

**Η «Σπυρίδειος» εκδοχή περί γενέσεως της Πυθαγορείου μουσικής κλίμακος με Δώρια τετράχορδα κατά την κατιούσα διαδοχή (τόνος-τόνος-λείμμα) συμφώνως προς την αρχαιοελληνική μαθηματική διαδικασία.**

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης,

Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής

Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας

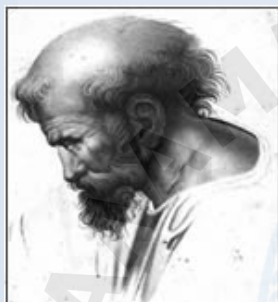
Περίληψη: Με την έννοια μουσική κλίμαξ εννοούμε ένα σύνολο διακριτών μουσικών υψών, τυπικώς εντός του μουσικού διαστήματος ενός διαπασών (οκτάβας), το οποίο σύνολο χρησιμοποιούμε και για να δημιουργούμε και για να περιγράψουμε τη μουσική.

Για το οποιοδήποτε επιλεγέν μουσικό ύψος της κλίμακος υπάρχει το αντίστοιχο ισοδύναμό του μουσικό ύψος στο οποιοδήποτε διάστημα του διαπασών επιθυμούμε, αρκεί, βεβαίως, αυτό να ευρίσκεται εντός των ακουστών συχνοτικών ορίων για τα ανθρώπινα αυτιά (20-20.000 Hz).

Κατά τις διαφόρους ιστορικές περιόδους επενοήθησαν κι εχρησιμοποιήθησαν πολλές και ποικίλες μουσικές κλίμακες. Μία εξ αυτών είναι και η Πυθαγόρειος μουσική κλίμαξ, για τη φιλοσοφία της δομήσεως της οποίας υ-

πάρχουν διάφορες εκδοχές. Μία εξ αυτών, η «Σπυρίδειος» εκδοχή, θα εκτεθεί στην παρούσα εργασία.

### I. Μείζων ή τελειοτάτη αναλογία



Ο Πυθαγόρας ο Σάμιος (586-490 π.Χ.), ο μέγας φιλόσοφος, πειραματικός, φυσικός, μαθηματικός, αστρονόμος, μουσικός, ιατρός και θεωρητικός των αριθμών κατασκεύασε μια μουσική κλίμακα στηριζόμενος, κατά κάποια εκδοχή, στη «Μείζονα ή τελειοτάτη αναλογία». Σχετικά με τα «...περι τῆς τε-

λειοτάτης ἀναλογίας, τῆς ἐν τέσσαρσιν ὄροις ὑπαρχούσης καὶ ἰδίως μουσικῆς ἐπικληθείσης...» κατά τον Ιάμβλιχο στο «Περί τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς» έχουμε να πούμε ότι πρόκειται περί μιας σειράς<sup>1</sup> τεσσάρων αριθμῶν μεταξύ των οποίων μπορεί να διακρίνει κανείς και την αριθμητική και τη γεωμετρική και την αρμονική αναλογικότητα (αναλογία), δηλαδή τρεις συγχρόνως αναλογικότητες. Λέγεται ὅτι αὐτή η αναλογικότητα εἶναι εὕρημα των Βαβυλωνίων και ὅτι ο Πυθαγόρας<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Ο Thomas Taylor γράφει χαρακτηριστικά: «...ὅπως σε ἓνα μουσικὸ αὐλὸ οἱ ακραῖες σπές χρησιμοποιοῦνται ἐναλλάξ με τὴ μεσαία σπὴ καὶ, ἀνοίγοντες τὴν μετὰ τὴν μεσαία σπὴν με τὰ δάκτυλα, προκαλοῦμε τὴν ἐκφορὰ διαφορετικῶν ἤχων, ἢ, ὅπως σε δύο τεντωμένες χορδές ο μουσικός προκαλεῖ ἓναν ἐνδιάμεσο ἤχο, οξὺ ἢ βαρὺ, ἀνάλογα με τὸ πόσο τὴν τεντώνει ἢ τὴν χαλαρώνει, κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο σε δύο δεδομένους ἀριθμοὺς μπορούμε νὰ παρεμβάλλουμε ἄλλοτε ἓναν ἀριθμητικὸ, ἄλλοτε ἓνα γεωμετρικὸ καὶ ἄλλοτε ἓναν ἀρμονικὸ μέσο...».

<sup>2</sup> Ο Πυθαγόρας ἐξῆσε στὴν Αἴγυπτο ἐπὶ 22 ἔτη. Συνελήφθη ἀιχμάλωτος ἀπὸ τοὺς στρατιῶτες τοῦ βασιλέως Καμβύση καὶ μετεφέρθη στὴ Βαβυλώνα. Στὴ Βαβυλώνα ἐμείνε ἐπὶ 12 ἔτη κατὰ τὴ διάρκεια των οποίων συναναστράφη με τοὺς Μάγους καὶ ἔμαθε ἀπὸ αὐτοὺς τὴν τέλεια λατρεία των Θεῶν. Σε ηλικία 56 περίπου ἐτῶν ἐπέστρεψε στὴ Σάμο, ὅπου ἦταν

την έφερε στην Ελλάδα και την κατέστησε γνωστή στους Έλληνες<sup>3</sup>. Την εν λόγω αναλογικότητα ευρίσκουμε να τη χρησιμοποιούν πολλοί Πυθαγόρειοι όπως π.χ. ο Αρισταίος ο Κροτωνιάτης, ο Τίμαιος ο Λοκρός, οι Ταραντίνιοι Φιλόλαος και Αρχύτας<sup>4</sup> και ο Πλάτων στο περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου στο διάλογό του Τίμαιος.

---

γνωστός μόνον στους ηλικιωμένους κατοίκους του νησιού και οι οποίοι συνέχιζαν να τον θαυμάζουν, όπως παλιά.

<sup>3</sup> Ο Νικόμαχος δεν αναφέρει κάτι σχετικό για την προέλευση της τελειότητας μουσικής αναλογίας. Ο Ιάμβλιχος αναφέρει ότι ο Πυθαγόρας ήταν ο πρώτος που πραγματοποίησε πειράματα Ακουστικής με τα οποία ανακάλυψε τους αριθμητικούς λόγους για το διαπέντε, το διατεσσάρων, το τονιαίον και το διαπασών διάστημα και στη συνέχεια προχώρησε στην κατασκευή της μουσικής κλίμακος, τη γνωστή σε όλους ως Πυθαγόρειο κλίμακα. Πρέπει να τονισθεί με έμφαση ότι δεν υπάρχει καμία μαρτυρία για την κατασκευή της μουσικής κλίμακος από τους Βαβυλωνίους.

<sup>4</sup> Η μουσική αναλογία εν γένει δομείται από δύο δοθέντες αριθμούς  $x$ ,  $y$  και τον αρμονικό και τον αριθμητικό τους μέσο ως εξής:

$$\frac{x}{\text{αριθμητικός μέσος}} = \frac{\text{αρμονικός μέσος}}{y}$$

Από αυτή τη σχέση προκύπτει ότι ο λόγος  $\frac{y}{x}$  αναλύεται κατά το σχήμα:

$$\frac{x}{\text{αριθμητικός μέσος}} = \frac{\text{αρμονικός μέσος}}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot y = (\text{αριθμητικός μέσος}) \cdot (\text{αρμονικός μέσος}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x \cdot y}{x^2} = \frac{(\text{αριθμητικός μέσος}) \cdot (\text{αρμονικός μέσος})}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\text{αριθμητικός μέσος}}{x} \cdot \frac{\text{αρμονικός μέσος}}{x}$$

Ο Αρχύτας, λαμβάνοντας ως  $x$  το 2 και ως  $y$  το 3, ανέλυσε την επιμόριος σχέση  $\frac{3}{2}$  (ημιόλιος)

σε γινόμενο δύο επιμορίων σχέσεων: αυτής της επιτετάρτου  $\frac{5}{4}$  και αυτής της επιπέ-

Τη «μείζονα ή τελειοτάτη ή μουσικήν» αναλογία στην αρχαία ελληνική αρμονική δομούν οι αριθμοί 6, 8, 9, 12.

Η γεωμετρική αναλογικότητα εκφράζεται εμπλέγδην από τους λόγους 12:8=9:6, που ο καθένας τους είναι ημιόλιος.

μπου  $\frac{6}{5}$  ή, με μουσικούς όρους, εξέφρασε το διαπέντε διάστημα ως άθροισμα δύο μουσικών διαστημάτων: αυτό της μεγάλης τρίτης  $\left(\frac{5}{4}\right)$  και αυτό της μικρής τρίτης  $\left(\frac{6}{5}\right)$ . Δηλαδή  $\left(\frac{3}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5}\right)$ .

Πράγματι, για  $x=2$  και  $y=3$  ο αριθμητικός τους μέσος είναι  $\frac{x+y}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$  και ο αρμονικός τους μέσος είναι  $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2xy}{x+y} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2+3} = \frac{12}{5}$ .

Οπότε  $\frac{3}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{12}{5} = \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5}$ . Ο Αρχύτας ανέλυσε την επιμόριο (ημιόλιο) σχέση σε γινόμενο δύο επιμορίων σχέσεων, οι οποίες, όμως, δεν είναι ίσες μεταξύ τους. Με άλλα λόγια δεν εδιχοτόμησε την ημιόλιο σχέση.

Στη γενικευμένη περίπτωση των επιμορίων αριθμών  $\frac{n+1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  είναι:

$$x=n,$$

$$y=n+1,$$

$$\text{αριθμητικός μέσος} = \frac{n+(n+1)}{2} = \frac{2n+1}{2},$$

$$\text{αρμονικός μέσος} = \frac{2n(n+1)}{n+(n+1)}$$

$$\text{η μεν μουσική αναλογία είναι: } \frac{n}{\frac{2n+1}{2}} = \frac{2n(n+1)}{2n+1},$$

$$\text{η δε επιμόριος σχέση αναλύεται ως } \frac{n+1}{n} = \frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{2(n+1)}{2n+1}.$$

Η αριθμητική αναλογικότητα εντοπίζεται μεταξύ των ζευγών των αριθμών 12, 9 και 9, 6, διότι  $12-9=9-6$ .

Η αρμονική αναλογικότητα εντοπίζεται μεταξύ των ζευγών των αριθμών

12, 8 και 8, 6, διότι  $\frac{12}{6} = \frac{12-8}{8-6}$ .

Στη σειρά αυτή των αριθμών 6, 8, 9, 12 εντοπίζονται όλες οι μουσικές συμφωνίες γι' αυτό, άλλωστε, και ονομάστη μουσική αναλογία.

Πράγματι, οι σχέσεις 8:6 και 12:9 εκφράζουν τον επίτριο λόγο και ταυτοχρόνως την διατεσσάρων συμφωνία.

Οι σχέσεις 9:6 και 12:8 εκφράζουν τον ημιόλιο λόγο και την διαπέντε συμφωνία.

Η σχέση 12:6 εκφράζει την δια πασών συμφωνία.

Η σχέση 9:8 εκφράζει τον επόγδοο τόνο, που είναι το ό,τι διαφέρει η διαπέντε συμφωνία από την διατεσσάρων συμφωνία ή ο ημιόλιος λόγος από τον επίτριο λόγο ( $3/2:4/3=9/8$ ).

Τα παραπάνω είναι λογικά, αφού με την ένθεση του αριθμητικού και του αρμονικού μέσου στους όρους ενός διπλασίου διαστήματος δομείται πάντοτε η μουσική αναλογία.

## Π. Ένα πιθανό σκεπτικό δομήσεως της Πυθαγορείου μουσικής κλίμακος

Είναι γνωστό ότι δεν μας έχουν διασωθεί γραπτά του Πυθαγόρου. Άλλοι λένε ότι ο ίδιος δεν έγραψε κάποιο έργο και άλλοι πως έγραψε<sup>5</sup> μεν, αλλά δεν μας διεσώθη<sup>6</sup>.

<sup>5</sup> Ο Ηράκλειτος λ.χ. ο μέγας φιλόσοφος του 500 π.Χ., δηλαδή σύγχρονος του Πυθαγόρου, αναφέρει ότι ο Πυθαγόρας έγραψε τρία συγγράμματα και συγκεκριμένα: παιδευτικόν, πολιτικόν, φυσικόν και επί πλέον τον Ιερόν λόγον.

<sup>6</sup> Η Δαμώ, μια Πυθαγορείος γυναίκα -θυγάτηρ του Πυθαγόρου-, κρατούσε φυλαγμένα μετά το θάνατο του Πυθαγόρου τα έργα, τα οποία ο ίδιος ο Πυθαγόρας είχε γράψει, και δεν τα επώλησε παρόλο που περιήλθε σε μεγάλη πενία. Λέγεται ότι τα έργα αυτά αγόρασε ο Πλάτων αντί του ποσού των 100 μινών από τον Πυθαγόρειο Φιλόλαο με τη μεσολάβηση του Δίωνος, γυναικαδέλφου του Διονυσίου του τυράννου των Συρακουσών.

Όσον αφορά στα υποτιθέμενα γραπτά έργα του Πυθαγόρου με μεγάλη αμηχανία αντιμετωπίζουμε τις πολλές και αντιφατικές μαρτυρίες τόσο, που δεν μπορούμε να αποφανθούμε υπέρ της μιας ή της άλλης.

Ο Γαληνός, ο Φλάβιος Ιώσηπος, ο Κλαυδιανός Μαιέρτιος, ο Λουκιανός, ο Αρκεσίλαος και ο Καρνεάδης (*Περί της Αλεξ. τύχης* I, 4, 328) υποστηρίζουν ότι ο Πυθαγόρας δεν άφησε κανένα γραπτό κείμενο. Μάλιστα ο Πλούταρχος τον παρομοιάζει με τον Σωκράτη, που κι αυτός δεν άφησε κανένα γραπτό κείμενο.

Ο Αλέξανδρος Πολυΐστωρ, τον οποίο παραθέτει εκτενώς ο Διογένης Λαέρτιος (*Βίοι VIII*, 2533), ισχυρίζεται ότι ο Πυθαγόρας άφησε Πυθαγορικά Υπομνήματα (σημειώσεις σκελετού μαθημάτων).

Ο Διογένης Λαέρτιος χρησιμοποιεί τον Ηράκλειτο, προκειμένου να ανασκευάσει τους ισχυρισμούς κάποιων ότι ο Πυθαγόρας δεν άφησε γραπτά έργα (*Βίοι VIII*, 6-7). Κατά τον Ηράκλειτο, λοιπόν, ο Πυθαγόρας άφησε τρία συγγράμματα **Παιδευτικόν**, **Πολιτικόν** και **Φυσικόν**. Σύμφωνα με τον Διογένη Λαέρτιο (III, 9) ο Σάτυρος εβεβαίωσε ότι ο Φιλόλαος είχε υπό την φύλαξή του τα τρία «πυθαγορικά βιβλία» και με την διαμεσολάβηση του Δίωνος, γυναικαδέλφου του τυράννου της πόλεως των Συρακουσών, τα αγόρασε αντί του ποσού των 100 μινών. Να σημειωθεί ότι μετά τον θάνατον του Πυθαγόρου τα «πυθαγορικά βιβλία» κρατούσε η κόρη του η Δαμώ και παρόλο που περιέπεσε σε εξαιρετικά μεγάλη πενία δεν τα πούλησε.

Λέγουσι δέ τινες, ὧν ἔστι καὶ Σάτυρος (FHG iii. `163 sq.), ὅτι Δίωνι ἐπέστειλεν εἰς Σικελίαν ὠνήσασθαι τρία βιβλία Πυθαγορικὰ παρὰ Φιλολάου μινῶν ἑκατόν.

Διογένης Λαέρτιος, 3, 9, 1-3.

Φιλόλαος Κροτωνιάτης Πυθαγορικός. παρὰ τούτου Πλάτων ὠνήσασθαι τὰ βιβλία τὰ Πυθαγορικὰ Δίωνι γράφει.

Διογένης Λαέρτιος, 8, 84, 9-10.

Όπως έχει ήδη λεχθεί, δεν έχουμε πληροφορίες από πηγές για το πώς ακριβώς και με ποιά μαθηματική διαδικασία ο Πυθαγόρας ωδηγήθη στην κατασκευή της μουσικής κλίμακος, η οποία σήμερα φέρει το όνομά του.

Διάφοροι ερευνητές, υποθέτοντες, προτείνουν διάφορα σκεπτικά για τον τρόπο που ο Πυθαγόρας εδόμησε την ομώνυμη μουσική κλίμακα. Κατά βάση όλα αυτά τα σκεπτικά φαίνεται να στηρίζονται στην ημιόλιο σχέση (3/2), δηλαδή στο «διαπέντε» διάστημα, αλλά στην ουσία στηρίζονται στους γεννήτορες αριθμούς 2 και 3 της πυθαγορείου αριθμοσοφίας<sup>7</sup> κατά την Ψυχογονία στον Τίμαιο του Πλάτωνος.

---

DIOG. VIII 84. 85 Φιλόλαος Κροτωνιάτης Πυθαγορικός. παρὰ τούτου Πλάτων ὠνήσασθαι τὰ βιβλία τὰ Πυθαγορικά Δίωني γράφει Φιλόλαος, *Testimonia*, θραύσμα 1, 1-2.

DioG. III 9 λέγουσι δέ τινες, ὧν ἔστι καὶ Σάτυρος [fr. 16 FHG III 163], ὅτι Δίωني ἐπέστειλεν εἰς Σικελίαν ὠνήσασθαι τρία βιβλία Πυθαγορικά παρὰ Φιλολάου μνῶν ἑκατόν. EUSEBIUS adv. Hierocl. p. 64 ('380, 8 Kayser) καὶ μὴν οὐδ' ὁ περιβόητος Πλάτων πάντων γε μᾶλλον τῆς Πυθαγόρου κεκοινωνηκῶς φιλοσοφίας οὐτ' Ἀρχύτας οὐτ' αὐτὸς ἐκεῖνος ὁ τὰς Πυθαγόρου γραφῆι παραδοὺς ὁμιλίας Φιλόλαος.  
Φιλόλαος, *Testimonia*, θραύσμα 8, 9-14.

DioG. L. III, 9, de Platone: Λέγουσι δέ τινες (ὧν ἔστι καὶ Σάτυρος) ὅτι Δίωني ἐπέστειλεν εἰς Σικελίαν, ὠνήσασθαι τρία βιβλία Πυθαγορικά παρὰ Φιλολάου μνῶν ἑκατόν.  
Σάτυρος βιογρ., *Θραύσματα*, θραύσμα 16, 1-4.

<sup>7</sup> Όλα τα πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα εκφράζονται ως γινόμενο δυνάμεων των αριθμών 2 και 3, είτε με θετικούς, είτε με αρνητικούς εκθέτας. Κατά τα γνωστά, οι αριθμοί 1, 2, 3, 4 δομούσαν την ιεράν τετρακτύν των Πυθαγορείων, ενώ οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27 εδομούσαν τη μείζονα τετρακτύν του Πλάτωνος. Όλα συμμετέχουν σε μια θεολογία. Μια θεολογία που γοητεύεται να ανακαλύπτει τη θεία πρόνοια στους λόγους των ακεραίων αριθμών που διέπουν, κατά την αντίληψή της, τα φαινόμενα. Οι Πυθαγόρειοι ήσαν κυρίως θεολόγοι. Οι επιστημονικοί τομείς των Πυθαγορείων είναι όψεις ενός θεολογικού συστήματος. Δεν εφαρμόζουν τα μαθηματικά στη μουσική. Χρησιμοποιούν τη μουσική κλίμακα για να τεκμηριώσουν τη μυστική τους αριθμοσοφία. Αναζητούν την επαλήθευση της θείας πρόνοιας στην παγκόσμιο αρμονία, την οποία επιδιώκουν να εκφράσουν με τους ίδιους

Το σκεπτικό, το οποίο θα αναπτυχθεί παρακάτω, για τη δόμηση της Πυθαγορείου μουσικής κλίμακος, βασίζεται αποκλειστικώς στον αλγόριθμο του μουσικού χωρίου του Πλατωνικού Τιμαίου (35α1-36β6)<sup>8</sup>. Θα μπορούσε να υποθέσει κανείς ότι κατ' αυτόν τον τρόπο ενήργησε ο Πυθαγόρας κι εδόμησε την ομώνυμη μουσική κλίμακα εύρους ενός διαπασών.

Θα μπορούσε, επίσης, να υποθέσει κανείς ότι αυτόν τον Πυθαγόρειον αλγόριθμο, ο οποίος ξεκινά από ένα διπλάσιο μουσικό διάστημα, τον έλαβε ο Πλάτων, τον ετροποποίησε έτσι, όπως αναφέρεται στο μουσικό χωρίο του Τιμαίου - επεκτείνοντας το μουσικό εύρος σε τέσσερα διαπασών, ένα ημιόλιο και ένα επόγδοο διάστημα- κι εδόμησε την Ψυχήν του Κόσμου.

Ο Πυθαγόρειος αλγόριθμος για τη δόμηση της ομώνυμου μουσικής κλίμακος θα μπορούσε, κατ' εμέ, να έχει -με βάση το μουσικό χωρίον του Τιμαίου- ως ακολούθως:

«Από την αδιαίρετη και πάντοτε αμετάβλητη Ουσία και από τη διαιρετή και μεταβαλλόμενη στα φυσικά σώματα Ουσία συνέθεσε –ο θεός- ένα τρίτο είδος Ουσίας, ενδιάμεσο, αποτελούμενο και από τις δύο. Στην περίπτωση πάλι της Ταυτότητος και της Διαφοράς, ακολουθώντας την ίδια αρχή, συνέθεσε ενδιάμεσα μείγματα, που αποτελούνται από το αδιαίρετο και από το διαιρετό στα σώματα τμήμα τους. Παίρνοντας έπειτα τα τρία αυτά συστατικά, τα συνέπτυξε σε μια μορφή, αναγκάζοντας τη Διαφορά, που είναι από

---

λόγους ακεραίων αριθμών, που χρησιμοποιούν για τον καθορισμό των μουσικών διαστημάτων στο μονόχορδο. Και το σπουδαιότερο, αυτή η κάπως απλοϊκή, αλλά γοητευτική για τον θρησκευόμενο θεώρηση του κόσμου, στηρίζεται σε μια θεολογία μονοθεϊστική.

<sup>8</sup> Βλέπε: Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, 2006, Να λυθεί το πρόβλημα «περί γενέσεως Ψυχής Κόσμου», το οποίο αναφέρει ο Πλάτων στον Τιμαίο (35α1-36β6), *Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη, σ. 180.



τη φύση της δύσμεικτη, να ενωθεί με την Ταυτότητα και, στη συνέχεια, το μείγμα των δύο να ενωθεί με την Ουσία.

Έχοντας φτιάξει, λοιπόν, ένα μείγμα από τρία συστατικά, το διένειμε ξανά σε δύο κομμάτια –το καθένα από αυτά τα κομμάτια αποτελείται και από την Ταυτότητα και από τη Διαφορά και από την Ουσία. Από τα δύο κομμάτια το δεύτερο κομμάτι ήταν διπλάσιο [2] από το πρώτο [1].

Έπειτα συμπλήρωσε αυτό το διπλάσιο διάστημα κόβοντας και άλλα κομμάτια από το αρχικό μείγμα και τοποθετώντας τα ανάμεσα στα κομμάτια της πρώτης διαιρέσεως με τέτοιο τρόπο, ώστε να υπάρχουν δύο μέσοι σε αυτό το διάστημα. Ο πρώτος [αρμονικός μέσος] χωρίζει το διάστημα σε δύο μέρη, τα οποία έχουν τον ίδιο λόγο με τον λόγο των δύο ακραίων αριθμών του διαστήματος, και ο δεύτερος [αριθμητικός μέσος] απέχει εξ ίσου από τους δύο ακραίους αριθμούς. Αυτοί οι δεσμοί εδημιούργησαν τμήμα  $3/2$  (ημιόλιον),  $4/3$  (επίτριτο) και  $9/8$  (επόγδοον) με τα δύο αρχικά κομμάτια. Συμπλήρωσε όλα τα επίτριτα διαστήματα ( $4/3$ ) με επόγδοα διαστήματα ( $9/8$ ), αφήνοντας υπόλοιπο ένα τμήμα, το οποίο μπορεί να αναπαρασταθεί με το κλάσμα  $256/243$  (λείμμα ή έλασσον ημιτόνιον). Έτσι εξαντλήθηκε όλο το αρχικό μείγμα από το οποίο είχε αρχίσει να κόβει τα κομμάτια αυτά».

Ο Πυθαγόρας θα μπορούσε να είχε παραγγείλει το διπλάσιο διάστημα να το συμπληρώσουμε με την αρμονική και την αριθμητική μεσότητα.

Ο Πλούταρχος στο κεφάλαιο 15 (*Περί της εν Τιμαίω Ψυχογονίας*) αναφέρεται στην αριθμητική και την αρμονική αναλογία, οι οποίες συνδέονται με τις μουσικές συμφωνίες και τους μουσικούς φθόγγους. Επίσης στο κεφάλαιο 16 αναφέρει τον τρόπο υπολογισμού του αριθμητικού και του αρμονικού μέσου.

Κατά τον Εύδωρο, για τα διπλάσια, όσο και για τα τριπλάσια διαστήματα το άθροισμα των ημίσεων των άκρων όρων δίδει τον αριθμητικό μέσο.

Τούτο σημαίνει ότι, προκειμένου να ενθέσουμε τον αριθμητικό μέσο (Πίναξ 2), πρέπει οι όροι του διπλασίου διαστήματος να διαιρούνται δια του 2. Γι' αυτό τους διπλασιάζουμε (Πίναξ 1).

Πίναξ 1: Οι διπλασιασμένοι όροι του διπλασίου διαστήματος 2:1.

2	4
---	---

Πίναξ 2: Ένθεση αριθμητικών μέσων στο διπλάσιο διάστημα.

		2		4
αριθμητικός μέσος	$\beta = \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} \right)$		3	

Στο διπλάσιο διάστημα το άθροισμα του ενός τρίτου του μικροτέρου όρου και του ημίσεος του μεγαλύτερου όρου δίδει τον αρμονικό μέσο (Πίναξ 3).

Η νέα απαίτηση σημαίνει ότι, προκειμένου να ενθέσουμε τον αρμονικό μέσο, πρέπει οι δύο αριθμοί του διπλασίου διαστήματος να διαιρούνται δια του 2 και δια του 3. Έτσι, τριπλασιάζουμε τους αριθμούς του διπλασίου διαστήματος καθώς επίσης και τον ευρεθέντα αριθμητικό μέσο τους.

Πίναξ 3: Ένθεση αρμονικού μέσου στο διπλάσιο διάστημα.

		6		12
αρμονικός μέσος	$\alpha = 2\gamma \Rightarrow \beta = \frac{\gamma}{3} + \frac{\alpha}{2}$		$8^9$	

Άρα διηρέθη το διπλάσιο διάστημα με τις συγκεκριμένες δύο μεσότητες (αριθμητική και αρμονική) και προέκυψε η σειρά αριθμών, η οποία φαίνεται στον Πίνακα 4:

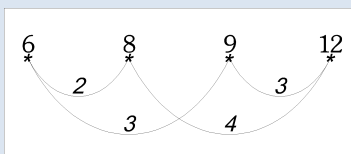
Πίναξ 4: Η σειρά των αριθμών που προέκυψε από την ένθεση του αριθμητικού και αρμονικού μέσου στο διπλάσιο διάστημα.

	9/8		
6	8	9	12
4/3		4/3	

<sup>9</sup> Ας πάρουμε, λοιπόν, τον αριθμό 6 και τον διπλάσιό του, τον 12. Οι αριθμοί αυτοί έχουν τον ίδιο λόγο, τον οποίον έχουν η δυάς με τη μονάδα. Ανάμεσα σ' αυτούς τους αριθμούς, που είναι εξαπλάσιοι της μονάδος και της δυάδος, παρεμβάλλονται οι αριθμοί 8 και 9, που είναι οι προαναφερθείσες μεσότητες (αρμονική και αριθμητική). Πράγματι, ο μεν αριθμός 8 κατά τον ίδιο λόγο υπερέχει και υπερέχεται με τους δύο ακραίους αριθμούς

$$\left(\frac{12-8}{8-6} = \frac{12}{6}\right)$$

Ο δε αριθμός 9 κατά το αυτό πλήθος μονάδων υπερέχει και υπερέχεται των δύο ακραίων αριθμών (12-9=9-6). Εξαπλασιάζοντας, λοιπόν, τη μονάδα και τη δυάδα, βρήκαμε αριθμούς που να επιδέχονται τις προαναφερθείσες μεσότητες.



Τώρα θα πρέπει στη σειρά των αριθμών του Πίνακος 4 τα διαστήματα των όρων, που έχουν λόγο επίτрито, να τα διαιρέσουμε σε επογδούς τόνους και σε λείμμα.

Εργαζόμεθα ως εξής: Προκειμένου να ληφθεί ο επόγδοος ενός δοθέντος αριθμού, θα πρέπει ο δοθείς αριθμός να διαιρείται ακριβώς με το 8. Προς τούτοις, οκταπλασιάζομε όλους τους μέχρι στιγμής ληφθέντες αριθμούς (Πίναξ 4) και έχομε τη σειρά των αριθμών του Πίνακος 5:

Πίνακα 5: Οι άριθμοί του Πίνακος 4 οκταπλασιασμένοι, προκειμένου να ευρεθούν οι επόγδοοί τους.

48	64	72	96
4/3		4/3	
	9/8		

Στο επίτрито διάστημα των αριθμών 48, 64 επόγδοος του 48 είναι ο αριθμός 54.

Στο επίτрито διάστημα των αριθμών 72, 96 επόγδοος του 72 είναι ο αριθμός 81.

Προκειμένου να ληφθούν οι δεύτεροι επόγδοοι όροι στα προμνημονευθέντα δύο επίτрита διαστήματα, οκταπλασιάζομε όλους τους μέχρι στιγμής ληφθέντες αριθμούς και έχομε την εξής σειρά αριθμών:

Στο επίτрито διάστημα των αριθμών 384, 512 παρενεβλήθησαν οι δύο διαδοχικοί επόγδοοι όροι 432 και 486. Ακολουθεί εν διαζεύξει το επίτрито διάστημα των αριθμών 576, 768 με τους δύο διαδοχικούς επογδούς όρους 648 και 729 (Πίναξ 6).

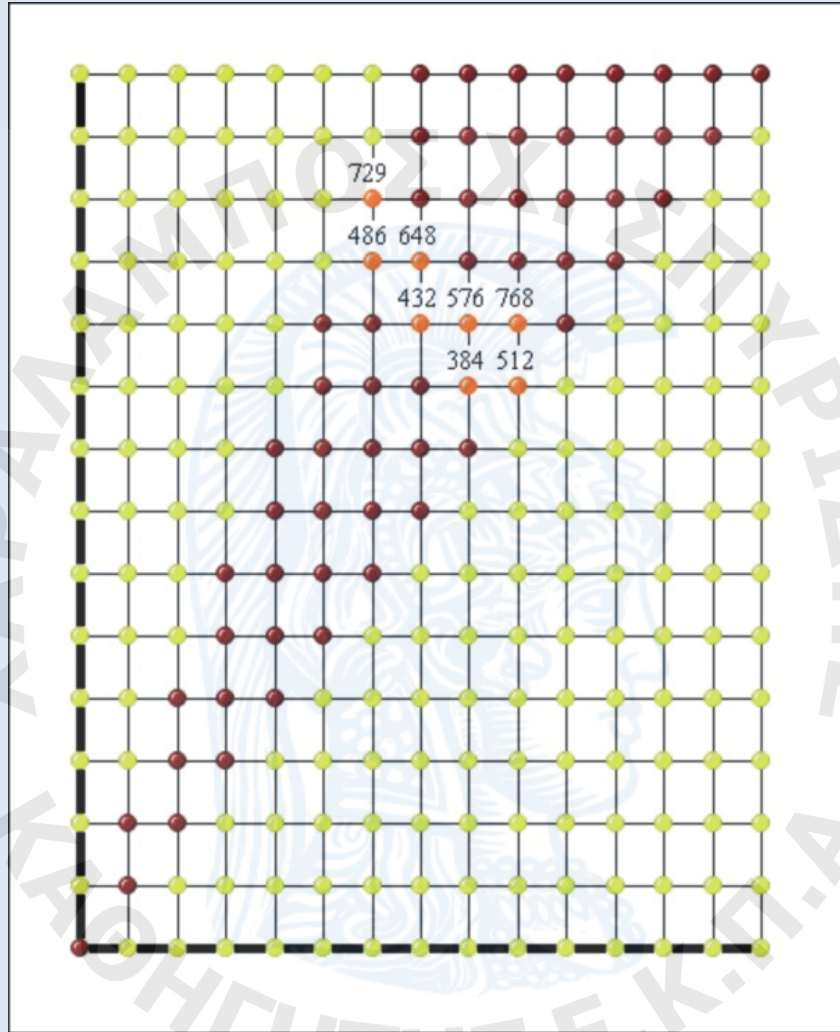
Πίναξ 6: Τα διαστήματα μεταξύ των όρων της Πυθαγορείου κλίμακος.

	9/8		9/8		9/8		
384	432	486	512	576	648	729	768
9/8		256/243		9/8		256/243	

Οι παραπάνω αριθμοί 384, 432, 486, 512, 576, 648, 729, 768 εκφράζουν τα μήκη των δονούμενων τμημάτων χορδής επί του αντιστρόφου ή Σπυριδείου δικτυωτού (Σχήμα 1), τα οποία υλοποιούν ηχητικά τους οκτώ φθόγγους<sup>10</sup> της Πυθαγορείου κλίμακος.

<sup>10</sup> Το οκτάχορδο σύστημα εδημιουργήθη κατά τον 6ο π.Χ. αιώνα από τον Πυθαγόρα με την παρεμβολή μιας διαζεύξεως ανάμεσα σε δύο συνημμένα (συνεχή) τετράχορδα. (Νικόμαχος, *Εγχειρίδιον*, 5): «ὅτι τῆ ἑπταχόρδῳ λύρα τὴν ὀγδόην ὁ Πυθαγόρας προσθεῖς τὴν διὰ πασῶν συνεστήσατο ἁρμονίας».

Σχήμα 1: Τα μήκη των δονούμενων τμημάτων χορδής επί του αντιστρόφου ή Σπυριδείου δικτυωτού, τα οποία υλοποιούν ηχητικά τους οκτώ φθόγγους της Πυθαγορείου κλίμακος.

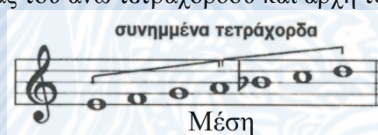


Με βάση τη θεωρία των χορδών, μικρό μήκος δονούμενου τμήματος χορδής παράγει ήχο μεγάλης συχνότητας και μεγάλο μήκος δονούμενου τμήματος χορδής παράγει ήχο μικρής συχνότητας. Άρα η εν λόγω σειρά των δονούμενων τμημάτων χορδής εκφράζει μια σειρά μουσικών υψών, μια κλίμακα,

κατά την κατιούσα διαδοχή. Αυτό είναι συμπέρασμα εξαιρετικής σπουδαιότητας. Άλλωστε οι αρχαίοι Έλληνες πάντοτε αντιμετώπιζαν τις κλίμακές τους κατά την κατιούσα διαδοχή και μπορούμε να επικαλεσθούμε τον Αριστοτέλη, ο οποίος στο έργο του «Προβλήματα, Όσα περί Αρμονίαν», ομιλών για τη μέση (=ο φθόγγος της συναφής δύο τετραχόρδων) καθορίζει σαφέστατα κατιούσα κίνηση κατά την αντιμετώπιση του επταχόρδου (Σχήμα 2):

διὸ καὶ μέσῃν αὐτὴν προσηγόρευσαν. ἢ ὅτι ἦν τοῦ μὲν ἄνω τετραχόρδου τελευταίη, τοῦ δὲ κάτω ἀρχή

Σχήμα 2: Στο επτάχορδο σύστημα η Μέση είναι το πέρας του άνω τετραχόρδου και αρχή του κάτω.



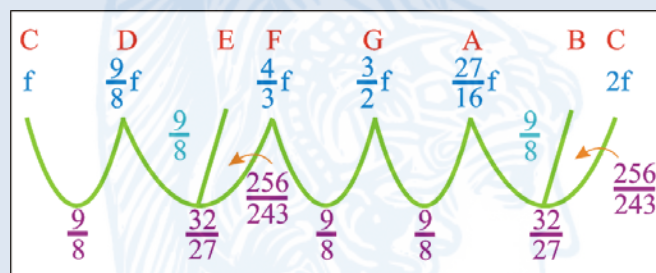
Με άλλα λόγια η δομή της Πυθαγορείου κλίμακος κατά την κατιούσα διαδοχή είναι δύο διεζευγμένα δώρια τετράχορδα δηλαδή  
τόνος, τόνος, λείμμα, διαζευτικός τόνος, τόνος, τόνος, λείμμα.

Εάν θελήσουμε να προσεγγίσουμε τη δομή της Πυθαγορείου κλίμακος με τη σύγχρονη ευρωπαϊκή σημειογραφία, θα είχαμε

E	D	C	B	A	G	F	e
$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	

Όσοι δεν έχουν μελετήσει αρχαίους Έλληνες αρμονικούς και, ως εκ τούτου, δεν γνωρίζουν την παραπάνω Αριστοτέλαιο λεπτομέρεια, αντιμετωπίζουν τη συγκεκριμένη σειρά των δονουμένων τμημάτων χορδής ωσάν να εκφράζει μια σειρά μουσικών υψών, μια κλίμακα, κατά την ανιούσα διαδοχή κι, εσφαλμένως, καταλήγουν ότι η Πυθαγόρειος κλίμαξ έχει τη δομή της C Major (Σχήμα 3). Αυτή δεν είναι η Πυθαγόρειος κλίμαξ με δώριο δομή τετραχόρδων, αλλά η Πυθαγόρειος κλίμαξ με λύδιο δομή τετραχόρδων, έχουσα παντελώς διαφορετικόν ήθος κατά τους αρχαίους.

Σχήμα 3: Εσφαλμένη αντιμετώπιση της Πυθαγόρειας μουσικής κλίμακος



Δυστυχώς η πολύ ουσιαστική αυτή λεπτομέρεια είχε διαφύγει της προσοχής των διαφόρων μεταρρυθμιστών της Ευρωπαϊκής μουσικής με συνέπεια να οδηγήσουν την ευρωπαϊκή μουσική πρακτική σε ατραπούς ασχέτους προς την Πυθαγόρειο κλίμακα. Με τούτο υπονοώ ότι εθεμελίωσαν την ευρωπαϊκή μουσική επί του μείζονος τρόπου εκλαμβάνοντάς τον με τη διαστηματική διαδοχή της αναστροφής πυθαγορείου κλίμακος (λύδιος δομή) κι οδηγήθηκαν στις γνωστές μας μείζονες κλίμακες είτε με υφέσεις (Πίναξ 7), είτε με διέσεις (Πίναξ 8). Εάν ενεργούσαν κατά τον σωστό τρόπο, η ευρωπαϊκή μουσική θα εθεμελιούτο και θ' ανεπτύσσετο επί τη βάσει των κλιμάκων που παρουσιάζονται στους Πίνακες 9 και 10 και τα ακούσματά μας θα ήσαν πα-



ντελώς διαφορετικά. Να σημειωθεί ότι στους τέσσερις αυτούς πίνακες το διάστημα του ημιτονίου συμβολίζεται με 1 και το διάστημα του τόνου, που ισούται με δύο συγκερασμένα ευρωπαϊκά ημιτόνια, συμβολίζεται με 2.

Πίναξ 7: Ο μείζων τρόπος με υφέσεις κατά διαδοχή

ανιούσα	κατιούσα
2	1
2	2
1	2
2	2
2	1
2	2
1	2

Τονική Νότα

C
F
B $\flat$
E $\flat$
A $\flat$
D $\flat$
G $\flat$
C $\flat$
F $\flat$
B $\flat\flat$
E $\flat\flat$
A $\flat\flat$

Οπλισμοί κλιμάκων

B $\flat$						
B $\flat$	E $\flat$					
B $\flat$	E $\flat$	A $\flat$				
B $\flat$	E $\flat$	A $\flat$	D $\flat$			
B $\flat$	E $\flat$	A $\flat$	D $\flat$	G $\flat$		
B $\flat$	E $\flat$	A $\flat$	D $\flat$	G $\flat$	C $\flat$	
B $\flat$	E $\flat$	A $\flat$	D $\flat$	G $\flat$	C $\flat$	F $\flat$
B $\flat\flat$	E $\flat$	A $\flat$	D $\flat$	G $\flat$	C $\flat$	F $\flat$
B $\flat\flat$	E $\flat\flat$	A $\flat$	D $\flat$	G $\flat$	C $\flat$	F $\flat$
B $\flat\flat$	E $\flat\flat$	A $\flat\flat$	D $\flat$	G $\flat$	C $\flat$	F $\flat$
B $\flat\flat$	E $\flat\flat$	A $\flat\flat$	D $\flat\flat$	G $\flat$	C $\flat$	F $\flat$

Πίναξ 8: Ο μείζων τρόπος με διέσεις κατά διαδοχή

ανιούσα	κατιούσα
2	1
2	2
1	2
2	2
2	1
2	2
1	2

Τονική Νότα

C
G
D
A
E
B
F#
C#
G#
D#
A#
E#

Οπλισμοί κλιμάκων

F#						
F#	C#					
F#	C#	G#				
F#	C#	G#	D#			
F#	C#	G#	D#	A#		
F#	C#	G#	D#	A#	E#	
F#	C#	G#	D#	A#	E#	B#
F×	C#	G#	D#	A#	E#	B#
F×	C×	G#	D#	A#	E#	B#
F×	C×	G×	D#	A#	E#	B#
F×	C×	G×	D×	A#	E#	B#

Πίναξ 9: Ο Πυθαγόρειος τρόπος με υφέσεις κατά διαδοχή

ανιούσα	κατιούσα
1	2
2	2
2	1
2	2
1	2
2	2
2	1

Τονική Νότα

E
A
D
G
C
F
B $\flat$
E $\flat$
A $\flat$
D $\flat$
G $\flat$
C $\flat$

Οπλισμοί κλιμάκων

B $\flat$						
B $\flat$	E $\flat$					
B $\flat$	E $\flat$	A $\flat$				
B $\flat$	E $\flat$	A $\flat$	D $\flat$			
B $\flat$	E $\flat$	A $\flat$	D $\flat$	G $\flat$		
B $\flat$	E $\flat$	A $\flat$	D $\flat$	G $\flat$	C $\flat$	
B $\flat$	E $\flat$	A $\flat$	D $\flat$	G $\flat$	C $\flat$	F $\flat$
B $\flat\flat$	E $\flat$	A $\flat$	D $\flat$	G $\flat$	C $\flat$	F $\flat$
B $\flat\flat$	E $\flat\flat$	A $\flat$	D $\flat$	G $\flat$	C $\flat$	F $\flat$
B $\flat\flat$	E $\flat\flat$	A $\flat\flat$	D $\flat$	G $\flat$	C $\flat$	F $\flat$
B $\flat\flat$	E $\flat\flat$	A $\flat\flat$	D $\flat\flat$	G $\flat$	C $\flat$	F $\flat$

Πίναξ 10: Ο Πυθαγόρειος τρόπος με διέσεις κατά διαδοχή

ανιούσα	κατιούσα
1	2
2	2
2	1
2	2
1	2
2	2
2	1

Τονική Νότα

E
B
F#
C#
G#
D#
A#
E#
B#
F×
C×
G×

Οπλισμοί κλιμάκων

F#						
F#	C#					
F#	C#	G#				
F#	C#	G#	D#			
F#	C#	G#	D#	A#		
F#	C#	G#	D#	A#	E#	
F#	C#	G#	D#	A#	E#	B#
F×	C#	G#	D#	A#	E#	B#
F×	C×	G#	D#	A#	E#	B#
F×	C×	G×	D#	A#	E#	B#
F×	C×	G×	D×	A#	E#	B#

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### Α΄ ΠΗΓΕΣ

- Αριστοτέλης Bekker, I., *Aristotelis opera omnia*, Berlin, 1831-1870, new edn., O. Gigon ed., 1960-
- Θέων Σμυρν. Θέωνος Σμυρναίου, *Περί Μουσικής (Τα κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν)*, B. G. Teubneri, Lipsiae, 1878, έκδ. Ism. Bullialdus, Παρίσι 1644 και ed. Hiller, Λιψία 1878, T.
- Mb Marc Meibom (Marcus Meibomius), *Antiquae Musicae Auctores Septem*, graece et latine, Amsterdam 1652.
- Νικόμ. Εγχ. Νικόμαχος Γερασηνός, *Αρμονικής Εγχειρίδιον*, έκδ. Meibom, 1652 και C. v. Jan 1895.
- Πλούτ. Περί Πλούταρχος, *Περί μουσικής μουσ.*
- Πρόκλου Πρόκλος, *Εις τον Τίμαιον*, E. Diehl (ed.), Leipzig, 1903 (tr. By J. Festugiere, 5 vols, Paris, 1966-68.
- Rein. La us. Theodore Reinach, *La musique grecque*, Πα-  
Gr. ρίσι 1926.

TLG                    *MUSAIOS* version 1.0d-32 By Darl J.  
Dumont and Randall M. Smith.

Β΄ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΑ

De Falco, V. (ed.), 1922, *Theologumena Arithmeticae*, Teubner, Lipsiae, μετάφραση στη νεοελληνική Ι. Ιωαννίδης, Α. Φωτόπουλος και Π. Γράβιγερ (επ.), Ιδεοθέατρον, Αθήνα, 1998.

Deubner, L. (ed.), 1937, *De vita Pythagorica liber*, ανατ. U. Klein, Teubner, Stuttgart, 1975.

Heath, T., 1949, *Mathematics in Aristotle*, Clarendon Press, Oxford.

Heath, T., 1981, *A History of Greek Mathematics* (Vol. I, II), Dover, N. York.

Hoche, Richard, ed. *Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Arithmeticae Libri II*, Leipzig, 1866.

Martin, T. H., 1841, *Μελέτες για τον Τίμαιο του Πλάτωνα*, Παρίσι.

Pistelli. H. (ed.), 1894, *In Nicomahi Arithmeticae introductionem*, ανατ. Teubner, Stuttgart, 1975.

Rivaud, A., 1925, *Πλάτων, Τίμαιος, Κριτίας*, Παρίσι.

Szabo, Arpad, 1973, *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών*,  
Εκδόσεις Τεχνικού Επιμελητηρίου Ελλάδος, Αθήνα.

Taylor, A. E., 1992, ΠΛΑΤΩΝ (Ο άνθρωπος και το έργο του), Μορφωτικό  
Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, Αθήνα.

Taylor, Thomas, 1994, *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων*, Μτφρ.  
Μαρία Οικονομοπούλου, Εκδόσεις ΙΑΜΒΛΙΧΟΣ, Αθήνα.

Winington, R., P., - Ingram, 1968, *Mode in ancient greek music*, A. M.  
Hakkert Pub., Amsterdam.

#### ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΑ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΑΡΧΑΙΩΝ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΝ, *Πλάτωνος Τίμαιος*, Εισαγωγή,  
μετάφραση, Σχόλια Θ. Βλυζιώτης, Χ. Παπαναστασίου, Εκδόσεις Ι. Ζαχα-  
ρόπουλος, Αθήνα.

Ιάμβλιχος, 1998, *Τα θεολογούμενα της Αριθμητικής*, Εκδ. Ιδεοθέατρον, Α-  
θήνα.

Ιάμβλιχος, 2001, *Περί του Πυθαγορικού Βίου*, Εισαγωγή-Μετάφραση-Σχό-  
λια Αλ. Α. Πέτρου, Πρόλογος Τ. Πεντζοπούλου-Βαλαλά, Εκδ. Ζήτρος,  
Θεσσαλονίκη.

Κάλφας, Βασίλης, 1997, *ΠΛΑΤΩΝ ΤΙΜΑΙΟΣ*, Εκδόσεις ΠΟΛΙΣ, Αθήνα.

Μιχαηλίδης, Σ., 1982, Εγκυκλοπαίδεια της Αρχαίας Ελληνικής Μουσικής,  
Μ.Ι.Ε.Τ., Αθήνα.

Μουσιάδης, Θ. Χρόνης και Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 1994, *ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΗΣ ΜΟΥΣΙΚΗΣ*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Παπαθανασίου, Μάρω, Η Πυθαγορική διάνοηση και τα Μαθηματικά, Ελληνική Φιλοσοφική Επιθεώρηση, τ. 3, τχ. 7, Ιαν. 1986.

Παπούλας, Β., Ι., 1907, Έκθεσις κατατομής του κανόνος, επί τε του αμεταβόλου τόνου και των καθ' ἕκαστον γενών, Φόρμιγξ Β', Β', Φ. 6, σ. 2-3. Αυτόθι, Φ. 7-8, σ. 6-7 (συνέχεια).

Αυτόθι, Φ. 9, σ. 2-3 (συνέχεια).

Αυτόθι, Φ. 19-20, σ. 4-5: Περί λόγου και αναλογίας, Περί πολλαπλασίων και επιμορίων λόγων, Περί επιμερών

Αυτόθι, Φ. 23-24, σ. 4-5: Περί πολλαπλασιεπιμορίων, Περί πολλαπλασιεπιμερών και αριθμού προς αριθμόν.

Σπανδάγου Ευαγ., 2001, Η Αριθμητική Εισαγωγή του Νικομάχου του Γερασηνού, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα.

Σπανδάγου Ευαγ., 2003, Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν του Θεώνος του Σμυρναίου, Εκδ. Αίθρα, Αθήνα.

Σπυρίδης, Χ. Χ., 1988, *Μια εισαγωγή στη Φυσική της Μουσικής*, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη.

Σπυρίδης, Χ. Χ., 1990, *Μουσική Ακουστική*, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη.

Σπυρίδης, Χ. Χ., 1998, *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ Κατατομή Κανόνος*, Εκδ. Γεωργιάδης, Αθήνα.



Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2004, *Ο δυϊσμός του μουσικού διαστήματος*, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2005, *Ευκλείδου: Κανόνος Κατατομή*, Εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2005, *Φυσική και Μουσική Ακουστική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη, σελ. 222.

Σπυρίδης, Χ. Χαράλαμπος, 2006, *Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη, σελ. 426.

