

Πυθαγόρειος ανθυφαίρεσις ή ανταναιρέσις

1. Ο Ευκλείδειος αλγόριθμος της Ανθυφαιρέσεως ή της Ανταναιρέσεως

Ανθυφαίρεσις ή ανταναιρέσις: Πρόκειται περί μιας μαθηματικής εννοίας, η οποία απαντάται εις τα αρχαία Μαθηματικά¹. Εις πολλούς είτε είναι γνωστή ως Ευκλείδειος² ανθυφαίρεσις, διότι αφορά εις την εφαρμογήν του ομώνυμου Ευκλειδείου αλγορίθ-

¹ Δεν κατέστη εισέτι γνωστόν πότε και ποιός ενεπνεύσθη την μέθοδον ταύτην της ανθυφαιρέσεως. Πιστεύεται ότι είναι πολύ παλαιά και εχρησιμοποιείτο οσάκις επρόκειτο να καθορισθεί η σχέσις μηκών δύο ευθυγράμμων τμημάτων. Αυτό συνέβη κατά κόρον κατά τους πειραματισμούς των Πυθαγορείων, οι οποίοι κατέληξαν εις τα μήκη τμημάτων χορδής των διαφόρων μουσικών συμφωνιών. Πιστεύεται ότι ο Αριστοτέλης εγνώριζεν την μέθοδον της ανθυφαιρέσεως (Τοπικά 3, 158, 29-35). Εις το εν λόγω εδάφιον αναφέρεται και ένας παλαιός ορισμός της αναλογίας, ο οποίος αναφέρεται υπό του Αλεξάνδρου του Αφροδισιεύως και υπό του λεξικού του Σουίδα «*ανάλογον έχει μεγέθη πρὸς ἄλληλα, ὧν ἡ αὐτὴ ἀνθυφαίρεσις*», δηλαδή:

$$Ανθ(α,β) = Ανθ(γ,δ) \Leftrightarrow \frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$$

Η έννοια της ενθυφαιρέσεως αποτελεί χαρακτηριστικόν στοιχείον της Πλατωνικής φιλοσοφίας, δεδομένου του γεγονότος ότι η κοσμοθεωρία του είναι ανθυφαιρετική. Ο Πλάτων δέχεται -και τούτο αποτελεί στοιχείον της Διαλεκτικής του- ότι το παν (λ.χ. η ζωή, ο θάνατος, η κοσμογονία, οι φιλοσοφικές ιδέες και έννοιες) εις την φύση δημιουργείται και εξελίσσεται ανθυφαιρετικώς.

Προσωπικώς πιστεύω ότι ο Πλάτων, ως πολυτίμη στήλη της Ροζέττης, δια των πυθαγορείων Μαθηματικών μας διδάσκει την Φιλοσοφίαν του και δια της Φιλοσοφίας του μας διδάσκει τα Μαθηματικά της εποχής του.

Ο Πλάτων, ο μέγιστος Μαθηματικός, ο μέγιστος Γεωμέτρης, δεν εγένετο -πλην ελαχίστων εξαιρέσεων- ποτέ μέχρι σήμερον κατανοητός. Καθιερώθη εις την ιστορίαν ως μέγας Φιλόσοφος και όχι ως μέγιστος Μαθηματικός. Η αντιμετώπισίς του υπό των Φιλολόγων με υποκειμένον-ρήμα-αντικείμενον, οι επιδερμικού χαρακτήρος ερμηνείες των βαθύτατα γεωμετρικών κειμένων του, τα οποία δεν κατέστησαν αντιληπτά υπό των Πλατωνιστών, διότι αφενός δεν γνωρίζουν και αφετέρου δεν φαντάζονται το ύψιστον επίπεδον της μαθηματικής γνώσεως, ήτις εμπρικλείεται εις αυτά, η εμπλοκή των χριστιανών θεολόγων εις την μαθηματικού χαρακτήρος θεολογίαν του Πλάτωνος για ωφελιμιστικούς σκοπούς, δεν μας επέτρεψαν να διεισδύσωμε εις την ουσίαν και τον γεωμετρικόν πυρήνα της Πλατωνικής σκέψεως.

Ο Πλάτων θεώρει τα Μαθηματικά προπαρασκευαστικά μαθήματα (οι τέσσερις αδελφές επιστήμες: Αριθμητική, Γεωμετρία, Αρμονική και Σφαιρική) για την Φιλοσοφίαν. Επίστευεν ότι η αναζήτησις της αληθείας μέσω της επιστημονικής ερευνής γεννά ολοέν βαθύτερα και πολυσυνθετότερα ερωτήματα, τα οποία, ακολουθώντας, οδηγούν εις την τάση προς μίαν ενοποιημένην αντιμετώπισή των και, κατά συνέπειαν, εις την Φιλοσοφίαν.

² Ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί το ρήμα «ανθυφαιρώ» εκ του οποίου προκύπτει το ουσιαστικόν «ανθυφαίρεσις».

μου (της Ανθυφαιρέσεως ή της Ανταναιρέσεως³), δια του οποίου αλγόριθμου, δοθεισών δύο ομοειδών μαθηματικών οντοτήτων, ήτοι δύο αριθμών ή δύο ευθυγράμμων τμημάτων ή δύο πολυπλοκοτέρων γεωμετρικών αντικειμένων), δυνάμεθα αφενός να εύρωμεν τον Μέγιστον Κοινόν Διαιρέτην (Μ.Κ.Δ.) αυτών, αφετέρου να αποφανθώμεν περί του εάν η σχέσις (=λόγος) αυτών αποτελεί ρητόν ή άρρητον αριθμόν.

Η περιγραφή του Ευκλείδειου αλγορίθμου της Ανθυφαιρέσεως ή της Ανταναιρέσεως έχει ως ακολούθως:

Έστωσαν δύο ομοειδή μεγέθη α και β , είτε αυτά είναι αριθμοί⁴, είτε αυτά είναι γραμμές, είτε αυτά είναι εμβαδά κ.λπ. Γενικώς, πρέπει απαραίτητως οι δύο οντότητες να είναι ομοειδείς. Δεχόμεθα ότι μεταξύ των δύο τούτων μεγεθών υπάρχει μία διάταξις: οπότε θεωρούμεν το ένα μέγεθος μεγαλύτερον του άλλου. Έστω, λοιπόν, ότι συμβαίνει $\alpha > \beta$.

Η ανθυφαίρεσις αυτών των δύο μεγεθών είναι μια διαδικασία κατά την οποίαν ολοέν το έλασσον από του μείζονος αφαιρείται ούτω πως: Λαμβάνομεν το έλασσον μέγεθος, το β , το θέτομεν επί του μείζονος και αφαιρούμεν ένα μέρος του μείζονος, το οποίον είναι ίσον προς το έλασσον β . Εκ της διαδικασίας της αφαιρέσεως κάτι καταλείπεται. Εάν το καταλειπόμενον τυγχάνει μείζον του β , θέτομεν εκ νέου επ' αυτού το β και το αφαιρούμεν μίαν εισέτι φοράν και μίαν εισέτι φοράν, όσες φορές απαιτείται. Κάποια στιγμή θα εμφανισθεί κορεσμός: δηλαδή θα εμφανισθεί αδυναμία περαιτέρω αφαιρέσεως. Τότε, λοιπόν, δυνάμεθα να εκφράσωμε το μείζον μέγεθος α ως κ_0 φορές ($\kappa_0 \in \mathbb{N}$) το έλασσον μέγεθος β συν μια διαφορά (λ.χ. δ), ήτοι $\alpha = \kappa_0 \cdot \beta + \delta$.

Η ανωτέρω πολυβηματική διαδικασία καθίσταται συντομοτέρα, εάν πραγματοποιήσωμε την διαίρεση $\alpha:\beta$, κατά την οποίαν προκύπτει πηλίκον κ_0 και υπόλοιπον δ : οπότε ισχύει και πάλιν η ίδια σχέσις $\alpha = \kappa_0 \cdot \beta + \delta$.

Ενδέχεται να προκύψει $\delta = 0$. Τούτο σημαίνει ότι το μείζον μέγεθος α είναι ακέραιον πολλαπλάσιον του ελάσσονος μεγέθους β . Ευθύς μόλις ευρεθεί $\delta = 0$, περατούται η διαδικασία της ανθυφαιρέσεως ή ανταναιρέσεως.

Ενδέχεται να προκύψει $\delta \neq 0$. Εις αυτήν την περίπτωση, κατά την οποίαν υπάρχει μη μηδενική διαφορά ($\alpha - \beta = \alpha_1$), δημιουργείται ένα νέον ζεύγος μαθηματικών οντοτήτων, το ζεύγος β, α_1 και το αρχικόν ζεύγος α, β αντικαθίσταται υπό του νέου ζεύ-

³ Εάν μέγεθος μεγέθους ισάκις ή πολλαπλάσιον, όπερ άφαιρεθέν άφαιρεθέντος, και τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ισάκις ἔσται πολλαπλάσιον, όσαπλάσιόν ἔστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Ευκλείδου, *Στοιχείων* 5, 5, 1-3.

Εάν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ισάκις ή πολλαπλάσια, και άφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ισάκις ή πολλαπλάσια, και τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ήτοι ἴσα ἔστιν ή ισάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Ευκλείδου, *Στοιχείων* 5, 6, 1-4.

Εάν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ή, άπερ άφαιρεθεις άφαιρεθέντος, και ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, άπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ευκλείδου, *Στοιχείων* 7, 8, 1-3.

Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἔκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου δὲ ἀεί τοῦ ελάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, εάν ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρητὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῆ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσσονται.

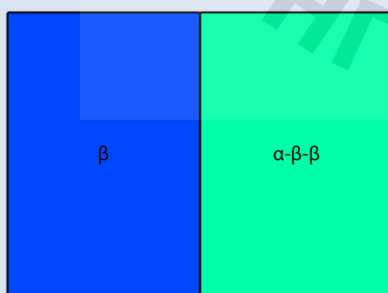
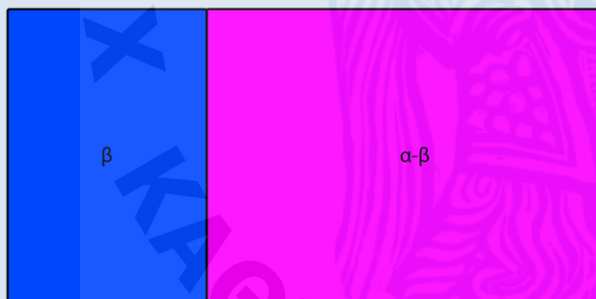
Ευκλείδου, *Στοιχείων* 7, 1, 1-4.

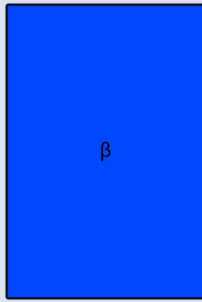
⁴ Λέγοντες αριθμοί, εννοούμεν τους φυσικούς αριθμούς (\mathbb{N} είναι το σύνολον των φυσικών αριθμών) και όχι τους πραγματικούς αριθμούς (\mathbb{Z} είναι το σύνολον των πραγματικών αριθμών), διότι κατά την αρχαιότητα δεν εγνώριζον αυτούς τους αριθμούς.

γους β , α_1 . Εις το νέον ζεύγος των μαθηματικών οντοτήτων β , α_1 διακρίνομεν την μείζονα και την ελάσσονα μαθηματικήν οντότητα και επαναλαμβάνομεν την ιδίαν διαδικασίαν κατά τον ίδιον ακριβώς τρόπον.

Η διαδικασία ενδέχεται να τελειώσει οπότε ονομάζεται πεπερασμένη ανθυφαίρεσις.

Παρουσίασις της περατουμένης ή πεπερασμένης διαδικασίας της ανθυφαίρεσεως δια γραφημάτων

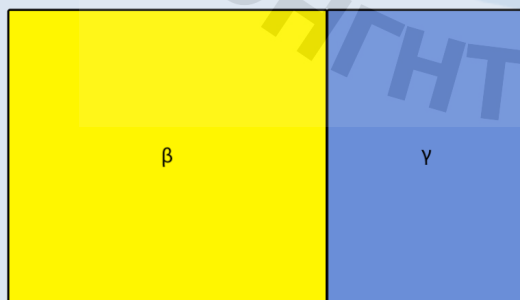
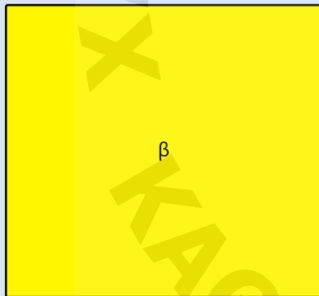


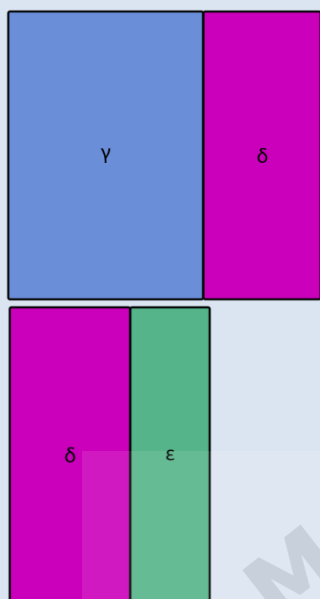


$$(\alpha - \beta - \beta - \beta = 0 \rightarrow \alpha = 3\beta)$$

Η διαδικασία ενδέχεται να είναι ατέρμων, δηλαδή να συνεχίζεται επ' άπειρον' οπότε ονομάζεται άπειρος ανθυφαίρεσις.

Παρουσίασις της μη περατουμένης ή απείρου διαδικασίας της ανθυφαιρέσεως δια γραφημάτων





$$(\alpha = \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \dots)$$

Εις την περίπτωση δύο φυσικών αριθμών, αυτή η διαδικασία της ανθυφαιρέσεως πάντοτε περατούται. Εις την περίπτωση δύο γραμμών ή εμβαδών ή σχημάτων αυτή η διεργασία της ανθυφαιρέσεως δυνατόν να είναι ή πεπερασμένη (περίπτωσης συμμετρων μεγεθών) ή άπειρος (ατέρμων) (περίπτωσης ασυμμέτρων μεγεθών).

Όταν η διαδικασία αυτή της ανθυφαιρέσεως εφαρμόζεται εις δύο δοθέντας αριθμούς, τερματίζεται ύστερα από ένα πεπερασμένου πλήθους βήματα. Η τελευταία μη μηδενική διαφορά, η οποία προκύπτει, είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) των δύο δοθέντων αριθμών.

Εάν προκύψει μοναδιαία διαφορά $\delta = 1$, τότε ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) των δύο δοθέντων αριθμών είναι η μονάς. Τούτο σημαίνει ότι οι δύο δοθέντες αριθμοί είναι πρώτοι προς αλλήλους.

«Δύο αριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένοι δὲ ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἐὰν ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρηῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσσονται».(Ευκλείδης, Στοιχεῖα, 7.1. 1-4).

2. Ο Ευκλείδειος αλγόριθμος της Ανθυφαιρέσεως ή της Ανταναιρέσεως εις την Πυθαγόρειον μουσικήν

Πάντα όσα ανεφέρθησαν προηγουμένως αφορούν εις αριθμούς και μεγέθη, τα οποία προστίθενται δια προσθέσεως, αφαιρούνται δι' αφαιρέσεως, πολλαπλασιάζονται δια πολλαπλασιασμού και διαιρούνται δια διαιρέσεως. Εις την **Πυθαγόρειον μουσικήν**, όμως, ως γνωστόν, αυτά δεν ισχύουν, διότι τα μουσικά διαστήματα προστίθενται δια πολλαπλασιασμού των αριθμητικών των σχέσεων και αφαιρούνται δια διαιρέσεως αυτών. Λαμβάνοντες υπ' όψιν μας ότι το ουδέτερον στοιχείον της προσθέσεως και της αφαιρέσεως είναι το μηδέν και το ουδέτερον στοιχείον του πολλαπλασιασμού και της διαιρέσεως είναι η μονάς, τροποποιούμεν ως ακολούθως τα προηγηθέντα.

Εις την περίπτωση δύο Πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων αυτή η διεργασία της ανθυφαιρέσεως δυνατόν να είναι ή πεπερασμένη (περίπτωσης συμμετρων μεγεθών) ή άπειρος (ατέρμων) (περίπτωσης ασυμμετρων μεγεθών).

Εάν, αφαιρούντες ένα Πυθαγόρειο μουσικό διάστημα από ένα άλλο μεγαλύτερο, ήτοι διαιρούντες τις αριθμητικές των σχέσεις, εύρωμεν πηλίκον ίσον προς την μονάδα, τότε τούτο σημαίνει ότι το μείζον μουσικό διάστημα είναι ακέραιον πολλαπλάσιον του ελάσσονος μουσικού διαστήματος και αμέσως περατούται η διαδικασία της ανθυφαιρέσεως ή ανταναιρέσεως.

Όταν η διαδικασία αυτή της ανθυφαιρέσεως, εφαρμοζομένη εις δύο δοθέντα Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα, τερματίζεται ύστερα από ένα πεπερασμένου πλήθους βήματα, τότε το τελευταίο μη μοναδιαίον πηλίκον, το οποίον προκύπτει, είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) των δύο δοθέντων Πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων.

Παράδειγμα 1

Να ευρεθεί ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) των αριθμών 40 και 24.

Λύσις

Η ανθυφαίρεσις ολοκληρούται δια των ακολούθων τεσσάρων βημάτων:

$$\begin{array}{r}
 40 \quad 24 \\
 \quad 24 \quad 40 - 24 = 16 \\
 \quad \quad 16 \quad 24 - 16 = 8 \\
 \quad \quad \quad 8 \quad 16 - 8 = 8 \\
 \quad \quad \quad \quad 8 \quad 8 - 8 = 0
 \end{array}$$

Η τελευταία μη μηδενική διαφορά είναι ο αριθμός 8. Κατά συνέπειαν, ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) των αριθμών 40 και 24 είναι ο αριθμός 8.

Παράδειγμα 2

Να ευρεθεί ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) οίωνδήποτε διαδοχικών φυσικών αριθμών $n+1$ και n , οι οποίοι δομούν μιαν επιμόριον σχέση.

Λύσις

Η ανθυφαίρεσις ολοκληρούται εις ένα βήμα, όπως καταφαίνεται εν συνεχεία, αφού η διαφορά των δύο δοθέντων φυσικών αριθμών, ως διαδοχικών, ισούται προς την μονάδα. Τούτο σημαίνει ότι ο ζητούμενος Μ.Κ.Δ. αυτών είναι η μονάς, ήτοι οι δύο δοθέντες φυσικοί διαδοχικοί αριθμοί είναι πρώτοι προς αλλήλους.

$$\begin{array}{r}
 n+1 \quad n \\
 \quad n \quad n+1 - n = 1
 \end{array}$$

Παράδειγμα 3

Να αποδειχθεί ότι η σχέσις $\frac{60}{26}$ εκφράζει ρητόν αριθμόν.

Λύσις

Αποδεικνύεται ότι η ανθυφαίρεσις των αριθμών 60 και 26 είναι πεπερασμένη, διότι $60 = 2 \cdot 26 + 8$ (το 26 στο 60 χωράει 2 φορές και περισσεύουν 8)

$26 = 3 \cdot 8 + 2$ (το 8 στο 26 χωράει 3 φορές και περισσεύουν 2)

$8 = 4 \cdot 2 + 0$ (το 2 στο 8 χωράει 4 φορές ακριβώς)

Εκ των ανωτέρω προκύπτει ότι $\text{Ανθ}(60, 26) = [2, 3, 4] \rightarrow \text{Μ.Κ.Δ.}(60, 26) = 2$, οπότε

αρχαιοελληνιστί η σχέσις $\frac{60}{26}$, επειδή είναι 2 φορές, 3 φορές, 4 φορές ακριβώς, εκφράζει έναν ρητόν αριθμόν.

Εν άλλαις λέξεσι η διαδικασία περατούται ευθύς μόλις προκύψει μηδενικόν υπόλοιπον εις κάποια των εκτελουμένων διαιρέσεων

$$\begin{array}{r|l} 60 \overline{)26} & 26 \overline{)8} & 8 \overline{)2} \\ -8 & 2 \overline{)3} & 0 \overline{)4} \\ \hline \end{array}$$

Δι ενός υπολογιστού χειρός (κομπιουτεράκι), ήτοι τη χρήση της Τεχνολογίας σήμερον αντιλαμβανόμεθα ότι η σχέσις $\frac{60}{26}$ είναι πράγματι ρητός αριθμός, ως δεκαδικός

έχων άπειρα δεκαδικά ψηφία περιοδικώς επαναλαμβανόμενα $\left(\frac{60}{26} = 2,307692\right)$. Την προ Χριστού εποχή όμως;

Τον αλγόριθμον της ανθυφαίρεσεως αναπτύσσει ο Ευκλείδης εις τα *Στοιχεία* του (7.1-2). Ομοίως, η διαδικασία, εφαρμοζόμενη εις σύμμετρα μεγέθη, τερματίζει, δίδουσα το μέγιστον κοινόν μέτρον αυτών, ως ο Ευκλείδης απέδειξεν εις τα *Στοιχεία* του (10.3). Αλλά, εις την περίπτωση των ασυμμέτρων μεγεθών η διαδικασία συνεχίζεται αενάως και οι προκύπτουσες διαφορές εκ των διαδοχικών αφαιρέσεων ολοέν και μικρύνουν, καθιστάμενες βαθμηδόν ελάσσονες ενός εκ των προτέρων καθορισθέντος πεπερασμένου μεγέθους, ως ο Ευκλείδης απέδειξεν εις τα *Στοιχεία* του (10.1-2).

3 Περί του πώς, πού και υπό ποίου εδημιουργήθη η πολύπλοκος έννοια της ανθυφαίρεσεως ή ανταναιρέσεως.

Βάσει υπάρχοντος αρχαίου τεκμηρίου, η διαδικασία της ανθυφαίρεσεως εδημιουργήθη υπό των Πυθαγορείων⁵. Πρόκειται περί του έκτου αποσπάσματος⁶ του Φιλολάου εκ του Τάραντος ή εκ του Ακράγαντος⁷.

⁵ Νεγρεπόντης Σταμάτιος, (2-4/9/2005) «Η επίδραση των Πυθαγορείων στη διαμόρφωση του ελληνικού πολιτισμού». Εισήγησις εις το Επιστημονικόν Συνέδριον «Πυθαγόρεια Σκέψη και Επιστημονικός Λόγος», Πυθαγόρειον Σάμου (Doryssa Bay Hotel, αίθουσα “Sybilla”).

Η ανθυφαίρεσις, ήτοι ο μαθηματικός αλγόριθμος ευρέσεως του Μεγίστου Κοινού Διαιρέτου δύο δοθέντων αριθμών, ήτο μέθοδος γνωστή εις τους Πυθαγορείους πολλού χρόνου προ του Ευκλείδου του Γεωμέτρου, ο οποίος μνημονεύει την μεν πεπερασμένην ανθυφαίρεση αριθμών εις το VII Βιβλίον των *Στοιχείων* του, την δε άπειρον ανθυφαίρεση μεγεθών εις το X Βιβλίον του ίδιου έργου του. Η ανθυφαιρετική διαδικασία πιθανότατα υπήρξεν το ουσιαώδες μεταβατικόν βήμα εκ της εμπειρικής Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας των λόγων εις την πλέον εξελιγμένην της μορφήν, όπως αυτή εκτίθεται υπό του Ευκλείδου.

⁶ ἄρμονίας δὲ μέγεθος ἐστὶ συλλαβὰ καὶ δι’ ὀξειᾶν· τὸ δὲ δι’ ὀξειᾶν μεῖζον τᾶς συλλαβᾶς ἐπογδόωι. ἔστι γὰρ ἀπὸ ὑπάτας ἐπὶ μέσσαν συλλαβὰ, ἀπὸ δὲ μέσσης ἐπὶ νεάταν δι’ ὀξειᾶν, ἀπὸ δὲ νεάτας ἐς τρίτην παρα-

μέσαν συλλαβά, ἀπὸ δὲ ~~τρίτας~~ παραμέσας ἐς ὑπάταν δι' ὄξειαν· τὸ δ' ἐν μέσῳ μέσας καὶ ~~τρίτας~~ παραμέσας ἐπόγδοον· ἃ δὲ συλλαβὰ ἐπίτριτον, τὸ δὲ δι' ὄξειαν ἡμιόλιον, τὸ διὰ πασῶν δὲ διπλόον. οὕτως ἄρμονία πέντε ἐπόγδοα καὶ δύο διέσεις, δι' ὄξειαν δὲ τρία ἐπόγδοα καὶ διέσεις, συλλαβὰ δὲ δύο ἐπόγδοα καὶ διέσεις.

[Του διαπασών το μέγεθος ισούται προς το διατεσσάρων και το διαπέντε. Το μέγεθος του διαπέντε είναι μεγαλύτερον του διατεσσάρων κατά έναν ἐπόγδοον τόνον. Διότι είναι ἀπὸ την ὑπάτην ἕως την μέσην διάστημα διατεσσάρων, ἀπὸ δε την μέσην ἕως την νήτην είναι διάστημα διαπέντε, ἀπὸ δε την νήτην ἕως την παραμέσην είναι διάστημα διατεσσάρων, ἀπὸ δε την παραμέσην ἕως την ὑπάτην είναι διάστημα διαπέντε. Μεταξὺ της μέσης και της παραμέσης είναι διάστημα ἐπογδόου τόνου. Το διατεσσάρων είναι σχέσις ἐπίτριτος, το διαπέντε είναι σχέσις ἡμιόλιος, το διαπασών είναι σχέσις διπλασία. Ἔτσι, το διαπασών ισούται προς πέντε ἐπογδόους τόνους και δύο διέσεις (λείμματα, ἐλάσσονα ἡμιτόνια), το διαπέντε ισούται προς τρεις ἐπογδόους τόνους και διέσιν (λείμμα, ἐλασσον ἡμιτόνιον), το διατεσσάρων δε ισούται προς δύο ἐπογδόους τόνους και διέσιν (λείμμα, ἐλασσον ἡμιτόνιον)] (Νεοελληνική ἀπόδοσις ὑπὸ του συγγραφέως).

Και συμπληρώνει ο Βοήθιος (Inst. mus. III 8 / Friedlein 278.11): *Philolaus igitur haec atque his minora spatia talibus definitionibus includit: diesis, inquit, est spatium quo maior est sesquitertia proportio duobus tonis. comma vero est spatium, quo maior est sesquioctava proportio duabas diesibus, id est duobus semitoniis minoribus. schisma est dimidium commatis, diaschisma vero dimidium dieseos, id est semitonii minoris.*

[Ο Φιλόλαος, λοιπόν, ἀνά τα ἐλάσσονα διαστήματα με αὐτοὺς τοὺς ὀρισμοὺς τα συμπεριλαμβάνει: διέση (λείμμα, ἐλασσον ἡμιτόνιο), λέει, είναι το διάστημα κατὰ το ὁποῖο ὑπερέχει ἡ ἐπίτριτος ἀναλογία (το διατεσσάρων) του διτόνου. Κόμμα είναι το διάστημα κατὰ το ὁποῖο ὑπερέχει ὁ ἐπόγδοος τόνος τῶν δύο διέσεων, δηλαδή τῶν δύο ἐλασσόνων ἡμιτονίων (λείμμάτων). Σχίσμα είναι το ἡμῖσυ του κόμματος. Διάσχισμα είναι το ἡμῖσυ της διέσεως, δηλαδή του ἐλάσσονος ἡμιτονίου (λείμματος)].

(Ἡ μετάφρασις του λατινικοῦ κειμένου του Βοηθίου, το ὁποῖον συμπληρώνει το 6^ο ἀπόσπασμα του Φιλολάου, ἐγένετο ὑπὸ της καθηγητρίας της Φιλοσοφικῆς Σχολῆς του Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν κας Μαρίας Βουτσίνου-Κικιλία, την ὁποίαν ὁ συγγραφεὺς εὐχαριστεῖ θερμῶς).

Ἡ ἀποδείξις τῶν σχέσεων του Βοηθίου ἔχει ὡς ἐξῆς:

Ἐπόγδοος τόνος = ἀποτομή + λείμμα = (λείμμα + κόμμα) + λείμμα = δύο λείμματα + κόμμα.

$$\text{Διάσχισμα} = \sqrt{\frac{256}{243}} = 1,026400478$$

Σχίσμα =

$$= \sqrt{\frac{9}{8}} = \sqrt{\frac{9}{4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{256}{243}\right)^2}} = \frac{3}{2 \cdot \frac{256}{243} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \frac{256}{243} \cdot 2} = \frac{3^6 \cdot \sqrt{2}}{2^{10}} = 1,006798522$$

⁷ Φιλόλαος ὁ Ταραντῖνος (Τάρας ἢ Κρότων της Μ. Ἑλλάδος 530- Θήβα 470 π.Χ.), πυθαγόρειος φιλόσοφος, μαθηματικός, ἀστρονόμος και κοσμολόγος. Συνέβαλε εἰς την διάδοσιν της πυθαγορείου φιλοσοφίας. Ὅπως ἀναφέρει ὁ Πλάτων εἰς τον Φαῖδωνα, μαθητὲς του ὑπῆρξαν ὁ Σιμμίας και ὁ Κέβης και, κατὰ τον Διογένην τον Λαέρτιον, οἱ πυθαγόρειοι της Φλειούντος. Ἀναφέρεται ὑπὸ του Βιτρουβίου. Ἐπηρέασε τον Πλάτωνα και τοὺς μαθητῆς και διαδόχους του. Το κοσμολογικόν σύστημα τῶν πυθαγορείων ἀπεδίετο κατὰ την ἀρχαιότητα εἰς τον Φιλόλαον. Εἰδίδαξεν «δι' αἰνιγμάτων», δηλαδή ἐπὶ τη βᾶσει της ἀλληγορικῆς ἐρμηνείας τῶν πυθαγορείων. Ὑπῆρξεν ἰδρυτὴς της πυθαγορείου θεωρίας περὶ τῶν ἀριθμῶν. Το ἔργον του «Περὶ φύσεως» σώζεται ἀποσπασματικῶς. Σχολιάζεται ὑπὸ του Ἀριστοτέλους εἰς το ἔργον του «Περὶ οὐρανοῦ – 13, 293α). Κατὰ τον Φιλόλαον το σύμπαν είναι σφαιρικόν, ὑπάρχει ἓνα κεντρικόν πυρ περὶ το ὁποῖον περιστρέφονται δέκα σφαῖρες. Ἡ γῆ περιστρέφεται περὶ ἄξονα. Εἰς τις

Προ του Φιλόλαου ουδέν γραπτόν περιεσώθη περί των Πυθαγορείων. Ο Φιλόλαος επικεντρύεται εις το μνημονευόμενον απόσπασμα εις την θεωρίαν της πυθαγορείου μουσικής διατυπώων τρεις ποσοτικές σχέσεις. Υπάρχει και μια τετάρτη σχέσις, την οποία αναφέρει ο Βοήθιος⁸, συμπληρώνων τον Φιλόλαον.

Το μέγεθος της αρμονίας, υπό την έννοιαν της διαπασών ή οκτάβας, ισούται με την συλλαβά και με την διοξειά⁹.

Η διοξειά ισούται¹⁰ με συλλαβά και με τόνον¹¹

Η συλλαβά ισούται με δύο τόνους και με διέση¹²

Ο τόνος ισούται με δύο διέσεις και με κόμμα¹³

αστρονομικές θεωρίες του Φιλόλαου εστηρίχθησαν οι αναγεννησιακοί Κοπέρνικος, Γαλιλαίος, Giordani Bruno. Ησχολήθη με την εύρεση των τεσσάρων κοσμικών σωμάτων (τετράεδρον, εξάεδρον, οκτάεδρον, εικοσάεδρον).

⁸ Βοήθιος, του οποίου το πλήρες όνομα είναι Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius. Ρωμαίος φιλόσοφος και πολιτικός ζήσας από το 480 έως το 524 μ.Χ. Εγεννήθη εις την Ρώμην και είχε την σπουδαίαν τύχην να σπουδάσει εις την Αθήνα. Εθεώρησε ως αποκλειστικόν του πνευματικόν καθήκον να μεταλαμπαδεύσει την ελληνικήν φιλοσοφίαν εις την Δύση. Υπήρξεν σύμβουλος του βασιλέως των Οστρογότθων Θεοδωρίχου πλησίον του οποίου εγνώρισεν δόξες, τιμές, αλλά και την ατίμωση, την φυλάκιση και τον θάνατον δια φρικτών βασανιστηρίων. Το έργον του έγκειται εις μεταφράσεις και υπομνήματα Ελλήνων συγγραφέων. Μετέφρασεν εις την λατινικήν την «Αριθμητικήν Εισαγωγήν» του Νικομάχου του Γερασηνού («*Institutio arithmetica*») και το μη διασωσμένον μουσικόν έργον του ιδίου «Μουσική Εισαγωγή» («*Institutio musica*»). Το μουσικόν έργον αυτό είναι πολύτιμη πηγή πληροφορίας περί την αρχαίαν μουσικήν και απετέλεσεν την βάση των μουσικών μελετών κατά τον μεσαίωνα. Το πλέον γνωστόν εξ όλων των έργων του («*Παραμυθία της Φιλοσοφίας*») «*Consolatio Philosophiae*», το συνέγραψεν προς παρηγορίαν του εις την φυλακήν και είναι πεζόν και έμμετρον κείμενον. Ως βοηθήματά του για την συγγραφήν αυτού του έργου εχρησιμοποίησεν τον «Προτρεπτικόν» του Αριστοτέλους, τον Πλάτωνα, τον Κικέρωνα και τον Πλωτίνον. Κύριον τμήμα του έργου του Βοηθίου σχετίζεται μετά της Λογικής του Αριστοτέλους και τους σχολιαστές της.

Το πολυδιαδεδομένον έργον του Βοηθίου μετεφράσθη εις πάρα πολλές γλώσσες και εσχολιάσθη υπό πολλών σχολιαστών. Πρέπει να τονισθεί το γεγονός ότι σήμερα υπάρχουν περισσότερα των 400 χειρογράφων του εις την λατινικήν γλώσσαν και δεν είναι ολίγα τα χειρόγραφα εις την ελληνικήν γλώσσαν, τα οποία μετέφρασεν κατά τον 14^{ον} αιώνα ο μοναχός Μάξιμος Πλανούδης.

Πρέπει να τονισθεί εμφατικώς ότι επί αιώνες ο Αριστοτέλης, η βάση της μεσαιωνικής φιλοσοφίας, ήτο γνωστός εκ των μεταφράσεων και των πρωτοτύπων εργασιών του Βοηθίου. Τον Βοήθιον, τον οποίον άλλοι αποκαλούν έσχατον Ρωμαίον και άλλοι πρώτον σχολαστικόν, μερικές των εκκλησιών της Ιταλίας τον εθεώρησαν μάρτυρα και άγιον του Χριστιανισμού.

$$^9 \frac{2}{1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}$$

¹⁰ Για την κατανόηση της ανθυφαιρετικής διαδικασίας, όσον αφορά εις τις μαθηματικές πράξεις μεταξύ των αριθμητικών σχέσεων των ανθυφαιρουμένων μουσικών διαστημάτων, ο ερευνητής πρέπει να τυγγάνει γνώστης της ιδιομόρφου «Αλγέβρας» των πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων. Κατά την ιδιόμορφον αυτήν «Άλγεβραν», λόγω της εμπεριεχομένης «λογαριθμικότητας» εις την φιλοσοφίαν της θεωρίας των λόγων της Πυθαγορείου μουσικής, η πρόσθεσις δύο πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων πραγματοποιείται δια πολλαπλασιασμού των αριθμητικών των σχέσεων, ενώ η αφαιρέσις δύο πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων πραγματοποιείται δια διαιρέσεως της αριθμητικής σχέσεως του μειωτέου δια της αριθμητικής σχέσεως του αφαιρετέου. Βλέπε Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδη, *Ο δυϊσμός του μουσικού διαστήματος*, εκδόσεις Γαρταγάνης, Αθήνα 2004, σ. 2.1 κ.ε.

$$^{11} \frac{3}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8}$$

$$^{12} \frac{4}{3} = \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{256}{243}$$

Οι ανωτέρω όροι αποτελούν αρχαίες ονομασίες μουσικών διαστημάτων (Πίναξ 1).

Πίναξ 1: Ονομασίες μουσικών διαστημάτων

Πυθαγόρειες Ονομασίες	Αριστοξένειες Ονομασίες	Σύγχρονες Ονομασίες
Αρμονία	Διαπασών	Οκτάβα
Διοξειά	Διαπέντε	Πέμπτη καθαρά
Συλλαβά	Διατεσσάρων	Τετάρτη καθαρά
Τόνος	Τόνος	Τόνος
Δίεση	Ημιτόνιο	Ημιτόνιο

Πριν προβώμεν εις την μαθηματικοποίηση αυτών των Φιλολαειών σχέσεων, πρέπει να επισημάνωμεν ότι:

- εκάστη σχέσις περιλαμβάνει μίαν τριάδα ομοειδών οντοτήτων (μουσικά διαστήματα) τοιαύτην, ώστε το μέγεθος της οντότητος εις το πρώτον μέλος της σχέσεως ισούται με το άθροισμα των μεγεθών των δύο οντοτήτων εις το δεύτερο μέλος της σχέσεως και
- το μέγεθος εις το πρώτον μέλος εκάστης σχέσεως συμπίπτει με το μείζον μέγεθος του δευτέρου μέλους της σχέσεως, η οποία προηγείται αυτής.

Οι ανωτέρω επισημάνσεις μας φέρουν κατά νουν την διαδικασίαν της ανθυφαιρέσεως.

Όντως, εις την πρώτην τριάδα έχομε την αρμονία –υπό την έννοιαν του διαπασών- και την διοξειάν (=διαπέντε) εκ της διαφοράς των οποίων προκύπτει η συλλαβά (=διατεσσάρων). Εν συνεχεία, λαμβάνομεν την διοξειά, την ελάσσονα οντότητα εκ του πρώτου ζεύγους, και την συγκρίνομε μετά της συλλαβάς, ήτοι μετά της διαφοράς εκ του πρώτου ζεύγους κ.ο.κ.

Τα ανωτέρω, ως ανθυφαιρετική διαδικασία, δύνανται να παρασταθούν δια των ακολούθων τεσσάρων (4) προτάσεων:

1. Η διοξειά $(3/2)$ από της αρμονίας $(2/1)$ καταλείπει συλλαβάν $(4/3)$
2. Η συλλαβά $(4/3)$ από της διοξειάς $(3/2)$ καταλείπει τόνον $(9/8)$
3. Το δίτονον $(9/8)^2$ από της συλλαβάς $(4/3)$ καταλείπει δίεςιν¹⁴ $(256/243)$
4. Η διπλή δίεςις $(256/243)^2$ από του τόνου καταλείπει κόμμα $(531441/524288)$

Αυτό το έκτο απόσπασμα του Φιλολάου αποτελεί μέχρι στιγμής την αρχαιότερη καταγραφήν της εννοίας της ανθυφαιρέσεως. Πιθανώς να θεωρηθεί λογικόν ότι κατόπιν αυτού εξεκίνησεν η έννοια της ανθυφαιρέσεως.

Πληρεστέρα αντιμετώπισις της ανωτέρω Φιλολαείου ανθυφαιρετικής διαδικασίας δυνατόν να διατυπούται δια των ακολούθων δεκατριών (13) προτάσεων:

1. Το δις διαπέντε $(3/2)^2 = (9/4)$ από του δις διαπασών $(2/1)^2 = (4/1)$ καταλείπει το δις διατεσσάρων $(4/3)^2 = (16/9)$.
2. Το δις διατεσσάρων $(4/3)^2 = (16/9)$ από του δις διαπέντε $(3/2)^2 = (9/4)$ καταλείπει το αποκαλούμενον πυθαγόρειον δίτονον $(9/8)^2 = (81/64)$.
3. Η διοξειά $(3/2)$ από της αρμονίας $(2/1)$ καταλείπει συλλαβάν $(4/3)$.
4. Το δίτονον $(9/8)^2 = (81/64)$ από της διοξειάς $(3/2)$ καταλείπει διατονικόν τριημίτονον $(32/27)$.
5. Ο επόγδοος τόνος $(9/8)$ από της συλλαβάς $(4/3)$ καταλείπει διατονικόν τριημίτονον $(32/27)$.
6. Η συλλαβά $(4/3)$ από της διοξειάς $(3/2)$ καταλείπει επόγδοον τόνον $(9/8)$, ήτοι το πρώτο εκ των μελωδικών διαστηματικών μεγεθών.
7. Ο επόγδοος τόνος $(9/8)$ από του διτόνου $(9/8)^2$ καταλείπει επόγδοον τόνον $(9/8)$.
8. Το διατονικόν τριημίτονον $(32/27)$ από του διτόνου $(9/8)^2 = (81/64)$ καταλείπει αποτομήν¹⁵ ή ημίτονον χρωματικόν $(2187/2048)$.
9. Η δίεςις $(256/243)$ από του επογδόου τόνου $(9/8)$ καταλείπει αποτομήν $(2187/2048)$.

¹⁴ Ονομασία του λείμματος ή ελάσσονος ημιτονίου κατά τον Πυθαγόρα και τους πυθαγορείους.

¹⁵ Αποτομή, διότι απετάμη από του τόνου τη αφαιρέσει λείμματος.

10. Το δίτονον $(9/8)^2$ από της συλλαβάς $(4/3)$ καταλείπει δίεσιν $(256/243)$.
11. Ο επόγδοος τόνος $(9/8)$ από του διατονικού τριμιτόνου $(32/27)$ καταλείπει δίεσιν $(256/243)$.
12. Η δίεσις $(256/243)$ από της αποτομής $(2187/2048)$ καταλείπει κόμμα πυθαγόρειον $(531441/524288)$, το οποίον κατ' ανάγκην, λόγω της ατέρμονος ανθυφαιρετικής διαδικασίας επί των Πυθαγορείων διαστημάτων, ως αποδεικνύεται κατωτέρω, απεδέχθησαν ως το κύτταρον των πυθαγορείων διαστημάτων.
13. Η διπλή δίεσις $(256/243)^2$ από του τόνου καταλείπει κόμμα¹⁶ πυθαγόρειον $(531441/524288)$.

Λέγοντες πυθαγόρειον¹⁷ μουσικόν διάστημα, εννοούμε παν μουσικόν διάστημα εκφραζόμενον υπό μίας αριθμητικής σχέσεως της μορφής $2^κ \cdot 3^λ$ κ, λ ∈ Ζ. Η συγκεκριμένη αριθμητική έκφρασις οφείλεται εις το γεγονός ότι τα πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα προκύπτουν υπό αλληλοπροσθέσεων ή/και αλληλο αφαιρέσεων των δύο θεμελιωδών μουσικών διαστημάτων, ήτοι του επιτρίτου ή συλλαβάς $(4/3)$ και του ημιόλιου ή διοξειάς $(3/2)$. Δεν είναι, άλλωστε, τυχαίον το γεγονός ότι ο Πλάτων εις το

¹⁶ Το Πυθαγόρειον κόμμα εξελάμβανον οι αρχαίοι Έλληνες ως το κατά προσέγγιση κοινόν μέτρον του ημιόλιου και του επιτρίτου διαστημάτων. Εν άλλοις λόγοις εθεώρουν ότι τα εν λόγω δύο διαστήματα προέκυπτον λαμβάνοντας ακέραιον πλήθος φορών το διάστημα του Πυθαγορείου κόμματος. Πράγματι, κατά την Άλγεβραν των πυθαγορείων μουσικών διαστημάτων θα ισχύει:

$$\frac{3}{2} = 1,013643264770508^x \Rightarrow$$

$$\log\left(\frac{3}{2}\right) = x \cdot \log(1,013643264770508) \Rightarrow$$

$$x = \frac{\log\left(\frac{3}{2}\right)}{\log(1,013643264770508)} = 29,92134179 \cong 30$$

Τουτέστιν, λαμβάνοντες 30 φορές το Πυθαγόρειον κόμμα, προκύπτει το ημιόλιον διάστημα.

$$\frac{4}{3} = 1,013643264770508^y \Rightarrow$$

$$\log\left(\frac{4}{3}\right) = y \cdot \log(1,013643264770508) \Rightarrow$$

$$y = \frac{\log\left(\frac{4}{3}\right)}{\log(1,013643264770508)} = 21,04481108 \cong 21$$

Τουτέστιν, λαμβάνοντες 21 φορές το Πυθαγόρειον κόμμα, προκύπτει το επίτριτον διάστημα.

¹⁷ Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, «Εράνισμα από την Πυθαγόρεια Μουσική Θεωρία», εισήγησις εις το Συνέδριον με θέμα «Πυθαγόρεια Σκέψη και Επιστημονικός Λόγος», Πυθαγόρειον Σάμου, 2-4 Σεπτεμβρίου 2005.

Για την πλήρη μαθηματική τεκμηρίωση βλέπε Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, *Αναλυτική Γεωμετρία για την Πυθαγόρεια Μουσική*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη, 2006.

έργον του Τίμαιος δομεί την Ψυχήν του Κόσμου¹⁸ χρησιμοποιών τις δύο γεννητρίους συναρτήσεις $\varphi(x) = 2^x$ $x = 0, 1, 2, 3, \dots$ και $\rho(y) = 3^y$ $y = 0, 1, 2, 3, \dots$

Εις τον Πίνακα 2 παρουσιάζονται Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα μετά των ονομασιών των και των αριθμητικών σχέσεων, οι οποίες τα εκφράζουν.

Πίναξ 2: Μουσικά διαστήματα του Πυθαγορείου συστήματος μετά των ονομασιών των.

α/α	Ονομασία	Αριθμητική έκφραση
1	Πυθαγόρειο κόμμα	531.441/524.288
2	Αποτομή μείζονος τόνου	2.187/2.048
3	Λείμμα	256/243
4	Δίλειμμα	65.536/59.049
5	Επόγδοος τόνος	9/8
6	Πυθαγόρειος μικρά τρίτη	32/27
7	Πυθαγόρειος ηλατωμένη τετάρτη	8.192/6.561
8	Πυθαγόρειον δίτονον	81/64
9	Πυθαγόρειον τρίτονον	729/512
10	Πυθαγόρειος μικρά έκτη	128/81
11	Πυθαγόρειος μικρά εβδόμη	243/128
12	Διαπασών	2/1
13	Δις διαπασών	4/1
14	Διαπασών και διαπέντε	3/1
15	Διαπασών και διατεσσάρων	8/3
16	Δις διατεσσάρων	16/9
17	Δις διαπέντε	9/4

¹⁸ (35a1-36b6), το ονομαζόμενο «μουσικόν χωρίον». Βλέπε Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδη, *Πλάτωνος Τίμαιος: Γένεσις Ψυχής Κόσμου (γραμμικές και λαβδοειδείς λύσεις)*, Εκδόσεις Grapholine, Θεσσαλονίκη, 2008.