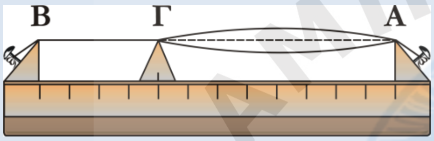
Το μουσικό διάστημα κατά τον Αριστόξενο

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης

Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής
Εργαστήριο Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας
Τμήμα Μουσικών Σπουδών
Πανεπιστήμιο Αθηνών



ΠΕΡΙΛΗΨΗ: Στη χορδή ενός εγχόρδου οργάνου διακρίνονται τρία χαρακτηριστικά σημεία: Το ένα πακτωμένο άκρο της Α στον χορδοκράτη, το άλλο πακτωμένο άκρο της Β στο κλειδί και το σημείο Γ του δεσμού (τάστου) επί του οποίου πατάει το δάκτυλο του μουσικού.

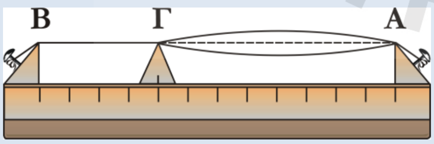
Κατά την Πυθαγόρειο άποψη, τη λογαριθμική, δηλαδή των αριθμητικών λόγων, ($6^{ος}$ αι. π.Χ.) το μουσικό διάστημα αντιμετωπίζεται βάσει του δονουμένου τμήματος ΑΓ της χορδής. Κατά την Αριστοξένειο άποψη, τη γραμμική, ($4^{ος}$ αι. π.Χ.) το μουσικό διάστημα αντιμετωπίζεται βάσει του ακινήτου τμήματος ΒΓ της χορδής.

Η Άλγεβρα, βάσει της οποίας διαχειριζόμεθα τα μουσικά διαστήματα κατά την Πυθαγόρειο άποψη μας είναι γνωστή από του αρχαίους Έλληνες αρμονικούς.

Στην παρούσα εργασία για πρώτη φορά παρουσιάζεται η Άλγεβρα για τη διαχείριση των μουσικών διαστημάτων κατά την Αριστοξένειο άποψη.

Haralambos C. Spyridis,
Professor in Musical Acoustics, Informatics,
Lab. of Musical Acustics & Technology,
Department of Music Studies, University of Athens.

The musical intervals by the Aristoxenean view



ABSTRACT: On the string of a string instrument three characteristic points are defined. Point A is fastened on the bridge, B is fastened on the key, and point Γ on the fret, point on which the musician presses the string.

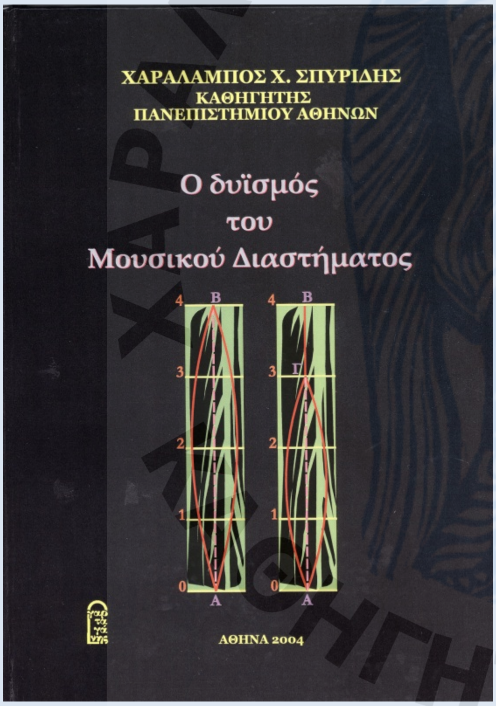
According to the Pythagorean views, the logarithmic i.e. of the ratios, (6 B.C.) the musical interval is faced based on the vibrating part ΑΓ of the string. According to the Aristoxenean views, the linear, (4 B. C.) the musical interval is faced based on the static part ΒΓ of the string.

The Algebra, on which we handle the musical intervals according to the Pythagorean views, is known to us from the ancient Greek Kanonikoi.

In the present paper for the first time is presented the Algebra for the handling of the musical intervals by the Aristoxenean view.

Ο δυϊσμός του μουσικού διαστήματος

Στο Τμήμα Μουσικών Σπουδών του Πανεπιστημίου Αθηνών στα πλαίσια μαθήματος ελεύθερης επιλογής διδάσκω την Ευκλείδειο «Κατατομή Κανόνος». Πρόκειται για μια πυθαγόρεια πραγματεία, η οποία πραγματεύεται τη σχέση που συνδέει μαθηματικές και ακουστικές αλήθειες, αποτελώντας, έτσι, τη βάση για την ακουστική επιστήμη του Δυτικού κόσμου.
Με την έννοια Κανών υπονοείται το μονόχορδο. Είναι το όργανο πειραματισμού και έρευνας των «κανονικών», δηλαδή αυτών που στις μελέτες και τις έρευνές τους χρησιμοποιούσαν τον κανόνα.
Κατατομή σημαίνει την υποδιαίρεση με μουσικομαθηματικές διαδικασίες του μήκους του κανόνος και την τοποθέτηση δεσμών, δηλαδή τάστων, επ' αυτού, προκειμένου να αποδίδονται κατά το ηρμοσμένον τα σύμφωνα μουσικά διαστήματα της τότε μουσικής θεωρίας.



Εικόνα 1: Το σύγγραμμα του καθηγητού Χ. Χ. Σπυρίδη που πραγματεύεται τον δυϊσμό του μουσικού διαστήματος.

Εντρυφώντας κι εμβαθύνοντας στην πραγματεία «*Κατατομή Κανόνος*», διεπίστωσα ότι ο Ευκλείδης αντιμετωπίζει την έννοια «μουσικό διάστημα» από δύο εντελώς διαφορετικές οπτικές και για την κάθε μια οπτική, μάλιστα, χρησιμοποιεί με μεγάλη αυστηρότητα μια εντελώς διαφορετική ορολογία.
Αυτήν την Ευκλείδειο αντιμετώπιση του μουσικού διαστήματος ονόμασα «*δυϊσμό του μουσικού διαστήματος*» και πραγματεύομαι στο ομώνυμο σύγγραμμά μου (Εικόνα 1).

Δυϊσμός είναι επιστημονικός και φιλοσοφικός όρος που δηλώνει σε γενική έννοια κάθε διδασκαλία, η οποία σε κάποιο τμήμα του επιστητού ή σε κάποιο θέμα –οποιοδήποτε και αν είναι αυτό- παραδέχεται την ύπαρξη δύο αρχών κατ' ουσίαν διαφορετικών, που δεν μπορεί να αναχθεί απ' ευθείας η μία στην άλλη, παρά μόνον με κάποιον μετασχηματισμό.
Με δυϊσμό λ.χ. αντιμετωπίζεται ο χαρακτήρας του φωτός στην Οπτική. Κυματικός χαρακτήρας κατά τη θεωρία Huygens (17ος αιώνας) και την Ηλεκτρομαγνητική Θεωρία του Maxwell (μέσον 19ου αιώνα), σωματιδιακός χαρακτήρας κατά τη

θεωρία του Newton (17ος αιώνας) και τη θεωρία των φωτονίων του Planck (20ος αιώνας).

Συγκεκριμένα, στην πραγματεία «*Κατατομή Κανόνος*» ο Ευκλείδης ασχολείται διεξοδικώτατα με τον δυϊσμό του μουσικού διαστήματος, αντιμετωπίζοντας το μουσικό διάστημα αφενός μεν ως μία σχέση δύο αριθμών προς αλλήλους, αφετέρου δε ως μία απόσταση μεταξύ δύο σημείων επί του κανόνος. Δικαιολογείται η ενέργειά του αυτή από δύο σχόλια του Πορφυρίου στην περί της αρμονίας διδασκαλία του Πτολεμαίου, τα οποία αναφέρουν «**καὶ τῶν κανονικῶν δὲ καὶ πυθαγορείων οἱ πλείους τὰ διαστήματα ἀντὶ τῶν λόγων λέγουσιν**» και «**τὸν λόγον καὶ τὴν σχέσιν τῶν πρὸς ἀλλήλους ὅρων τὸ διάστημα καλοῦσι**». Αυτά μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι στην Πυθαγόρειο μουσική θεωρία οι έννοιες «διάστημα» και «λόγος (αριθμητική σχέση ή αναλογία)» είναι ταυτόσημες.

Πρέπει να διευκρινισθεί ότι η σχέση των δύο αριθμών προς αλλήλους εκφράζει το λόγο των μηκών δύο **δονουμένων** τμημάτων χορδής επί του κανόνος, τα οποία ακουστικά υλοποιούν το μουσικό διάστημα.

Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων επί του κανόνος εκφράζει το μήκος του **σιγούντος** (=μη ηχούντος) τμήματος χορδής μεταξύ των δύο δεσμών (=τάστων) επί του κανόνος δια των οποίων υλοποιείται ακουστικά το μουσικό διάστημα.

Η πρώτη αντιμετώπιση του μουσικού διαστήματος είναι η Πυθαγόρειος και πραγματοποιείται με λόγους αριθμητικούς.

Η δεύτερη αντιμετώπιση του μουσικού διαστήματος είναι η Αριστοξένειος και θεάται το μουσικό διάστημα ως ένα ευθύγραμμο ακίνητο τμήμα μιας τεντωμένης χορδής. Αμφότερες εμπεριέχουν στη φύση τους τη λογαριθμηκότητα κατά τη σημερινή Άλγεβρα.

Η με τους αριθμητικούς λόγους αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων είναι περισσότερον «εύπλαστη» κατά τη μαθηματική της επεξεργασία και προτιμητέα από τους γνωρίζοντες Μαθηματικά. Η με τις αποστάσεις μεταξύ δύο σημείων αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων είναι περισσότερον «κατανοητή» από τους μουσικούς εκτελεστές, που δεν κατέχουν μαθηματικές γνώσεις.

Για την κατανόηση του παραπάνω δυϊσμού, θεώρησα καλό να παραθέσω ένα δείγμα εκ των δυϊκών εκφράσεων για το μουσικό διάστημα από την Ευκλείδειο πραγματεία «*Κατατομή Κανόνος*».

Ἐὰν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα
ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον.
(Πρόταση η, 1-3)

ἐὰν δὲὲ ἀπὸ τοῦ διὰ πέντε τὸ διὰ τεσσάρων
ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν τονιαῖόν ἐστι διάστημα τὸ ἄρα
τονιαῖον διάστημά ἐστιν ἐπόγδοον.
(Πρόταση 13, 5-7)

Στην Ευκλείδειο πραγματεία «*Κατατομή Κανόνος*» από τη χρησιμοποιούμενη διαφορετική ορολογία για την ονομασία των μουσικών διαστημάτων (Πίνακας 1) αντιλαμβανόμεθα την οπτική με την οποία αντιμετωπίζονται από τον Ευκλείδη αυτά.

Πίνακας 1: Ονομασία των μουσικών διαστημάτων με βάση
την Πυθαγόρειο ή την Αριστοξένειο οπτική αντιμετωπίσεώς τους.

Μουσικό Διάστημα	Πυθαγόρειος οπτική	Αριστοξένειος οπτική
$\frac{4}{1}$	τετραπλάσιον	δὶς διὰ πασῶν
$\frac{2}{1}$	διπλάσιον	διὰ πασῶν
$\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}$	ἡμιόλιον	διὰ πέντε
$\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$	ἐπίτριτον	διὰ τεσσάρων
$\frac{9}{8}=1+\frac{1}{8}$	ἐπόγδοον	τονιαῖον

Οι πράξεις μεταξύ των μουσικών διαστημάτων στην Πυθαγόρειο αντιμετώπιση του μουσικού διαστήματος διέπονται από μια ιδιάζουσα Άλγεβρα, λογαριθμικού χαρακτήρα, ακατανόητη από τον νου του τότε μη μαθηματικού μουσικού εκτελεστή. Κατ᾽ αυτήν η πρόσθεση μουσικών διαστημάτων πραγματοποιείται με πολλαπλασιασμό των αριθμητικών τους λόγων, ενώ η αφαίρεση μουσικών διαστημάτων πραγματοποιείται με διαίρεση του αριθμητικού λόγου του μειωτέου δια του αριθμητικού λόγου του αφαιρετέου.
Ο απλός μουσικός οργανοπαίχτης έχει μάθει ότι τα μεγέθη αθροίζονται με πρόσθεση και όχι με πολλαπλασιασμό και η διαφορά τους προκύπτει με αφαίρεση και όχι με διαίρεση. Με αυτή τη φιλοσοφία πραγματοποιούνται οι πράξεις των διαστημάτων κατά την Αριστοξένειο αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων, ο βασικότερος λόγος που επεκράτησε ανάμεσα στους μουσικούς εκτελεστές εκείνου του καιρού.

Ο Αριστόξενος τον $4^{ον}$ αιώνα π.Χ. επιβάλλει τη γραμμικότητα των μουσικών διαστημάτων. Καταργεί τις όποιες Πυθαγόρειες ανισότητες μεταξύ των συνωνύμων διαστημάτων, εισηγούμενος για πρώτη φορά στην ιστορία της Μουσικής τον ίσο συγκερασμό. Κατά τον Αριστόξενο το διάστημα της διαπασών (=οκτάβας) διαιρείται σε έξι ίσους μεταξύ τους τόνους και ο τόνος διαιρείται σε δύο ίσα μεταξύ τους ημιτόνια, σε τρία ίσα μεταξύ τους τρίτα και σε τέσσερα ίσα μεταξύ τους τέταρτα.
Σήμερα θα λέγαμε ότι ο Αριστόξενος εισηγήθηκε τους συγκερασμούς στα 6, στα 12, στα 18 και στα 24, δηλαδή τον χωρισμό της οκτάβας σε 6 (κλίμακα ολόκληρων

τόνων), σε 12 (κλίμακα 12 ίσων ημιτονίων, όπως τα ισχύοντα ευρωπαϊκά ημιτόνια), σε 18 και σε 24 ίσα μεταξύ τους μουσικά διαστήματα. Η γραμμικότητα σε όλο της το μεγαλείο!

Κακώς διδάσκεται ότι εισηγητής του ίσου συγκερασμού είναι ο J. S. Bach το έτος 1722.

Ο Αριστόξενος ονομάζει μουσικό διάστημα την **απόσταση** ανάμεσα σε δύο φθόγγους διαφορετικού μουσικού ύψους. Πρέπει να σημειωθεί ότι η έννοια φθόγγος είναι συνώνυμη και της θέσεως του δεσμού που πατάει στο μάνικο μουσικού οργάνου το δάκτυλο του μουσικού εκτελεστού, προκειμένου να παραχθεί ένας ήχος συγκεκριμένου μουσικού ύψους. Κατά τον Κλεονίδη, τον Βακχείο και τον Ανώνυμο του Bellermann μουσικό διάστημα είναι η απόσταση που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε δύο φθόγγους, δηλαδή δεσμούς, διαφορετικούς στο ύψος και στο βάθος.

Ο Νικόμαχος γράφει «διάστημα δ᾽ ἐστὶ δυοῖν φθόγγων μεταξύτης», δηλαδή διάστημα είναι ό,τι μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο πατήματα επί του μάνικου.

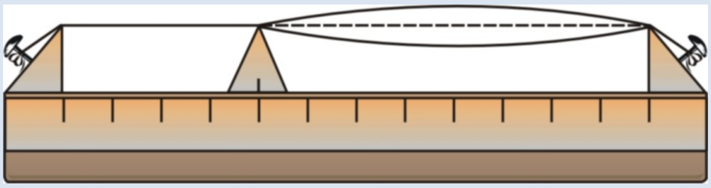
Σε αυτούς τους ορισμούς, θεωρώντας την έννοια φθόγγος με τη σημασία «θέση πατήματος επί του μάνικου του μουσικού οργάνου», το διάστημα αποκτά τη σημασία ενός ακινήτου ευθυγράμμου τμήματος κατά μήκος της χορδής του μονοχόρδου μουσικού οργάνου.

Κρίνω σκόπιμο στο σημείο αυτό να παραθέσω μια εξαιρετικά εύστοχη παρατήρηση του Νεοπυθαγορείου και Νεοπλατωνικού φιλοσόφου Θέωνος του Σμυρναίου (1ος-2ος μ.Χ. αι.) ότι δηλαδή η ταυτοφωνία δεν αποτελεί μουσικό διάστημα, αφού δεν υφίσταται μήκος μη ηχούντος τμήματος της χορδής του κανόνος ή, με άλλα λόγια, το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής του κανόνος είναι μηδενικό («*Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν*», λ, 1-4).

Πυθαγόρειο πείραμα Ακουστικής κατά Γαυδέντιο.

Η ενασχόληση του Πυθαγόρα με τη μουσική τον κατέστησε ευτυχή, διότι με την εφαρμογή των Μαθηματικών στο χώρο της Μουσικής και με την πραγματοποίηση «ψυχοακουστικών» πειραμάτων οδηγήθηκε στη σπουδαία και πολύ γόνιμη ανακάλυψη ότι το μουσικό ύψος των φθόγγων εξαρτάται από το δονούμενο μήκος των χορδών. Η ανακάλυψη αυτή προέκυψε από πειράματα, που πραγματοποίησε ο Πυθαγόρας επάνω στον «κανόνα» ή «μονόχορδο» (Εικόνα 2). Με τη βοήθεια κινητού καβαλάρη (υπαγωγέως ή μαγαδίου) ήταν δυνατόν να υποδιαιρεθεί η χορδή σε δύο τμήματα, ένα δονούμενο (=ηχούν) κι ένα ακίνητο (=σιγούν).

Η δόνηση των ηχούντων τμημάτων χορδής παρήγαγε ήχους διαφορετικών μουσικών υψών.



Εικόνα 2: Το μονόχορδο για τη μελέτη των νόμων των χορδών.

Στην εικόνα 3 φαίνεται κατά τον Γαυδέντιο[1] ο τρόπος, που πιθανώς πειραματίσθηκε ο Πυθαγόρας επάνω στον κανόνα κι ανεκάλυψε τις αριθμητικές σχέσεις των συμφωνιών.

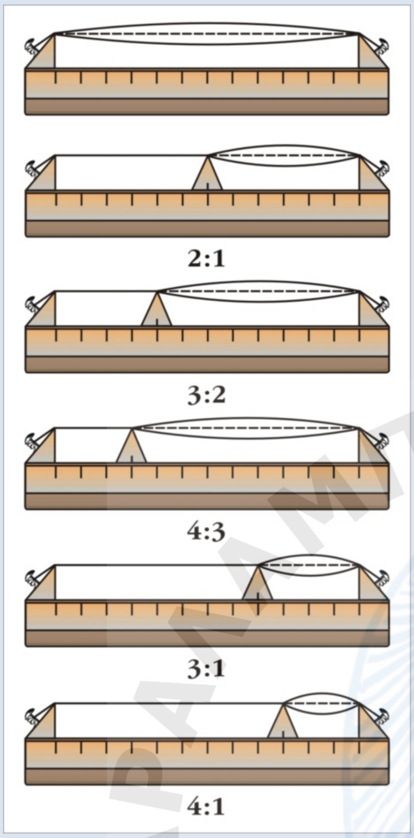
Διήρεσε τη χορδή του μονοχόρδου σε δύο ίσα τμήματα με τη βοήθεια ενός κινητού καβαλάρη, του υπαγωγέα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής και στη συνέχεια το μισό μήκος αυτής. Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε το διπλάσιο διάστημα $\left(\frac{2}{1}\right)$. Το διάστημα αυτό κατά την Αριστοξένειο αντιμετώπιση παριστάνεται από το μήκος του ακινήτου τμήματος της χορδής του κανόνος (Εικόνα 3-2ο μονόχορδο) και ονομάζεται διάστημα διαπασών.

Κατόπιν διήρεσε κι αρίθμησε ολόκληρο το μήκος της χορδής του κανόνος σε τρία ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής και στη συνέχεια τα $\frac{2}{3}$ του μήκους αυτής. Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε το ημιόλιον διάστημα $\left(\frac{3}{2}\right)$. Το διάστημα αυτό κατά την Αριστοξένειο αντιμετώπιση παριστάνεται από το μήκος του ακινήτου τμήματος της χορδής του κανόνος (Εικόνα 3-3ο μονόχορδο) και ονομάζεται διάστημα διαπέντε.

Τέλος, διήρεσε κι αρίθμησε ολόκληρο το μήκος της χορδής του κανόνος σε τέσσερα ίσα τμήματα. Έθεσε σε ταλάντωση ολόκληρο το μήκος της χορδής και στη συνέχεια τα $\frac{3}{4}$ του μήκους αυτής. Διεπίστωσε ότι από τους παραχθέντες δύο ήχους σχηματίσθηκε το επίτριτον διάστημα $\left(\frac{4}{3}\right)$. Το διάστημα αυτό κατά την Αριστοξένειο αντιμετώπιση παριστάνεται από το μήκος του ακινήτου τμήματος της χορδής του κανόνος (Εικόνα 3-4ο μονόχορδο) και ονομάζεται διάστημα διατεσσάρων.

---

[1] **Γαυδέντιος ο φιλόσοφος**, θεωρητικός της μουσικής. Τοποθετείται από άλλους μεν στον 2ο με 3ο αιώνα μ.Χ. από άλλους δε στον 5ο μ.Χ. αιώνα. Συνέγραψε το βιβλίο «*Αρμονική Εισαγωγή*», το οποίο αναφέρεται στους ήχους, τα διαστήματα, τα συστήματα, τα γένη κ.λπ. ακολουθώντας άλλοτε τις πυθαγόρειες και άλλοτε τις αριστοξένειες αντιλήψεις.



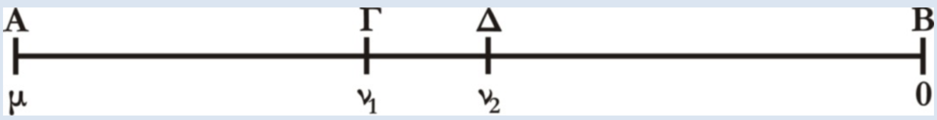
Εικόνα 3: Προσδιορισμός των αριθμητικών σχέσεων των μουσικών συμφωνιών στο μονόχορδο.

Να σημειωθεί ότι οι παραπάνω ονομασίες των συμφώνων διαστημάτων κατά την Αριστοξένειο αντιμετώπισή τους προκύπτουν αβίαστα, διότι το μήκος του *μη ηχούντος* τμήματος της χορδής καθορίζεται στην περίπτωση της δια τεσσάρων συμφωνίας με τους αριθμούς 12 και 9 (ανάμεσα σε 4 τάστα) και στην περίπτωση της δια πέντε συμφωνίας με τους αριθμούς 12 και 8 (ανάμεσα σε 5 τάστα) (Εικόνα 3).

Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΙΑ ΤΑ ΜΟΥΣΙΚΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΑ ΜΗ ΗΧΟΥΝΤΑ ΤΜΗΜΑΤΑ ΧΟΡΔΗΣ

Πρόσθεση Μουσικών Διαστημάτων

Σε κανόνα, που φέρει χορδή μήκους ΑΒ διηρημένη σε μ ίσα τμήματα, λαμβάνονται δύο συνημμένα διαστήματα, των οποίων τα μη ηχούντα τμήματα της χορδής είναι τα ΑΓ (μ, ν_1) και ΓΔ (ν_1, ν_2) $(\mu > \nu_1 > \nu_2)$. Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής του διαστήματος του αθροίσματός των ισούται με το άθροισμα των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων χορδής των δύο δοθέντων διαστημάτων (σχήμα 1)



Σχήμα 1: Πρόσθεση Μουσικών Διαστημάτων

$$\left|\mathrm{A\Delta}\right| = \left|\mathrm{A\Gamma}\right| + \left|\Gamma\Delta\right| = \left(\mu - \nu_1\right) + \left(\nu_1 - \nu_2\right) = \mu - \nu_1 + \nu_1 - \nu_2 = \mu - \nu_2$$

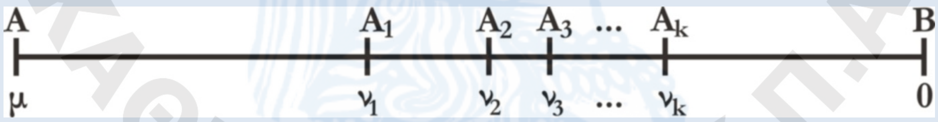
Στην περίπτωση κατά την οποία τα δύο συνημμένα μουσικά διαστήματα είναι ίσα μεταξύ των, τότε τα αντίστοιχα μήκη των μη ηχούντων τμημάτων της χορδής ΔΕΝ είναι ίσα μεταξύ των, δηλαδή $\left(\mu, \nu_1\right) \neq \left(\nu_1, \nu_2\right)$.

Πράγματι, οι λόγοι των ηχούντων τμημάτων της χορδής των δύο διαστημάτων είναι ίσοι μεταξύ των.

$$\frac{\nu_1 - 0}{\mu - 0} = \frac{\nu_2 - 0}{\nu_1 - 0} \Rightarrow \frac{\nu_1}{\mu} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \Rightarrow \nu_1^2 = \mu \cdot \nu_2 \Rightarrow \nu_2 = \frac{\nu_1^2}{\mu}$$

Η μη γραμμική σχέση αυτή μας δίνει την υποδιαίρεση της χορδής του κανόνος εις την οποία καταλήγει το μήκος του μη ηχούντος τμήματος του δευτέρου (εκ των ίσων) διαστήματος.

Στη γενική περίπτωση της προσθέσεως k το πλήθος συνημμένων διαστημάτων επί της χορδής κανόνος, η οποία φέρει μ ίσες υποδιαιρέσεις, το συνολικό μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής του διαστήματος του ολικού τους αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων χορδής όλων των προσθετέων διαστημάτων (σχήμα 2).

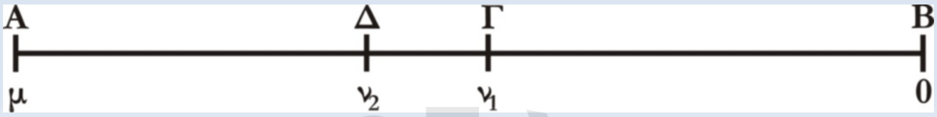


Σχήμα 2: Περίπτωση προσθέσεως k το πλήθος συνημμένων διαστημάτων
επί της χορδής κανόνος

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{AA}_k\right| = \left|\mathrm{AA}_1\right| + \left|\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\right| + \left|\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\right| + \ldots + \left|\mathrm{A}_{k-1}\mathrm{A}_k\right| = \\
&= \left(\mu - \nu_1\right) + \left(\nu_1 - \nu_2\right) + \left(\nu_2 - \nu_3\right) + \ldots + \left(\nu_{k-1} - \nu_k\right) = \\
&= \mu - \nu_1 + \nu_1 - \nu_2 + \nu_2 - \nu_3 + \ldots + \nu_{k-1} - \nu_k = \\
&= \mu - \nu_k
\end{aligned}$$

Αφαίρεση Μουσικών Διαστημάτων

Σε κανόνα που φέρει χορδή μήκους ΑΒ διηρημένη σε μ ίσα τμήματα (σχήμα 3), λαμβάνονται δύο διαστήματα κοινής αρχής, των οποίων τα μη ηχούντα τμήματα της χορδής είναι ΑΓ (μ, ν_1) και ΑΔ (μ, ν_2) $(\mu > \nu_2 > \nu_1)$.



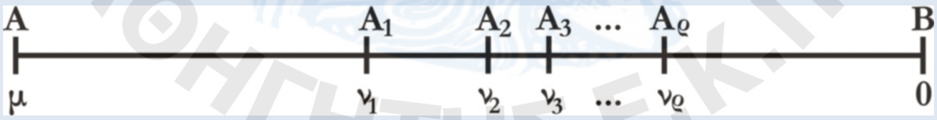
Σχήμα 3: Αφαίρεση δύο Μουσικών Διαστημάτων κοινής αρχής.

Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος της χορδής του διαστήματος της διαφοράς των ισούται με τη διαφορά των μηκών των μη ηχούντων τμημάτων χορδής του μειωτέου και του αφαιρετέου. Δηλαδή:

$$|\Delta\Gamma| = |\mathrm{A}\Gamma| - |\mathrm{A}\Delta| = (\mu - \nu_1) - (\mu - \nu_2) = \mu - \nu_1 - \mu + \nu_2 = \nu_2 - \nu_1$$

Ακέραιο εν δυνάμει «πολλαπλάσιο» διαστήματος

Γενικεύομε την έννοια του αθροίσματος για ρ το πλήθος συνημμένα μουσικά διαστήματα (σχήμα 4), τα οποία είναι ίσα μεταξύ τους.



Σχήμα 4: Άθροισμα ρ το πλήθος συνημμένων μουσικών διαστημάτων, τα οποία είναι ίσα μεταξύ τους.

Κατά τα γνωστά, για τα ίσα αυτά μουσικά διαστήματα τα αντίστοιχα μήκη των μη ηχούντων τμημάτων χορδής δεν είναι ίσα μεταξύ των. Το μήκος του μη ηχούντος τμήματος χορδής για το άθροισμα δεν προκύπτει ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους του μη ηχούντος τμήματος χορδής του πολλαπλασιαστέου. Γιαυτό δεν μιλούμε για πολλαπλάσιο, αλλά για εν δυνάμει πολλαπλάσιο.

Για το άθροισμα των επί μέρους μη ηχούντων τμημάτων χορδής ισχύει η σχέση:

$$\begin{aligned}
&\left|AA_\rho\right| = \left|AA_1\right| + \left|A_1A_2\right| + \left|A_2A_3\right| + \ldots + \left|A_{\rho-1}A_\rho\right| = \\
&= (\mu - \nu_1) + (\nu_1 - \nu_2) + (\nu_2 - \nu_3) + \ldots + (\nu_{\rho-1} - \nu_\rho) = \\
&= \mu - \nu_1 + \nu_1 - \nu_2 + \nu_2 - \nu_3 + \ldots + \nu_{\rho-1} - \nu_\rho = \\
&= \mu - \nu_\rho
\end{aligned} \qquad (\sigma\chi.\ 1)$$

Λόγω των ίσων λόγων των δονουμένων τμημάτων χορδής γι' αυτά τα ίσα μουσικά διαστήματα, ισχύει η σχέση:

$$\frac{\nu_1}{\mu} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\nu_3}{\nu_2} = \ldots = \frac{\nu_\rho}{\nu_{\rho-1}} = \lambda, \qquad \lambda \in R \quad (\sigma\chi.\ 2)$$

Από τη σχέση 2 προκύπτουν:

$$\nu_1 = \lambda\mu \qquad (\sigma\chi.3)$$

$$\nu_2 = \lambda\nu_1 = \lambda \cdot \lambda\mu = \lambda^2\mu \qquad (\sigma\chi.4)$$

$$\nu_3 = \lambda\nu_2 = \lambda \cdot \lambda^2\mu = \lambda^3\mu \qquad (\sigma\chi.5)$$

....

....

$$\nu_\rho = \lambda\nu_{\rho-1} = \lambda^\rho\mu \qquad (\sigma\chi.6)$$

Από τις σχέσεις (6) και (3) προκύπτει η γενική σχέση:

$$\nu_\rho = \left(\frac{\nu_1}{\mu}\right)^\rho \mu = \frac{\nu_1^\rho}{\mu^{\rho-1}} \qquad (\sigma\chi.7)$$

από την οποία για $\rho = 2,3,4,\ldots$ προκύπτουν οι υποδιαιρέσεις της χορδής επί του κανόνος, οι οποίες προσδιορίζουν τα μήκη των μη ηχούντων τμημάτων χορδής για τα συνημμένα ρ το πλήθος ίσα μουσικά διαστήματα

$$\nu_2 = \frac{\nu_1^2}{\mu^{2-1}}$$

$$\nu_3 = \frac{\nu_1^3}{\mu^{3-1}}$$

$$\nu_4 = \frac{\nu_1^4}{\mu^{4-1}}$$

$\kappa.\lambda\pi.$

Ακέραιο εν δυνάμει «υποπολλαπλάσιο» διαστήματος

Σε κανόνα, που φέρει χορδή μήκους ΑΒ διηρημένη σε μ το πλήθος ίσα τμήματα, δίδεται διάστημα ΑΓ (μ,ν). Ζητείται να υποδιαιρεθεί το μήκος του μη ηχούντος τμήματος (μ,ν) έτσι, ώστε να προκύψουν ρ το πλήθος ίσα διαστήματα.

Έστω επί του κανόνος σημείο A_1 τέτοιο, ώστε αφενός μεν να ορίζει διάστημα με μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής AA_1 (μ,ν_1), αφετέρου δε, λαμβανόμενο ρ το πλήθος φορές, να πληροί το διάστημα με μήκος μη ηχούντος τμήματος χορδής ΑΓ (μ,ν). Τούτο, βάσει των προηγουμένων περί εν δυνάμει «πολλαπλασίου» διαστήματος, σημαίνει:

$$\mu-\nu=\mu-\nu_\rho=\mu-\frac{\nu_1^\rho}{\mu^{\rho-1}}=\frac{\mu^\rho-\nu_1^\rho}{\mu^{\rho-1}} \Rightarrow \mu^\rho-\nu_1^\rho=(\mu-\nu)\mu^{\rho-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu_1^\rho=\mu^\rho-(\mu-\nu)\mu^{\rho-1} \Rightarrow \nu_1^\rho=\mu^\rho\left[1-\frac{\mu-\nu}{\mu}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu_1^\rho=\mu^\rho\left[\frac{\mu-\mu+\nu}{\mu}\right] \Rightarrow \nu_1^\rho=\mu^\rho\left(\frac{\nu}{\mu}\right) \Rightarrow \nu_1=\mu\sqrt[\rho]{\frac{\nu}{\mu}}$$

Με γνωστό το ν_1 από τη σχέση 7 περί του εν δυνάμει «πολλαπλασίου» διαστήματος, βρίσκονται τα
$\nu_2,\ \nu_3,\ldots$

$$\nu_2=\frac{\nu_1^2}{\mu}=\frac{\mu^2\cdot\sqrt[\rho]{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2}}{\mu}=\mu\cdot\sqrt[\rho]{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2}$$

$$\nu_3=\frac{\nu_1^3}{\mu^2}=\frac{\mu^3\cdot\sqrt[\rho]{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^3}}{\mu^2}=\mu\cdot\sqrt[\rho]{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^3}$$

....

....

$$\nu_k=\mu\cdot\sqrt[\rho]{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^k}$$

Μετατροπή Αριστοξενείου εκφράσεως του μουσικού διαστήματος σε Πυθαγόρειο

Δίδεται λ.χ. η ακολουθία των ακεραίων αριθμών 13824 15552 17496, η οποία εκφράζει τρεις δεσμούς επί υποθετικού κανόνος μεταξύ των οποίων καθορίζονται δύο συνημμένα μουσικά διαστήματα (Αριστοξένειος αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων).
Ζητείται να εκφρασθούν τα εν λόγω διαστήματα υπό μορφήν επιμορίων σχέσεων δύο αριθμών (Πυθαγόρειος αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων).

Το μουσικό διάστημα μεταξύ των αριθμών 13824 15552 κατά την Πυθαγόρειο αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων εκφράζεται από το λόγο

$$\frac{15552}{13824}=\frac{\lambda}{1} \Rightarrow \frac{15552-13824}{13824}=\frac{\lambda-1}{1} \Rightarrow \frac{1728}{13824}=\frac{\lambda-1}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{8}\cdot 13824}{13824}=\frac{\lambda-1}{1} \Rightarrow \frac{1}{8}=\frac{\lambda-1}{1} \Rightarrow 1=8\lambda-8 \Rightarrow 9=8\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{9}{8}$$

Άρα $\frac{15552}{13824}=\lambda=\frac{9}{8}$ (διάστημα επογδόου τόνου)

Το μουσικό διάστημα μεταξύ των αριθμών 15552 17496 κατά την Πυθαγόρειο αντιμετώπιση των μουσικών διαστημάτων εκφράζεται από το λόγο

$$\frac{17496}{15552}=\frac{\lambda}{1} \Rightarrow \frac{17496-15552}{15552}=\frac{\lambda-1}{1} \Rightarrow \frac{1944}{15552}=\frac{\lambda-1}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{8}\cdot 15552}{15552}=\frac{\lambda-1}{1} \Rightarrow \frac{1}{8}=\frac{\lambda-1}{1} \Rightarrow 1=8\lambda-8 \Rightarrow 9=8\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{9}{8}$$

Άρα $\frac{17496}{15552}=\lambda=\frac{9}{8}$ (διάστημα επογδόου τόνου)