

Πλάτωνος Πολιτεία (ή περί δικαίου ή περί Πυθαγορείου Μουσικής)

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης

Καθηγητής Μουσικής Ακουστικής, Πληροφορικής
Διευθυντής Εργαστηρίου Μουσικής Ακουστικής Τεχνολογίας
Διευθυντής Τομέως Τεχνολογίας Ήχου, Μουσικοπαιδαγωγικής
& Βυζαντινής Μουσικολογίας
Τμήμα Μουσικών Σπουδών
Φιλοσοφική Σχολή
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
hspyridis@music.uoa.gr

Προλεγόμενα

Το ενδιαφέρον μου για τον Πλατωνισμό ήτο κατ' αρχάς το ενδιαφέρον του επιστήμονος που ασχολείται με τον Πυθαγορισμό, στοχεύοντας στην κατανόηση του τρόπου μελέτης υπό των πυθαγορείων των ακουστικών φαινομένων, τα οποία ακολουθούν νόμους αρμονικούς και φθάνουν επί σειράν αιώνων κατ' αυτόν ή εκείνον τον τρόπο στην ανθρωπίνη αίσθηση.

Τοιουτοτρόπως, ο άνθρωπος από της αρχαιότητας μέχρι την σημερινή εποχή δεν κάνει τίποτα άλλο από το να προσπαθεί να ανακαλύψει και διατυπώσει με την επιστημονική γνώση, την οποία εκάστοτε διαθέτει, την φύση και την μορφή αυτών των φαινομένων κατά την Πλατωνική φιλοσοφική και επιστημονική άποψη «σώζειν τα φαινόμενα».

Στην προσπάθειά μου αυτήν εντυπωσιάστηκα τα μάλα από τον μυστικισμό, ο οποίος διέκρινε την μετάδοση της επιστημονικής γνώσεως μεταξύ των μεμνημένων οπαδών του Πυθαγορισμού, αλλά συντόμως διεπίστωσα ότι ανέκαθεν οι κοσμοθεωρίες των κατ' έθνη ιερατείων εβασίζοντο στον συμβολισμό.

Οι Αιγύπτιοι ιερείς, οι διδάσκαλοι του Πυθαγόρου, δεν απεκαλύπταν τις αρχές της επιστήμης άνευ ενδελεχούς ελέγχου, παρά μόνον κατόπιν φοβερών δοκιμασιών και όρκων σε άτομα, τα οποία ήσαν άξια να τις κατέχουν. Έτσι εξηγείται η μακρά σιωπή, την οποίαν επέβαλε ο Πυθαγόρας εις τους μαθητές του (ακουσματικοί) και το πέπλον μυστηρίου, το οποίο υποχρεωτικώς εχρησιμοποιούν οι Πυθαγόρειοι κατά τις διδασκαλίες των.

Σχετικώς αναφέρεται και ο Ιάμβλιχος (Περί του Πυθαγορικού Βίου, 23, 103, 1 -105, 9)

«Αναγκαιότατος δὲ παρ' αὐτῷ τρόπος διδασκαλίας ὑπῆρχε καὶ ὁ διὰ τῶν συμβόλων. ὁ γὰρ χαρακτήρ οὗτος καὶ παρ' Ἑλλήσι μὲν σχεδὸν ἅπασιν ἄτε παλαιότροπος ὢν ἐσπουδάζετο.»

Επειδή, λοιπόν, δεν απεκαλύπτοντο οι αρχές οιασδήποτε επιστήμης εις τους κοινούς θνητούς παρὰ μόνον στους μεμνημένους, δια ταύτα και οι αρχές, στις οποίες εβασίζετο η μουσική επιστήμη, δηλαδή το μουσικό σύστημα των αρχαίων εθνών, παρέμειναν κρυφές και αοράτως συνδεδεμένες με σημεία, σύμβολα, αριθμούς και αστερισμούς, προκειμένου να προστατευθούν αλήθειες και ιδανικά, τα οποία, εν εναντία περιπτώσει, με το πέρασμα των χρόνων θα υφίσταντο διαστρέβλωση.

Να μην λησμονούμε εμείς οι σύγχρονοι ότι η μουσική δεν είναι απλώς και μόνον η τέχνη του συνδυασμού των φθόγγων ή το ταλέντο της αναπαραγωγής των με έναν ευχάριστο για τα αυτιά μας τρόπο. Η μουσική, από διανοητικής απόψεως, όπως την εννοούσαν οι Αρχαίοι, ήτο η γνώση της τάξεως όλων των πραγμάτων, η επιστήμη των αρμονικών σχέσεων του Σύμπαντος, την οποίαν εθεμελίωναν επάνω σε σταθερές και αναλλοίωτες αρχές, ρυθμιζόμενες μόνον από τις ανάλογες αρμονίες των αριθμών.

Η μουσική εθεωρείτο ένα μέσον (medium) ικανό να προβάλλει μια φιλοσοφική σύνθεση μόνον που ο μελετητής θα έπρεπε να ασχοληθεί με ένα απόθεμα αριθμολογίας και να συσχετίσει μια μυθολογία με μαθηματικές αλληγορίες.

Κατά τον Πλάτωνα, δύο εντελώς αντίθετες οντότητες είναι αδύνατον να συνδεθούν μεταξύ των χωρίς την παρεμβολή μιας τρίτης, τουλάχιστον, οντότητας. Αυτή η τρίτη οντότης είναι ο δεσμός, η μεσότης μεταξύ των δύο ακραίων οντοτήτων.

«τὰ δὲ στερεὰ μία μὲν οὐδέποτε, δύο δὲ αἰεὶ μεσότητες συναρμόττουσιν» (Πλάτωνος *Τίμαιος*).

Μεταξύ των αντιθέτων οντοτήτων «κατανοητό – ακατανόητο» ως δεσμός παρεμβάλλεται η πνευματική και ουράνια μουσική, η οποία είχε φθάσει στο υψηλότερο σημείον τελειότητας. Ήτο μια πνευματική γλώσσα, η οποία εφηρμόζετο σε μεταφυσικές έννοιες, αποκαλύπτοντας μέσα από αυτές τους αρμονικούς νόμους.

Οι «παλαιοὶ»¹ Ἕλληνες φιλόσοφοι, τραγικοί και ποιητές ἐδίδασκον κρυφίως «μύθῳ φιλοσοφοῦντες» κάποιες απόκρυφες διδασκαλίες, κεκαλυμμένες με αριστοτεχνικόν φιλοσοφικόν τρόπο.

«Οἱ γὰρ παλαιοὶ τὰ ποιήματα αὐτῶν πρῶτον ἐν προοιμίῳ καὶ αἰνίγμασιν γεγράφασιν. ὕστερον δὲ καὶ καθόλου φανερῶ ἐχρῶντο τῷ λόγῳ» (Σχόλια εἰς τον Προμηθεά Δεσμώτην του Αισχύλου, 610, 3).

Όπως έχει ήδη λεχθεί, η απόκρυφη γνώση δεν επιτρέπετο «ἐπὶ ποινῇ θανάτου» να κοινολογηθεί υπό των μεμνημένων εἰς τους κοινούς θνητούς, διότι «οὐ τὰ πάντα τοῖς πᾶσι ρητά».

Κατά τον Αριστοτέλη «ὁ μύθος σύγκειται ἐκ θαυμασίων».

Τα «θαυμάσια» αὐτὰ δύνανται ἀκόμη να ισοσταθμίσουν, σε κάποιον βαθμό, το ἀπίστευτον του μύθου.

Το επιφανειακό νόημα των αλληγορικών κειμένων, αὐτό το οποίο εμπεριέχουν οι γραμμές, οι «αράδες» των κειμένων, το κατανοούμε με την βοήθεια της Γραμματικής και του Συντακτικού (υποκείμενο – ρήμα - αντικείμενο). Η αλληγορία, δηλαδή το κωδικοποιημένο μήνυμα, το οποίον απευθύνεται προς τους μεμνημένους, ευρίσκεται «ἀνάμεσα» ή «πίσω» ἀπὸ τις γραμμές των κειμένων.

Για την εξόρυξη αὐτῆς της ἐκάστοτε αλληγορίας, πιστεύω ὅτι ἀπαιτεῖτο η γνώση των Πυθαγορείων Μαθηματικών, Αριθμητικής, Γεωμετρίας – Στερεομετρίας, Σφαιρικής (Αστρονομίας) και της Πυθαγορείου Αρμονικής (Μουσικής), της κορωνίδος της Πυθαγορείου Μαθηματικής Επιστήμης.

¹ οἱ παλαιοὶ πολλοῖς αἰνίγμασιν ἐχρῶντο καὶ μάλιστα πρὸς τοὺς ἱερεῖς.

Plutarchus, Αἴτια Ῥωμαϊκά και Ἑλληνικά, 281, Α10-B1.

Οἱ γὰρ παλαιοὶ τὰ ποιήματα αὐτῶν πρῶτον ἐν προοιμίῳ καὶ αἰνίγμασιν γεγράφασιν. ὕστερον δὲ καὶ καθόλου φανερῶ ἐχρῶντο τῷ λόγῳ.

Σχόλια εἰς τον Προμηθεά Δεσμώτην του Αισχύλου, 610, 3.

Όμως, η απόκρυφη γνώση, μολονότι δεν επιτρέπετο να κοινολογηθεί από τους κατέχοντας αυτήν εις τους κοινούς θνητούς, εντούτοις ενίοτε εκκοινολογείτο τεχνιέντως.

Ο Αισχύλος, ο τραγικός ποιητής, επολέμησε με μεγάλο θάρρος στην μάχη του Μαραθώνος, την ναυμαχία της Σαλαμίνας και πιθανόν στην μάχη των Πλαταιών. Στην μάχη του Μαραθώνος μάλιστα επληρώθη. Συμφώνως προς τον Κλήμεντα τον Αλεξανδρέα, ο Αισχύλος εκατηγορήθη ενώπιον του Αρείου Πάγου για ασέβεια καί εκινδύνευσε η ζωή του, διότι στις τραγωδίες του «Ευμενίδες» και «Προμηθεύς Δεσμώτης» απεκάλυπτε εμμέσως πλην σαφώς πληροφορίες των Ελευσινίων Μυστηρίων. Εσώθη μόνον και μόνον επειδή ετύγχανε Μαραθονομάχος και Σαλαμινομάχος. Αυτή η καταγεγραμμένη πληροφορία, καθιστά λογική και βάσιμη την υπόθεση ότι η επισταμένη μελέτη των τραγωδιών του πιθανότατα να δώσει σημαντικά στοιχεία για την αληθή φύση των εν λόγω μυστηρίων.

Ο Επίχαρμος, ο υιός του Ελοθαλούς, φέρεται ως ο κύριος κωμικός ποιητής μεταξύ των Δωριέων κατά την καταγωγήν, ως ο εφευρέτης της κωμωδίας, την οποίαν ο Αριστοτέλης περιγράφει με τις λέξεις «τὸ μύθους ποιεῖν» και ο Πλάτων παρατηρεῖ «οἱ ἄκροι τῆς ποιήσεως ἑκατέρας, κωμωδίας μὲν Ἐπίχαρμος, τραγωδίας δὲ Ὅμηρος». Κατά τους Διογένη Λαέρτιον, Πλούταρχον και Suida υπήρξε μαθητής του μεγάλου φιλοσόφου Πυθαγόρου. Ο Επίχαρμος κατεχώρισε σε ποιήματά του διδασκαλίες του Πυθαγόρου, τις οποίες μετέδιδε κρυφίως, κεκαλυμμένες με αστεϊσμούς (Ιάμβλιχος, Βί. Πυθ. 266).

Ο Ίππασος, ο Μεταποντίνος, υπήρξε από τους σημαντικότερους πρωίμους Πυθαγορείους. Συμφώνως προς τον Ιάμβλιχο (Βίος Πυθαγόρου 88, 246-247) επρόδωσε το απαράβατον πυθαγορικό δόγμα περί εχεμυθείας και απεκάλυψε την κατασκευήν του εγγεγραμμένου εις σφαίραν πενταγωνικού δωδεκαέδρου ή το μυστικό των ρητών και των αρρήτων αριθμών, με αποτέλεσμα να εκδιωχθεί από την πυθαγορική κοινότητα και να τον τιμωρήσει και ο θεός, πνίγοντάς τον στην θάλασσα.

Ο Πλάτων και εγνώριζε και κατείχε πυθαγόρειες απόκρυφες διδασκαλίες. Μερικές εξ αυτών των αποκρύφων διδασκαλιών τις κατεχώρισε σε διαλόγους του, διαλόγους μεταξύ συζητητών ήδη τεθνεώτων –δια παν ενδεχόμενον-, τις οποίες μετέδιδε κεκαλυμμένες με αριστοτεχνικό φιλοσοφικό τρόπο.

Μελετώντας την πορεία των μουσικών ιδεών από τον Πυθαγόρα στον Πλάτωνα, σύντομα αντελήφθηκα ότι ο πλατωνισμός αντιμετωπίζει τη μουσική με μια νέα οπτική. Μια οπτική, η οποία αναγνωρίζει τη μουσική ως μία δύναμη ικανή να προβάλλει μια φιλοσοφική σύνθεση μόνο που ο μελετητής θα πρέπει ν' ασχοληθεί με ένα απόθεμα αριθμολογίας και να συσχετίσει μια μυθολογία με μαθηματικές αλληγορίες.

Κατάλαβα ότι ο μελετητής θα πρέπει να χρησιμοποιήσει τον Πλάτωνα ως την πολύτιμη στήλη της Ροζέττης για να μπορέσει να εισχωρήσει στην περισσότερο δυσνόητη επιστήμη των πρωιμοτέρων πολιτισμών αφενός και αφετέρου να συσχετίσει την τότε με τη σημερινή επιστημονική ορολογία.

Με την *Πολιτεία*, το σημαντικότερο ίσως έργο της Πλατωνικής γραμματολογίας ξεκίνησα ν' ασχολούμαι από τοπικιστικά κίνητρα και μόνον και συνέχισα με την προτροπήν του γεγραυρού κοσμήτορος κ. Εμμανουήλ Μικρογιαννάκη.

Τυχάνω ως προς την καταγωγήν Θραξ εκ Θρακός πατρός και Θράσσης μητρός.

Ο εν λόγω Πλατωνικός διάλογος αναφέρεται στη συμμετοχή των πρωταγωνιστών στην εορτή των Βενδιδίων, προς τιμήν της Βενδίδος ή Βένιδος, μιας Θρακικής σεληνιακής θεότητας, η οποία εταυτίσθη προς την Εκάτη ή την Άρτεμι ή και την Περσεφόνη. Στη Θράκη τα Βενδίδεια ήσαν εορταί με οργιαστικόν χαρακτήρα και διεδόθησαν στο

Βυζάντιο, στις ελληνικές αποικίες επί της θρακικής χερσονήσου, στη Λήμνο, στην Αμφίπολη και δια των Θρακών εμπορών στον Πειραιά.

Πυθαγορεία αριθμολογία και δικαιο

Όπως έχω ήδη αναφέρει, οι αλληγορικές πλατωνικές περικοπές με μαθηματικές εκφράσεις, όπως η συγκεκριμένη, αντιμετωπίζονται σήμερα με μια νέα οπτική, η οποία αναγνωρίζει τη μουσική ως μία δύναμη ικανή να προβάλλει μια φιλοσοφική σύνθεση. Η οπτική αυτή δεν πρόκειται να κερδίσει την άμεση αποδοχή και υποστήριξη των θεολόγων, των φιλοσόφων, των φιλόλογων, των μαθηματικών και των άλλων επιστημόνων, οι οποίοι έχουν καταστεί εξαιρετικά ειδικοί εις το να βλέπουν το σύνολο παρά τη λεπτομέρεια. Επίσης δεν θα κερδίσει ούτε τους μουσικούς, οι οποίοι θεωρούν τη μουσική σαν έναν κλάδο διασκέδασως, ούτε και τους μουσικολόγους, οι οποίοι εξ ενστίκτου φοβούνται τους αριθμούς.

Διαβάζοντας πλατωνικά χωρία που περιλαμβάνουν είτε αριθμούς, είτε μαθηματικούς όρους, οι μεν φιλόλογοι αποφεύγουν την εμβάθυνση σ' αυτά «απλουστεύοντας το κείμενο», οι δε μαθηματικοί τα αντιμετωπίζουν επιδερμικώς θεωρώντας τα ως διατυπώσεις «ποιητική άδεια».

Με την έννοια δίκαιο οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν την παροχή αμοιβαίων υπηρεσιών, δηλαδή την κατ' αμοιβαιότητα δικαιοσύνη, η οποία ασκείται εκουσίως από όλα τα μέλη της κοινωνίας και κατ' αυτόν τον τρόπο συνέχεται η πολιτική Κοινωνία.

Το πολίτευμα των Πυθαγορείων προέβλεπε την ύπαρξη ισορροπίας μεταξύ των διακριτών εξουσιών του κράτους. Όπως μας αναφέρουν οι Πολύβιος, Κικέρων και Πλούταρχος, το διακριτό είχε την αρχή του στη Λυκούργειο νομοθεσία και στο Σπαρτιατικό πολίτευμα.

Για τους Πυθαγορείους η έννοια της δικαιοσύνης καθορίζεται ως η δύναμη της διανομής του ίσου, που ανήκει στον καθένα. Αυτό είναι το λεγόμενο «αναλογούν δίκαιον». Το «αναλογούν δίκαιον» για τους φυσικούς αριθμούς της δεκάδος είναι ο μέσος όρος αυτών, δηλαδή

$$\frac{\sum_{i=1}^9 x_i}{i} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

Για τους Πυθαγορείους το θεμέλιο και η φύση της δικαιοσύνης εμφανίζονται σε όλα τα τετράγωνα των αριθμών (αριθμοί ισάκις ίσοι), διότι είναι το γινόμενο δύο ίσων αριθμών, αλλά ιδιαιτέρως η φύση της δικαιοσύνης αποκαλύπτεται στα τετράγωνα των περιττών αριθμών, επειδή έχουν ένα μέσον.

$$3^2 = 9 = 4 + 1 + 4$$

$$5^2 = 25 = 12 + 1 + 12$$

$$7^2 = 49 = 24 + 1 + 24$$

.....

.....

$$27^2 = 729 = 364 + 1 + 364$$

Ο Αρχύτας, ο Πυθαγόρειος, (Μαθηματικός, Μηχανικός, Στρατηγός και Πολιτικός ηγέτης του Τάραντος) μας αναφέρει ότι το Σύνταγμα ενός Κράτους μπορεί να καθορισθεί κατά τρεις διαφορετικούς τύπους του πολιτικού δικαίου.

Ο κάθε τύπος περιγράφεται από συγκεκριμένη μαθηματική αναλογία τέτοιας, ώστε μεταξύ των αριθμών της να αναφέρονται ωρισμένες σχέσεις βάσει των οποίων το Σύνταγμα κατανέμει εξουσίες και δικαιώματα στις πολιτικές υπηρεσίες και ανάμεσα στις τάξεις των πολιτών.

Έτσι, λοιπόν, το Ολιγαρχικό Δίκαιο και το Τυραννικό Δίκαιο θεμελιούνται επάνω στην αριθμητική αναλογία (1, 2, 3), η οποία εγκαθιστά μια μεγάλη ανισότητα μεταξύ του λόγου των μικρών σε σχέση με το λόγο των μεγάλων όρων της $\left(\frac{2}{1} > \frac{3}{2}\right)$, αφού ο διπλάσιος λόγος είναι μεγαλύτερος του ημιολίου.

Στο Ολιγαρχικό Δίκαιο οι λίγοι και στο Τυραννικό Δίκαιο ο ένας κυβερνούν την πολιτεία, επιδιώκοντας το δικό τους καλό και όχι αυτό της πολιτείας.

Ονομασία αναλογίας	Μαθηματικός Ορισμός	Παράδειγμα αριθμητικό
Αριθμητική	Εάν $\alpha > \beta > \gamma$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, τότε ισχύει: $\alpha - \beta = \beta - \gamma$	3, 2, 1 $\left(\frac{2}{1} > \frac{3}{2}\right)$

Το Δημοκρατικό Δίκαιο θεμελιούται επάνω στην γεωμετρική αναλογία (1, 2, 4), η οποία εγκαθιστά ισότητα σχέσεων μεταξύ των λόγων των μεγάλων και των μικρών όρων της $\left(\frac{2}{1} = \frac{4}{2}\right)$ (αναλογία κατά ποιότητα).

Στο Δημοκρατικό Δίκαιο τόσο ο φτωχός, όσο και ο πλούσιος συμμετέχουν ισότιμα στη διακυβέρνηση της Πολιτείας.

Ονομασία αναλογίας	Μαθηματικός Ορισμός	Παράδειγμα αριθμητικό
Γεωμετρική	Εάν $\alpha > \beta > \gamma$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$, τότε ισχύει: $\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$	4, 2, 1 $\left(\frac{2}{1} = \frac{4}{2}\right)$

Η αναλογία, την οποία ο Αρχύτας ονομάζει Αρμονική (3, 4, 6), χρησιμεύει ως το υπόδειγμα για το Αριστοκρατικό και το Βασιλικό Δίκαιο και τούτο διότι αυτή εγκαθιστά μια μικρή ανισότητα μεταξύ των λόγων των μικρών σε σχέση με το λόγο των μεγάλων όρων της, αφού ο επίτριτος λόγος είναι μικρότερος του ημιολίου. Για το λόγο αυτό η αρμονική πρόοδος ονομάζεται *υπεναντία* της αριθμητικής προόδου.

Το δίκαιο της αριστοκρατίας αναγνωρίζει στους άξιους πολίτες περισσότερα δικαιώματα απ' ό,τι αναγνωρίζει το δίκαιο της ολιγαρχίας. Το δίκαιο της δημοκρατίας, όπως προανφέρθη, δεν κάμνει καμμία διάκριση ανάμεσα στους πολίτες.

Κατά τον Στοβαίο (Στοβαίος IV.1. 131) το αριστοκρατικό δίκαιο είναι από ιδεολογικής απόψεως το καλύτερο, διότι μιμείται το δίκαιο της φύσεως, το οποίο κατ' αναλογία παρέχει στον καθέναν ό,τι του αξίζει.

Ονομασία αναλογίας	Μαθηματικός Ορισμός	Παράδειγμα αριθμητικό
Αρμονική ή Υπενάντιος	Εάν $\alpha > \beta > \gamma$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N},$ τότε ισχύει: $\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$ ή $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\beta}$	6, 4, 3 $\left(\frac{4}{3} < \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \right)$

Περί της Τετρακτύος

Ο Λουκιανός εις το έργον του Πράσις Βίων (βλέπε κατωτέρω) αναφέρει ότι η τετρακτύς, ήτοι η τετράς των πρώτων τεσσάρων ακεραίων αριθμών 1, 2, 3, 4, γεωμετρικώς εκφράζεται δια του «τελείου τριγώνου» -του ισοσκελούς-, διότι αριθμητικώς εκφράζεται δια του «τριγωνικού» αριθμού $10=1+2+3+4$ (4 κατά δύναμιν, ήτοι οι τέσσερις πρώτοι φυσικοί αριθμοί και 10 κατ' αριθμόν, ήτοι το άθροισμα των μονάδων αυτών των πρώτων τεσσάρων φυσικών αριθμών, όπως αναφέρει στην Μαθηματική του Εισαγωγή ο Νικόμαχος ο Γερασηνός). Η τετρακτύς εμπεριέχει όλες τις μουσικές συμφωνίες. Πράγματι, 4:1 είναι ο τετραπλάσιος λόγος και εκφράζει τη συμφωνία (το εύφωνο μουσικό διάστημα) της δις διαπασών, 3:2 είναι ο ημιόλιος λόγος και εκφράζει τη διαπέντε συμφωνία ή διοξεία, ο 4:3 είναι ο επίτριτος λόγος και εκφράζει τη διατεσσάρων συμφωνία ή συλλαβά, 2:1 είναι ο διπλάσιος λόγος και εκφράζει τη διαπασών συμφωνία.



Σχήμα 1: Η τριγωνική δομή των δέκα κουκίδων της ιεράς τετρακτύος.

Υπό την έννοια «τετρακτύς» οι αρχαιοέλληνες σοφοί εθεώρουν αφενός τα τέσσερα στοιχεία, τα τέσσερα μέρη του κόσμου, τα τέσσερα πνεύματα, τους τέσσερις χυμούς, τις τέσσερις εποχές του έτους, αφετέρου τα τέσσερα μέρη της Ψυχής, ήτοι τον Νουν, την Επιστήμην, την Δόξαν και την Αίσθησιν.

Οι σύγχρονοί μας σοφοί υπό την έννοια «τετρακτύς» θεωρούν τις τέσσερις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των στοιχειωδών ή θεμελιωδών σωματιδίων της ύλης, ήτοι των φερμιονίων - τα έξι κουάρκ και τα έξι λεπτόνια-, των οποίων η ύπαρξη έχει πειραματικώς επιβεβαιωθεί άμεσα ή έμμεσα. Την σύγχρονον τετρακτύν αποτελούν οι ηλεκτρομαγνητική, η ισχυρή πυρηνική, η ασθενής πυρηνική και η βαρυτική αλληλεπιδράσεις.

Η τετρακτύς κατά τον Πλούταρχον είναι ο αριθμός 36, το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων αρτίων και των τεσσάρων πρώτων περιττών αριθμών της δεκάδος (2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7).

ή δέ καλουμένη τετρακτύς, τὰ ἑξ καὶ τριάκοντα, μέγιστος ἦν ὄρκος, ὡς τεθρύληται, καὶ κόσμος ὠνόμασται, τεσσάρων μὲν ἀρτίων τῶν πρώτων, τεσσάρων δὲ τῶν περισσῶν εἰς ταὐτὸ συντιθεμένων ἀποτελούμενος.

Πλούταρχος, *Stephanus, Περί Ισίδος και Οσίριδος*, 381F, 6 – 382A, 4.

Τέλος, υπάρχει και η τετρακτύς του Πλάτωνος, την οποία απαρτίζουν οι αριθμοί 1, 2, 3, 4, 9, 8, 27 και, όπως παρατήρησαν αρχαίοι σχολιαστές με πρώτον τον Κράντορα, δομείται από την συνένωση της γεωμετρικής σειράς 1, 2, 4, 8 με πρώτον όρον την μονάδα και γενήτορα το 2 και της γεωμετρικής σειράς 1, 3, 9, 27 με πρώτον όρον την μονάδα και γενήτορα το 3.

Η τετρακτύς 1, 2, 3, 4, 9, 8, 27 χρησιμοποιείται υπό του Πλάτωνος ως πολύμορφο μαθηματικό εργαλείο για την επίλυση φιλοσοφικών – μαθηματικών - μουσικών προβλημάτων.

Συγκεκριμένως, ο Πλάτων χρησιμοποιών και τους επτά όρους αυτής της τετρακτύος, δημιουργεί την Ψυχήν του Κόσμου² εις τον διάλογόν του *Τίμαιος* (35a1-36b6) καταλή-

² Βλέπε Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, *Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρειο Μουσική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη, 2006 και

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, *Πλάτωνος Τίμαιος: Γένεσις Ψυχής Κόσμου (γραμμικές και λαβδοειδείς λύσεις)*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη, 2008.

γων εις μίαν αλληλουχίαν μουσικών φθόγγων συχνοτικού εύρους τεσσάρων διαπα-
σών, ενός δια πέντε και ενός επογδού τόνου.

Το ίδιο μαθηματικό εργαλείο, την τετρακύν του, υπό άλλην μορφήν και ολιγοτέρους
και συγκεκριμένους όρους, χρησιμοποιεί ο Πλάτων στο Η' Βιβλίον της Πολιτείας προ-
κειμένου να παραγάγει την συνάρτηση του ειδώλου ηδονής, το οποίον συγκατοικεί με
έκαστον πολιτικόν άνδρα.

Συγκεκριμένως, ο Πλάτων μετασχηματίζει την τετρακύν του προσδίδων εις αυτήν την
μορφήν $(1 \cdot x)^1$, $(2 \cdot x)$, $(3 \cdot x)$, $(2 \cdot x)^2$, $(9 \cdot x)$, $(8 \cdot x)$, $(3 \cdot x)^3$ και εκφράζει τα σχετικά εί-
δωλα ηδονής, τα συγκατοικούντα με έκαστον πολιτικόν άνδρα με τους όρους
 $(1 \cdot x)^1$, $(2 \cdot x)^2$, $(3 \cdot x)^3$.

Δια των όρων αυτών, όπως θα εκτεθεί κατωτέρω, καταλήγει προσδίδων εις τους πολι-
τικούς άνδρες «Βασιλικός», «Αριστοκρατικός», «Ολιγαρχικός», «Δημοκρατικός», «Τύ-
ραννος» ως απόλυτα είδωλα ηδονής τις τιμές 1, 2, 3, 36 και 729, αντιστοίχως.

Πλατωνική Πολιτειολογία

Στην Πλατωνική γραμματολογία η Πολιτεία θεωρείται το σημαντικότερο ίσως έργο. Σ'
αυτό λέγεται ότι ο Πλάτων προσπαθεί να μας δώσει την εικόνα του τελείου πολιτεύμα-
τος.

Στην ιδανική Πολιτεία του Πλάτωνος ο κάθε πολίτης, αναλόγως των φυσικών του
προδιαθέσεων και ικανοτήτων, αναλαμβάνει έναν συγκεκριμένο και αυστηρά καθορι-
σμένο ρόλο, ο οποίος συνεπάγεται και έναν αντίστοιχο τρόπο ζωής.

Τα δικαιώματα και οι υποχρεώσεις του κάθε πολίτη, αναλόγως της τάξεώς του, οριοθε-
τούνται βάσει δύο γνωμόνων: την ευνομία και την ενότητα της Πολιτείας.

Άρα το κύριο μέλημα είναι να καθορισθεί η μορφή της πολιτειακής οργανώσεως που
θα εξασφαλίζει σε μια πόλη αυτές τις δύο αρχές.

Ο Πλάτων στην Πολιτεία του δίδει το ακόλουθο πενταμερές πολιτειακό σχήμα:

1. **Πλατωνική πολιτεία, αριστοκρατία** (κυβερνούν περισσότερα του ενός
πρόσωπα, που ανήκουν στην τάξη των αρίστων).
2. **Κρητικολακωνική, τιμοκρατία ή φιλαρχία** (Η λέξη τιμή σημαίνει δόξα,
διάκριση, αξίωμα).
3. **Ολιγαρχία** (κυβερνούν οι πλούσιοι, ενώ οι φτωχοί δεν έχουν μερίδιο στην
εξουσία).
4. **Δημοκρατία** (το ανώτατο όργανο είναι το σύνολο των πολιτών).
5. **Τυραννίδα**, το «έσχατον νόσημα της πόλεως».

Στην παρούσα εισήγηση με ενδιαφέρει η πυθαγόρειος συμπεριφορά του Πλάτωνος.
Συγκεκριμένα, ασπαζόμενος ο Πλάτων την πυθαγόρειον ρήση «τα πάντα κατ' αριθμόν
γίνονται», συμπεριφέρεται ως πυθαγόρειος (Οί Πυθαγόρειοι, οίς πολλαχῇ ἔπεται
Πλάτων, Θέων Σμυρναίος, *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων*, 12, 10), χρησιμοποιεί
αριθμούς, προκειμένου να αισθητοποιήσει τα λεγόμενά του και δηλώνει ότι ο τύραννος
είναι 729 φορές χειρότερος από τον βασιλέα (Stephanus 587 b11 - 588 a2).

Η συγκεκριμένη περικοπή περιλαμβάνει έναν διάλογο μεταξύ του Σωκράτους και του
φίλου του Γλαύκωνος, αδελφού του Πλάτωνος, και έχει εις νεοελληνικήν απόδοση κα-
τά τους Α. Παπαθεοδώρου και Φ. Παππά (ΠΑΠΥΡΟΣ. 1939) ως ακολούθως:

- Ξέρεις, λοιπόν, είπα, πόσο αηδέστερα ζη ο τύραννος από το βασιλιά;
- Αν μου το ειπής, απήντησε, θα το μάθω.
- Υπάρχουν, καθώς φαίνεται, τρεις ηδονές, η μία γνήσια και οι άλλες δύο νόθες. Ο τύραννος ξεπερνώντας και το τελευταίο ακόμα σύνορο των νόθων ηδονών, και ξεφεύγοντας πολύ μακριά από το νόμο και τον ορθό λόγο, ζη πάντοτε με κάτι δουλικές ηδονές, που τις χρησιμοποιεί σαν δορυφόρους, και δεν είναι καθόλου εύκολο να ορίση κανείς πόσο είναι κατώτερος από το βασιλιά, παρά μόνο, ίσως, κατά τον ακόλουθο τρόπο.
- Πώς; είπε.
- Ας πάρουμε τον ολιγαρχικό σαν αφετηρία, ο τύραννος νομίζω πως είναι τρίτος στη σειρά, γιατί ανάμεσά τους στέκει ο δημοκρατικός.
- Ναι.
- Αν λοιπόν αυτά που είπαμε είναι αληθινά, το είδωλο της ηδονής, που συγκατοικεί με τον τύραννο, δεν θάναι κατά τρεις φορές μακρύτερα από την αλήθεια, από όσο είναι το είδωλο που συγκατοικεί με τον ολιγαρχικό;
- Έτσι είναι.
- Ο ολιγαρχικός πάλι είναι τρίτος στη σειρά μετά το βασιλικό, αν ταυτίσουμε τον αριστοκρατικό και το βασιλικό.
- Ασφαλώς τρίτος.
- Όστε ο τύραννος, είπα εγώ, απέχει από την αληθινή ηδονή, για να εκφρασθώ με αριθμό, το τριπλάσιο του τριπλασίου.
- Φαίνεται.
- Καθώς φαίνεται λοιπόν, είπα, θα μπορούσε το είδωλο της ηδονής του τυράννου, ως προς το μήκος, ίσως να παρασταθί με ένα επίπεδο αριθμό.
- Βεβαιότατα.
- Αν τον αριθμό αυτό τον υψώσουμε στο τετράγωνο και κατόπιν στον κύβο, θα δείξη καθαρά την απόσταση που χωρίζει τον τύραννο από το βασιλιά.
- Αυτό είναι φανερό, είπε, σε ένα άνθρωπο που ξαίρει λογιστικά.
- Εάν λοιπόν κανείς αναστρέφοντας την αναλογία θελήση να δείξη πόσο αληθινότερη είναι η ηδονή του βασιλιά από την ηδονή του τυράννου, θα βρη άμα κάμη όλους τους πολλαπλασιασμούς, ότι αυτός ζη επτακόσιες είκοσι εννέα φορές ευχαριστότερα, ενώ ο τύραννος ζη δυστυχέστερα άλλες τόσες.
- Τι καταπληκτικό αριθμό, εφώναξε, μας έρριξες κατακέφαλα, για να μας δείξης τη διαφορά των δύο ανθρωπίνων τύπων, του δικαίου και του αδίκου, ως προς την ηδονή και τη λύπη.

Η Μουσικολογική αλληγορία της περικοπής

Λόγω των υπάρχοντων χρονικών περιορισμών θα αναφερθώ εις τα κυριότερα σημεία του διαλόγου εξ επόψεως αλληγορίας.

1. «Ο τύραννος ξεπερνώντας και το τελευταίο ακόμα σύνορο των νόθων ηδονών, και ξεφεύγοντας πολύ μακριά από το νόμο και τον ορθό λόγο, ζη πάντοτε με κάτι δουλικές ηδονές, που τις χρησιμοποιεί σαν δορυφόρους, και δεν είναι καθόλου εύκολο να ορίση κανείς πόσο είναι κατώτερος από το βασιλιά, παρά μόνο, ίσως, κατά τον ακόλουθο τρόπο. Πώς; είπε».

Η ηδονή που δοκιμάζει ο βασιλικός άνδρας είναι η μόνη γνήσια. Οι ηδονές που δοκιμάζουν ο τιμοκρατικός και ο ολιγαρχικός είναι οι δύο νόθες. Η ηδονή που απολαμβάνει ο τύραννος είναι πιο νόθα και απ' αυτήν του ολιγαρχικού. Η υπέρτατη ηδονή για έναν φιλόσοφο είναι το Αγαθό, που είναι Ιδέα και μάλιστα η Υψίστη Ιδέα. Το Αγαθό ταυτίζεται με τη γνώση.

Όλη η δομή της Πολιτείας του Σωκράτους, όπως περιγράφεται στο διάλογο, προσομοιάζει με το Αριστοκρατικό πολίτευμα.

Όλες οι ποιοτικές εκφράσεις, που εμφανίζονται στο συγκεκριμένο απόσπασμα, με κάποιον αλγόριθμο, τον οποίον ο Πλάτων θα εκθέσει με τον τρόπο του παρακάτω και ο οποίος αναμένεται εναγωνίως, θα ποσοτικοποιηθούν.

2. «Ας πάρουμε τον ολιγαρχικό σαν αφετηρία, ο τύραννος νομίζω πως είναι τρίτος στη σειρά, γιατί ανάμεσά τους στέκει ο δημοκρατικός».

«Αν λοιπόν αυτά που είπαμε είναι αληθινά, το είδωλο της ηδονής, που συγκατοικεί με τον τύραννο, δεν θάναι κατά τρεις φορές μακρύτερα από την αλήθεια, από όσο είναι το είδωλο που συγκατοικεί με τον ολιγαρχικό;»

Επειδή όλοι θεωρούν ότι με αλχημείες ο Πλάτων παρήγαγε τον αριθμό 729, θεωρώ ότι πρέπει να ευρεθεί ο αναλυτικός αλγόριθμος, που χρησιμοποιεί.

Η τριάδα των ανθρώπων των πολιτευμάτων με αναφορά στον ολιγαρχικό είναι:

1	Ολιγαρχικός
2	Δημοκρατικός
3	Τύραννος

Θεωρώ προς στιγμήν ότι η απόσταση του ολιγαρχικού από μια απόλυτη αφετηρία είναι x .

Τότε, των επομένων δύο οι αποστάσεις από αυτήν την απόλυτη αφετηρία θα είναι $2x$ και $3x$, αντιστοίχως.

Για να προχωρήσει σωστά το μοντέλο, θα πρέπει η έννοια «είδωλο ηδονής» να εκφράζεται μαθηματικά με δύναμη η οποία έχει ως βάση την απόσταση του τύπου πολιτικού ανθρώπου από την απόλυτη αφετηρία και εκθέτη την τάξη του τύπου πολιτικού ανθρώπου.

Με μουσικούς όρους αυτό σημαίνει ότι η απόσταση από μια απόλυτη αφετηρία για τον Πλάτωνα εκφράζει ένα πυθαγόρειο μουσικό διάστημα και το σχετικό είδωλο ηδονής εκφράζει το πυθαγόρειο γινόμενο ενός ακεραίου αριθμού, που ταυτίζεται με την τάξη του τύπου πολιτικού ανθρώπου, επί ένα μουσικό διάστημα, που εκφράζει την απόσταση του τύπου πολιτικού ανθρώπου από μια απόλυτη αφετηρία. (Ιδιότητα εκ της Αλγέβρας των Πυθαγορείων διαστημάτων).

Τύπος ανθρώπου	Απόσταση από μια απόλυτη αφετηρία	Σχετικό είδωλο ηδονής
Ολιγαρχικός	$Y_1 = X$	$Y_1^1 = (X)^1$
Δημοκρατικός	$Y_2 = 2X$	$Y_2^2 = (2X)^2$
Τύραννος	$Y_3 = 3X$	$Y_3^3 = (3X)^3$

3. «Ο ολιγαρχικός πάλι είναι τρίτος στη σειρά μετά το βασιλικό, αν ταυτίσουμε τον αριστοκρατικό και το βασιλικό».

Με τη νέα τριάδα πολιτικών τύπων ανθρώπου προσδιορίζει την απόσταση του τύπου πολιτικού ανθρώπου από την απόλυτη αφετηρία, που δεν είναι άλλη από τον βασιλικό, τον οποίο στη συνέχεια τον ταυτίζει με τον αριστοκρατικό.

Τοποθετεί, λοιπόν, για την απόλυτη αφετηρία τον μικρότερο φυσικό αριθμό, το ένα (1), οπότε αβίαστα προκύπτουν τα ακόλουθα:

Τύπος ανθρώπου	Απόσταση
Βασιλικός	$Y_1 = X = 1$
Αριστοκρατικός	$Y_2 = 2X = 2$
Ολιγαρχικός	$Y_3 = 3X = 3$

Τύπος ανθρώπου	Απόσταση	Σχετικό είδωλο ηδονής	Απόλυτο είδωλο ηδονής
Ολιγαρχικός	$Z_1 = Y_3$	$Z_1^1 = (Y_3)^1$	$3^1 = 3$
Δημοκρατικός	$Z_2 = 2Y_3$	$Z_2^2 = (2Y_3)^2$	$(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$
Τύραννος	$Z_3 = 3Y_3$	$Z_3^3 = (3Y_3)^3$	$(3 \cdot 3)^3 = (3^2)^3 = 3^6 = 729$

Με τον όρο απόλυτο είδωλο ηδονής ορίζει επακριβώς το μήκος του ταλαντουμένου τμήματος χορδής δια του οποίου παράγεται εκάστη νότα της Ψυχής Κόσμου επί του μονοχόρδου.

4. «Ασφαλώς τρίτος.

Ωστε ο τύραννος, είπα εγώ, απέχει από την αληθινή ηδονή, για να εκφρασθώ με αριθμό, το τριπλάσιο του τριπλασίου.

Φαίνεται.

Καθώς φαίνεται λοιπόν, είπα, θα μπορούσε το είδωλο της ηδονής του τυράννου, ως προς το μήκος, ίσως να παρασταθῇ με ένα επίπεδο αριθμό.

Βεβαιότατα.

Αν τον αριθμό αυτό τον υψώσουμε στο τετράγωνο και κατόπιν στον κύβο, θα δείξη καθαρά την απόσταση που χωρίζει τον τύραννο από το βασιλιά.

Αυτό είναι φανερό, είπε, σε ένα άνθρωπο που ξαίρει λογιστικά.

Εάν λοιπόν κανείς αναστρέφοντας την αναλογία θελήση να δείξη πόσο αληθινώτερη είναι η ηδονή του βασιλιά από την ηδονή του τυράννου, θα βρη άμα κάμη όλους τους πολλαπλασιασμούς, ότι αυτός ζη επτακόσιες είκοσι εννέα φορές ευχαριστότερα, ενώ ο τύραννος ζη δυστυχέστερα άλλες τόσες.

Τι καταπληκτικό αριθμό, εφώναξε, μας έρριξες κατακέφαλα, για να μας δείξης τη διαφορά των δύο ανθρωπίνων τύπων, του δικαίου και του αδίκου, ως προς την ηδονή και τη λύπη».

Αναφορικός με τον αριθμό 729, τον οποίον επέλεξε και αναφέρει ο Πλάτων. Αυτός ο αριθμός από τη σκοπιά της μουσικής ως προς ένα μοναδιαίο μήκος ταλαντουμένης χορδής αντιστοιχεί στο μουσικό διάστημα:

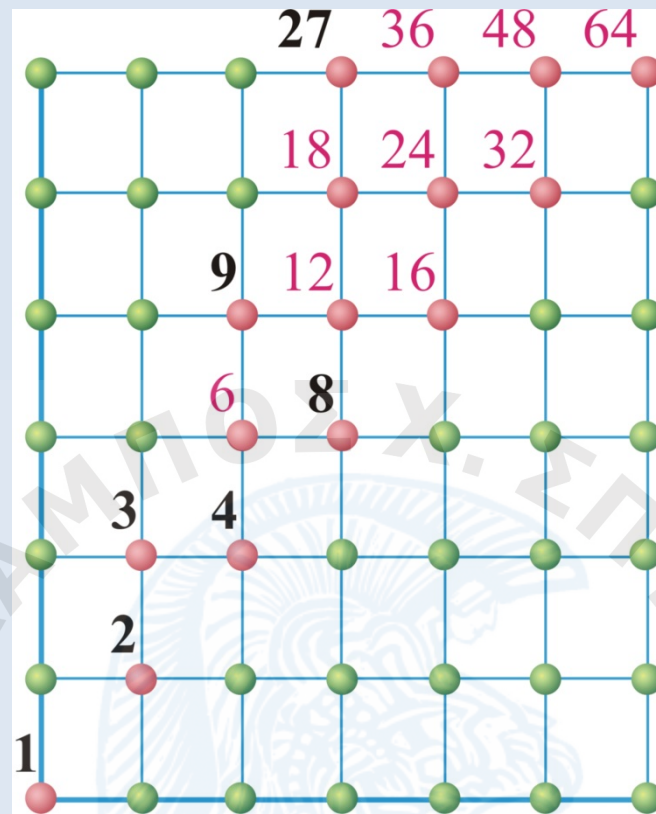
$$729 = 9^3 = \frac{9^3}{8^3} \cdot 8^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot (2^3)^3 = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^9$$

το οποίο είναι ένα πυθαγόρειο τρίτονο συν εννέα διαπασών.

Το πυθαγόρειο τρίτονο ήτο το πλέον διάφωνο μουσικό διάστημα του μουσικού συστήματος, το οποίο εγνώριζε ο Πλάτων. Εξακολουθεί και σήμερα να φέρει τον ίδιο οικτρώς διάφωνο χαρακτήρα (*diabolo in musica*) στο δυτικό τονικό σύστημα 2.500 χρόνια μετά απ' αυτόν.

Αυτό το οποίο ο Πλάτων εξετίμησε με τον αριθμό 729 ήτο η σχέση μεταξύ του βασιλέως και του τυράννου και τη σχέση αυτή τη θεωρεί ως τη μεγίστη δυνατή ένταση μέσα σε ένα πολιτισμένο σύστημα.

Όπως έχω ήδη αναφέρει, μπορούμε να συμμερισθούμε την αμηχανία, την οποία αισθάνεται κάποιος μη μουσικός αντικρύζοντας τέτοιους αριθμούς. Για να αντιληφθεί κανείς το ενυπάρχον ανάλογο, πρέπει να καταλάβει (όπως ο Πλάτων το είχε ως δεδομένο) ότι στην αρχαιότητα ο μουσικός συμβολισμός εγίνετο άμεσα καταληπτός από όλους τους μεμνημένους και γι' αυτό ο Πλάτων τον χρησιμοποιεί συχνά. Όταν κατά τον ρούν της Ιστορίας ο ρόλος της μουσικής από πνευματική ή ψυχική δύναμη εθυσιάσθη εις τον βωμό της ατομικής εκφράσεως και απολαύσεως, η ερμηνεία των άλλοτε ξεκάθαρων κειμένων κατέστη δύσκολη και ακατόρθωτη.



Σχήμα 2: Η Ψυχή του Κόσμου κατά την λαβδοειδή λύση της.

Με τον εκθετικό χαρακτήρα των εννοιών σχετικό και απόλυτο είδωλο ηδονής εις τον αλγόριθμό του ο Πλάτων προσπαθεί να μας καθοδηγήσει να κατασκευάσουμε σωστά την Ψυχήν του Κόσμου κατά την λαβδοειδή λύση της.

Το απόλυτο είδωλο ηδονής του Δημοκρατικού πολιτικού ανδρός είναι κατά Πλάτωνα ο αριθμός 36 ήτοι:

$$36 = (2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = \sigma(x, y) = 2 \text{ διαπασών} + 2(\text{διαπασών και διαπέντε}) = \\ = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

Οι τιμές αυτές των απολύτων ειδώλων ηδονής, αντιμετωπιζόμενες ως μήκη ταλαντούμενων τμημάτων χορδής σε σχέση με ένα μοναδιαίο μήκος αναφοράς δημιουργούν κατιόντα³ μουσικά διαστήματα. Αναγόμενα τα εν λόγω διαστήματα εντός του ενός διαπασών⁴, παρέχουν φθόγγους απέχοντες από τον φθόγγον αναφοράς, δηλαδή τον 1,

³ Μεγάλο μήκος ταλαντούμενου τμήματος χορδής συνεπάγεται μικρή ακουομένη συχνότητα.

⁴ Το μουσικό διάστημα 3 ισούται με 1 διαπασών, 0 επογδούς τόνους και 1 διαπέντε. Αρα, αναγόμενο εντός του ενός διαπασών, ισούται με 1 διαπέντε $\left(\frac{3}{2}\right)$.

κατά τα εξής μουσικά διαστήματα $\left[1, \frac{9}{8}, \left(\frac{9}{8}\right)^3, \frac{3}{2}\right]$ (επόγδοος τόνος, πυθαγόρειον τρίτονον, δια πέντε). Τα μεταξύ των φθόγγων αυτών σχηματιζόμενα διαδοχικά μουσικά διαστήματα είναι $\left[\frac{9}{8}, \left(\frac{9}{8}\right)^2, \frac{256}{243}\right]$ (επόγδοος τόνος, πυθαγόρειον δίτονον, λείμμα) και δομούν ένα πεντάχορδο.

Τα ανωτέρω σημαίνουν ότι το εν λόγω κατίον πεντάχορδο δομείται από έναν επόγδοο τόνο $\left(\frac{9}{8}\right)$ συν ένα τετράχορδο $\left[\left(\frac{9}{8}\right)^2, \frac{256}{243}\right]$.

Το τετράχορδο αυτό δομείται από ένα ασύνθετο δίτονο και από πυκνόν μεγέθους λείμματος. Άρα πρόκειται για την δομή ενός εναρμονίου τετραχόρδου, για το οποίον ήθελε, κατά τη γνώμη μου, να ομιλήσει αλληγορικά ο Πλάτων (Σχήμα 3).



Σχήμα 3: Οι τιμές των απολύτων ειδώλων ηδονής, αναγόμενες εντός του ενός διαπασών με αρχή τον φθόγγον αναφοράς, δηλαδή τον 1, σχηματίζουν μουσικά διαστήματα, τα οποία δομούν ένα εναρμόνιον πεντάχορδον.

Το δίτονον⁵ είναι το χαρακτηριστικό μουσικό διάστημα ενός τετραχόρδου με δομή εναρμονίου γένους. Το υπόλοιπο διάστημα του εναρμονίου τετραχόρδου, το ονομα-

Το μουσικό διάστημα 36 ισούται με 5 διαπασών και 1 επόγδοον τόνο. Αρα, αναγόμενο εντός του ενός διαπασών, ισούται με 1 επόγδοον τόνο $\left(\frac{9}{8}\right)$.

Το μουσικό διάστημα 729 ισούται με 9 διαπασών και 3 επογδόους τόνους. Αρα, αναγόμενο εντός του ενός διαπασών, ισούται με 3 επογδόους τόνους ή με 1 πυθαγόρειον τρίτονο $\left(\frac{9}{8}\right)^3$.

⁵ Το δίτονον είναι το χαρακτηριστικό διάστημα ενός τετραχόρδου με δομή εναρμονίου γένους. Το δίτονο εμφανίζεται μεταξύ του λιχανού και του φθόγγου κορυφής του τετραχόρδου π.χ. μεταξύ λιχανού μέσων και της μέσης. Βλέπε και 7 Αριστοξ. Στοιχ. Αρμον. 22.27-23.22, 50.22-25. Στον Αρχύτα 1.21 και Πτολ. Αρμον. 30.9ff αναφέρεται αντί διτόνου $(9:8) \times (9:8) = 81:64$, το διάστημα $80:64 = 5:4$, το οποίο είναι κατά $(81:64):(80:64) = (81:80)$ –ένα κόμμα– μικρότερο του διτόνου.

ζόμενον πυκνόν, ήτοι το διάστημα λιχανός-υπάτη, έχει μέγεθος ενός λείμματος (256:243). Για την διαίρεση αυτού του διαστήματος, του πυκνού, δεν μας αναφέρει τίποτα ο Πλάτων, αλλά, ως Πυθαγόρειος, θα ασπάζεται, εικάζω, τα όσα αναφέρονται εις την ιη Πρόταση της μουσικής πραγματείας *Κατατομή Κανόνος* του Ευκλείδου, δηλαδή «Αί παρυπάται καὶ αὐαί τρίται οὐ διαιροῦσι τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα». Με άλλα λόγια το πυκνόν διαιρείται από τις παρυπάτες στα τετράχορδα υπατών και μέσων και από τις τρίτες στα τετράχορδα συνημμένων, διεζευγμένων και υπερβολαίων σε δύο διαστήματα. Στην Πυθαγόρειον θεωρία τα δύο αυτά διαστήματα είναι άνισα, αλλ' εις την Αριστοξένειον θεωρία τα δύο αυτά διαστήματα είναι ίσα μεταξύ τους. Ίσως λόγω αυτού του συγκερασμού ο Αριστόξενος (Αρμονικά 1.22-26) ασχολείται διεξοδικώς με τις θέσεις των λιχανών και των παρανητών σε σχέση με αυτό που κάνει για τις θέσεις των παρυπατών και των τριτών (Αρμονικά 1. 26-27).

Θα καταλήξω την εισήγησή μου σχολιάζων τα λεγόμενα του κοσμήτορος κ. Εμμανουήλ Μικρογιαννάκη, ο οποίος λέγει:

Η εκτροπή των πολιτευμάτων προχωρεί ολοένα προς κατώτερα διαζώματα. Συγκεκριμένα από την τιμοκρατία προχωρεί σε νοσηρότερες μορφές και φθάνει με κατακόρυφη καθοδική πορεία στην τυραννίδα. Οι μεταβάσεις είναι μονοσήμαντες. Κάθε μεταβολή γίνεται προς συγκεκριμένο πολιτειακό τύπο, που είναι υποδεέστερος, και η κατάληξη είναι η τυραννίς. Η **τυραννίς** προέρχεται **μόνον** από τη **δημοκρατία**. Το χειρότερο με την τυραννίδα είναι ότι περιερχόμεθα σε αδιέξοδο, σε απορία. Κατά τον Πλάτωνα ο τύραννος είναι όχι απλώς δούλος, αλλά ο δουλικώτερος πάντων. Το μουσικολογικό περιεχόμενο των λεγομένων τουκαθηγητού κ. Εμμανουήλ Μικρογιαννάκη, είναι το εξής. Η δυσαρμονία προχωρεί από το σύμφωνο διάστημα της ταυτοφωνίας και του διαπασών προς όλο και περισσότερο διάφωνα μουσικά διαστήματα και φθάνει με κατακόρυφη καθοδική πορεία στην αυξημένη τετάρτη, το πυθαγόρειο τρίτονο

$$\left(\frac{9}{8}\right)^3$$

Η αυξημένη τετάρτη, το πυθαγόρειο τρίτονο, προέρχεται **μόνον** από τον επόγδοο τόνο

$$\left(\frac{9}{8}\right)$$

αφού δομείται αποκλειστικώς από τρεις επογδούς τόνους. Το χειρότερο με την αυξημένη τετάρτη, το πυθαγόρειο τρίτονο, είναι ότι αισθανόμεθα στ' αυτιά μας τον οικτρών διάφωνο χαρακτήρα του (*diabolo in musica*). Κατά τον Πλάτωνα η αυξημένη τετάρτη, το πυθαγόρειο τρίτονο, δεν είναι απλώς διάφωνο διάστημα, αλλά το διαφωνέστερο πάντων των διαστημάτων.

Η μουσικολογική αλληγορία της Πλατωνικής Πολιτειολογίας κρίνεται ως εξαιρετικώς ενδιαφέρουσα και αποκαλυπτική για τις γνώσεις του Πλάτωνος –και των μουσικών της εποχής του- όσον αφορά εις το αρμονικόν περιεχόμενον των μουσικών διαστημάτων. Πράγματι, αξιολογεί και κατατάσσει τα μουσικά διαστήματα της ταυτοφωνίας, του διαπασών, του διαπέντε, του επογδόου και του τριτόνου με βάση τη δυσαρμονία (παρὰφωνία), την οποία προκαλούν κατά την ακρόασή τους. Πρέπει να σημειωθεί, επίσης, ότι μέχρι στιγμής μόνον οι Προτάσεις ιζ και ιη της Ευκλείδειου πραγματείας Κατατομή κανόνος εγνωρίζαμε ότι αναφέρονται εις το εναρμόνιον γένος των αρχαίων Ελλήνων. Το αποκαλυφθέν πλέον εναρμόνιον πεντάχορδον εκ της μουσικολογικής αλληγορίας της Πλατωνικής Πολιτειολογίας αποτελεί σχετική αναφοράν αρχαιότερα των δύο προμνημονευθεισών Ευκλείδειων προτάσεων κατά δύο περίπου αιώνες και αυτό είναι εξαιρετικώς σπουδαία και πρωτότυπη μουσικολογική πληροφορία.

Η δομή του εν λόγω εναρμονίου τετραχόρδου κατά την κατιούσα διαδοχή πρέπει να έχει πυκνόν εντός ενός λείμματος $256/243$. Κατά την ιη Πρόταση της μουσικής πραγματείας Κατατομή Κανόνος του Ευκλείδου θα πρέπει το λείμμα να συντίθεται εκ δύο ανίσων μουσικών διαστημάτων. Ανθυφαιρετικώς προκύπτει ότι πράγματι το λείμμα χωρίζεται εις ένα μικρόν μουσικόν διάστημα, το Πυθαγόρειον κόμμα $531441/524288$ και σε ένα μεγαλύτερο κατά 2,845 φορές, το όνομα του οποίου δεν μας κατέστη ουδεπώποτε γνωστόν και αυτό δίδεται υπό της αριθμητικής σχέσεως $134217728/129140163$.

Τούτο αποτελεί εξαιρετικώς σπουδαία και πρωτότυπη μουσικολογική πληροφορία, την οποίαν για πρώτη φορά αποκαλύπτω, όσον αφορά εις την Μουσικήν παρὰ Πλάτωνι.