πρέπει να σημειωθεί ότι τα εύφωνα διαστήματα που αναγνώριζαν οι Πυθαγόρειοι

- όταν τα αντιμετωπίζαν γραμμικά, τα ονόμαζαν δια πασών, δια πέντε, δια τεσσάρων, δια πασών και διαπέντε και δις δια πασών,
- ενώ όταν τα αντιμετωπίζαν ως λόγους, τα ονόμαζαν διπλάσιον, ημιόλιον, επίτριτον, τριπλάσιον και τετραπλάσιον, αντίστοιχα<sup>9</sup>.

### Η έννοια «διάστημα» ως αποστάσεως δύο σημείων ή «ευθυγράμμου τμήματος».

#### (Γραμμική αντιμετώπιση του μουσικού διαστήματος).

Ο Αριστόξενος τον 4<sup>ov</sup> αιώνα π.Χ. εναντιούμενος στη λογαριθμικότητα των μουσικών διαστημάτων επιστρέφει στη γραμμικότητα αυτών. Καταργεί τις όποιες Πυθαγόρειες ανισότητες μεταξύ των συνωνύμων διαστημάτων, εισηγούμενος για πρώτη φορά στην ιστορία της Μουσικής τον ίσο συγκερασμό<sup>10</sup>. Γι' αυτόν η διαπασών (=οκτάβα) διαιρείται σε έξι ίσους μεταξύ τους τόνους και ο τόνος διαιρείται σε δύο ίσα μεταξύ τους ημιτόνια, σε τρία ίσα μεταξύ τους τρίτα και σε τέσσερα ίσα μεταξύ τους τέταρτα. Σήμερα θα λέγαμε ότι ο Αριστόξενος εισηγήθηκε τον συγκερασμό στα 24, δηλαδή τον χωρισμό της οκτάβας σε 24 ίσα μεταξύ τους μουσικά διαστήματα. Η γραμμικότητα σε όλο της το μεγαλείο. Μια γραμμικότητα που φωλιάζει μόνο στη φαντασία του Αριστόξενου, διότι δεν συναντάται στη μουσική πρακτική.

Ο Αριστόξενος ονομάζει μουσικό διάστημα την **απόσταση** ανάμεσα σε δύο φθόγγους διαφορετικού μουσικού ύψους. Πρέπει να σημειωθεί ότι η έννοια φθόγγος είναι συνώνυμη και της θέσεως που πατάει στο μάνικο μουσικού οργάνου το δάκτυλο του μουσικού εκτελεστού, προκειμένου να παραχθεί ένας ήχος συγκεκριμένου μουσικού ύψους. Με άλλα λόγια το διάστημα παρουσιάζεται ως μια διαφορά μεταξύ δύο πατημάτων επί του μάνικου του

<sup>7</sup> Η αντιμετώπιση αυτή γίνεται στις Προτάσεις ζ, ζ, η, θ.

<sup>8</sup> Η αντιμετώπιση αυτή γίνεται στις Προτάσεις ι, ια, 12, 13, 14, 15, 16.

<sup>9</sup> Τις οποίες εξέφραζαν με τις αριθμητικές σχέσεις  $\left(\frac{2}{1}\right)$ ,  $\left(\frac{3}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{4}{3}\right)$ ,  $\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{1}\right)$ , και  $\left(\frac{4}{1}\right)$ , αντίστοιχα.

<sup>10</sup> Κακώς διδάσκεται ότι εισηγητής του ίσου συγκερασμού είναι ο J. S. Bach το 1722.

μουσικού οργάνου. Όσο μεγαλύτερη είναι αυτή η διαφορά, δηλαδή η απόσταση αυτή των δύο πατημάτων επί του μάνικου του μουσικού οργάνου, τόσο μεγαλύτερο είναι το διάστημα. Με το σκεπτικό αυτό ευθυγραμμίζεται ο W. Burkert, που αναφέρει με σύγχρονους όρους το εξής απλό μιν, αλλά πολύ σημαντικό: «Για μας, τους μουσικούς της Ευρωπαϊκής μουσικής, και λόγω της μουσικής σημειογραφίας και λόγω του πληκτρολογίου του πιάνου καθίσταται ιδιαίτερα καταληπτή η έννοια του μουσικού διαστήματος ως αποστάσεως, ως ευθυγράμμου τμήματος».

Κατά τον Κλεονίδη μουσικό διάστημα είναι η απόσταση που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε δύο φθόγγους διαφορετικούς στο ύψος και στο βάθος. Τον ίδιο ορισμό δίνει και ο Βακχείος.

Ο Ανώνυμος του Bellermann λέει ότι διάστημα είναι εκείνο που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε δύο φθόγγους (ή περικλείεται από δύο φθόγγους) διαφορετικούς στο ύψος, από τους οποίους ο ένας είναι υψηλότερος και ο άλλος χαμηλότερος<sup>11</sup>.

Σε ένα απόσπασμα χειρογράφου (Vincent Notices 234) βρίσκουμε τον εξής ορισμό για το διάστημα: Διάστημα είναι η έκταση της φωνής, που περιέχεται ανάμεσα σε δύο φθόγγους<sup>12</sup>.

Ο Νικόμαχος γράφει «διάστημα δ' ἐστὶ δυοῖν φθόγγων μεταξύτης», όπου με τον όρο μεταξύτης εννοεί «ό,τι περιέχεται ή ό,τι βρίσκεται ανάμεσα».

Σε όλους αυτούς τους ορισμούς, θεωρώντας την έννοια φθόγγος με τη σημασία «θέση πατήματος επί του μάνικου του μουσικού οργάνου», το διάστημα αποκτά τη σημασία ενός ευθυγράμμου τμήματος κατά μήκος της χορδής του μονοχόρδου μουσικού οργάνου.

Άρα, λοιπόν, η λέξη «διάστημα» στη μουσική θεωρία είχε διπλή σημασία, διότι εσήμαινε «απόσταση μεταξύ δύο θέσεων πατήματος του δακτύλου του μουσικού εκτελεστού επί του μάνικου του μουσικού οργάνου<sup>13</sup>», αλλά και «λόγο δύο αριθμών (αριθμητική σχέση ή αναλογία)<sup>14</sup>».

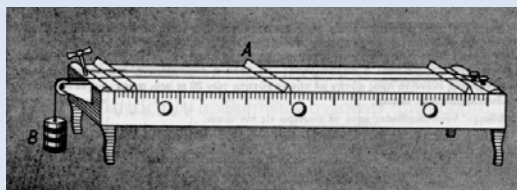
<sup>11</sup> Πράγματι, κρατώντας τον κανόνα κατακορύφως η σχετική θέση δύο τάσεων (=φθόγγος) είναι η μία ψηλότερα του άλλου ή η μία χαμηλότερα του άλλου.

<sup>12</sup> Με τον όρο φθόγγος υπονοείται (i) η νότα, (ii) το τάστο (=μπερντές, fret), (iii) το μη ηχούν τμήμα της χορδής, (iv) το δονούμενο τμήμα της χορδής.

Εδώ γίνεται αντιληπτό ότι υπονοείται το τάστο ή πάτημα, διότι από το ένα πάτημα μέχρι το άλλο προσδιορίζεται το μουσικό διάστημα. Άρα, υπονοείται και το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ανάμεσα στα δύο πατήματα.

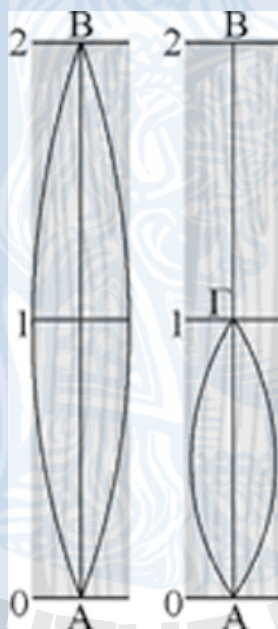
<sup>13</sup> Γραμμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων.

<sup>14</sup> Λογαριθμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων.

**Πυθαγόρειο πείραμα Ακουστικής κατά Γαυδέντιο.**

Εικόνα 1: Σύγχρονο εργαστηριακό μονόχορδο για τη μελέτη των νόμων των χορδών.

Ο Γαυδέντιος (4<sup>ος</sup> αιώνας μ.Χ.) αναφέρει ένα πείραμα Ακουστικής, σωστό από άποψη Φυσικής, με το οποίο ο Πυθαγόρας εφηύρε τις αριθμητικές σχέσεις των μουσικών συμφωνιών. Κατεσκεύασε ένα μονόχορδο τεντώνοντας μια χορδή επί ενός κανόνος<sup>15</sup> (χάρακα) διηρημένου και αριθμημένου σε 2 ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής (2 μονάδες μήκους) και στη συνέχεια το μισό μήκος αυτής (1 μονάδα μήκους) με τη βοήθεια ενός κινητού καβαλάρη, του υπαγωγέα, (Εικόνα 2).



Εικόνα 2: Απόδοση του διαστήματος της δια πασών επί του κανόνος.

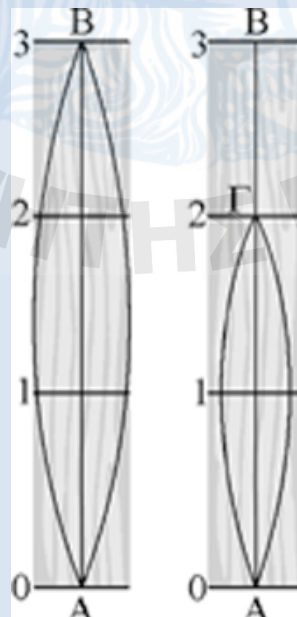
Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε η διαπασών συμφωνία  $\left(\frac{2}{1}\right)$ .

<sup>15</sup> Υπάρχει η άποψη ότι ο πυθαγόρειος κανών και το μονόχορδο είναι κατοπινές εφευρέσεις και ότι μετρήσεις επί του κανόνος έγιναν κατά τη μετα-Αριστοξένηα εποχή, γύρω στο 300 π.Χ. Την άποψη αυτή στηρίζουν στο ότι (i) οι συγγραφείς του 5<sup>ου</sup> και του 4<sup>ου</sup> π.Χ. αιώνα (ii) τα ψευδο-αριστοτελικά μουσικά προβλήματα δεν αναφέρουν την ονομασία «κανών».



Εικόνα 3 Από το εξώφυλλο του βιβλίου του F. Gafurio «Theorica Musicae» (1492). Ξυλογραφία που παριστάνει πειράματα του Πυθαγόρα (το πείραμα στο Χαλκοτυπείο με τα σφουριά, πείραμα με καμπάνες, πείραμα με ηχητικούς σωλήνες, πείραμα με χορδές και αυλούς)

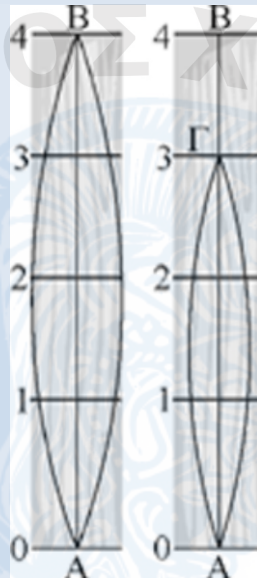
Κατόπιν διήρεσε κι αριθμήσε ολόκληρο το μήκος του κανόνος σε 3 ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής (3 μονάδες μήκους) και στη συνέχεια τα  $\frac{2}{3}$  του μήκους αυτής (2 μονάδες μήκους) (Εικόνα 4).



Εικόνα 4: Απόδοση του διαστήματος δια πέντε επί του κανόνος.

Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε η δια πέντε συμφωνία  $\left(\frac{3}{2}\right)$ .

Τέλος, διήρесе κι αριθμήσε ολόκληρο το μήκος του κανόνος σε 4 ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής (4 μονάδες μήκους) και στη συνέχεια τα  $\frac{3}{4}$  του μήκους αυτής (3 μονάδες μήκους) (Εικόνα 5).



Εικόνα 5: Απόδοση του διαστήματος δια τεσσάρων επί του κανόνος.

Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε η δια τεσσάρων συμφωνία  $\left(\frac{4}{3}\right)$ .

Σ' αυτό το τριπλό πείραμα ΠΑΝΤΟΤΕ ετίθετο σε ταλάντωση πρώτα ολόκληρο το μήκος της χορδής (BA) και στη συνέχεια ένα τμήμα αυτής (ΓΑ). Αυτό σημαίνει ότι ένα τμήμα (=μόριον) (ΓΑ) της χορδής επάλλετο και παρήγε ήχο («ηχούν» τμήμα της χορδής), ενώ το υπόλοιπο (BΓ) τμήμα (=μόριον) της ηρεμούσε και, ως εκ τούτου, παρέμενε «βωβό» («μη ηχούν» τμήμα της χορδής).

Το παραπάνω πείραμα αφενός μεν απαιτεί την ύπαρξη τριών διαφορετικού μήκους υποδιαίρέσεων του κανόνος  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ , αφετέρου επιτρέπει

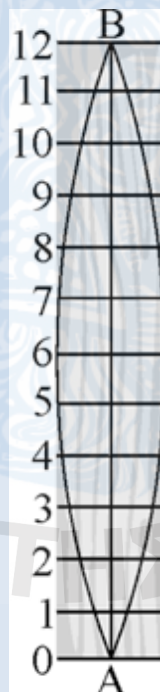
μόνον την παραγωγή μεμονωμένων μουσικών συμφωνιών και όχι και των τριών πλην της τελευταίας περιπτώσεως, στην οποία με τον κινητό καβαλάρη (υπαγωγέα) στις θέσεις 4 και 3 παράγεται η δια τεσσάρων συμφωνία, στις θέσεις 3 και 2 παράγεται η δια πέντε συμφωνία και στις θέσεις 4 και 2 παράγεται η δια πασών συμφωνία. Πρέπει να επισημανθεί ότι μόνον με αυτήν την αλληλουχία θέσεων του

κινητού καβαλάρη (υπαγωγέα) και με καμιά άλλη παράγονται οι τρεις μουσικές συμφωνίες.

Αξιοσημείωτο είναι ότι το μήκος του *μη ηχούντος* τμήματος της χορδής καθορίζεται στην περίπτωση της δια πασών με τους αριθμούς 4 και 2 του κανόνος, στην περίπτωση της δια τεσσάρων συμφωνίας με τους αριθμούς 4 και 3 και στην περίπτωση της δια πέντε συμφωνίας με τους αριθμούς 3 και 2. Βλέπουμε ότι Γεωμετρικά στη συγκεκριμένη περίπτωση το μήκος του *μη ηχούντος* τμήματος της χορδής στην περίπτωση της δια πασών συμφωνίας ισούται με το άθροισμα των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής στην περίπτωση της δια τεσσάρων συμφωνίας και στην περίπτωση της δια πέντε συμφωνίας, επαληθεύοντας τη ρήση του Φιλολάου ότι "ἄρμονίας (=διά πασών) δὲ μέγεθός ἐστι συλλήβα καὶ δι' ὄξειᾶν<sup>16</sup>".

Είναι πολύ πιθανόν με τέτοια πειράματα Ακουστικής επάνω σε αρχέγονο κανόνα υποδιηρημένο σε τέσσερα μόνο μέρη να δημιουργήθηκε η μυθική σημασία της ιεράς τετρακτύος των Πυθαγορείων.

Οι πηγές μας αναφέρουν τη διαίρεση του κανόνος σε 12 ίσα μέρη, όπου 12 είναι το Ε.Κ.Π. των αριθμών 2, 3 και 4 (Εικόνα 6).



Εικόνα 6: Ο εις 12 ίσα μέρη διηρημένος και αριθμημένος κανών για την απόδοση των συμφωνιών δια πασών, δια πέντε και δια τεσσάρων.

<sup>16</sup> Από τη γραμμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων συνεπάγεται ότι οι έννοιες «ἄρμονία (=διά πασών)», «συλλήβα» και «δι' ὄξειᾶ» σχετίζονται με μήκη μη ηχούντων τμημάτων χορδής. Από αυτήν τους τη συσχέτιση προκύπτουν και οι ονομασίες τους «δια πέντε» και «δια τεσσάρων», διότι αυτά τα μήκη των μη ηχούντων τμημάτων χορδής περιορίζοντο ανάμεσα σε πέντε και ανάμεσα σε τέσσερα τάστα (=πατήματα), αντίστοιχα.



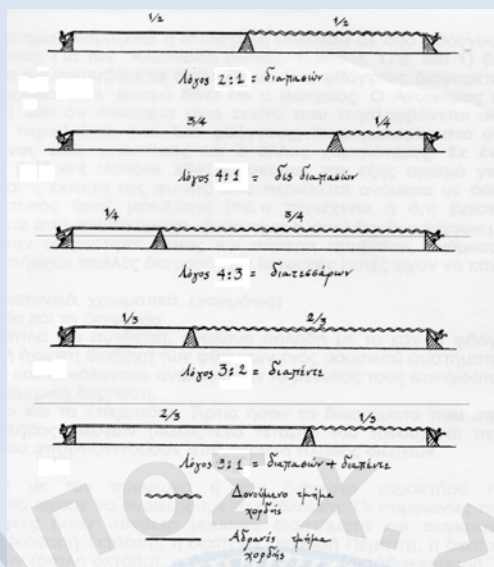
Με τον κανόνα διηρημένον στα 12 ίσα τμήματα είναι δυνατόν να παραχθούν και οι τρεις συμφωνίες δια πασών, δια τεσσάρων και δια πέντε θέτοντας τον κινητό καβαλάρη (υπαγωγέα) στις θέσεις (12, 6), (12, 9) και (12, 8), αντίστοιχα. Από εδώ βλέπουμε ότι το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής στην περίπτωση της δια τεσσάρων συμφωνίας περιορίζεται μεταξύ των αριθμών 12 και 9, στην περίπτωση της δια πέντε συμφωνίας περιορίζεται μεταξύ των αριθμών 12 και 8, ενώ στην περίπτωση της διαπασών συμφωνίας περιορίζεται μεταξύ των αριθμών 12 και 6. Τούτο σημαίνει ότι η διαφορά των εν λόγω δύο μηκών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής περιορίζεται μεταξύ των αριθμών 9 και 8<sup>17</sup> (Εικόνα 7).

Γενικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι «διάστημα» ήταν αυτό καθαυτό το μουσικό διάστημα το σχηματιζόμενο από δύο φθόγγους προερχομένους από την ταλάντωση δύο διαφορετικού μήκους τμημάτων χορδής και το οποίο αφενός μιν μπορούσε να γίνει αντιληπτό και να καθορισθεί ακουστικά, αφετέρου δε να καταστεί και ορατό επάνω στον Κανόνα ως η διαφορά των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής των εν λόγω δύο φθόγγων.



Εικόνα 7: Απόδοση των συμφωνιών δια πασών, δια τεσσάρων και δια πέντε επάνω στον εις 12 ίσα μέρη διηρημένο και αριθμημένο κανόνα.

<sup>17</sup> Αυτό άλλωστε αναφέρει και το η θεώρημα της Κατατομής Κανόνος του Ευκλείδου: "Εάν από ήμιολίου διαστήματος επίτριτον διάστημα αφαιρεθῆ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον".



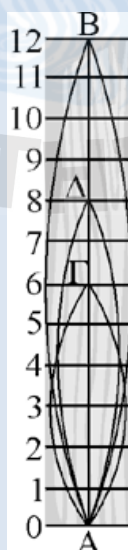
Σχήμα 1: Προσδιορισμός των αριθμητικών σχέσεων των μουσικών συμφωνιών στο μονόχορδο.

### Πράξεις μεταξύ των διαστημάτων

Εάν διασαφηνισθεί το πώς η έννοια «διάστημα» ήταν δυνατό να σημαίνει συγχρόνως «απόσταση μεταξύ δύο σημείων ή μεταξύ δύο φθόγγων», αλλά και «λόγο δύο αριθμών (αριθμητική σχέση ή αναλογία)» θα έχουν ισχύ όλα όσα διδάσκονται στην Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων και ιδιαίτερος ο ορισμός του μουσικού διαστήματος ως λόγου συχνοτήτων.

#### 1. Πρόσθεση δύο διαστημάτων.

Έστω ότι μας δίδονται δύο σημεία, τα Α και Β. Τα σημεία αυτά μπορεί να θεωρηθούν ότι είναι τα πέρατα ενός ευθυγράμμου τμήματος, του ΑΒ και ότι με την απόστασή τους ορίζουν το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.



Εικόνα 8: Πρόσθεση διαστημάτων επάνω στον εις 12 ίσα μέρη διηρημένο και αριθμημένο κανόνα.

Έστω ότι στον κανόνα της εικόνας 8, που είναι διηρημένος και αριθμημένος σε 12 ίσα τμήματα, θέτω σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής BA, που είναι 12 μονάδες μήκους. Στη συνέχεια τοποθετώ τον κινητό καβαλάρη (υπαγωγέα) στη θέση Δ (υποδιαίρεση 8 του κανόνα) και θέτω σε ταλάντωση το τμήμα της χορδής ΑΔ, μήκους 8 μονάδων μήκους. Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ, μήκους 4 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούστηκε το δια πέντε διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΒΔ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής  $\frac{BA}{\Delta A} = \frac{12}{8}$ .

Ακολουθώ, εκτελώ ως προς αυτό ένα συνημμένο διάστημα δια τεσσάρων. Προς τούτοις με τον κινητό καβαλάρη στη θέση Δ (υποδιαίρεση 8 του κανόνα) θέτω σε ταλάντωση το τμήμα ΔΑ της χορδής και μετά, αφού μετατοπίσω τον καβαλάρη στη θέση Γ (υποδιαίρεση 6 του κανόνα), θέτω σε ταλάντωση το τμήμα ΓΑ της χορδής, που έχει μήκος 6 μονάδων μήκους. Το μη ηχούν τμήμα της χορδής τώρα είναι το ΔΓ και έχει μήκος 2 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούστηκε το δια τεσσάρων διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΔΓ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής  $\frac{\Delta A}{\Gamma A} = \frac{8}{6}$ .

Τέλος, εκτελώ το διάστημα δια πασών θέτοντας σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής BA του κανόνα, μήκους 12 μονάδων και το τμήμα ΓΑ της χορδής, μήκους 6 μονάδων μήκους. Το μη ηχούν τμήμα της χορδής τώρα είναι το ΒΓ και έχει μήκος 6 μονάδων μήκους. Αυτό το μουσικό διάστημα (δια πασών) ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΒΓ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής  $\frac{BA}{\Gamma A} = \frac{12}{6}$ .

Παρατηρώ ότι το άθροισμα των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής στα διαστήματα δια πέντε και δια τεσσάρων ισούται με το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής στο διάστημα της δια πασών, δηλαδή  $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma$ . Πράγματι η δια πασών είναι το άθροισμα του δια πέντε και του δια τεσσάρων ή, όπως λέει ο Φιλόλαος "ἄρμονίας (=διὰ πασῶν) δὲ μέγεθός ἐστι συλλήβα καὶ δι' ὄξειαν".

Εάν στη θέση των μηκών αυτών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής, που αντιπροσωπεύουν τα διαστήματα, τοποθετήσω τους αντιστοίχους λόγους των μηκών των ηχούντων τμημάτων χορδής, που επίσης αντιπροσωπεύουν τα διαστήματα, οδηγούμαι στη διαδικασία της προσθέσεως των μουσικών διαστημάτων ως λόγων μεγεθών, δηλαδή  $\frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{\Delta A} \oplus \frac{\Delta A}{\Gamma A}$ . Η σχέση αυτή για να υφίσταται ως αληθής, θα πρέπει η διαδικασία, η συμβολιζόμενη με το

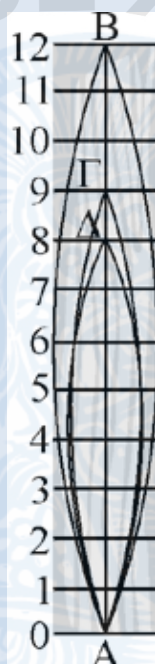
σύμβολο  $\oplus$ , να συμπίπτει με τη διαδικασία του γνωστού πολλαπλασιασμού<sup>18</sup> (Λογαριθμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων).

Συμπερασματικά λέμε ότι:

α. για να προσθέσουμε συνημμένα διαστήματα, που αντιπροσωπεύονται στον κανόνα με διαδοχικά μήκη μη ηχούντων τμημάτων της χορδής, προσθέτουμε αυτά τα διαδοχικά μη ηχούντα τμήματα της χορδής, οπότε το άθροισμά τους δίδει το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής για το ολικό διάστημα.

β. για να προσθέσουμε συνημμένα διαστήματα, που αντιπροσωπεύονται στον κανόνα με λόγους ηχούντων τμημάτων της χορδής, πολλαπλασιάζουμε αυτούς τους λόγους των ηχούντων τμημάτων της χορδής και βρίσκουμε το λόγο των ηχούντων τμημάτων της χορδής για το ολικό διάστημα.

## 2. Αφαίρεση δύο διαστημάτων.



Εικόνα 9: Αφαίρεση διαστημάτων επάνω στον εις 12 ίσα μέρη διηρημένο και αριθμημένο κανόνα.

Έστω ότι στον κανόνα της εικόνας 9 που είναι διηρημένος και αριθμημένος σε 12 ίσα τμήματα θέτω σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής BA, που είναι 12 μονάδες μήκους. Στη συνέχεια τοποθετώ τον κινητό καβαλάρη (υπαγωγέα) στη θέση Δ (υποδιαίρεση 8 του κανόνα) και θέτω σε ταλάντωση το τμήμα της χορδής ΔΑ, μήκους 8 μονάδων μήκους. Το μήκος

<sup>18</sup>  $(12, 8) + (8, 6) = (12, 6)$  κατά τη γραμμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων.

$\frac{12}{6} = \frac{12}{8} \oplus \frac{8}{6} = \frac{12}{8} \cdot \frac{8}{6}$  κατά τη λογαριθμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων. Το γεγονός

ότι η δεύτερη σχέση προκύπτει αβίαστα από την πρώτη μπορεί να το επικαλεσθεί κανείς για να υποστηρίξει ότι ο γραμμικός τρόπος αντιμετώπισης των μουσικών διαστημάτων υπήρχε προτού ο Πυθαγόρας εισηγηθεί, ύστερα από πειραματισμούς επί του μονοχόρδου, την λογαριθμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων.

του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ, μήκους 4 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το δια πέντε διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΒΔ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής  $\frac{BA}{\Delta A} = \frac{12}{8}$ .

Στη συνέχεια θέτω σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής ΒΑ, που είναι 12 μονάδες μήκους. Μετά τοποθετώ τον κινητό καβαλάρη (υπαγωγέα) στη θέση Γ (υποδιαίρεση 9 του κανόνα) και θέτω σε ταλάντωση το τμήμα της χορδής ΓΑ, μήκους 9 μονάδων μήκους. Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, μήκους 3 μονάδων μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το δια τεσσάρων διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΒΓ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής  $\frac{BA}{\Gamma A} = \frac{12}{9}$ .

Ακολουθως, θα εκτελέσω το επόγδοο διάστημα. Προς τούτοις με τον κινητό καβαλάρη στη θέση Δ (υποδιαίρεση 8 του κανόνα) θέτω σε ταλάντωση το τμήμα ΔΑ της χορδής και μετά, αφού μετατοπίσω τον καβαλάρη στη θέση Γ (υποδιαίρεση 9 του κανόνα), θέτω σε ταλάντωση το τμήμα ΓΑ της χορδής, που έχει μήκος 9 μονάδων μήκους. Το μη ηχούν τμήμα της χορδής τώρα είναι το ΓΔ=ΒΔ-ΒΓ και έχει μήκος 1 μονάδα μήκους. Από την ταλάντωση των δύο διαφορετικού μήκους ηχούντων τμημάτων της χορδής ακούσθηκε το επόγδοον διάστημα. Αυτό το μουσικό διάστημα ως μήκος μεν χαρακτηρίζεται από το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής ΓΔ, ως σχέση αριθμών δε χαρακτηρίζεται από το λόγο των μηκών των δύο ηχούντων τμημάτων της χορδής  $\frac{\Gamma A}{\Delta A} = \frac{9}{8}$ .

Παρατηρώ ότι η διαφορά των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής στα διαστήματα δια πέντε και δια τεσσάρων ισούται με το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής στο επόγδοον διάστημα, δηλαδή ΓΔ=ΒΔ-ΒΓ<sup>19</sup>. Πράγματι, όπως άλλωστε αναφέρει και το η θεώρημα της Κατατομής Κανόνος του Ευκλείδου: "Εάν ἀπὸ ἡμιοῦ διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα ἀφαιρεθῆ, τὸ ἄλοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον".

Εάν στη θέση των μηκών αυτών των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής, που αντιπροσωπεύουν τα διαστήματα, τοποθετήσω τους αντιστοίχους λόγους των μηκών των ηχούντων τμημάτων χορδής, που αντιπροσωπεύουν τα ίδια διαστήματα, οδηγούμαι στη διαδικασία της αφαιρέσεως των μουσικών διαστημάτων ως λόγων μεγεθών, δηλαδή  $\frac{\Gamma A}{\Delta A} = \frac{BA}{\Delta A} \ominus \frac{BA}{\Gamma A}$ . Η σχέση αυτή για να υφίσταται ως αληθής, θα πρέπει η διαδικασία, η συμβολιζομένη με το σύμβολο  $\ominus$ , να συμπίπτει με τη διαδικασία της γνωστής διαιρέσεως<sup>20</sup>.

<sup>19</sup> Γραμμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων.

<sup>20</sup> (12, 8)-(12, 9)=(9, 8) κατά τη γραμμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων.

Συμπερασματικά λέμε ότι:

α. για να αφαιρέσουμε δύο διαστήματα που αντιπροσωπεύονται στον κανόνα με δύο μήκη μη ηχούντων τμημάτων της χορδής, που έχουν κοινή αρχή, αφαιρούμε αυτά τα δύο μη ηχούντα τμήματα της χορδής και βρίσκουμε το μη ηχούν τμήμα της χορδής του διαστήματος της διαφοράς.

β. για να αφαιρέσουμε δύο διαστήματα, που αντιπροσωπεύονται στον κανόνα με λόγους ηχούντων τμημάτων της χορδής, διαιρούμε το λόγο του μειωτέου δια του λόγου του αφαιρετέου και βρίσκουμε το λόγο των ηχούντων τμημάτων της χορδής για το διάστημα της διαφοράς.

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι επί παραδείγματι οι σχέσεις 8:6 και 12:9 εκφράζουν τον επίτριτο λόγο (=λόγος μηκών ηχούντων τμημάτων χορδής) και ταυτοχρόνως εκφράζουν την δια τεσσάρων συμφωνία (=μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής).

Οι σχέσεις 9:6 και 12:8 εκφράζουν τον ημιόλιο λόγο (=λόγος μηκών ηχούντων τμημάτων χορδής) και ταυτοχρόνως εκφράζουν την δια πέντε συμφωνία (=μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής).

Συνεπώς ο όρος *λόγος* περιγράφεται με μια πολλαπλάσια ή επιμόρια κ.λπ. σχέση και εκφράζει *λόγο μηκών ηχούντων τμημάτων χορδής*.

Ο όρος συμφωνία περιγράφεται π.χ. ως δια τεσσάρων, δια πέντε, δια πασών κ.λπ. και εκφράζει *μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής*.

Λόγω, λοιπόν, του δεισμού του μουσικού διαστήματος, που προαναφέρθηκε, ένα και το αυτό μουσικό διάστημα, εν γένει, ονομάζεται με διαφορετικό όνομα, το οποίο προδίδει τόν τρόπο αντιμετώπισής του, δηλαδή με βάση τα ηχούντα ή τα μη ηχούντα τμήματα χορδής.

Κι αντιστρόφως, ο τρόπος αντιμετώπισης ενός και του αυτού μουσικού διαστήματος, εν γένει, δηλαδή με βάση τα ηχούντα ή τα μη ηχούντα τμήματα χορδής, προσδίδει στο μουσικό διάστημα διαφορετικό όνομα (βλέπε Πίνακα I).

---

$\frac{9}{8} = \frac{12}{8} \ominus \frac{12}{9} = \frac{12}{8} : \frac{12}{9} = \frac{12}{8} \cdot \frac{9}{12}$  κατά τη λογαριθμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων. Και

εδώ, επίσης, το γεγονός ότι η δεύτερη σχέση προκύπτει αβίαστα από την πρώτη μπορεί να το επικαλεσθεί κανείς για να υποστηρίξει ότι ο γραμμικός τρόπος αντιμετώπισης των μουσικών διαστημάτων υπήρχε προτού ο Πυθαγόρας εισηγηθεί, ύστερα από πειραματισμούς επί του μονοχόρδου, την λογαριθμική αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων.

Πίνακας Ι: Ονομασία των μουσικών διαστημάτων με βάση τον τρόπο αντιμετώπισεώς τους, δηλαδή με βάση τα ηχούντα ή τα μη ηχούντα τμήματα χορδής.

Μουσικό Διάστημα	Αντιμετωπιζόμενο με βάση τα ηχούντα τμήματα χορδής παίρνει το όνομα:	Αντιμετωπιζόμενο με βάση τα μη ηχούντα τμήματα χορδής παίρνει το όνομα:
$\frac{4}{1}$	τετραπλήσιον	δὶς διὰ πασῶν
$\frac{2}{1}$	διπλήσιον	διὰ πασῶν
$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$	ἡμιόλιον	διὰ πέντε
$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$	ἐπίτριτον	διὰ τεσσάρων
$\frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{8}$	ἐπόγδοον	τονιάδιον