

Το «Δήλιον πρόβλημα» ή ο διπλασιασμός του κύβου ή η τριχοτόμησης της αρμονίας

1. Προλεγόμενα

Κυρίες και κύριοι σύνεδροι, ως καθηγητής της Ακουστικής ησχολήθη με τον Πυθαγορισμόν στοχεύων εις την κατανόησιν του τρόπου μελέτης υπό των πυθαγορείων των ακουστικών φαινομένων, τα οποία ακολουθούν νόμους αρμονικούς και φθάνουν επί σειράν αιώνων κατ' αυτόν ή τον άλλον τρόπον εις την ανθρωπίνην αίσθησιν.

Καθ' οδόν εντυπωσιάσθη τα μάλα υπό του μυστικισμού, ο οποίος διέκρινεν την μετάδοσιν της επιστημονικής γνώσεως μεταξύ των μεμημένων οπαδών του Πυθαγορισμού, αλλά συντόμως διεπίστωσα ότι ανέκαθεν οι κοσμοθεωρίες των κατ' έθνη ιερατείων εβασίζοντο εις τον συμβολισμόν.

Η επιστημονική γνώσις παρέμενε κρυφή και αρρήκτως συνδεδεμένη μετά σημείων, συμβόλων, αριθμών και αστερισμών, προκειμένου να προστατευθούν αλήθειες και ιδανικά, τα οποία, εν εναντία περιπτώσει, παρερχομένου του χρόνου, θα υφίσταντο διαστρέβλωσιν.

Ιδού γιατί οι «παλαιοί»¹ Έλληνες φιλόσοφοι, τραγικοί και ποιητές εδίδασκον κρυφίως «μύθω φιλοσοφούντες» κάποιες απόκρυφες διδασκαλίες, κεκαλυμμένες δι' αριστοτεχνικού φιλοσοφικού τρόπου.

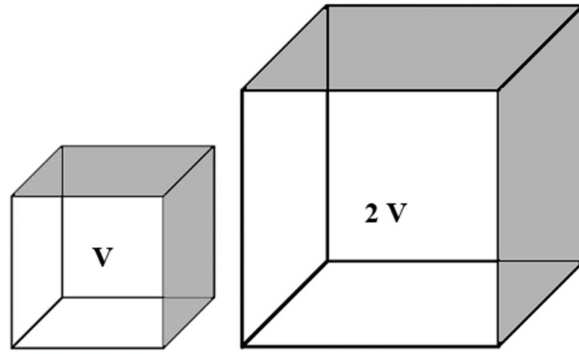
2. Η Γεωμετρική εκδοχή του διπλασιασμού του κύβου

Ο διπλασιασμός του κύβου² ή το «Δήλιον πρόβλημα» κατελέγετο μεταξύ των τριών αλύτων προβλημάτων της Ελληνικής αρχαιότητος μετά κανόνος και διαβήτου μόνον. Τα έτερα δύο άλυτα προβλήματα ήσαν η τριχοτόμησης δοθείσης γωνίας και ο τετραγωνισμός του κύκλου.

¹ οί παλαιοί πολλοίς αινίγμασιν έχρῶντο και μάλιστα πρὸς τοὺς ἱερεῖς, Plutarchus, Αἴτια Ρωμαϊκά και Ελληνικά, 281, Α10-Β1.

Οί γάρ παλαιοί τὰ ποιήματα αὐτῶν πρῶτον ἐν προοιμίῳσιν και αινίγμασιν γεγράφασιν. ὕστερον δὲ και καθόλου φανερόν έχρῶντο τῷ λόγῳ. Σχόλια εις τον Προμηθέα Δεσμώτην του Αισχύλου, 610, 3.

² Ανάλογον του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου ήτο το κατά πολύ παλαιότερον πρόβλημα του διπλασιασμού του τετραγώνου, το οδηγούν εις το άρρητον μέγεθος $\sqrt{2}$, δια του οποίου το διαπασών διχοτομείται.



Σχήμα 1: Ο διπλασιασμός του κύβου ή το «Δήλιον πρόβλημα»

Το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου ήτο γνωστόν κατά την αρχαιότητα και εις τους Αιγυπτίους και τους Ινδούς.

Κατά τον διπλασιασμόν του κύβου, δοθέντος ενός κύβου, ζητείται να κατασκευασθεί έτερος κύβος διπλασίου όγκου.

Κατά τους υπάρχοντες μύθους περί του διπλασιασμού του κύβου λέγεται ότι ο Ερατοσθένης εκ της Κυρήνης, τον 3^{ον} π.Χ. αι., απέστειλεν επιστολήν εις τον βασιλέα της Αιγύπτου Πτολεμαίον αναφέρων έναν θρύλον εκ μιας τραγωδίας. Κατά τον θρύλον ο Γλαύκος, ο μικρός υιός του Μίνως και της Πασιφάης, διέλαθεν της προσοχής των ιδικών του και πεσών εις ένα πιθάρι με μέλι επνίγη. Ο Μίνως, ο βασιλεύς της Κρήτης, παρήγγειλεν κυβικού σχήματος τάφον για τον αποθανόντα υιόν του. Ιδών τον ολοκληρωθέντα τάφον, του εφάνη μικρός και διέταξεν τον διπλασιασμόν του όγκου του άνευ μεταβολής του σχήματός του.

Σημειώτέον ότι κατά μίαν εκδοχήν τον Κρήτα πρίγκιπα με βότανα ανέστησεν ο Αργεΐος μάντις Πολύϊδας και κατ' άλλην ο θεός Ασκληπιός.

Ετέρα πλοκή του μύθου μας δίδεται υπό του Θέωνος του Συμυρναίου, επί τῆ βάσει ενός απολεσθέντος διαλόγου υπό τον τίτλον *Πλατωνικός*, όστις αναφέρει ότι οι Δήλιοι κατά την διάρκεια λοίμου περί το έτος 430 π.Χ. ηρώτησαν το Μαντεϊόν των Δελφών περί του πρακτέου για την σωτηρίαν των. Ο χρησμός της Πυθίας έλεγεν ότι έπρεπε να διπλασιάσουν του όγκον του κυβικού σχήματος ναού του Απόλλωνος άνευ μεταβολής του σχήματός του εξ οῡ και «Δήλιον πρόβλημα». Θεωρήσαντες ως εύκολον λύσιν τον διπλασιασμόν του μήκους της ακμής του κυβικού ναού, ωδηγήθησαν εις λάθος αποτέλεσμα και απέλπιδες απηυθύνθησαν εις επαΐοντες, ζητούντες να τους υποδειχθεί η σωστή λύσις του προβλήματος.

Ο Ευτόκιος ο Ασκαλωνεύς (6^{ος} μ.Χ. αι.), ο σχολιαστής των έργων του Αρχιμήδους, μας διασώζει δώδεκα λύσεις του «Δηλίου προβλήματος», ήτοι του Ιπποκράτους του Χίου (470-400 π.Χ.), του Αρχύτου του Ταραντίνου (428-365 π.Χ.), του Πλάτωνος (427-347 π.Χ.), του

Μεναίχιμος (375-352 π.Χ.), του Ευλείδου (Πρότασις ΙΙ.6 των *Στοιχείων*, 3^{ος} π.Χ. αι.), του Αρχιμήδους (287-212 π.Χ.), του Ερατοσθένους (276-194 π.Χ.), του Απολλωνίου (265-170 π.Χ.), του Νικομήδους (2^{ος} π.Χ. αι.), του Ήρωνος του Αλεξανδρέως (1^{ος}-2^{ος} μ.Χ. αι.), του Διοκλέους (1^{ος} π.Χ. αι.) και του Πάππου του Αλεξανδρέως (3^{ος} μ.Χ. αι.).

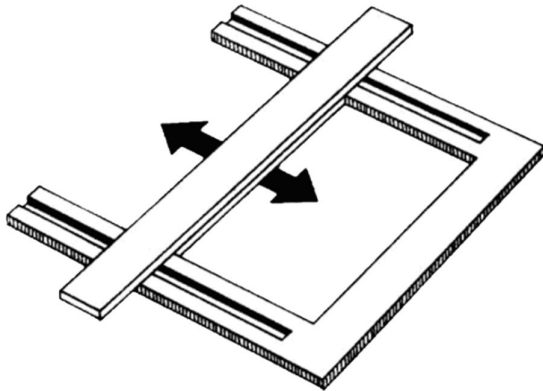
Πρώτος ο Ιπποκράτης ο Χίος εσκέφθη να εύρει δύο μέσες αναλόγους β και γ εις συνεχήν αναλογίαν μεταξύ δύο ευθυγράμμων τμημάτων, των

οποίων τα μήκη είχαν σχέσιν 2:1, ήτοι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{2\alpha}$. 

Εξ αυτής της τριπλής συνημμένης αναλογίας προκύπτει ότι $\beta = \sqrt[3]{2} \alpha$ και $\gamma = (\sqrt[3]{2})^2 \alpha$, οπότε ο κύβος ακμής β έχει διπλάσιον όγκον του κύβου ακμής α, ήτοι $\beta^3 = 2\alpha^3$. Επομένως, πρέπει να κατασκευασθεί ακμή μήκους εκφραζομένου δια του αρρήτου κατά τους Πυθαγορείους αριθμού -υπό την έννοιαν του μη επιτρεπτέου να λέγεται (α στερητικόν + ρητός)- $\sqrt[3]{2} \alpha$.

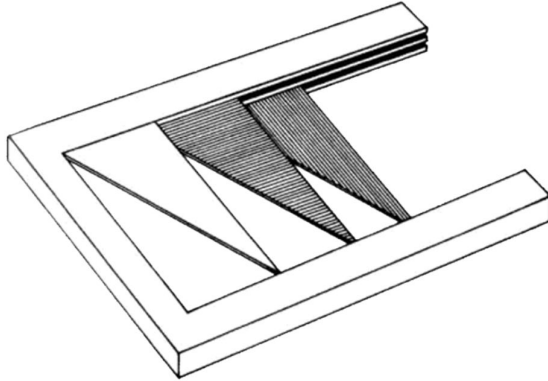
Ο Μέναιχιμος έλυσεν το Δήλιον πρόβλημα δια δύο παραβολών, ο Νικόδημος επενόησεν μίαν λίαν πολύπλοκον λύσιν δια της λεγομένης *κογχοειδούς του Νικοδήμου* και ο Διοκλής δια του ομωνύμου *κισσοειδούς*.

Ο Πλάτων επενόησεν μίαν διάταξιν, τον *κυβιστήν*, δια της οποίας ηδύνατο αμέσως να παρεμβάλλει μεταξύ των μηκών α και 2α τις μέσες αναλόγους β και γ.



Σχήμα 2: Ο Πλατωνικός κυβιστής.

Ομοίως, ο Ερατοσθένης κατασκεύασεν όργανον, το *μεσολάβιον*, δια του οποίου παρενέβαλλεν τις δύο μέσες αναλόγους β και γ μεταξύ των μηκών α και 2α.



Σχήμα 3: Το μεσολάβιον του Ερατοσθένους.

3. Η αλληγορία του πρόβληματος

Το εκτεθέν φαινομενικώς στερεομετρικόν μόνον «Δήλιον πρόβλημα» ή πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου έχει αλληγορικόν φιλοσοφικόν νόημα, αντανακλών

1. εις τον ετήσιον κύκλον της φύσεως,
2. εις την θεωρητικήν και την πρακτικήν μουσικήν,
3. εις την αστρονομίαν και την κοσμολογίαν σχετικώς με την διάταξιν των θείων ουρανίων γενητών, των επί σταθερών κυκλικών τροχιών περιφερομένων.

3.1. Ετήσιος κύκλος της φύσεως

Η ανάστασις και επαναφορά εις την ζωήν του νεαρού Κρητός πρίγκιπος, του Γλαύκου, είτε τῆ μεσολαβήσει του Αργείου μάντεως Πολυΐδου, του κατέχοντος την γνώσιν της θεραπευτικής δράσεως των βοτάνων, είτε τῆ θεϊκῆ δυνάμει του Ασκληπιού, το «Δήλιον πρόβλημα» ή το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου αλληγορικώς θεολογεί και θεοποιεί την ανακύκλησιν των εποχών και την αναγέννησιν της βλαστανούσης φύσεως κατά τον ετήσιον αυτής κύκλον.

3.2. Μουσική αλληγορία

3.2.1 Θεωρητική μουσική αλληγορία

Η έννοια μουσικόν «διάστημα» εις την Πυθαγόρειον θεωρίαν της Μουσικής ωρίζετο ως ο λόγος δύο αριθμῶν και εις την μουσικήν πράξιν ως ο λόγος των μηκῶν δύο ταλαντουμένων τμημάτων χορδῆς του μονοχόρδου ή του κανόνος.

Λόγω αυτού του ορισμού του μουσικού διαστήματος η Πυθαγόρειος θεωρία των μουσικών διαστημάτων εμφανίζει λογαριθμικόν χαρακτήρα και δια τούτο τα πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα

❖ προστίθενται δια πολλαπλασιασμού των αριθμητικών των σχέσεων

$$\delta_1 \oplus \delta_2 = (f_2/f_1) \oplus (g_2/g_1) = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{g_2}{g_1} = (f_2 g_2 / f_1 g_1)$$

❖ αφαιρούνται δια διαιρέσεως των αριθμητικών των σχέσεων

$$\delta_1 \ominus \delta_2 = (f_2/f_1) \ominus (g_2/g_1) = \frac{f_2}{f_1} : \frac{g_2}{g_1} = (f_2 g_1 / f_1 g_2), \text{ όπου } f_2 g_1 > f_1 g_2$$

❖ ο πολλαπλασιασμός των επί αριθμόν λ προκύπτει δι' υψώσεως της αριθμητικής των σχέσεως εις την λ δύναμιν

$$\lambda \delta = (f_2/f_1) \oplus (f_2/f_1) \oplus \dots \oplus (f_2/f_1) = \left(\frac{f_2}{f_1} \right)^\lambda = (f_2^\lambda / f_1^\lambda)$$

❖ η διαίρεσις των εις λ ίσα μεταξύ των μουσικά διαστήματα δίδεται υπό της λ τάξεως ρίζης της αριθμητικής των σχέσεως

$$(1/\lambda)\delta = \sqrt[\lambda]{\frac{f_2}{f_1}} = (\sqrt[\lambda]{f_2} / \sqrt[\lambda]{f_1})$$

Κατά τα ανωτέρω, εις το «Δήλιον πρόβλημα» αφενός ο Ιπποκράτης ο Χίος, ο Πλάτων και ο Ερατοσθένης εβασίσθησαν επί δύο ευθυγράμμων τμημάτων, των οποίων τα μήκη είχαν σχέσιν 2:1, ήτοι εβασίσθησαν επί της σχέσεως της αρμονίας κατά τον Πυθαγόραν και τον Φιλόλαον ή διαπασών ή οκτάβας, αφετέρου η έκφρασις

«*ακμή μήκους* $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{2}{1}}$ » ορίζει μουσικόν διάστημα ίσον προς το 1/3

της αρμονίας ή του διαπασών ή της οκτάβας.

Αυτό, όμως, άμεσα υπονοεί «ίσον συγκερασμόν εις τρία», ήτοι την τριχοτόμησιν της αρμονίας. Εν άλλοις λόγοις σημαίνει την διαίρεσιν της οκτάβας εις τρία ίσα μεταξύ των μουσικά διαστήματα με διτονιαίον μέγεθος εκάστου εξ οὔ και τριχοτόμησις της αρμονίας.

Τούτο είναι πρωτοφανές εις τα μουσικά χρονικά της πυθαγορείου μουσικής, δεδομένου ότι διδασκόμεθα ως εισηγητήν του ίσου συγκερασμού τον Αριστόξενον τον Ταραντίνον (354-300 π.Χ.), τον μαθητήν του Αριστοτέλους (384-322 π.Χ.), όστις διετέλεσεν μαθητής του Πλάτωνος.

Ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι άρρητος, υπό την Πυθαγόρειον έννοιαν του όρου, ήτοι δεν επετρέπετο να κοινολογηθεί υπό των Πυθαγορείων επί ποινηθάνάτου. Ο Πλάτων, ως Πυθαγόρειος, δεν ομιλεί περί αυτού εις ανοικτήν γλώσσαν, παρά μόνον «μύθῳ φιλοσοφών».

Δι' αυτού του διτονιαίου μουσικού διαστήματος επέρχεται αναστάτωση εις την συμπλήρωσιν των μέχρι στιγμής υπαρχουσών κατατομών κανόνος, διότι απαιτείται ο ακριβής προσδιορισμός των αρρήτων θέσεων νέων τάσεων εις το μάνικον των εγχόρδων μουσικών οργάνων της εποχής.

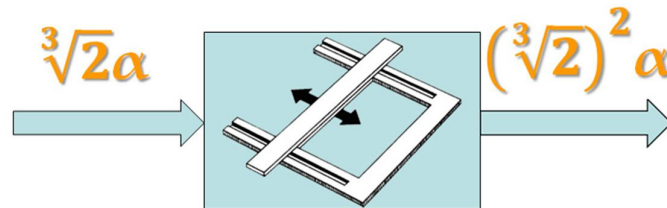
Πράγματι, μέχρι τότε ήσαν γνωστά δύο έτερα διτονιαία μουσικά διαστήματα, ήτοι η Πυθαγόρειος τρίτη $\left(\left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{81}{64}\right)$ με μέγεθος 4,0782 δωδέκατα της οκτάβας και το Αρχύτειον δίτονον, η μετέπειτα φυσική (just) τρίτη (5:4). Το Αρχύτειον δίτονον είναι κατά ένα κόμμα (81:80) μικρότερον της Πυθαγορείου τρίτης και έχει μέγεθος 3,8631 δωδέκατα της οκτάβας. Τώρα μεταξύ αυτών εγκαθίσταται το συγκερασμένον δίτονον $\sqrt[3]{2}$ με μέγεθος 4 δωδέκατα της οκτάβας και περί αυτού ομιλεί ο Πλάτων εις το 10^{ov} Βιβλίον της *Πολιτείας* του (617) δια του μύθου των Μοιρών.

3.2.2 Πρακτική μουσική αλληγορία

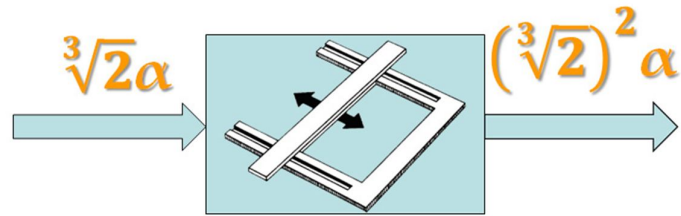
Το νέον διτονιαίον μουσικόν διάστημα $\sqrt[3]{2}$ οδηγεί εις μίαν νέαν Κατατομήν του Κανόνος, ήτοι εις μίαν νέαν χάραξιν (σημείωσιν) κατά μήκος του κανόνος των πρεπόντων μηκών των δονουμένων τμημάτων χορδής, ώστε ακουστικώς να δύναται να υλοποιηθεί. Ο Πλάτων θα επαναλάμβανε την έκφρασιν «ὁ δὲ ἀριθμὸς οὗτος γεωμετρικὸς ἔστι» παρακινῶν εμάς να επιτύχωμεν την ζητουμένην κατατομήν του κανόνος γεωμετρικῶ τῷ τρόπῳ -κατ' εμέ- ως ακολούθως:

Ἐστωσαν a και $2a$ τα μήκη των δύο ευθυγράμμων τμημάτων, των οριζόντων την σχέσιν 2:1 της αρμονίας (διαπασών ή οκτάβας). Ἐστω, επίσης, ο Πλατωνικός κυβιστής, αντιμετωπιζόμενος ως ένα black box με μίαν είσοδον και με μίαν έξοδον, το μέγεθος της οποίας εξόδου είναι $\sqrt[3]{2}$ φορές το μέγεθος της εισόδου.

Βήμα 1^{ov}: Με είσοδον μεγέθους a εκ του Πλατωνικού κυβιστού λαμβάνομεν έξοδον μεγέθους $\sqrt[3]{2}a$.

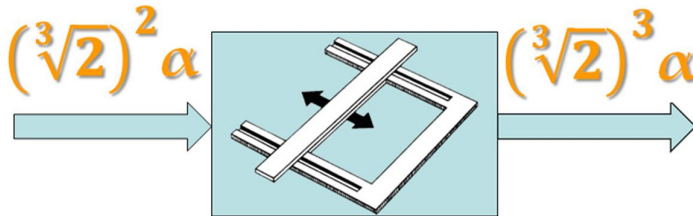


Βήμα 2^{ov}: Με είσοδον μεγέθους $\sqrt[3]{2}a$ εκ του Πλατωνικού κυβιστού λαμβάνομεν έξοδον μεγέθους $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}a = (\sqrt[3]{2})^2 a$.



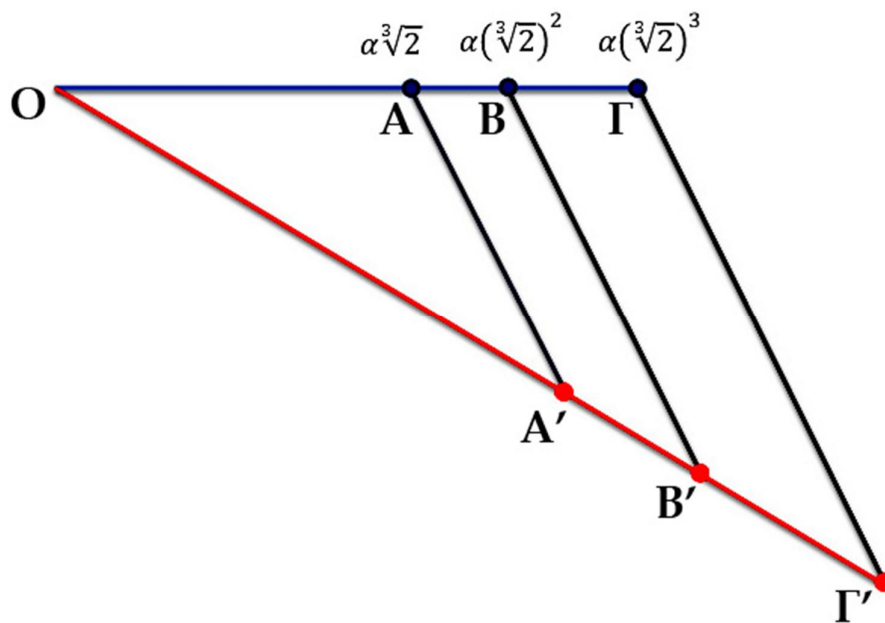
Βήμα 3^{ον}: Με είσοδον μεγέθους $(\sqrt[3]{2})^2 \alpha$ εκ του Πλατωνικού κυβιστού λαμβάνομεν έξοδον μεγέθους

$$\sqrt[3]{2} \cdot (\sqrt[3]{2})^2 \alpha = (\sqrt[3]{2})^3 \alpha = 2\alpha.$$



Δια της ανωτέρω διαδικασίας ετριχοτομήθη μουσικώς το διάστημα της αρμονίας (2:1) μεταξύ δύο ευθυγράμμων τμημάτων με μήκη α και 2α . Βάσει αυτής της μουσικής τριχοτομήσεως θα πρέπει κατ' αναλογίαν να τριχοτομήσωμεν γεωμετρικώς το μήκος L της χορδής ή του μάνικου εγχόρδου μουσικού οργάνου (κατατομή κανόνος) χρησιμοποιούντες το θεώρημα του Θαλού.

Δια του γεωμετρικού αυτού τρόπου επροσδιορίσθησαν επακριβώς τα μήκη των ζητουμένων αποψαλμάτων.



Σχήμα 5: Η κατατομή του κανόνος εις συγκεκριμένα τρίτα της αρμονίας (διαπασών, οκτάβας).

3.3 Θεία γενητά

3.3.1 Αστρονομική αλληγορία

Ο προαναφερθείς ίσος συγκερασμός εις τρία πρέπει να απαντάται και εις κάποιαν μουσικήν κλίμακα διατονικού χαρακτήρος, ώστε να δύναται να διαιρείται και εις συγκερασμένους τόνους, ήτοι κατά τον ίσον συγκερασμόν εις ἕξι ($\sqrt[6]{2}$) και εις συγκερασμένα ημίτονα, ήτοι κατά τον ίσον συγκερασμόν εις δώδεκα ($\sqrt[12]{2}$).

Προκειμένου τα συγκερασμένα ημίτονα και οι συγκερασμένοι τόνοι να δύναται δια συνθέσεως να δομούν μουσικά συγκερασμένα διτονιαία διαστήματα υπάρχει μία και μοναδική δομή της υπό συζήτησιν μουσικής κλίμακος, ήτις συνίσταται εκ δύο διεζευγμένων εναντιομόρφων τετραχόρδων, ήτοι τετραχόρδων κατοπτρικής δομής. Τοιαύτα τετράχορδα είναι το Δώριον (τ-τ-η) και το Λύδιον (η-τ-τ) αμφοτέρα κατά την κατιούσα διαδοχήν.

Εκ πρώτης όψεως μία τοιαύτη δομή οκταχόρδου κλίμακος εκ δύο ανομοίων τετραχόρδων εν διαζεύξει είναι ανήκουστη για τα Πλατωνικά δεδομένα. Και όμως ο Πλάτων αναφέρει αλληγορικώς την ύπαρξίν της εις τον *Πολιτικόν* 270 d, e λέγων:

... ὅταν ἡ τῆς νῦν καθεστηκυίας ἐναντία γίγνηται τροπή...
Ἦν ἡλικίαν ἕκαστον εἶχε τῶν ζῶων, αὕτη πρῶτον μὲν ἔστη πάντων, καὶ ἐπαύσατο πᾶν ὅσον ἦν θνητὸν ἐπὶ τὸ γεραίτερον ἰδεῖν πορευόμενον, μεταβάλλον δὲ πάλιν ἐπὶ τοῦναντίον οἷον νεώτερον καὶ ἀπαλώτερον ἐφύετο...

[... ὅταν ἡ κίνησις τοῦ σύμπαντος ποῦ επικρατεῖ σήμερον ἀντιστρέφεται...]

Κατὰ πρότον σταματᾶ την πορεία της ἡ ηλικία, την οποίαν εἶχεν ἕκαστον τῶν ζῶων καὶ οἰονδήποτε θνητὸν παύει νὰ ἐμφανίζει ἐξέλιξιν πρὸς τὰ γηρατειά, ἐνῶ, ὅταν ἡ κατάστασις ἀντιστρέφεται, παρουσιάζεται νεότερον καὶ τρυφερότερον...].

Τις ἀνάστροφες δομές του χρόνου κατὰ τις δύο περιόδους Κρόνου καὶ Διὸς (*Πολιτικός* 272 b) ἐκλαμβάνω ὡς ἀνάστροφες δομές τῶν δύο τετραχόρδων Δωρίου καὶ Λυδίου εις την προαναφερθεῖσαν οκτάχορδον κλίμακα.

Η υπό συζήτησιν μουσική κλίμαξ θα είναι κατά μεν την κατιούσα διαδοχή³

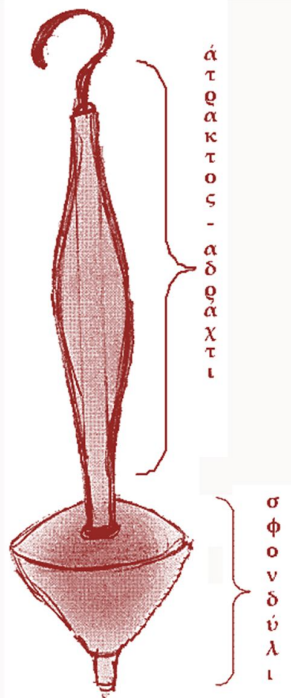
Δώριον τετράχορδον, διαζευκτικός τόνος, Λύδιον τετράχορδον A G F E D C# B A', κατά δε την ανιούσαν διαδοχήν⁴ Λύδιον τετράχορδον, διαζευκτικός τόνος, Δώριον τετράχορδον A B C# D E F G A'.

Επί των φθόγγων αυτής της μουσικής κλίμακος ο Πλάτων τοποθετεί τα περιφερόμενα περί την ακίνητον Γην θεία γενητά Σελήνη, Ερμής, Αφροδίτη, Ήλιος, Άρης, Ζεύς, Κρόνος, Απλανείς αστέρες.

Αυτήν την μουσικήν κλίμακα ο Πλάτων την συσχετίζει με την κοσμικήν μουσικήν του μύθου του Ηρός (*Πολιτεία*, 617b ff). Ο μύθος αυτός ομιλεί περί του αναστάντος Ηρός του Αρμενίου, η ψυχή του οποίου κατά την διάρκειαν του ταξιδιού του εντός των ουρανών είδεν μίαν τεραστίαν στήλην φωτός, διερχομένη δια του κέντρου του κόσμου. Τμήμα αυτού του κοσμικού άξονος απετελείτο εξ ενός αδραχτιού μετ' οκτώ σφονδυλίων, συνδεδεμένων μετ' αυτού. Το συγκεκριμένον αδράχτι συμβολίζει το κοσμικόν σύστημα των απλανών αστέρων και των πλανητών, οίτινες περιφέρονται περιστρεφόμενοι περί τον άξονα του σύμπαντος (Σχήματα 6 και 7). Ο Ηρ, επίσης, παρατήρησεν οκτώ Σειρήνες καθήμενες εις το χείλος των σφονδυλίων του αδραχτιού, εκάστη άδουσα έναν συγκεκριμένον φθόγγον (αρμονία των ουρανίων σφαιρών).

³ Αυτή η φορά αναφέρεται εις την μη πραγματικήν κίνησιν των θείων γενητών, ότι δηλαδή τα πλησιέστερα ουράνια σώματα περιφέρονται με μεγαλυτέραν ταχύτητα των απωτέρων ως προς την Γην και, συνεπώς, παράγουν οξυτέρους ήχους.

⁴ Αυτή η φορά αναφέρεται εις την πραγματικήν κίνησιν των θείων γενητών, ότι δηλαδή τα απώτερα ουράνια σώματα περιφέρονται με μεγαλυτέραν ταχύτητα των πλησιεστέρων ως προς την Γην και, συνεπώς, παράγουν οξυτέρους ήχους.



Σχήμα 6: Δομή αδραχτιού.



Σχήμα 7: Τα οκτώ σφονδύλια του Ηρείου αδραχτιού.

3.3.2 Κοσμολογική αλληγορία

Η ιδέα του αδραχτιού προέρχεται εκ των μυθολογικών υφαντών της μοίρας των ανθρώπων, ήτοι των μοιρών (Πλάτων, *Πολιτεία*, 617 b-d) (Εικόν 1).



Εικόν 1: Οι μοίρες, οι μυθολογικοί υφαντές της μοίρας των ανθρώπων.

Τρεις λευκοφορεμένες γυναίκες, οι Μοίρες, οι θυγατέρες της Ανάγκης, φέρουσες τα ονόματα Λάχεσις, Κλωθώ και Άτροπος «κύκλω καθήμεναι» εις ίσες μεταξύ των αποστάσεις επί των τριών θρόνων των, άδουν εις τις

μελωδίες των σειρήνων η Λάχεσις τα παρελθόντα, η Κλωθώ τα παρόντα και η Άτροπος τα μέλλοντα να συμβούν.

Η Κλωθώ, εγγίζουσα το αδράχτι με την δεξιάν της χείρα κατά διαστήματα, εβοήθει την περιστροφήν των εξωτερικών του μερών. Η Άτροπος, εγγίζουσα το αδράχτι με την αριστεράν της χείρα κατά διαστήματα, εβοήθει την περιστροφήν των εσωτερικών του μερών. Η Λάχεσις, εγγίζουσα το αδράχτι πότε με την δεξιάν και πότε με την αριστεράν της χείρα κατά διαστήματα, εβοήθει την περιστροφήν των εξωτερικών και των εσωτερικών του μερών.

Ως προελέχθη, επί των φθόγγων της μνημονευθείσης μουσικής κλίμακος των δύο διεξευγμένων εναντιομόρφων τετραχόρδων ο Πλάτων τοποθετεί τα περιφερόμενα θεία γενητά Σελήνη, Ερμής, Αφροδίτη, Ήλιος, Άρης, Ζεύς, Κρόνος, Απλανείς αστέρες. Τα τέσσερα πρώτα επί των φθόγγων του κατιόντος Δωρίου ή ανιόντος Λυδίου τετραχόρδου και τα υπόλοιπα τέσσερα επί των φθόγγων του ανιόντος Δωρίου ή κατιόντος Λυδίου τετραχόρδου αντιστοιχώς.

Πλησίον κάποιων φθόγγων αυτής της κλίμακος κάθηνται οι μοίρες, διότι άδουν την ιδίαν μελωδίαν μετά κάποιων σειρήνων. Κάθηνται ισαπέχουσες μεταξύ των κατά μουσικά συγκερασμένα διτονιαία διαστήματα (Σχήμα 8).

Επί τῆ βάσει των πληροφοριών της πραγματικής κινήσεως των θείων γενητών, ο θρόνος της Λαχέσεως – προκειμένου να δύναται αυτή να επηρεάζει την περιφοράν και των εσωτερικών και των εξωτερικών πλανητών- τοποθετείται επί της Υπάτης και της Νήτης⁵ ένθα ο φθόγγος Α, αντιδιαμετρικώς προς το μέσον της κλίμακος ($\sqrt{2}$), ήτοι το μέσον Μέσης και Παραμέσης.

Ο θρόνος της Ατρόπου τοποθετείται εις το Λύδιον ανιόν τετράχορδον των εσωτερικών πλανητών και εις απόστασιν ενός συγκερασμένου διτονιαίου μουσικού διαστήματος εκ της Λαχέσεως, ήτοι εγγύτατα του φθόγγου C#, τον λιχανόν της κλίμακος.

Ο θρόνος της Κλωθούς τοποθετείται εις το Δώριον ανιόν τετράχορδον των εξωτερικών πλανητών και εις απόστασιν ενός συγκερασμένου διτονιαίου μουσικού διαστήματος εκ της Λαχέσεως, ήτοι εγγύτατα του φθόγγου F, την τρίτην της κλίμακος.

⁵ Λόγω της κυκλικής τοποθετήσεως των τριών θρόνων.



Σχήμα 8: Οι θέσεις των θρόνων των τριών μοιρών «κύκλω ίσαπέχουσαι».

Ο λιχανός C# απέχει εκ της υπάτης κατά 4,0782 συγκερασμένα ημίτονα, ενώ ο θρόνος της Ατρόπου απέχει εκ της υπάτης ακριβώς 4 συγκερασμένα ημίτονα. Τουτέστιν, λόγω του ίσου συγκερασμού εις τρία, έχομεν μίαν εκτροπήν προς τα αριστερά της τροχιάς της Αφροδίτης, την οποίαν δια της αριστεράς της χειρός διορθώνει η Άτροπος.

Η τρίτη F απέχει κανονικώς εκ της νήτης κατά 4,0782 συγκερασμένα ημίτονα, ενώ ο θρόνος της Κλωθούς απέχει εκ της νήτης ακριβώς 4 συγκερασμένα ημίτονα. Τουτέστιν, λόγω του ίσου συγκερασμού εις τρία, έχομεν μίαν εκτροπήν προς τα δεξιά της τροχιάς του Διός, την οποίαν δια της δεξιάς της χειρός διορθώνει η Κλωθώ.

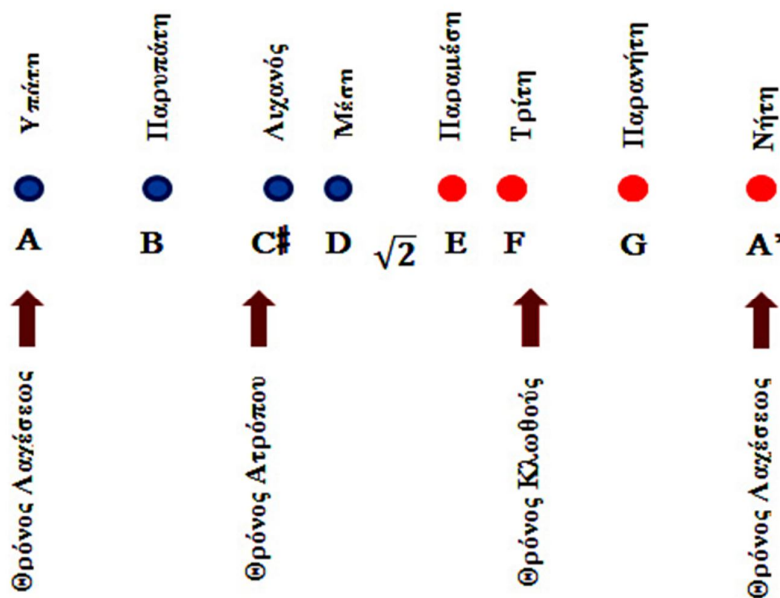
Ως προελέχθη, ο θρόνος της Λαχέσεως τοποθετείται αντιδιαμετρικώς προς το κέντρον της κλίμακος ($\sqrt{2}$), ήτοι του μέσου Μέσης και Παραμέσης, ένθα το κέντρον συμμετρίας της μελετουμένης μουσικής κλίμακος. Τον άρρητον αριθμόν ($\sqrt{2}$), τον διχοτομούντα την αρμονίαν, κατά καιρούς αριθμητικώς τον προσήγγισαν ποικιλοτρόπως.

Οι Ινδοί την εποχήν των Βεδών (1500 – 1000 π.Χ.) τον προσήγγισαν δια του λόγου $\frac{7}{5}$. Επί τῆ βάσει αυτής της αριθμητικής τιμής το μέσον της αρμονίας τοποθετείται εις απόστασιν 5,82512 συγκερασμένων ημιτόνων εκ της υπάτης αντί 6. Εμφανίζεται δηλαδή μία εκτροπή του προς τα αριστερά.

Οι Πυθαγόρειοι τον προσήγγισαν δια του λόγου $\frac{729}{512}$ (ο Πλάτων αλληγορικώς αναφέρεται εις τον αριθμόν 729 εις το ΙΧ βιβλίον της Πολιτείας). Επί τῆ βάσει αυτής της αριθμητικής τιμής το μέσον της αρμονίας τοποθετείται εις απόστασιν 6,11730 συγκερασμένων ημιτόνων

εκ της υπάτης αντί 6. Εμφανίζεται δηλαδή μία εκτροπή του προς τα δεξιά.

Οι θεωρητικοί του Φυσικού χορδίσματος (just tuning) τον προσήγγισαν δια των λόγων $\frac{45}{32} = \frac{720}{512}$ και $\frac{78125}{55296}$. Επί τῆ βάσει αυτών των αριθμητικών τιμών το μέσον της αρμονίας τοποθετείται εις απόστασιν 5,90224 και 5,98331 συγκερασμένων ημιτόνων εκ της υπάτης, αντιστοίχως, αντί 6. Εμφανίζονται δηλαδή εκτροπές προς τα αριστερά. Τις προς αμφότερες τις κατευθύνσεις εκτροπές των ουρανίων γενητών, οι οποίες αντανakλούν εις την θέσιν του θρόνου της Λαχέσεως, διορθώνει η Λάχεσις χρησιμοποιούσα εκάστοτε την πρέπουσα χείρα της (Σχήμα 9).



Σχήμα 9: Οι επιπτώσεις του Πλατωνικού ίσου συγκερασμού εις τρία επί της αρμονίας των ουρανίων σφαιρών.

Κατακλής

Η λύσις του προβλήματος του διπλασιασμού του κύβου ή του «Δηλίου προβλήματος» υποδηλοί την λύσιν της μουσικής τριχοτομήσεως της αρμονίας (διαπασών ή οκτάβας), ήτοι κατ' ουσίαν τον ίσον συγκερασμόν, την κλείδα επιλύσεως δια των εναρμονίων φθόγγων παντός μελωδικού και αρμονικού προβλήματος εις μουσικούς πολιτισμούς ωσάν τον σύγχρονον ευρωπαϊκόν.

Ο μέγιστος Πλάτων εις τον διάλογόν του *Πολιτεία* ή *περί δικαίου* μύθος φιλοσοφών (ο μύθος των τριών μοιρών) εισάγει μεταξύ πλείστων άλλων μοναδικών μουσικών θεμάτων και τον ίσον συγκερασμόν εις τρία, η

εφαρμογή του οποίου εις την θεωρίαν της αρμονίας των ουρανίων σφαιρών επιφέρει αρμονικές διορθώσεις εις τις μεταξύ των συνηχίσεις και μέσω αυτών εις τις παρατηρούμενες εκτροπές εκ των κυκλικών των τροχιών των κινήσεων των θείων γενητών.

Κυρίες και κύριοι σύνεδροι, εισηγούμαι εις το Συνέδριόν μας, περαίνων την εισήγησίν μου, ως εμπνευστήν του ίσου συγκερασμού να αποδεχθώμεν τον μέγιστον Πλάτωνα.