

## ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΝ ΑΞΙΩΜΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΟΥΣΙΚΗΝ ΣΥΜΦΩΝΙΑΝ

*Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης*

Καθηγητής Τμήματος Μουσικών Σπουδών  
Φιλοσοφικής Σχολής Πανεπιστημίου Αθηνών,  
Κοσμήτωρ της Διεθνούς Επιστημονικής Εταιρείας  
της Αρχαίας Ελληνικής Φιλοσοφίας

[hspyridis@music.uoa.gr](mailto:hspyridis@music.uoa.gr)  
<http://users.uoa.gr/~hspyridis>

### 1. Προλεγόμενα

Μοχθών επί πολλά έτη εις τον επιστημονικόν στίβον, επεξέτεινα την ερευνητικήν, διδακτικήν και συγγραφικήν μου δραστηριότητα και εις την αρχαίαν ελληνικήν γραμματείαν, δεδομένου ότι υπό το πρίσμα αυτής εξετάζονται αι μουσικαί θεωρίαι των επιφανών Ελλήνων φιλοσόφων, μαθηματικών και φυσικών. Χρησιμοποιών την Φυσικήν και τα Μαθηματικά εν αγαστή συνεργασία μετά της Μουσικής, ωδηγήθην εν αρχή εις την σπουδήν της μοναδικής μουσικομαθηματικής Ευκλειδείου πραγματείας υπό τον τίτλον *Κατατομή Κανόνος (sectio canonis)*.

### 2. Περί της Πυθαγορείου μουσικομαθηματικής πραγματείας *Κατατομή Κανόνος*

Η *κατατομή κανόνος* τυγχάνει πυθαγόρειος πραγματεία. Αναφέρεται εις σχέσεις συνδεούσας μαθηματικάς και ακουστικάς αληθείας επί των οποίων εδράζεται η σύγχρονος ακουστική επιστήμη του Δυτικού κόσμου. Επειδή η *Κατατομή κανόνος* και τα *Στοιχεία* του Ευκλείδου είναι γεγραμμένα με το αυτό λογοτεχνικόν ύφος, δια τούτο θεωρούμεν τον μέγα Γεωμέτρην Ευκλείδην ως συγγραφέα αμοτέρων. Εάν ο Ευκλείδης είναι όντως ο συγγραφεύς της εν λόγω πραγματείας, διότι κάποιον το αμφισβητούν, η *Κατατομή κανόνος* θα πρέπει να είχε συγγραφεί περί το έτος 300 π.Χ.

Το έργον διασώζεται εκ τριών διακεκριμένων πηγών:

- ✓ μία μεγάλης εκτάσεως έκδοσις, ήτις αποδίδεται εις τον Ευκλείδην ή εις τον Κλεονείδην ή εις τον Ζώσιμον τον Πανοπολίτην<sup>1</sup>,
- ✓ μία συντομοτέρα Ελληνική έκδοσις, ήτις εμπεριέχεται εις το Υπόμνημα του Πορφυρίου<sup>2</sup> «*Εις τα αρμονικά του Πτολεμαίου*»<sup>3</sup> και
- ✓ μία Λατινική έκδοσις, ήτις εμπεριέχεται εις το έργον «*De institutione musica*»<sup>4</sup> του Βοηθίου<sup>5</sup>.

<sup>1</sup> Ζώσιμος ο Πανοπολίτης. Ο αρχαιότερος των αλχημιστών συγγραφέων. Εγεννήθη εις τας αρχάς του 4<sup>ου</sup> μ.Χ. αιώνας εις την Πανοπόλιν της Άνω Αιγύπτου. Τον αναφέρουν ο Γεώργιος Σύγκελλος και Φώτιος. Όλοι οι αλχημιστάι ομιλούν περί αυτού με βαθύτατον σεβασμόν. Είναι ο πρώτος, όστις διαχωρίζει τας επιστήμας Φυσική και Χημεία και ο πρώτος, όστις αναφέρει τον όρον «*Χημεία*». Κατά τον Σουΐδα, ο Ζώσιμος συνέγραψεν 28 βιβλία για την Αλχημείαν υπό τον γενικόν τίτλον «*Χειρόκμητα*» και βιογραφίαν του Πλάτωνος. Των περισσοτέρων έργων του σώζονται μόνον περιλήψεις και τίτλοι. Μας σώζεται η περιγραφική κατασκευής διυλιστηρίου. Εις αυτόν αποδίδεται από μερικούς το έργον «*Εισαγωγή αρμονική*», ήτις περιεσώθη, ενώ άλλοι το αποδίδουν είτε εις τον Κλεωνείδην, είτε εις τον Ευκλείδην, είτε εις τον Πάππον.

<sup>2</sup> Πορφύριος ο Τύριος ή Φοίνιξ ή Βατανιώτης. Νεοπλατωνικός φιλόσοφος, ο πλέον σημαντικός εκ των μαθητών του Πλωτίνου. Εγεννήθη περίπου το 232 και απέθανεν εις την Ρώμην περί το 304 μ.Χ. Διετέλεσεν κατ' αρχάς μαθητής του Λογγίνου εις την Αθήνα και από της ηλικίας των 30 ετών μαθητής του Πλωτίνου εις την Ρώμην. Συνέγραψεν πλείστα έργα, εις τα οποία πραγματεύεται φιλοσοφικά, μαθηματικά, αστρονομικά, ιστορικά και γραμματικά θέματα. Εκ των έργων του εσώθησαν ελάχιστα. Από το έργον του «*Φιλοσόφου ιστορίας*», εις το οποίον εξέθετε τον βίον και την διδασκαλίαν των σπουδαιοτέρων φιλοσόφων της αρχαιότητος, διεσώθη μόνον ο «*Πυθαγόρειος βίος*». Άλλα έργα του είναι «*Σχόλια εις το έργον του Πλωτίνου*», «*Σχόλια εις το έργον περί Μουσικής του Πτολεμαίου*», «*Εισαγωγή*» εις το έργον «*Κατηγορία*» του Αριστοτέλους, «*Βίος Πλωτίνου*» κ.λπ. Ο Πορφύριος υπήρξεν εκ των σφοδροτέρων πολεμίων του Χριστιανισμού. Συνέγραψεν 15 βιβλία κατά των Χριστιανών, τα οποία ερρίφθησαν εις την πυράν και εκάησαν με διάταγμα, το οποίον εξεδόθη το έτος 448, των αυτοκρατόρων Θεοδοσίου Β' (408-450 μ.Χ.) της Ανατολής και του Ουαλεντινιανού (425-455 μ.Χ.) της Δύσεως.

<sup>3</sup> Το χειρόγραφον αποδίδεται εις τον Ευκλείδην από τον Πορφύριον, όστις το παραθέτει κατά κόρον (Comm. 98.14-103.25 εμπεριέχει τας πρώτας δεκαέξι προτάσεις και υπάρχουν περιληπτικά αποσπάσματα και αλλού). Το κείμενον, το οποίον παραθέτει ο Πορφύριος, δεν είναι εντελώς ταυτόσημον με το κείμενον του βιβλίου μας, και περιλαμβάνει –πιθανώς εσφαλμένως– την πρότασιν «*Κανένα πολλαπλάσιον διάστημα πλην μόνον του διαπασών δεν δομείται μόνον εξ επιμορίων διαστημάτων*», η οποία δεν υπάρχει εις το χειρόγραφον MSS.

<sup>4</sup> Τμήματα της πραγματείας παρατίθενται επίσης και υπό του Βοηθίου. Και αυτά δεν είναι ταυτόσημα με το χειρόγραφο MSS.

<sup>5</sup> Βοήθιος, του οποίου το πλήρες όνομα είναι Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius. Ρωμαίος φιλόσοφος και πολιτικός, όστις έζησεν από το 480 έως το 524 μ.Χ. Εγεννήθη εις την Ρώμην και είχε την σπουδαίαν τύχην να σπουδάσει εις τας Αθήνας. Εθεώρησεν ως αποκλειστικόν του πνευματικόν καθήκον να μεταλαμπαδεύσει την ελληνικήν φιλοσοφίαν εις την Δύσιν. Υπήρξεν σύμβουλος του βασιλέως των Οστρογόθων Θεοδορίου κοντά εις τον οποίον ε γνώρισεν δόξας, τιμάς, αλλά και την ατίμωσιν, την φυλάκισιν και τον θάνατον δια φρικτών βασανιστηρίων. Το έργον του έγκειται εις μεταφράσεις και υπομνήματα Ελλήνων συγγραφέων. Μετέφρασεν εις την λατινικήν την «*Αριθμητικήν Εισαγωγήν*» του Νικομάχου του Γερασηνού («*Institutio arithmetica*») και το απωλεσθέν μουσικόν έργον του ίδιου «*Μουσική Εισαγωγή*» («*Institutio musica*»). Το μουσικόν έργον αυτό είναι πολύτιμος πηγή πληροφορίας για την αρχαίαν μουσικήν και απετέλεσεν την βάση των μουσικών μελετών κατά τον Μεσαίωνα. Το πλέον γνωστόν εξ όλων των έργων του («*Παραμυθία της Φιλοσοφίας*») «*Consolatio Philosophiae*», το συνέγραψεν προς παρηγορίαν του εις την φυλακήν και είναι πεζόν και έμμετρον κείμενον. Βοηθήματά του για την συγγραφήν αυτού του έργου είχαν τον «*Προτρεπτικόν*» του Αριστοτέλους, τον Πλάτωνα, τον Κικέρωνα και τον Πλωτίνου. Κύριο τμήμα του έργου του Βοηθίου σχετίζεται με την *Λογικήν* του Αριστοτέλους και τους σχολιαστές της.

Το πολυδιαδεδομένον έργον του Βοηθίου μετεφράσθη εις πάρα πολλάς γλώσσας και εσχολιάσθη υπό πολλών σχολιαστών. Πρέπει να τονισθεί το γεγονός ότι σήμερα υπάρχουν περισσότερα των 400 χειρογράφων του εις την λατινικήν γλώσσαν και δεν είναι ολίγα τα χειρόγραφα εις την ελληνικήν γλώσσαν, τα οποία τα μετέφρασεν τον 14<sup>ο</sup> αιώνα ο μοναχός Μάξιμος Πλανούδης. Πρέπει να τονισθεί μετ' εμφάσεως ότι επί αιώνας ο Αριστοτέλης, η βάση της μεσαιωνικής φιλοσοφίας, ήτο γνωστός εκ των μεταφράσεων και εκ των πρωτοτύπων εργασιών του Βοηθίου.

Ένιοι των σχολιαστών αμφιβάλλουν αφενός όσον αφορά εις τον έναν και μοναδικόν συγγραφέα της πραγματείας, αφετέρου εάν αύτη συνεγράφη εις μίαν και μόνον περίοδον.

Η *Κατατομή κανόνος* με το Ευκλείδειον ύφος, την σπονδυλωτήν δομήν και, ουσιαστικώς, τον Πυθαγόρειον χαρακτήρα, αποτελεί έργον αναφοράς εκ της αρχαιότητος. Η *Κατατομή κανόνος* έχει έλξει την προσοχήν και το ενδιαφέρον πολλών Μουσικολόγων, Φιλολόγων, Μαθηματικών και Ιστορικών της επιστήμης και έχει πολυμελετηθεί, αφού προηγουμένως είχε πολυαντιγραφηθεί.

Όντως, σήμερον η μεγάλης εκτάσεως Ελληνική έκδοσις σώζεται εις 32 χειρόγραφα αντίγραφα, η συντομοτέρα Ελληνική έκδοσις, η οποία εμπεριέχεται εις το Υπόμνημα του Πορφυρίου «*Εις τα αρμονικά του Πτολεμαίου*», σώζεται εις 52 χειρόγραφα αντίγραφα και, τέλος, η Λατινική έκδοσις, η οποία εμπεριέχεται εις το έργον «*De institutione musica*» του Βοηθίου, σώζεται εις περισσότερα των 130 χειρογράφων αντιγράφων.

Τονιστέον ότι εις καμίαν εκ των υπαρξασών εκδόσεων αφενός δεν ελήφθησαν υπ' όψιν όλα τα υπάρχοντα χειρόγραφα της Ευκλειδείου *Κατατομής κανόνος* και αφετέρου ουδείς προέβη εις λεπτομερή σύγκρισιν των τριών σωζομένων μορφών της *Κατατομής κανόνος*.

### 3. Τίς συνέγραψεν την πραγματείαν *Κατατομή κανόνος*;

Εκκινούμεν εκ της Λατινικής εκδόσεως της *Κατατομής κανόνος*, η οποία είναι η πλέον διαδεδομένη και μας διασώζεται εις τα παλαιότερα, από φυσικής απόψεως, χειρόγραφα του 9<sup>ου</sup> και του 10<sup>ου</sup> αιώνας. Η εν λόγω πραγματεία εμφανίζεται εις την αρχήν του 4<sup>ου</sup> βιβλίου του Βοηθίου *De institutione musica* άνευ ουδεμιάς αναφοράς εις το όνομα συγγραφέως τινός. Ο Βοήθιος (480-524 μ.Χ.) την χρησιμοποιεί ως εισαγωγήν προτρέπων τον αναγνώστην να αναθεωρήσει κάποια θέματα προτού συνεχίσει.

Θα εδυνάμεθα εν πρώτοις να θεωρήσωμεν τον Βοήθιον ως τον συγγραφέα της πραγματείας *Κατατομή κανόνος*. Όμως, η εμφάνισις του έργου *Κατατομή κανόνος* εις το Υπόμνημα του Πορφυρίου *Εις τα αρμονικά του Πτολεμαίου*<sup>6</sup> μας αποτρέπει, δεδομένου ότι Πορφύριος έζησεν δύο αιώνας προ του Βοηθίου.

---

Τον Βοήθιον, τον οποίον άλλοι τον αποκαλούν τελευταίον Ρωμαίο και άλλοι πρώτον σχολαστικόν, μερικές εκκλησίες της Ιταλίας τον εθεώρησαν μάρτυρα και άγιο του Χριστιανισμού.

<sup>6</sup> Μερικοί αμφισβητούν το γεγονός ότι ο Πορφύριος είναι ο συγγραφέας της πραγματείας Υπόμνημα «*Εις τα αρμονικά του Πτολεμαίου*» και θεωρούν ως συγγραφέα τον διάσημον Μαθηματικόν τον Πάππον τον Αλεξανδρέα (3<sup>ου</sup> – 4<sup>ου</sup> μ.Χ. αιώνας).

Εις την μεγάλης εκτάσεως Ελληνικήν έκδοσιν η πραγματεία *Κατατομή κανόνος* αποδίδεται εκ της πλειονότητος των ερευνητών εις τον Ευκλείδην και εξ ολιγοτέρων μελετητών εις τον Κλεονείδην, για τον οποίον, σημειωθήτω, δεν γνωρίζομεν τίποτα.

Ο Πορφύριος, ζήσας 600 έτη μετά τον Ευκλείδην, εις τον σχολιασμόν του αποδίδει σαφώς την πραγματείαν *Κατατομή κανόνος* εις τον Ευκλείδην.

Ο νεοπλατωνικός φιλόσοφος Πρόκλος ο Λύκιος (ο Διάδοχος) (Κωνσταντινούπολη 410 μ.Χ. – Αθήνα 485 μ.Χ.) και ο μαθητής του Μαρίνος ο Φλάβιος<sup>7</sup> (5<sup>ος</sup> αιώνας μ.Χ.) αποδίδουν την συγγραφήν της πραγματείας *Κατατομή κανόνος* εις τον Ευκλείδην. Τέλος, εις τον Ευκλείδην αποδίδεται η συγγραφή της πραγματείας *Κατατομή κανόνος* από τον Θεόδωρον τον Μετοχίτην<sup>8</sup> (1270-1332 μ.Χ.), πρώτον υπουργόν του αυτοκράτορος του Βυζαντίου Ανδρονίκου ΙΙ του Παλαιολόγου, μαθητού του Μανουήλ Βρυένιου<sup>9</sup>.

<sup>7</sup> Μαρίνος ο Φλάβιος. Νεοπλατωνικός φιλόσοφος, όστις εγεννήθη εις την Φλάβιαν Νεάπολιν της Παλαιστίνης και έζησεν τα τέλη του Ε' και τας αρχάς του Στ' μ.Χ. αιώνας. Υπήρξεν μαθητής και διάδοχος του Πρόκλου εις την Σχολήν των Αθηνών. Συνέγραψεν «*Ερευνα των φιλοσόφων*» ένα συμπίλημα το οποίον εχάθη, υπομνήματα εις τον «*Φίληβον*» και εις τον «*Παρμενίδην*» του Πλάτωνος, τα οποία ο ίδιος του τα έκαψε μετά τον θάνατον του Πρόκλου, μίαν συλλογήν εκλεκτών κομματιών εις τα υπομνήματα του Συριανού επάνω εις τα ορφικά άσματα, η οποία εχάθη, και, τέλος, «*Βίον του Πρόκλου ή περί ευδαιμονίας*», το οποίον διεσώθη. Εις το περιεργον τούτου έργου αναλύει, καθορίζει και ταξινομεί όλας τας αρετάς, αι οποίαι, κατά τους Αλεξανδρινούς, αποτελούν την τελειότητα του αληθινού φιλοσόφου από τας σωματικές δεξιότητας μέχρι την θεουργίαν και παρουσιάζει τον τρόπον δια του οποίου ο διδάσκαλος του διέτρεξεν όλους αυτούς τους βαθμούς. Ο Μαρίνος αγνοεί τον Χριστιανισμόν. Αυτός είναι ο λόγος που δεν ομιλεί ποτέ και πουθενά περί αυτού. Ο «*Βίος του Πρόκλου*» εδημοσιεύθη τον Ιστ' αιώνα εις ατελές χειρόγραφον και επανεκδόθη αφενός μεν το 1700 συμπληρωμένος υπό του Φαβρικίου εις το Αμβούργον εις ειδικήν έκδοσιν, αφετέρου δε εις βελτιωμένην έκδοσιν το 1814 υπό του Boissanade.

<sup>8</sup> Θεόδωρος ο Μετοχίτης. Μέγας λογοθέτης, δηλαδή πρωθυπουργός, του Βυζαντίου επί της βασιλείας του Ανδρονίκου ΙΙ του Παλαιολόγου (1282-1328 μ.Χ.). Ο μαθητής του Νικηφόρος Γρηγοράς τον αποκαλεί «έμψυχον βιβλιοθήκην», διότι ήτο λόγιος. Εκ του έρωτός του προς την Φιλολογίαν παρεμέλει τελείως τας υποθέσεις του κράτους κατά τας λιαν επικινδύνους στιγμάς, όπου οι Τούρκοι καταλάμβανον την Προύσσαν και ηπειλούν τας Μικρασιατικάς κτήσεις, οι Σέρβοι και οι Βούλγαροι προσεπάθουν να καταλάβουν τας Ευρωπαϊκάς επαρχίας του Βυζαντίου και ο Ανδρόνικος ο Παλαιολόγος συνωμώτει και εστασίαζεν για την κατάληψιν της εξουσίας. Εις τας 24 Μαΐου 1328 ο στασιαστής Ανδρόνικος Παλαιολόγος εισήλθεν εις την Κωνσταντινούπολιν, εξεθρόνισεν τον Ανδρόνικον ΙΙ και εξώρισεν τον Θεόδωρον εις το Διδυμότειχον. Απέθανεν το 1332 ως μοναχός με το όνομα Θεόκλητος εις μοναστήριον της Χώρας. Έγραψεν 18 ρητορικά έργα εκ των οποίων σώζονται μόνον δύο, είκοσι εξάμετρα ποιήματα, ενώ δεν γνωρίζομεν τα φιλοσοφικά και τα αστρονομικά του έργα. Εκ των επιστολών του αντλούμε πολλάς και πολυτίμους πληροφορίας περί της εποχής του.

<sup>9</sup> Μανουήλ Βρυένιος. Βυζαντινός θεωρητικός διδάσκαλος της εκκλησιαστικής μουσικής. Έζησεν τα τέλη του 13<sup>ου</sup> αρχές 14<sup>ου</sup> μ.Χ. αιώνας. Μας κατέλιπεν σύγγραμμα εξαιρετικά σπουδαίον περί την θεωρίαν της μουσικής, εις το οποίον πραγματεύεται τους οκτώ ήχους και τα τετράχορδα των αρχαίων και αποδεικνύει την άμεσον σχέσιν της αρχαίας μουσικής των Ελλήνων μετά της Βυζαντινής εκκλησιαστικής μουσικής. Για την συγγραφήν αυτού του συγγράμματος συνεβουλεύθη τους Αλεξανδρινούς μουσικούς Ευκλείδην, Αριστείδην και Πτολεμαίον. Διακρίνει τα τρία γένη της μουσικής, την δίεσιν, καθώς επίσης το τριτημόριον και το τεταρτημόριον του τόνου. Όμως, πουθενά εις το σύγγραμμά του δεν αναφέρει περί χειρονομίας και χαρακτήρων, παρόλο που πολύ καλώς γνωρίζομεν ότι εις την εποχήν του ήταν γνωστή η χρισίς των. Αυτό μας οδηγεί εις την υπόθεσιν ή ότι ο Βρυένιος ήτο αμήτος εις την εκκλησιαστικήν μουσικήν και ησχολήθη μόνον με τας κλίμακας αυτής ή ότι συνέγραψεν και άλλα συγγράμματα, τα οποία εχάθησαν.

#### 4. Μέρη της πραγματείας *Κατατομή κανόνος*

Το κείμενον της πραγματείας *Κατατομή κανόνος* σήμερα το γνωρίζομεν ως αποτελούμενον εκ διαφόρων μερών, μολοντί δεν είναι καθόλου προφανές πόθεν αρχίζει και πού τελειώνει έκαστον των μερών αυτής.

Λαμβάνοντες υπ' όψιν τας τρεις προαναφερθείσας διασωθείσας εκδοχάς, άνευ αμφιβολίας η *Εισαγωγή* αποτελεί το πρώτον μεγάλο μέρος, το οποίον δεν υπάρχει εις την εκδοχήν του Πορφυρίου. Εις την *Εισαγωγή* διατυπύεται μία θεωρία περί της φυσικής αιτίας των ήχων και των μουσικών των υψών κατά τοιούτον τρόπον, ώστε να αιτιολογείται η χρήσις των μουσικών υψών ως σχετικών ποσοτήτων και των μεταξύ των διαστημάτων ως αριθμητικών λόγων. Ο συγγραφεύς συνεχίζει κατατάσσων τους αριθμητικούς λόγους των διαστημάτων εις τρεις κλάσεις, αλλά εντάσσει τα εύφωνα μουσικά διαστήματα (συμφωνίας) μόνον εις δύο εξ αυτών<sup>10</sup>.

Το δεύτερον μεγάλο μέρος αποτελούν όλαι αι μαθηματικά προτάσεις, αίτινες υπάρχουν και εις τας τρεις εκδοχάς της πραγματείας. Με αυτάς τας μαθηματικάς προτάσεις τελειώνει η Λατινική εκδοχή της πραγματείας. Πρόκειται περί εννέα μαθηματικών προτάσεων (1-9 ή α-θ), εννέα καθαρών μαθηματικών θεωρημάτων, αποδεικνυόντων διαφόρους προτάσεις για τας αναλογίας καθεαυτάς και τα «διαστήματα» -με την ευρείαν έννοιαν του όρου και όχι απαραίτητως με την μουσική- μεταξύ των όρων των αναλογιών.

Ακολουθεί το τρίτον μεγάλο μέρος, το οποίον περιλαμβάνει ακουστικάς προτάσεις με ένα μέρος των οποίων ολοκληρούται η εκδοχή του Πορφυρίου.

Το υπόλοιπον μέρος των ακουστικών προτάσεων και παν ό,τι απομένει έως το τέλος της μεγάλης μήκους Ελληνικής εκδοχής συναποτελούν το τέταρτον και τελευταίον μεγάλο μέρος της πραγματείας *Κατατομή κανόνος*.

Εκ των επτά υπαρχουσών ακουστικών προτάσεων (10-16) αι δύο πρώται ανήκουν εις το τρίτον μέρος της διατριβής και αι πέντε ακόλουθοι εις το τέταρτον μέρος αυτής. Αι μουσικά έννοια αρχίζουν να εισάγονται από την πρότασιν 10. Δια των Μαθηματικών των εννέα πρώτων θεωρημάτων, δια των επιχειρημάτων της *Εισαγωγής* και δι' ενός πλήθους μουσικών εμπειριών αι προτάσεις 10-13

<sup>10</sup> Περισσότερον εξ όλων των μερών της πραγματείας αμφισβητείται η *Εισαγωγή*. Βεβαίως, είναι ένα ευφύεσ τμήμα της πραγματείας, και ως πρόλογος είναι απαραίτητον, δεδομένου ότι περιλαμβάνει κάποιας λεπτομερείας αναγκαίας για την κατανόησιν των προτάσεων. Αλλά θα ήτο δυνατόν η *Εισαγωγή* να φανεί ως πολύ συντομογραφημένη και ένια των επιχειρημάτων, έτσι, όπως διατυπύονται εις αυτήν, πολύ αδύνατα για να θεωρηθεί έργο ενός συγγραφέα, όστις δια περισσής προσοχής διετύπωσεν και απέδειξεν τα θεωρήματα. Ο Πορφύριος και αι πηγαί του παραφράζουν μέρη της *Εισαγωγής*. Πιθανώς να πρόκειται περί μιας μεταγενεστέρας περιλήψεως ή παραφράσεως της αρχικής *Εισαγωγής*.

παρουσιάζουν τους αριθμητικούς λόγους των βασικών μουσικών συμφωνιών και του τόνου και αι προτάσεις 14-16 αποτελούν αποδείξεις δευτερευουσών θέσεων.

Εις την συνέχειαν του τετάρτου μέρους αι δύο προτάσεις (17-18) αναφέρονται εις το εναρμόνιον γένος και αι τελευταίαι δύο προτάσεις (19-20) μας πληροφορούν δια λεπτομερούς μαθηματικής διαδικασίας περί της υλοποιήσεως της κατατομής του κανόνος εις το *Τέλειον Μείζον Αμετάβολον Σύστημα*.

Σημειωτέον ότι ο συγγραφεύς ενδιαφέρεται κυρίως να αποδείξει συστηματικώς και τυπικώς τας προτάσεις, αίτινες αποτελούν την βάσιν της Πυθαγορείου και της Πλατωνικής παραδόσεως<sup>11</sup> και ότι τα συμπεράσματά του δεν είναι ούτε καθαρώς «ορθολογιστικά», ούτε καθαρώς μαθηματικά. Ταύτα βασίζονται κυρίως εις αποδεκτά γεγονότα της εμπειρικής παρατηρήσεως<sup>12</sup> και εις εκ της Εισαγωγής φυσικάς και εις γενικής φύσεως θεωρήσεις.

Τοιουτοτρόπως, τα επιχειρήματα δεν αναπληρώνουν την μουσικήν εμπειρίαν, αλλά απλώς αποτελούν μίαν προσπάθειαν να μεταφράσουν τας αληθείας αυτών των εμπειριών εις την γλώσσαν των Μαθηματικών, ώστε αι επαγωγαί και αι αμοιβαίαι σχέσεις να δύνανται να μελετηθούν σχολαστικώς.

## 5. Μονόχορδον ή Πυθαγόρειος κανών

Η προσπάθεια των Πυθαγορείων κατά τας γραφάς εμφανίζεται να είναι η επιβολή τῆ βοηθεία της θεωρίας των λόγων ενός συστήματος προσδιορισμού των μαθηματικών σχέσεων μεταξύ των φθόγγων της κλίμακος<sup>13</sup>.

<sup>11</sup> Όποιος και εάν είναι ο συγγραφεύς αυτής της πραγματείας, το βέβαιον είναι ότι εγνώριζεν καλώς το έργον του Αρχύτου και του Ευκλείδου. Η πρότασις 3 είναι μια εκδοχή ενός σημαντικού θεωρήματος, το οποίον ο Αρχύτας είχε αποδείξει και αρκεταί προτάσεις χρησιμοποιούν θεωρήματα γνωστά εκ των *Στοιχείων* του Ευκλείδου. Αλλά ο Ευκλείδης παρεκκλίνει από τον Αρχύτα εις την ανάλυσίν του για το εναρμόνιον και το διατονικόν γένος (πρότασις 17, πρότασις 20). Αι διαιρέσεις του αντιστοιχούν εις αυτάς του Φιλολάου (1.12 απόσπ. 6) και του Πλάτωνος (2.3 Τίμ. 35b-36b) και των μεταγενεστέρων Πλατωνικών Πυθαγορείων, ως σχολιάζει ο Θέων ο Σμυρναίος (Άδραστος 9.2-9.3, Θράσυλλος 9.4-9.5) και ο Νικόμαχος εις το *Εγχειρίδιον*. Πάλι, μολονότι οι εισαγωγικές προτάσεις είναι προφανώς αναπολήσεις του 1.19 Αρχύτας απόσπ. 1, ο Ευκλείδης διαφοροποιείται από τον Αρχύτα και από την ισχύουσα παράδοσιν γενικώς, όσον αφορά εις την θεωρίαν του μουσικού ύψους, την οποίαν η Εισαγωγή προχωρεί να σκιαγραφήσει. Υπάρχουν υπομνήσεις της ίδιας ιδέας και αλλού, αλλά καμία άλλη πηγή δεν την εκφράζει ρητώς και κατηγορηματικώς και η ανάπτυξις της εις μία πλήρως αρθρωτή υπόθεσιν ίσως είναι κατόρθωμα αυτού καθ'αυτού του Ευκλείδου.

<sup>12</sup> Πρέπει να εστιάσωμε την προσοχήν ημών κυρίως εις μίαν αδυναμίαν αυτής της πραγματείας, ήτις αφορά εις την μη ικανοποιητικήν φύσιν των απόψεων, αι οποίαι συνδέουν τας συμφωνίας μετά των πολλαπλασίων και των επιμορίων λόγων εις το τέλος της Εισαγωγής. Η εν λόγω αδυναμία ωδήγησεν εις ένα σοβαρόν πρόβλημα σχετικώς με το εάν είναι ή δεν είναι εύφωρον διάστημα το διάστημα του διαπασών και διατεσσάρων (8:3). Το συγκεκριμένον διάστημα αποτελεί την «αχίλλειον πτέρναν» της πραγματείας και ο συγγραφεύς της αποφεύγει εντελώς να το μνημονεύσει (πρότασις 12).

<sup>13</sup> ... οί μὲν γὰρ Πυθαγορικοί μὴδὲ ἐν οἷς ἀναγκαῖον ἦν πᾶσι τῆ τῆς ἀκοῆς προσβολῆ κατακολουθήσαντες ἐφήρμοσαν ταῖς διαφοραῖς τῶν ψόφων λόγους ἀνοικίους πολλαχῆ τοῖς φαινομένοις, ὥστε καὶ διαβολὴν ἐμποῖησαι τῷ τοιοῦτῳ κριτηρίῳ παρὰ τοῖς ἑτεροδόξοις. Κλαυδίου Πτολεμαίου, *Ἀρμονικῶν Πρώτον*, 2.19-23.

Τονιστέον μετ' εμφάσεως το γεγονός ότι χρησιμοποιούντες το ανθρώπινον οὖς ως ὄργανον μετρήσεως δεν δυνάμεθα επακριβῶς να μετρήσωμεν τας σχέσεις των μουσικῶν υψῶν (=των δυνάμεων) των φθόγγων.

Αι ἀπ' ἀνέκαθεν προσπάθειαι των Ἀρμονικῶν, ὅπως ἐπιβάλλουν μίαν ακουστικὴν μονάδα μετρήσεως των μουσικῶν διαστημάτων, ἀπέτυχον οικτρῶς. Συνεπῶς, δεν ἠδύναντο να πραγματοποιοῦν ακουστικὰς μετρήσεις.

Προχωροῦντες εἰς την κατανόησιν της φυσιολογίας του ἀνθρώπινου οργανισμού, ἀνελήφθησαν ὅτι ἡ ἐπιδιωκομένη ἀκρίβεια εἰς τας μετρήσεις των σχέσεων των μουσικῶν υψῶν των φθόγγων θα ἐπετυγχάνετο μέσῳ ἐνός μετασχηματισμοῦ μεταφέροντος τας σχέσεις των μουσικῶν υψῶν ἀπὸ τον ἄκρον της Ἀκοῆς εἰς τον ἄκρον της Ὁράσεως, ἐνθα εἶναι ἐφικτόν να πραγματοποιηθῶν ἀκριβεῖς μετρήσεις<sup>14</sup>.

Ὁ ἐν λόγῳ μετασχηματισμὸς υλοποιήθη δια του Πυθαγορείου κανόνος<sup>15</sup> ἢ μονοχόρδου, μετασχηματίζοντος τους λόγους των φθόγγων ἀπὸ ακουστικὰ γεγονότα εἰς λόγους δονουμένων τμημάτων χορδῆς, ἤτοι εἰς οπτικὰ γεγονότα.

<sup>14</sup> Ὁ Ἰάμβλιχος στο ἔργο του «Περὶ βίου Πυθαγορικός λόγος (De vita Pythagorica)» κς'.115. 6-10 ἀναφέρει:

Ἐν φροντίδι ποτὲ καὶ διαλογισμῶ συντεταμένῳ ὑπάρχον, εἰ ἄρα δύναται τῇ ἀκοῇ βοηθεῖαν τινὰ ὀργανικὴν ἐπινοῆσαι, παγίαν καὶ ἀπαραλόγιστον, οἷαν ἢ μὲν ὄψις διὰ τοῦ διαβήτου καὶ διὰ τοῦ κανόνος ἢ νῆ Δία διὰ διόπτρας ἔσχεν, ἢ δ' ἀφή διὰ τοῦ ζυγοῦ ἢ διὰ τῆς τῶν μέτρων ἐπινοίας,

[Ὁ Πυθαγόρας εὐρίσκειτο κάποτε εἰς διαρκὴ φροντίδα καὶ διαλογισμὸν μήπως θα ἠδύναιτο να ἐπινοῆσει κάποιον ἐνὸργανον μέσον ἐπιβοηθητικόν της Ἀκοῆς, το ὁποῖον θα εἶναι σταθερόν καὶ θα βασιζέται εἰς την λογικὴν, ὡς ἀκριβῶς ἡ ὄρασις ἔχει τον διαβήτην καὶ τον κανόνα (χάρακα) ἢ μα τον Δίαν την διόπτραν καὶ ἡ ἀφή ἔχει τον ζυγὸν ἢ τα ἐπινοηθέντα σταθμὰ].

Ὁ Κλαύδιος Πτολεμαῖος πιστεύει ὅτι το οὖς εἶναι συχνάκις ἀναξιόπιστον, ὅσον ἀφορᾷ εἰς την ἐκτίμησιν των μουσικῶν διαστημάτων καὶ δια τούτο πρέπει να το βοηθήσωμεν, ὅπως κάνομε με τον οφθαλμόν, με κάποιον λογικὸν κριτήριον, το ὁποῖον να λειτουργεῖ τῇ χρήσῃ καταλλήλων ὀργάνων, ὡς λ.χ. ὁ χάραξ μας εἶναι χρήσιμος γὰρ ἂν ἀσχοληθῶμεν με την ευθύτητα καὶ ὁ διαβήτης γὰρ τας καταμετρήσεις του κύκλου καὶ των μερῶν του

... τῶν ὁμοίων οὖν καὶ περὶ τοὺς ψόφους καὶ τὴν ἀκοὴν συμβεβηκότων καθάπερ ταῖς ὄψεσι δεῖ τινος πρὸς ἐκεῖνα κριτηρίου λογικοῦ διὰ τῶν οἰκείων ὀργάνων, οἷον πρὸς μὲν αὐτὸ τὸ εὐθὺ τῆς στάθμης φέρε εἰπεῖν, πρὸς δὲ τὸν κύκλον καὶ τὰς τῶν μερῶν καταμετρήσεις τοῦ καρκίνου. τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ ταῖς ἀκοαῖς διακόνους οὖσαις μάλιστα μετὰ τῶν ὄψεων τοῦ θεωρητικοῦ καὶ λόγον ἔχοντος μέρους τῆς ψυχῆς, δεῖ τινος ἀπὸ τοῦ λόγου, πρὸς ἃ μὴ περὶ κἀσιν κρῖναι ἀκριβῶς, ἐφόδου, πρὸς ἣν οὐκ ἀντιμαρτυρήσουσιν ἄλλ' ὁμολογήσουσιν οὕτως ἔχειν.

Κλαυδίου Πτολεμαίου *Ἀρμονικά*, 1.1.52-60.

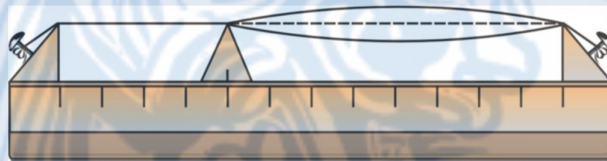
<sup>15</sup> Τὸ μὲν οὖν ὄργανον τῆς τοιαύτης ἐφόδου καλεῖται κανὼν ἁρμονικός, ἀπὸ τῆς κοινῆς κατηγορίας καὶ τοῦ κανονίζοντος τὰ ταῖς αἰσθήσεσιν ἐνδέοντα πρὸς τὴν ἀλήθειαν παρελιημένος. Αὐτόθι, 1.2.2-4.

Τὸ ὄργανον τῆς ἐφόδου φησὶν, ἣν ὁ λόγος ἐξευρέ τε καὶ δέδωκε ταῖς αἰσθήσεσιν πρὸς τὸ κανονίζοντος τὰ ἐνδέοντα αὐταῖς πρὸς τὴν ἀλήθειαν, κανὼν καλεῖται ἁρμονικός ἀπὸ τῆς κοινῆς κατηγορίας τοῦ εὐρίσκοντος ὀργάνου τὸ ἐλλεῖπον ταῖς αἰσθήσεσιν εἰς τὴν ἀκρίβειαν, ὃ καλεῖται κανὼν, οὕτω κεκλημένος. πάντα γὰρ τὰ πρὸς τοῦτο ἐπιτήδεια ὄργανα ταῖς αἰσθήσεσιν <οὔτω> καλεῖται. οὐ γὰρ δὴ κανὼν, οὐδὲ κανονικὴ αἰσθήσει ἐφοδος κέκληται ἢ κατὰ τὴν ἁρμονικὴν θεωρίαν ἀπὸ τοῦ κατὰ τὰς κιθάρας καλουμένου κανόνος, ἐνθα διατείνονται αἱ χορδαί, ἀλλ' οἱ Πυθαγόρειοι,

Ως γνωστόν, εκ των πρωτογενών πηγών, ήτοι τα αρχαία κείμενα της ελληνικής γραμματείας, την τέχνην, τας αγγειογραφίας, τα θραύσματα πραγματικών μουσικών οργάνων και εξ άλλων μαρτυριών αρχαιολογικών ευρημάτων, έχομεν μορφώσει γνώμην και άποψιν περί του πλήθους και του είδους των αρχαιοελληνικών μουσικών οργάνων (έγγχορδα, πνευστά, κρουστά). Μεταξύ των εγγόρδων ή εντατών μουσικών οργάνων καταλέγεται και ο Πυθαγόρειος κανών ή μονόχορδον, διότι η εφεύρεσίς του αποδίδεται εις τον Πυθαγόρα.

Πρόκειται περί ενός πρωτοοργάνου – εργαλείου, το οποίον εχρησιμοποιείτο εκ των πρώτων βημάτων της Εφαρμοσμένης Μουσικής Ακουστικής, ως πρωτοεπιστήμης, για την μέτρησιν, τας δοκιμάς και τον υπολογισμόν των πρώτων ολίγων λόγων δια των οποίων εξεφράζοντο τα σύμφωνα Πυθαγόρεια μουσικά διαστήματα, ήτοι  $2/1$ ,  $3/2$ ,  $4/3$ ,  $3/1$  και  $4/1$ .

Εκ του ονόματος του οργάνου προκύπτει ότι τούτο έφερεν μίαν μόνον χορδήν τανυομένην εφ' ενός διαβαθμισμένου κανόνος μεθ' ολίγων ισαπεχουσών υποδιαιρέσεων και έναν κινούμενον υπαγωγέα (κινητήν γέφυραν ή κινητόν καβαλάρην), όστις διήρει το μήκος της χορδής, επιτρέπων μόνον ένα τμήμα αυτής να ταλαντούται. Τοιουτοτρόπως, μεταβαλλομένου του μήκους του ταλαντουμένου τμήματος της χορδής, μετεβάλλετο το τονικόν ύψος του παραγομένου ήχου.



Το μονόχορδον για την μελέτην των νόμων των χορδών

Έστωσαν τα παλλόμενα τμήματα χορδής με μήκη  $L_1$  και  $L_2$  ( $L_1 < L_2$ ), άτινα παράγουν ήχους με συχνότητας  $f_1$  και  $f_2$ , αντιστοίχως. Το μουσικόν διάστημα εις τον χώρον της Ακοής εκφράζεται δια του λόγου των συχνοτήτων  $\frac{f_1}{f_2}$  των δύο ακουομένων φθόγγων, ένθα ( $f_1 > f_2$ ).

οΐπερ και μάλιστα την έφοδον εΐρον, κανονικην μέν εκάλουν, ήν νυν άρμονικην λέγομεν θεωρίαν συνωνύμως, κανόνα δέ τὸ τῆς ὀρθότητος τῶν συμμετριῶν μέτρον, ὃ και ὀρίζονται τινες αὐτῶν οὕτω. ἄκανών ἐστι μέτρον ὀρθότητος τῶν ἐν τοῖς φθόγγοις ἡρμοσμένων διαφορῶν, αἱ θεωροῦνται ἐν λόγοις ἀριθμῶν.

Πορφυρίου, *Εἰς τὰ Ἀρμονικά Πτολεμαίου Υπόμνημα*, 22.10-22.

γράφει γέ τοι περί τούτου (sc. τοῦ κανόνος) καὶ Πτολεμαῖς ἡ Κυρηναία ἐν τῇ Πυθαγορικῇ τῆς μουσικῆς στοιχειώσει ταῦτα: «Ἡ οὖν κανονικὴ πραγματεία, κατὰ τίνος μᾶλλον ἐστι; καθόλου κατὰ τοὺς Πυθαγορικούς; ἦν γάρ νυν ἄρμονικην λέγομεν, ἐκεῖνοι κανονικὴν ὠνόμαζον. ἀπὸ τίνος κανονικὴν αὐτὴν λέγομεν; οὐκ ὡς ἐνιοι νομίζουσι ἀπὸ τοῦ κανόνος ὀργάνου παρονομασθεῖσαν, ἀλλ' ἀπὸ τῆς εὐθύτητος ὡς διὰ ταύτης τῆς πραγματείας τὸ ὀρθὸν τοῦ λόγου εὐρόντος καὶ τὰ τοῦ ἡρμοσμένου παραπήγματα.

Πτολεμαῖς, *Αποσπάσματα Μουσικῆς*, 243.12-18.



Εκ της θεωρίας των χορδών είναι γνωστόν ότι η σχέση  $f = \frac{k}{2L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}$   $k \in \mathbb{N}$  δί-

δει την παραγομένη συχνότητα του αρμονικού  $k$  τάξεως μιας χορδής μήκους  $L$ , πακτωμένης κατά τα δύο άκρα αυτής, με γραμμική πυκνότητα  $\mu$ <sup>16</sup> και ταυνομένης υπό δυνάμεως  $F$ .

Εφαρμόζοντας την προμηνημονευθείσαν σχέσηιν για δύο τμήματα της χορδής με διαφορετικά μήκη, λαμβάνομεν δύο αναλυτικές εκφράσεις για τας συχνότητας  $f_1$  και  $f_2$ , αντιστοίχως. Διαιρούντες κατά μέλη τας δύο εξισώσεις, λαμβάνομεν την σχέσιν:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{k}{2L_1} \sqrt{\frac{T}{\mu}}}{\frac{k}{2L_2} \sqrt{\frac{T}{\mu}}} = \frac{L_2}{L_1}$$

ήτις εκφράζει τον συζητούμενον μετασχηματισμόν, δεδομένου ότι ο λόγος των μηκών  $\frac{L_2}{L_1}$  των δονουμένων τμημάτων της χορδής εκφράζει το μουσικόν διάστημα εις τον χώρον της Οπτικής.

Σχολιάζοντες την προκύπτουσα σχέσιν λέγομεν ότι όσον μικρότερον είναι το μήκος του ταλαντουμένου τμήματος της χορδής, τόσον μεγαλύτερον είναι το μουσικόν ύψος του παραγομένου ήχου κι αντιστρόφως, ήτοι εάν  $L_2 > L_1 \Rightarrow f_2 < f_1$ .

Εν κατακλιῖδι, ο Πυθαγόρας, ως πρωτοερευνητής της Μουσικής Ακουστικής, δια της πολυετούς και επιπόνου ενασχολήσεώς του επί του μονοχόρδου, κατάρθωσεν να καθυποτάξει τον κατ' εξοχήν φευγαλέον και ασύλληπτον μουσικόν ήχον εις τον άτεγκτον νόμον των αριθμών. Ο Πausανίας αναφερόμενος εις αυτάς τας πειραματικού χαρακτήρος προσπαθείας του Πυθαγόρου λέει ότι επεζήτει «τὴν οὐσίαν τοῦ παντός διὰ μουσικῆς συγκειμένην».

## 6. Στοιχεία θεωρητικῆς πυθαγορείου αριθμητικῆς

Εις τον χώρον του αεί γινομένου βάσει θεμελιωδών νόμων γεννώνται και πορεύονται τα πάντα. Το σημαντικόν είναι ότι εντός αυτού του χώρου των διαφερόντων και μεταξύ των κινουμένων αντιξώων<sup>17</sup> υπάρχουν άπειραι καταστάσεις

<sup>16</sup> Λέγοντες γραμμική πυκνότητα της χορδής εννοούμεν την μάζα εις Kgr, την οποίαν ζυγίζει η μονάς μήκους της χορδής, ήτοι μήκος χορδής ίσον προς 1 m.

<sup>17</sup> Τις εναντιότητες ή τα ενάντια ή τα αντίξωα οι Πυθαγόρειοι τα ωνόμαζον «συστοιχίας». Περί των συστοιχιών αυτών, επί των οποίων στηρίζεται ολόκληρος η μεταφυσική αλήθεια, ελέχθησαν και εγράφησαν πολλά, μη σω-

μεσοτήτων, εκ των οποίων διακρίνονται για τον εξέχοντα ρόλο τους αι ανά λόγον μεσότητες δια των οποίων εγκαθιδρύεται η συμμετρία<sup>18</sup> του χώρου των εναντίων.

Όσον αφορά εις την Αριθμητικήν μεταξύ των αντιζώνων απειροστού και απείρου υφίστανται οι αριθμοί, ως μεσότητες, χωρίζοντες τον γραμμικόν χώρον, τον ονομαζόμενον άξονα, εις δύο ειδών χώρους· τον χώρον του ενός και τον χώρον των πολλών.

Εις τον χώρον του ενός, ως είναι ο χώρος μεταξύ δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών, εκδηλούνται μία και μόνον μία αντίθεσις, αυτή του μέγαντος-μικρός ή προηγούμενος-επόμενος.

Εις τον χώρον των πολλών, ως είναι ο χώρος μεταξύ δύο μη διαδοχικών φυσικών αριθμών, εκδηλούνται περισσότεραι της μιας τοιούτου είδους αντιθέσεις, λόγω των υφισταμένων μιας ή περισσότερων μεσοτήτων μεταξύ αυτών των δύο μη διαδοχικών φυσικών αριθμών.

Η απόστασις μεταξύ<sup>19</sup> δύο αντιζώνων εφ' ενός άξονος εκφράζεται δια της εννοίας «διάστημα» και τούτο δύναται να ορισθεί Αριστοξενικώς και Πυθαγορικώς. Αριστοξενικόν διάστημα μεταξύ δύο δοθέντων φυσικών αριθμών α και β (ένθα β>α) καλείται η διαφορά β-α και είναι πάντοτε φυσικός αριθμός μη μηδενικός. Τούτο σημαίνει ότι, ελλείψει συμβόλου για το μηδέν, δεν εδύνατο να ορίσουν το διάστημα από έναν φυσικόν αριθμόν προς τον εαυτόν του<sup>20</sup> λέγοντες

στά εν πολλοίς. Την ορθότεραν ερμηνείαν των συστοιχίων των Πυθαγορείων έδωσαν οι Νεοπλατωνικοί και ιδίως ο Πρόκλος.

<sup>18</sup> «Εν αρχή ην ο λόγος και ο λόγος ην προς την συμμετρίαν και συμμετρία ην ο λόγος» Πυθαγόρειοι

<sup>19</sup> Διάστημα δ' έστι δυοίν φθόγγων μεταξύτης. Νικόμαχος, Αρμονικόν εγχειρίδιον, 12, 1, 10.

διάστημα γάρ έστι δυεϊν όρων τó μεταξύ θεωρούμενον. πρώτον δέ διάστημα γραμμή λέγεται, γραμμή γάρ έστι τó εφ' έν διαστατόν. Νικόμαχος, Αριθμητική Εισαγωγή, 2, 6, 3, 20 - 4, 2.

<sup>20</sup> Τών Πυθαγορικῶν τινες, ως Αρχύτας και Δίδυμος, ιστοροῦσι μετὰ τó καταστήσασθαι τούς λόγους τῶν συμφωνιῶν συγκρίνοντες αὐτούς πρὸς ἀλλήλους καὶ τούς συμφόνους μᾶλλον ἐπιδεικνύειν βουλόμενοι τοιοῦτον τι ἐποίουν. πρώτους λαβόντες ἀριθμούς, οὗς ἐκάλουν πυθμένας, τῶν τούς λόγους τῶν συμφωνιῶν ἀποτελούντων—τουτέστιν ἐν οἷς ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς συμφωνία ἀποτελοῦνται, ως λόγου χάριν ἡ μὲν διὰ πασῶν ἐν πρώτοις θεωρεῖται ἀριθμοῖς τοῖς β' καὶ α'· πρώτος γάρ διπλάσιος ὁ δύο τοῦ ἐνός καὶ πυθμένος τῶν ἄλλων διπλάσιον· ἡ δὲ διὰ τεσσάρων ἐν ἐπιτρίτοις τοῖς τέσσαρσι καὶ τρισί· πρώτος γάρ ἐπίτριτος καὶ πυθμὴν ὁ δ' τῶν γ'—τούτους οὖν τούς ἀριθμούς ἀποδόντες ταῖς συμφωνίαις ἐσκόπουν καθ' ἕκαστον λόγον—τῶν τούς ὄρους περιεχόντων ἀριθμῶν ἀφελόντες ἀφ' ἑκατέρων τῶν ὄρων ἀνὰ μονάδα—τούς ἀπολειπομένους ἀριθμούς μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν, οἵτινες εἶεν, οἷον τῶν β' α', οἵπερ ἦσαν τῆς διὰ πασῶν· ἀφελόντες ἀνὰ μονάδα ἐσκόπουν τó καταλειπόμενον· ἦν δ' ἐν· Πορφύριος, [Εἰς τὰ ἁρμονικὰ Πτολεμαίου ὑπόμνημα](#), 107, 15-28.

Η ανωτέρω διαδικασία, κατά την οποίαν εκ δύο αριθμών λαμβάνεται εἷς, ελέγετο «συμμίσειν τούς αριθμούς» (συ μ μ ἰ σ γ ε ι ν δὲ λέγουσιν οἱ Πυθαγόρειοι τó ἕνα ἐξ ἀμφοτέρων ἀριθμῶν λαβεῖν).

Κατὰ την αναφερομένην διαδικασίαν του συμμίσειν τούς αριθμούς του διαπασῶν εις την ανωτέρω περικοπήν  $\begin{pmatrix} 2-1=1 \\ 1-1 \end{pmatrix}$  αντιμετωπίζεται η αφαιρέσις 1-1. Οσάκις αντιμετωπίζον οι αρχαίοι μας πρόγονοι το «τίποτα», δεν ησχολούντο ουδὸλως μετ' αυτού, το ηγνώουν, ως μη συνεισφέρον τίποτα εις την αφαιρέσιν (ουδέτερον σημεῖον

*ἀδιάφορος ἢ ἰσότης*. Κατὰ συνέπειαν, εἴναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἐκφράζουσι μουσικοὺς φθόγγους, δὲν υφίσταται Ἀριστοξενικὸν διάστημα τῆς ταυτοφωνίας. Τοῦτο ἀποτελεῖ λίαν σημαντικὸν μειονέκτημα<sup>21</sup> γιὰ τὴν μαθηματικὴν ἀντιμετώπισιν τῆς μουσικῆς κατ' Ἀριστόξενον. Ἄλλωστε ὁ Ἀριστόξενος ἐπὶ τῆ βάσει τῶν δύο διασωθέντων ἐκ τῶν 453 συγγραμμάτων του γράφεται ὅτι δὲν ἐθεμελίωσε ποτέ μαθηματικῶς τὴν μουσικὴν του θεωρίαν καὶ τοῦτο ἀποτελεῖ μέγα ψεῦδος.

Τὸ διάστημα μεταξὺ δύο διαδοχικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἐλέγετο μοναδιαῖον  $[(n+1)-n=1]$ .

Αἱ πράξεις μεταξὺ τῶν Ἀριστοξενικῶς ὀριζομένων διαστημάτων ἀκολουθοῦν τὴν γνωστὴν Πρακτικὴν Ἀριθμητικὴν.

Πυθαγορικὸν διάστημα μεταξὺ δύο δοθέντων φυσικῶν ἀριθμῶν  $\alpha$  καὶ  $\beta$  (ἐνθα  $\beta > \alpha$ ) καλεῖται ὁ λόγος<sup>22</sup> ἢ ἡ σχέσις<sup>23</sup>  $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ . Βάσει αὐτοῦ τοῦ ὀρισμοῦ γιὰ τὸ διάστημα δύναται νὰ ὀρισθῆ καὶ τὸ διάστημα τῆς ταυτοφωνίας, τοῦ ὁποῦ οἱ λόγοι εἶναι ὁ μοναδιαῖος  $\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)$ .

Εἴναι παρατάξωμε τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἐπὶ ἄξονος, ἴτοι  $n, n+1, n+2, \dots, n+(n-1), 2n, 2n+1, 2n+2, \dots, 2n+(n-1), 3n, 3n+1, 3n+2, \dots, 3n+(n-1), 4n, \dots$

ἔχομεν τοὺς ἀκολουθοῦντες ὀρισμοὺς τῶν σχέσεων γιὰ πάντα τὰ ἐν δυνάμει εἶδη τῶν Πυθαγορικῶς ὀριζομένων μουσικῶν διαστημάτων:

Ἡ σχέσις, ἣτις ἐκφράζει τὸ Πυθαγόρειον διάστημα μεταξὺ δύο οἰωνδήποτε πολλαπλασίων φυσικῶν ἀριθμῶν λέγεται **πολλαπλάσιος**  $\left(\frac{kn}{n}\right)$ .

---

τῆς προσθαφαιρέσεως σήμερον), καὶ συνέχισον τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος με τοὺς υπολοίπους ἀριθμοὺς αὐτοῦ, ἐφ' ὅσον ὑπῆρχον.

<sup>21</sup> κακῶς γὰρ οἶονται οἱ νομίζοντες διαφορὰν καὶ σχέσιν τὸ αὐτὸ εἶναι. Νικόμαχος, Ἐγχειρίδιον Ἀρμονικῆς, 12.1.13-14

<sup>22</sup> Ὁ Θέων ὁ Συμυρναῖος εἰς τὸ ἔργον του «*Ἦων κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρῆσίων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν*» μας πληροφορεῖ ὅτι ἡ λέξις «*λόγος*» θεωρεῖται ὑπὸ τῶν περιπατητικῶν ὡς ἔχουσα πολλὰς ἐννοίας. Λόγον ὀνομάζουσι τὴν ομιλίαν, ἴτοι τὸν προφορικὸν λόγον, ἀκόμη μίαν ομιλίαν, ἣτις γίνεταί πρὸς συναθροισμένον πλῆθος λ.χ. ὁ Δημοσθενικὸς λόγος, ὁ Λυσιακὸς λόγος. Λόγον ὀνομάζουσι τὸν συλλογισμὸν, τὴν ἐπαγωγὴν, τὸν μῦθον, τὸ ἐγκώμιον, τὴν παροιμίαν. Λόγον ὀνομάζουσι τὴν διανοητικὴν συλλογιστικὴν ἀνευ ἐκπομπῆς φωνῆς. Λόγον ὀνομάζουσι τὴν ἀναλογίαν.

Εἰς τὸν Πλάτωνα ὁ «*λόγος*» χρησιμοποιοῖται μετὰ τεσσάρων ἐννοιῶν. Ὄνομάζει λόγον τὴν νοητικὴν καὶ ὄχι τὴν ρηματικὴν διάνοησιν, τὰς ἀγορεύσεις, αἱ ὁποῖαι ἐκκινοῦν ἐκ τοῦ πνεύματος καὶ ἐκφράζονται δια τῆς φωνῆς, τὴν ἐπεξηγήσιν τῶν στοιχείων τοῦ Σύμπαντος καὶ τὸν λόγον τῆς ἀναλογίας.

Κατὰ τὸν Ἄδραστον ὁ λόγος τῆς ἀναλογίας ἐκφράζει μίαν σχέσιν μεταξὺ ὁμοειδῶν ὄντοτήτων.

<sup>23</sup> Δύο σχόλια τοῦ Πορφυρίου εἰς τὴν περὶ τῆς ἀρμονίας διδασκαλίαν τοῦ Πτολεμαίου ἀναφέρουσι «*καὶ τῶν κανονικῶν δὲ καὶ πυθαγορείων οἱ πλείους τὰ διαστήματα ἀντὶ τῶν λόγων λέγουσιν*» καὶ «*τὸν λόγον καὶ τὴν σχέσιν τῶν πρὸς ἀλλήλους ὄρων τὸ διάστημα καλοῦσιν*» γεγονός, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι εἰς τὴν Πυθαγόρειον μουσικὴν θεωρίαν, ἣτις θεμελιούται πειραματικῶς ἐπὶ τοῦ μονοχόρδου, αἱ ἐννοιαὶ «*διάστημα (= διάστασις)*» καὶ «*λόγος (= ἀριθμητικὴ σχέσις ἢ ἀναλογία)*» εἶναι ταυτόσημοι ἢ ἐναλλάσσονται ἰσοδυνάμως.

Η σχέση, ήτις εκφράζει το Πυθαγόρειον διάστημα μεταξύ δύο οιονδήποτε διαδοχικών φυσικών αριθμών λέγεται **επιμόριος**  $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ . Έν επιμόριον διάστημα, ελλείψει μέσου/ων<sup>24</sup> δεν δύναται να διαιρεθεί εις δύο ή περισσότερα μουσικά διαστήματα είτε ίσα, είτε άνισα μεταξύ των. Εάν απαιρητήτως πρέπει να χωρησθεί έν επιμόριον διάστημα εις δύο ή περισσότερα διαστήματα, τότε θα πρέπει διά τινος διαδικασίας να μετατραπεί εις έτερόν τι είδος διαστήματος, ως απέδειξεν ο Πυθαγόρειος Αρχύτας ο Ταραντίνος<sup>25</sup>.

Η σχέση, ήτις εκφράζει το Πυθαγόρειον διάστημα μεταξύ οιοιδήποτε φυσικού αριθμού εκ του κλειστού διαστήματος  $[n+2, \dots, n+(n-1)]$  μετά του φυσικού αριθμού  $n$ , λέγεται **επιμερής**.

Η σχέση, ήτις εκφράζει το διάστημα μεταξύ οιοιδήποτε φυσικού αριθμού εκ των  $2n+1, 3n+1, \dots, kn+1$  μετά του φυσικού αριθμού  $n$ , λέγεται **πολλαπλασιεπιμόριος**. Κατ' απλούστερον τρόπον δυνάμεθα να είπωμεν ότι αι πολλαπλασιεπιμόριοι σχέσεις ενός δοθέντος αριθμού  $n$  εκφράζονται δια των Πυθαγορείων διαστημάτων μεταξύ των επομένων αριθμών όλων των πολλαπλασίων αριθμών του  $n$  και του δοθέντος αριθμού  $n$ , ήτοι  $\left(\frac{kn+1}{n}\right)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

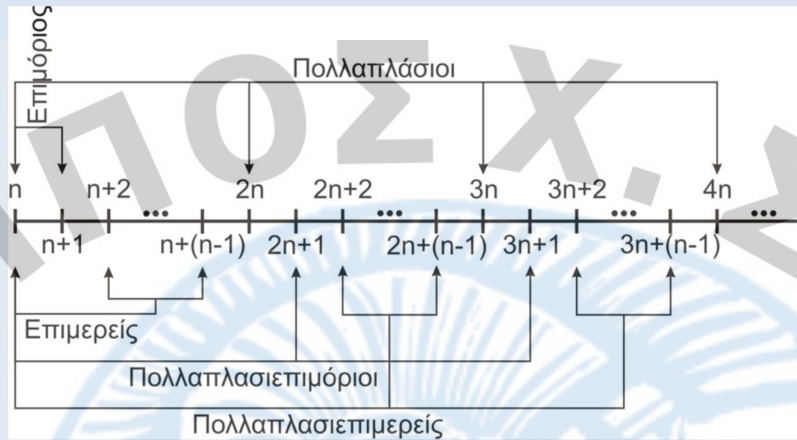
Η σχέση, ήτις εκφράζει το Πυθαγόρειον διάστημα μεταξύ οιοιδήποτε φυσικού αριθμού εκ των κλειστών διαστημάτων  $[2n+2, \dots, 2n+(n-1)]$ ,  $[3n+2, \dots, 3n+(n-1)]$ , ...,  $[kn+2, \dots, kn+(n-1)]$  μετά του φυσικού αριθμού  $n$ , λέγεται **πολλαπλασιεπιμερής**.

Το Μαθηματικόν Μουσικόν Σύστημα το εμπεριέχον πάντα τα δια του λόγου δύο φυσικών αριθμών οριζόμενα Πυθαγορικά διαστήματα εμπερικλείει λογαριθμικότητα και δια τούτο αι πράξεις μεταξύ των Πυθαγορικώς οριζομένων διαστημάτων υπακούουν εις μίαν ιδιόμορφον Αριθμητικήν<sup>26</sup>, γνωστήν εις τους μεμνημένους εις τον Πυθαγορισμόν.

<sup>24</sup> Έπιμορίου διαστήματος ούδεις μέσος, ούτε εἷς ούτε πλείους, ανάλογον έμπεσεἷται αριθμός. Ευκλείδου Κατατομή Κανόνος, γ Πρόταση.

<sup>25</sup> Βλέπε Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης, 2005, *Ευκλείδου Κανόνος Κατατομή*, Εκδόσεις Γαρυαγάνης, σ. 341.

<sup>26</sup> Αυτόθι, σ. 218.



Τα Πυθαγορικά οριζόμενα είδη διαστημάτων.

Εις την *Αριθμητικήν Εισαγωγήν* του Νικομάχου του Γερασηνού η έννοια λόγος απαντάται ως σχετική ποσότης.

Περί των Πυθαγορείων λόγων ο Νικόμαχος ο Γερασηνός εκφράζεται ως ακολούθως:

### 6.1 Είδη μεγαλύτερας και μικρότερης ανισότητος<sup>27</sup>

Ό,τι μετρείται συγκρινόμενον με μίαν άλλην ποσότητα είναι είτε ίσον, είτε άνισον.

Ίσον είναι παν ό,τι συγκρινόμενον μεθ' ετέρου τινός δεν είναι ούτε μικρότερον, ούτε μεγαλύτερον αυτού. Εις την περίπτωσιν ταύτην ομιλούμεν περί ισότητος των δύο οντοτήτων.

Η συγκρινομένη ποσότης δεν έχει διαφορετικήν ονομασίαν από αυτήν με την οποίαν συγκρίνεται<sup>28</sup>.

Εάν η σύγκρισις δεν οδηγεί εις ισότητα, θα οδηγεί εις ανισότητα. Εις εκάστην ανισότητα διακρίνεται το μεγαλύτερον και το μικρότερον, άτινα ονομάζονται αντίθετα<sup>29</sup> το έν του άλλου.

<sup>27</sup> Thomas Taylor, 1995, *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων*, Εκδόσεις Ιάμβλιχος, Αθήνα, Κεφάλαιον XVI.

Ο Νικόμαχος έγραψε πραγματεία εις δύο βιβλία υπό τον τίτλον Αριθμητική Εισαγωγή, η οποία μετεφράσθη και εις τα Λατινικά από τον Ρωμαίον φιλόσοφον Βοήθιον (Boethius, 480-524). Με την έννοιαν «λόγος» ο Νικόμαχος επιθυμεί να επιτύχει μία συστηματική κατάταξη των διαφόρων ειδών κλασμάτων, τα οποία είναι είτε μεγαλύτερα, είτε μικρότερα της μονάδος, προσδίδων εις αυτά τα ονόματα, τα οποία είχαν καθιερώσει παλαιότεροι μαθηματικοί. Αξίζει να ασχοληθεί κανείς με αυτήν την ονοματολογία, προκειμένου να αντιληφθεί τις δυσκολίες, τις οποίες αντιμετώπισαν οι παλαιοί Έλληνες μαθηματικοί εις την προσπάθειάν τους να επιτύχουν την θεμελίωσιν της μαθηματικής επιστήμης.

<sup>28</sup> Δηλαδή αι συγκρινόμενα ποσότητες είναι ομοειδείς.

<sup>29</sup> Αντίθετα είναι τα αντίζοα του Ηρακλείτου του Εφεσίου.

Συσχετίζοντας εις μίαν ανισότητα το μεγάλο ως προς το μικρόν, οδηγούμεθα εις πέντε είδη της αποκαλουμένης μεγαλυτέρας ανισότητος. Ταύτα τα πέντε είδη είναι:

1. το πολλαπλάσιον,
2. το επιμόριον,
3. το επιμερές,
4. το πολλαπλασιεπιμόριον
5. το πολλαπλασιεπιμερές.

Συσχετίζοντας εις μίαν ανισότητα το μικρόν ως προς το μεγάλον, οδηγούμεθα εις πέντε είδη της αποκαλουμένης μικροτέρας ανισότητος, έκαστον των οποίων είναι αντίθετον ενός εκ των ειδών της μεγαλυτέρας ανισότητος.

Τα πέντε είδη της μικροτέρας ανισότητος φέρουν τας ίδιας ονομασίας μετ' εκείνων της μεγαλυτέρας ανισότητος, αλλά με την πρόθεσιν *υπό* να προηγείται του ονόματός των, ήτοι:

1. υποπολλαπλάσιον,
2. υποεπιμόριον,
3. υποεπιμερές,
4. υποπολλαπλασιεπιμόριον
5. υποπολλαπλασιεπιμερές.

#### **6.1.1. Πολλαπλάσιοι και υποπολλαπλάσιοι αριθμοί<sup>30</sup>**

Το πολλαπλάσιον είναι το πρώτον είδος της μεγαλυτέρας ανισότητος.

Ο πολλαπλάσιος αριθμός είναι τοιούτος, ώστε συγκρινόμενος μεθ' ενός ετέρου μικροτέρου του αριθμού, τον εμπεριέχει περισσοτέρας της μιας φορές.

Ονομασία: Διπλάσιος, τριπλάσιος, τετραπλάσιος και τα όμοια.

Η ανισότης, ήτις αντιτίθεται εις το πολλαπλάσιον, ονομάζεται υποπολλαπλάσιον και αύτη αποτελεί το πρώτον είδος της μικροτέρας ανισότητος.

Ο υποπολλαπλάσιος αριθμός είναι τοιούτος, ώστε συγκρινόμενος μεθ' ενός ετέρου μεγαλυτέρου του αριθμού, εμπεριέχεται εις αυτόν περισσοτέρας της μιας φορές.

Η διαμόρφωσις του ονόματος ενός υποπολλαπλασίου αριθμού γίνεται πάντοτε με την τοποθέτησιν της προθέσεως *υπό* προ του ονόματος του αντιστοίχου πολλαπλασίου αριθμού λ.χ. υποδιπλάσιος, υποτριπλάσιος, υποτετραπλάσιος και τα όμοια.

<sup>30</sup> Thomas Taylor, 1995, *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων*, Εκδόσεις Ιάμβλιχος, Αθήνα, Κεφάλαιον XVII.

### 6.1.2 Επιμόριοι και υποεπιμόριοι αριθμοί<sup>31</sup>

Όταν ένας αριθμός  $\alpha$  εμπεριέχει ολόκληρον έναν άλλον αριθμόν  $\beta$  και επί πλέον ἓν μόνον μέρος αὐτοῦ, τότε ο  $\alpha$  ονομάζεται επιμόριος του  $\beta$ <sup>32</sup>. Ισχύει η σχέση:

$$\alpha = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \cdot \beta = \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) \cdot \beta \quad \alpha, \beta, \nu \in \mathbb{N} \quad \& \quad \alpha > \beta$$

Η ονομασία των επιμορίων αριθμών πραγματοποιείται δια της χρησιμοποιήσεως της προθέσεως **επί** και του τακτικού αριθμητικού<sup>33</sup> του παρονομαστού του συμμετέχοντος μέρους του αριθμού.

Εάν  $\nu = 3$ , τότε: απόλυτον αριθμητικόν είναι το τρία (3), τακτικόν αριθμητικόν είναι τρίτος και ο επιμόριος αριθμός λέγεται επίτριτος<sup>34</sup>  $\left(1 + \frac{1}{3} = \frac{3+1}{3}\right)$ .

Εάν  $\nu = 4$ , τότε: απόλυτον αριθμητικόν είναι το τέσσερα (4), τακτικόν αριθμητικόν είναι τέταρτος και ο επιμόριος αριθμός λέγεται επιτέταρτος  $\left(1 + \frac{1}{4} = \frac{4+1}{4}\right)$ .

<sup>31</sup> Thomas Taylor, 1995, *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων*, Εκδόσεις Ιάμβλιχος, Αθήνα, Κεφάλαιον XVIII.

<sup>32</sup> Έπι μόριος δὲ γίνεται λόγος, ὅταν τῶν συγκρινομένων ὄρων ὁ μείζων ἔχη τὸν λοιπὸν καὶ ἔτι ἓν αὐτοῦ μόνιον γενικῶς· εἰδικῶς δὲ εἴαν μὲν ἡμισυ ἢ τὸ μόνιον ἡμιόλιος εἴαν δὲ τρίτον ἐπίτριτος εἴαν δὲ τέταρτον ἐπιτέταρτος καὶ ἐξῆς ἀκολουθῶς αἰεὶ, Ιάμβλιχος, Εἰς τὴν Αριθμητικὴν Εἰσαγωγὴν τοῦ Νικομάχου, 40, 21-25.

<sup>33</sup> Αριθμητικά ονομάζονται αἱ λέξεις, αἱ ὁποῖαι δηλώνουν αριθμητικὰς σχέσεις καὶ ἐννοίας. Τα αριθμητικὰ διακρίνονται εἰς ἐπίθετα, οὐσιαστικὰ καὶ ἐπιρρήματα.

Τα *αριθμητικὰ ἐπίθετα*, ἀναλόγως με τὸ τί δηλώνουν, εἶναι ἀπόλυτα, τακτικὰ, χρονικὰ, πολλαπλασιαστικὰ καὶ ἀναλογικὰ.

Τα *ἀπόλυτα αριθμητικὰ ἐπίθετα* δηλώνουν ἓν σύνολον πραγμάτων, λ.χ. ἓνας ἦχος, ἐπτὰ νότες κ.λπ.

Τα *τακτικὰ αριθμητικὰ ἐπίθετα* φανερόνουν τὴν τάξιν ἢ τὴν σειρὰν, τὴν ὁποῖαν ἔχει ἓνα ἀντικείμενον ἐν σχέσει πρὸς ἄλλα ὁμοειδῆ ἀντικείμενα, λ.χ. πρῶτον, δεῦτερον, ἕνατον κ.λπ.

Προσοχὴ εἰς τὸ ὅτι ἀπὸ τὸ 13 ἕως τὸ 19 τα τακτικὰ αριθμητικὰ ἐπίθετα ονομάζονται περιφραστικῶς, δηλαδὴ 13ος =τρίτος καὶ δέκατος, 15ος =πέντε καὶ δέκατος, 19ος =ἕνατος καὶ δέκατος. (Οἱ ἀριθμοὶ 15, 16, 17, 18 καὶ 19 ἐκφέρονται μονολεκτικὰ ὡς ἐξῆς: πεντεκαίδεκα, ἑκκαίδεκα, ἑπτακαίδεκα, ὀκτωκαίδεκα, ἕνεακαίδεκα).

Τα *χρονικὰ αριθμητικὰ* δηλώνουν ποιά μέρα ἀπὸ τότε ποῦ ἐξεκίνησεν τελειῶναι μία ἐνέργεια ἢ πράξις. Λήγουν σε -αῖος, -αία, -αῖον.

Τεταρταῖος ἀφίκετο=αφίχθη τὴν τετάρτην ἡμέραν ἀπὸ τότε ποῦ ἐξεκίνησεν.

Τα *πολλαπλασιαστικὰ αριθμητικὰ* λήγουν σε -πλοῦς, -πλή, -πλοῦν π.χ. τριπλοῦς, πενταπλοῦς.

Τα *ἀναλογικὰ αριθμητικὰ* φανερόνουν ἀναλογίαν, δηλαδὴ ὁποῖας φορές κάτι εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ ἕτερόν τι κάτι ἄλλο ὁμοειδές. Λήγουν σε -πλάσιος, -πλασία, -πλάσιον π.χ. διπλάσιος, τετραπλάσιος κ.λπ.

Τα *αριθμητικὰ οὐσιαστικὰ* εἶναι θηλυκὰ, λήγουν σε -ας (γεν. -άδος) π.χ. μονάς, μονάδος καὶ δηλώνουν ἀφηρημένην ἀριθμητικὴν ποσότητα π.χ. πεμπάς, ἐπτάς κ.λπ.

Τα *αριθμητικὰ ἐπιρρήματα* δηλώνουν πόσες φορές γίνεται ἢ ἐπαναλαμβάνεται κάτι. Λήγουν σε -κίς ἢ -άκις π.χ. τετράκις, ἐξάκις, πολλάκις κ.λπ. Εξαιρεση ἀποτελοῦν τα ἄπαξ, δις, τρις.

<sup>34</sup> <ἐπίτριτος> ἀριθμὸς ὁ ἔχων ἓν ἑαυτῷ ὅλον τε τὸν συγκρινομένων καὶ μέρος αὐτοῦ τρίτον πρὸς τῷ ὅλῳ. Νικομάχος, Αριθμητικὴ Εἰσαγωγή, 1, 19, 6, 5-7.

Εάν  $v=5$ , τότε: απόλυτον αριθμητικόν είναι το πέντε (5), τακτικόν αριθμητικόν είναι πέμπτος και ο επιμόριος αριθμός λέγεται επίπεμπτος  $\left(1+\frac{1}{5}=\frac{5+1}{5}\right)$ .

Εάν  $v=15$ , τότε: απόλυτον αριθμητικόν είναι το πεντεκαίδεκα (15), τακτικόν αριθμητικόν είναι πεντεκαδέκατος και ο επιμόριος αριθμός λέγεται επιπεντεκαδέκατος  $\left(1+\frac{1}{15}=\frac{15+1}{15}\right)$ .

Ειδικήν περίπτωσιν ονοματολογίας επιμορίου αποτελεί η περίπτωση καθ' ἣν  $v=2$ . Ο επιμόριος  $\left(1+\frac{1}{2}=\frac{2+1}{2}\right)$  ονομάζεται ημιόλιος, δηλαδή όλος και ήμισυς.

Οι υποεπιμόριοι αριθμοί είναι οι μικρότεροι αριθμοί, οι οποίοι εμπεριέχονται εις τον μεγαλύτερον αριθμόν μεθ' ενός μέρους των. Ισχύει η σχέση:

$$\beta = \left(\frac{v}{v+1}\right) \cdot \alpha \quad \alpha, \beta, v \in \mathbb{N} \quad \& \quad \alpha > \beta$$

Οι υποεπιμόριοι αριθμοί ονομάζονται ως οι αντίστοιχοί των επιμόριοι αριθμοί και επί πλέον με την πρόθεσιν **υπό** να προηγείται του όλου ονόματος.

Υφημιόλιος:  $\frac{2}{2+1}$

Υπ(ο)επίτριτος:  $\frac{3}{3+1}$

Υπ(ο)επιτέταρτος:  $\frac{4}{4+1}$

Υπ(ο)επίπεμπτος:  $\frac{5}{5+1}$

Υπ(ο)επιπεντεκαδέκατος:  $\frac{15}{15+1}$

Οι επιμόριοι, ως μεγαλύτεροι αριθμοί, ονομάζονται **ηγέται**.

Οι υποεπιμόριοι αριθμοί, ως μικρότεροι αριθμοί, ονομάζονται **ακόλουθοι**

λ.χ.  $\frac{8+1}{8} = \frac{9}{8}$  (ηγέτης) και  $\frac{8}{8+1} = \frac{8}{9}$  (ακόλουθος)

### 6.1.3 Επιμερείς και υποεπιμερείς αριθμοί<sup>35</sup>

Επιμερής αριθμός: αυτό το είδος αριθμού εμφανίζεται οσάκις ένας αριθμός  $\alpha$ , συγκρινόμενος μεθ' ετέρου μικροτέρου του αριθμού  $\beta$ , τον εμπεριέχει ολόκληρον και επί πλέον εμπεριέχει και κάποια μέρη αυτού, όπως δύο ή τρία ή τέσσερα ή οιονδήποτε έτερον μέρος δυνατόν να προκύψει εκ της συγκρίσεως. Ισχύει η σχέση:

$$\alpha = \left(1 + \frac{\mu}{\mu + \nu}\right) \cdot \beta = \left(\frac{2\mu + \nu}{\mu + \nu}\right) \cdot \beta \quad \alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{N} \quad \& \quad \alpha > \beta$$

Η κατάστασησ αυτή εκκινεί εκ των δύο τρίτων, ένθα ( $\mu=2, \nu=1$ ).

<sup>35</sup> Thomas Taylor, 1995, *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων*, Εκδόσεις Ιάμβλιχος, Αθήνα, Κεφάλαιον XX.



Εάν εἷς ἀριθμὸς ἐμπεριέχει ἕτερον μικρότερόν του ἀριθμὸν καὶ ἐπὶ πλέον ἐμπεριέχει καὶ δύο μέρη αὐτοῦ λ.χ.  $\alpha = \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot \beta$ , ονομάζεται ἐπιδιμερής ἢ ἐπιδίτριτος ἢ δισεπίτριτος.

Εάν εἷς ἀριθμὸς ἐμπεριέχει ἕτερον μικρότερόν του ἀριθμὸν καὶ ἐπιπλέον ἐμπεριέχει καὶ τρία μέρη αὐτοῦ λ.χ.  $\alpha = \left(1 + \frac{3}{4}\right) \cdot \beta$ , ονομάζεται ἐπιτριμερής ἢ ἐπιτριτέταρτος ἢ τρισεπιτέταρτος.

Εάν εἷς ἀριθμὸς ἐμπεριέχει ἕτερον μικρότερόν του ἀριθμὸν καὶ ἐπιπλέον ἐμπεριέχει καὶ τέσσερα μέρη αὐτοῦ λ.χ.  $\alpha = \left(1 + \frac{4}{5}\right) \cdot \beta$ , ονομάζεται ἐπιτετραμερής ἢ ἐπιτετράπεμπος ἢ τετράκις ἐπίπεμπος.

Εἰς τὴν περίπτωση καθ' ἣν ( $\nu > 1$ ), τότε εἶναι δυνατόν νὰ ἐμφανισθοῦν περιπτώσεις ὡς:

Τρισεπίπεμπος:  $\alpha = \left(1 + \frac{3}{5}\right) \cdot \beta$

τετράκις ἐφέβδομος:  $\alpha = \left(1 + \frac{4}{7}\right) \cdot \beta$

πεντάκις ἐπένατος:  $\alpha = \left(1 + \frac{5}{9}\right) \cdot \beta$

Υπ(ο)ἐπιμερεῖς ἀριθμοί: Οὗτοι εἶναι ἀριθμοί, οἵτινες ἐμπεριέχονται εἰς ἕτερον μεγαλύτερόν των ἀριθμὸν ὁμοῦ μετὰ δύο ἢ τριῶν ἢ τεσσάρων ἢ ὁσωνδήποτε μερῶν των ἐπὶ πλέον.

$$\beta = \left(\frac{\mu + \nu}{2\mu + \nu}\right) \cdot \alpha \quad \alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{N} \quad \& \quad \alpha > \beta$$

Ἡ ὀνομασία των θεωρητικῶς<sup>36</sup> ἐπιτυγχάνεται δια τῆς προσθέσεως τῆς προθέσεως ὑπὸ εἰς τὴν ἀρχὴν του ὀνόματος του ἀντιστοίχου ἐπιμερούς ἀριθμοῦ ὑπ(ο)ἐπιδιμερής, ὑπ(ο)ἐπιτριμερής, ὑπ(ο)ἐπιτετραμερής κ.ο.κ.

#### 6.1.4 Πολλαπλασιεπιμόριοι καὶ υποπολλαπλασιεπιμόριοι ἀριθμοί<sup>37</sup>

Πολλαπλασιεπιμόριος ἀριθμὸς: Ὅταν εἷς ἀριθμὸς, συγκρινόμενος μεθ' ἑτέρου μικροτέρου του ἀριθμοῦ, ἐμπεριέχει αὐτόν περισσοτέρας τῆς μίας φορές καὶ ἐπὶ πλέον ἐμπεριέχει καὶ ἓν μέρος αὐτοῦ, τουτέστιν ἐμπεριέχει τὸ διπλάσιον ἢ τὸ τριπλάσιον ἢ τὸ τετραπλάσιον ἢ ἕτερόν τι πολλαπλάσιον αὐτοῦ καὶ ἐπὶ πλέον ἐμπεριέχει καὶ ἓν μέρος του, ὡς τὸ ἡμισυ ἢ τὸ ἓν τρίτον ἢ τὸ ἓν τέταρτον ἢ ἕτερόν τι μέρος. Ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\alpha = \left(\mu + \frac{1}{\nu}\right) \cdot \beta = \left(\frac{\mu\nu + 1}{\nu}\right) \cdot \beta \quad \alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{N} \quad \& \quad \alpha > \beta, \quad \mu > 1$$

<sup>36</sup> Ὁ Νικόμαχος δὲν ἀναγράφει ἀντιστοίχους ὀνοματολογίας.

<sup>37</sup> Thomas Taylor, 1995, *Ἡ Θεωρητικὴ Ἀριθμητικὴ των Πυθαγορείων*, Ἐκδόσεις Ἰάμβλιχος, Αθήνα, Κεφάλαιον XXI.

Ο αριθμός, συνεπώς, όστις εμπεριέχει το διπλάσιον ετέρου αριθμού και το ήμισυ (=έν δεύτερον) αυτού, ονομάζεται διπλασιεφήμισυς  $\alpha = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \beta$ .

Ο αριθμός, όστις εμπεριέχει το διπλάσιον και το έν τρίτον ετέρου αριθμού, ονομάζεται διπλασιεπίτριτος  $\alpha = \left(2 + \frac{1}{3}\right) \cdot \beta$ .

Ο αριθμός, όστις εμπεριέχει το διπλάσιον και το έν τέταρτον ετέρου αριθμού, ονομάζεται διπλασιεπιτέταρτος  $\alpha = \left(2 + \frac{1}{4}\right) \cdot \beta$  κ.ο.κ.

Επίσης, εάν εἷς αριθμός εμπεριέχει το όλον ετέρου αριθμού τρεις φορές και το ήμισυ ή το έν τρίτον ή το έν τέταρτον αυτού, ονομάζεται τριπλασιεφήμισυς, τριπλασιεπίτριτος, τριπλασιεπιτέταρτος.

Ομοιοτρόπως ονομάζονται και οι υπόλοιποι.

Οι ακόλουθοι αυτών των λόγων, οι υποπολλαπλασιεπιμόριοι αριθμοί  $\beta = \left(\frac{\nu}{\mu\nu+1}\right) \cdot \alpha$   $\alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{N}$  &  $\alpha > \beta$ , εκφράζονται πάντοτε θεωρητικώς<sup>38</sup> δια της προθέσεως **υπό** εις την αρχήν του ονόματος των αντιστοίχων πολλαπλασιεπιμορίων π.χ. διπλάσιος υφημιόλιος, διπλάσιος υπεπίτριτος, διπλάσιος υπεπιτέταρτος και με τον ίδιο τρόπον όλοι οι υπόλοιποι.

#### 6.1.5 Πολλαπλασιεπιμερείς και υποπολλαπλασιεπιμερείς αριθμοί<sup>39</sup>

Πολλαπλάσιος επιμερής λόγος σχηματίζεται όταν εἷς αριθμός συγκρινόμενος μεθ' ετέρου μικροτέρου του αριθμού, εμπεριέχει ολόκληρον τον αριθμόν περισσότερας της μιας φορές και δύο ή τρία ή οσαδήποτε έτερα μέρη αυτού συμφώνως προς το είδος του επιμερούς αριθμού. Δηλαδή:

$$\alpha = \left(\rho + \frac{\mu}{\mu+\nu}\right) \cdot \beta \quad \alpha, \beta, \mu, \nu, \rho \in \mathbb{N} \quad \& \quad \alpha > \beta$$

Επισημαίνεται ότι δεν πρόκειται να υπάρξουν ούτε δύο ημίση, ούτε δύο τέταρτα, ούτε δύο έκτα. Αντιθέτως, θα υπάρξουν δύο τρίτα, δύο πέμπτα, δύο έβδομα (πάντοτε εμφανίζονται ανάγωγα κλάσματα).

Οι εν λόγω αριθμοί ονομάζονται αναλόγως των μερών των:

διπλασι(ο)επιδιμερής  $\alpha = \left(2 + \frac{2}{3}\right) \cdot \beta$ , διπλασι(ο)επιτριμερής, διπλασι(ο)επιτετραμερής κ.ο.κ. Και πάλιν, ονομάζονται τριπλασι(ο)επιδιμερής, τριπλασι(ο)επιτριμερής, τριπλασι(ο)επιτετραμερής  $\alpha = \left(3 + \frac{4}{5}\right) \cdot \beta$  κ.λπ.

Παράδειγμα: Η σχέσις  $8:3 = 2 + \frac{2}{3}$  αποτελεί έναν διπλασιεπιδιμερή λόγον.

<sup>38</sup> Ο Νικόμαχος δεν αναγράφει αντιστοίχους ονοματολογίας.

<sup>39</sup> Thomas Taylor, 1995, *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων*, Εκδόσεις Ιάμβλιχος, Αθήνα, Καφάλαιον XXI.

Και εδώ, επίσης, οι μικρότεροι αριθμοί, οι υποπολλαπλασιασιμερείς

$$\beta = \left( \frac{\mu + \nu}{(\rho + 1)\mu + \rho\nu} \right) \cdot \alpha \quad \alpha, \beta, \mu, \nu, \rho \in \mathbb{N} \quad \& \quad \alpha > \beta$$

ονομάζονται θεωρητικώς<sup>40</sup> δια της προσθέσεως της προθέσεως υπό εις την αρχήν του ονόματος των αντιστοιχών πολλαπλασιασιμερών, ως π.χ. υποδιπλασι(ο)επιδιμερές, υποδιπλασι(ο)επιτριμερές και ομοιοτρόπως οι υπόλοιποι.

### 7. Θεμελιώδες Πυθαγόρειον αξίωμα για την μουσική συμφωνία

πάντα δὲ τὰ ἐκ μορίων συγκείμενα ἀριθμοῦ λόγῳ λέγεται πρὸς ἄλληλα, ὥστε καὶ τοὺς φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν ἀριθμοῦ λόγῳ λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους. τῶν δὲ ἀριθμῶν οἱ μὲν ἐν πολλαπλασίῳ λόγῳ λέγονται, οἱ δὲ ἐν ἐπιμορίῳ, οἱ δὲ ἐν ἐπιμερεῖ, ὥστε καὶ τοὺς φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν τοῖς τοιούτοις λόγοις λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους. τούτων δὲ οἱ μὲν πολλαπλάσιοι καὶ ἐπιμόριοι ἐνὶ ὀνόματι λέγονται πρὸς ἀλλήλους.

Γινώσκομεν δὲ καὶ τῶν φθόγγων τοὺς μὲν συμφώνους ὄντας, τοὺς δὲ διαφώνους, καὶ τοὺς μὲν συμφώνους μίαν κρᾶσιν τὴν ἐξ ἀμφοῖν ποιῶντας, τοὺς δὲ διαφώνους οὐ. τούτων οὕτως ἐχόντων εἰκὸς τοὺς συμφώνους φθόγγους, ἐπειδὴ μίαν τὴν ἐξ ἀμφοῖν ποιῶνται κρᾶσιν τῆς φωνῆς, εἶναι τῶν ἐν ἐνὶ ὀνόματι πρὸς ἀλλήλους λεγομένων ἀριθμῶν, ἥτοι πολλαπλασίους ὄντας ἢ ἐπιμορίους.

Νεοελληνική απόδοσις:

[Πάντα ὅσα δε συνίστανται ἐκ τμημάτων ἐκφράζονται μεταξύ των δι' ενός αριθμητικῶν λόγου (=μίας αριθμητικῆς σχέσεως), ὥστε εἶναι ἀπαραίτητον καὶ οἱ φθόγγοι δι' ενός αριθμητικῶν λόγου νὰ ἐκφράζονται μεταξύ των. Ἐκ των ἀριθμῶν ἄλλοι μὲν σχετίζονται με λόγον πολλαπλάσιον, ἄλλοι δε με λόγον ἐπιμόριον καὶ ἄλλοι με λόγον ἐπιμερῆ, ὥστε εἶναι ἀπαραίτητον καὶ αἱ σχέσεις των φθόγγων νὰ ἐκφράζονται με τοιούτου εἶδους λόγους. Ἐξ αυτῶν των λόγων οἱ **πολλαπλάσιοι** καὶ οἱ **ἐπιμόριοι** προφέρονται **μονολεκτικῶς**.

Προσέτι γνωρίζομεν ὅτι ἐκ των φθόγγων ἄλλοι μὲν εἶναι σύμφωνοι, ἄλλοι δε διάφωνοι καὶ οἱ μὲν σύμφωνοι φθόγγοι μίαν μεῖξιν των δύο δημιουργοῦν, οἱ δε διάφωνοι ὄχι. Οὕτως ἐχόντων των πραγμάτων (των σχετικῶν μετὰ των φθόγγων), εἶναι φυσικόν οἱ σύμφωνοι φθόγγοι, ἐπειδὴ ἀμφοτέροι δημιουργοῦν μίαν μεῖξιν της φωνῆς, νὰ ἐκφράζονται δια των ἀριθμητικῶν λόγων, οἵτινες προφέρονται μονολεκτικῶς, δηλαδὴ τους ὄντας **πολλαπλάσιοι ἢ ἐπιμόριοι**].

Ὡς γίνεται κατανοητὸν ἐκ του ἀνωτέρω ἀποσπάσματος της Εἰσαγωγῆς της Εὐκλείδειου Μουσικομαθηματικῆς πραγματείας Κατατομῆς κανόνος, δι' ενός συ-

<sup>40</sup> Ο Νικόμαχος δὲν ἀναγράφει ἀντιστοιχοῦς ονοματολογίας.

γκεχυμένου επιχειρήματος ο συγγραφέας εντάσσει τα εύφωνα διαστήματα εις τας δύο πρώτας κλάσεις λόγων, διότι έχουν μεταξύ των κάτι το κοινόν, το οποίον δεν το μοιράζονται μετά της τρίτης.

Είναι η ασάφεια, η λακωνικότητα και η αδύναμος αποδεικτικότης αυτής της παραγράφου, ήτις δημιουργεί υποψίας ότι αυτή η παράγραφος δεν αποτελεί καρπὸν σκέψεως του λεπτολόγου συγγραφέως των *Στοιχείων*.

Παρόλα ταῦτα η παράγραφος περιέχει το κυρίαρχον στοιχείον, την ουσίαν εις την ακολουθούσα ανάλυσιν. Προσέτι η απουσία της θα συνεπάγετο την κατάρρευσιν του μεθοδολογικού πλαισίου ολοκλήρου της πραγματείας.

Εις το δεύτερον ἡμισυ της εισαγωγῆς της Ευκλείδειου Μουσικομαθηματικῆς πραγματείας *Κατατομή κανόνος* αναφέρεται το θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικῆς θεωρίας περί ευφωνίας ἢ συμφωνίας.

Οι Πυθαγόρειοι ἐξέφραζον τα μουσικά διαστήματα ὡς λόγους<sup>41</sup> ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἤτοι συνεσχέτιζον ἕναν ἀκέραιον ἀριθμὸν μεθ' ἑνὸς ἐτέρου<sup>42</sup>.

Ἐκ των πέντε προμνημονευθέντων εἰδῶν της μεγαλυτέρας ἀνισότητος τα δύο τελευταία εἶδη, ἤτοι πολλαπλασιασιμῶριον και πολλαπλασιασιμερές, δεν μνημονεύονται παντελῶς εις την ἐν λόγῳ πραγματείαν.

Τα δύο πρώτα εἶδη, ἤτοι πολλαπλάσιον και ἐπιμῶριον, -με αὐτὴν την σειράν- τα συνδέει ο Ευκλείδης, βάσει ἐμπειρικῶν πυθαγορείων παρατηρήσεων, με την *εύφωνίαν* ἢ *συμφωνίαν*.

Κατὰ την Πυθαγόρειον μουσικὴν θεωρίαν τα μουσικά διαστήματα κατετάσσονται εις δύο βασικὰς κατηγορίας τας *ευφωνίας* ἢ *συμφωνίας* και τας *διαφωνίας* ἢ *ασυμφωνίας*. Αἱ συμφωνίαι ἐκ του ρήματος *συμφωνέω* ὦ, *συμφωνία*, *σύμφωνος* (σὺν+φωνή)<sup>43</sup> *φωνῶ* ὁμοῦ, ὁ *συμφωνῶν* κατὰ τὸν ἦχον, μουσικὴ συμφωνία.

<sup>41</sup> Οἱ Πυθαγόρειοι διαχώριζον την Μαθηματικὴν ἐπιστήμην εις τέσσαρα μέρη. Το ἔν ἐκ των μερῶν της το ἀπέδιδον εις το «πόσα πολλά» και το ἕτερον εις το «πόσο πολύ». Διαχώριζον πάλιν εις δύο ἑκάστον ἐξ αὐτῶν των μερῶν, διότι ἔλεγον ὅτι το πόσα πολλά, δηλαδὴ μια ποσότης εἴτε υφίσταται αὐτὴ καθἑαυτή, εἴτε μελετάται ἐν σχέσει πρὸς κάτι ἄλλο και ὅτι το πόσο πολύ εἴτε εἶναι σταθερόν, εἴτε εἶναι ἐν κινήσει. Επίσης ἔλεγον ὅτι η Ἀριθμητικὴ ἐρευνὰ το πόσα πολλά, τα οποία υφίστανται καθἑαυτά, ἐνῶ η Μουσικὴ ἐρευνὰ το πόσα πολλά, τα οποία υφίστανται ἀναφορικῶς πρὸς κάτι ἄλλο. Η Γεωμετρία μελετὰ το πόσο πολύ, το οποίο εἶναι ἀκίνητον, ἀλλὰ η Ἀστρονομία μελετὰ το πόσο πολύ, το οποίο εἶναι ἀπὸ μόνο του ἢ κατ' ουσίαν κινητόν.

<sup>42</sup> Βλέπε τα περί σχετικῆς ποσότητος, τα ἀναφερόμενα εις την Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγήν του Νικομάχου του Γερασηνοῦ.

<sup>43</sup> Διερωτώμαι ἐάν ἀφενὸς μεν ἐκ της ἐτυμολογίας της λέξεως «συμφωνία», ἀφετέρου δε ἐκ των ἐπομένων παραπομπῶν, πρέπει να ἀρχίσωμεν να υποψιαζόμεθα και να ἐρευνώμεν το ἐνδεχόμενον η ἀρχαία ἐλληνικὴ μουσικὴ να μὴ ἦτο μονοφωνικὴ.

Ο Ευκλείδης (330-270 π.Χ.) ἀναφέρει εις το δεύτερον ἡμισυ της εισαγωγῆς (*Κατατ. Καν.*, *Εισαγ.* 17-22) «Γινώσκωμεν δὲ καὶ τῶν φθόγγων τοὺς μὲν συμφώνους ὄντας, τοὺς δὲ διαφώνους, καὶ τοὺς μὲν συμφώνους μίαν κρᾶσιν τὴν ἐξ ἁμφοῖν ποιοῦντας, τοὺς δὲ διαφώνους οὐ. τούτων οὕτως ἐχόντων εἰκὸς τοὺς συμφώνους φθόγγους, ἐπειδὴ μίαν τὴν ἐξ ἁμφοῖν ποιοῦνται κρᾶσιν τῆς φωνῆς, ...».

Ο Ἀριστοτέλης (384-322 π.Χ.) (Προβλ. XIX, 38) ὑποστηρίζει πὼς «ο λόγος για τον οποίον ἀπολαμβάνουμε την συμφωνία εἶναι τὸ ὅτι εἶναι ἀνάμειξη ἀντιθέτων (φθόγγων) που ἔχουν σχέση ο ἕνας με τον ἄλλον» και εις τα Μουσικά Προβλήματα XIX, 35, λέει ὅτι η διὰ πασῶν εἶναι η πλέον ωραία συμφωνία.

Ο Νικόμαχος (1ος μ.Χ. αἰώνας) (*Ἐγχειρ.* 12) ὑποστηρίζει ὅτι σύμφωνα συστήματα εἶναι ἐκεῖνα των οποίων οἱ συστατικοὶ φθόγγοι, ὅταν παιχθοῦν μαζί («ἅμα κρουσθέντες»), ἀναμειγνύονται ο εἰς μετὰ του ἄλλου κατὰ τῶν

Σημειώτεον ότι συμφώνως προς το θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας περί ευφωνίας ή συμφωνίας MONON μία πολλαπλάσιος ή επιμόριος σχέσις μεταξύ των αριθμών των ενσαρκωτών της ιεράς τετρακτύος (1, 2, 3, 4) εκφράζει ἓν σύμφωνον μουσικόν διάστημα.

Τούτο συμβαίνει εις τα διαστήματα δις διαπασών  $\left(\frac{4}{1}\right)$  (πολλαπλάσιος σχέσις), διαπασών  $\left(\frac{2}{1}\right)$  (πολλαπλάσιος ή/και επιμόριος σχέσις), ημιόλιον<sup>44</sup>  $\left(\frac{3}{2}\right)$  (επιμόριος σχέσις), επίτριτον<sup>45</sup>  $\left(\frac{4}{3}\right)$  (επιμόριος σχέσις).

Κατόπιν τούτου, συμφώνως προς το θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας περί ευφωνίας ή συμφωνίας το διάστημα του επογδόου τόνου  $\left(\frac{9}{8}\right)$ , μολονότι αποτελεί μιαν επιμόριον σχέσιν, το κατέτασσον εις τας διαφωνίας ή ασυμφωνίας, διότι οι δομούντες αυτό ακέραιοι αριθμοί 8 και 9 δεν συγκαταλέγονται μεταξύ των αριθμών των ενσαρκωτών της ιεράς τετρακτύος (1, 2, 3, 4).

Εις τα σύμφωνα μουσικά διαστήματα κατελέγοντο και τα σύνθετα των προμνημονευθέντων συμφώνων διαστημάτων μετά της διαπασών (οκτάβας) υπό την προϋπόθεσιν, βεβαίως, ότι δεν παραβιάζεται το Θεμελιώδες Πυθαγόρειον αξίωμα για την μουσική συμφωνία.

Κατά τα ανωτέρω, η δις διαπασών (=διαπασών+διαπασών) εκφράζεται με πολλαπλάσιον σχέσιν  $\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{1}\right)$  και εντάσσεται εις τα σύμφωνα διαστήματα,

η διαπασών και διαπέντε (=διαπασών+διαπέντε) εκφράζεται με πολλαπλάσιον σχέσιν  $\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{1}\right)$  και εντάσσεται εις τα σύμφωνα διαστήματα,

η διαπασών και διατεσσάρων (=διαπασών+διατεσσάρων)<sup>46</sup> εκφράζεται με πολλαπλασιεπιμερή σχέσιν  $\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}\right)$  και δεν εντάσσεται εις τα σύμφωνα

ούτον τρόπον, ώστε δίδουν την εντύπωσιν ενός μόνον ήχου («έννοειδη φωνήν») (πρβ. Αριστείδης, Περί μουσ. 12 Μβ και Γαυδ. Εισαγ. 8).

Ο Κλεωνίδης (2ος μ.Χ. αιώνας) (Εισαγ. 5) δίδει τον ακόλουθον ορισμόν της συμφωνίας: «ἔστι δὲ συμφωνία μὲν κρᾶσις δύο φθόγγων ὀξυτέρου καὶ βαρυτέρου» (συμφωνία είναι η ανάμειξις δύο φθόγγων, εκ των οποίων ο εἶς είναι υψηλότερος και ο ἕτερος χαμηλότερος).

Ο Πορφύριος (232-304 μ.Χ.) μνημονεύει τον ορισμόν του Αιλιανού (από το ἔργο του Τίμαιος): «Συμφωνία είναι σύμπτωσις και ανάμειξις («ἐπὶ τὸ αὐτὸ πτῶσις και κρᾶσις») δύο φθόγγων διαφορετικῶν ως προς την οξύτητα και τη βαρύτητα», δηλαδή δύο φθόγγων διαφορετικῶν μουσικῶν ὕψους.

<sup>44</sup> Πυθαγόρειος πέμπτη ή διοξειά.

<sup>45</sup> Πυθαγόρειος τετάρτη ή συλλαβά.

διαστήματα, ως παραβιάζουσα το *Θεμελιώδες Πυθαγόρειον αξίωμα για την μουσική συμφωνία*.

Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος εμμέσως επικυρώνει ότι το *θεμελιώδες αξίωμα της Πυθαγορείου μουσικής θεωρίας* περί ευφωνίας ή συμφωνίας, ως αυτό διευτώθη ανωτέρω, ήτο το κεντρικόν δόγμα της Πυθαγορείου μουσικής ομολογίας πίστεως, επικρίνει τους Πυθαγορείους, ως περιορίζοντας αυθαίρετως την ευφωνία ή συμφωνία μόνον εις τους όρους της ιεράς τετρακτύος και διερωτάται για ποιόν λόγον οι Πυθαγόρειοι δεν εντάσσουν εις τα εύφωνα ή σύμφωνα διαστήματα τα μουσικά διαστήματα του επιτετάρτου  $\left(\frac{5}{4}\right)$  ή του πενταπλασίου  $\left(\frac{5}{1}\right)$ .

Επίσης τους επικρίνει, διότι εξαιρούν εκ των ευφώνων ή συμφώνων μουσικών διαστημάτων το διάστημα της διαπασών και διατεσσάρων, υποστηρίζων ότι το διαπασών διάστημα δεν αλλοιώνει τον χαρακτήρα (εύφωνον ή διάφωνον) του μουσικού διαστήματος εις το οποίον προστίθεται.

Υπ' αυτήν την οπτική γωνία, λοιπόν, για τον Κλαύδιον Πτολεμαίον το διάστημα διαπασών και διατεσσάρων είναι ένσυμφωνον μουσικόν διάστημα.

### 7.1.1. *Τῶν ἐν ἐνὶ ὀνόματι πρὸς ἀλλήλους λεγομένων ἀριθμῶν*

Η έκφρασις «*Τῶν ἐν ἐνὶ ὀνόματι πρὸς ἀλλήλους λεγομένων ἀριθμῶν*», η οποία υπάρχει εις το τέλος της εισαγωγῆς της Ευκλείδειου Μουσικομαθηματικῆς πραγματείας *Κατατομή κανόνος*, αποτελεί ἀκόμη και σήμερα ἐν ἄλυστον μυστήριον, το οποίον απησχόλησεν και εξακολουθεῖ να απασχολεῖ αναριθμητούς μελετητάς. Τί ἐννόει ἄραγε ο Ευκλείδης δι' αὐτῆς της ἐκφράσεως;

Σημειωτέον ὅτι ἡ Λατινική ἐκδοσις της πραγματείας δεν περιέχει αὐτήν την ἐκφρασιν και διερωτάται ο ερευνητής «γιατί»;

Και ο Βοήθιος παραλείπει την ἐν λόγω ἐκφρασιν, ἐπίσης, εἴτε ἴσως ἐπειδή ἐπιπροβληματίσθη πολὺ με το νόημά της, εἴτε, ἴσως, ἐπειδή ἀπετέλει πλεονασμὸν ὡς κάτι το αὐτονόητον.

Μόνον ἡ Ἑλληνική ἐκδοσις συνδέει την ευφωνία δύο φθόγγων με την πολλαπλασίαν ἢ ἐπιμόριον ἀριθμητικὴν των σχέσιν.

Οι Karl von Jan και Thomas Mathiesen προτείνουν ἀντὶ της ἐκφράσεως «ἐν ἐνὶ ὀνόματι» τὰς λέξεις «κρεῖττον» και «σύμφωνον», ἀντιστοίχως.

Εἰς τὰς ἀρχὰς του 20<sup>ου</sup> αἰῶνος οἱ Louis Laloy, Edward Lippman και Andrew Barker διετύπωσαν την ἄποψιν ὅτι εἰς την ἀρχαίαν ἐποχὴν μόνον οἱ πολλαπλασιοὶ και οἱ ἐπιμόριοι ἀριθμοὶ θα ἐξεφωνούντο μονολεκτικῶς, ἐνῶ οἱ ἐπιμερεῖς, οἱ πολλαπλασιεπιμόριοι και οἱ πολλαπλασιεπιμερεῖς ἀριθμοὶ θα ἐξεφωνούντο δια περισσοτέρων της μίας λέξεων.

<sup>46</sup> Ἡ περίπτωση αὐτή ἀποτελεῖ την «ἀχίλλειον πτέρνα» του Θεμελιώδους Πυθαγορείου αξιώματος για την μουσική συμφωνία και συνήθως ἀποσιωπάται ὑπὸ των Πυθαγορείων.

Εάν όντως ούτω πως είχαν τα πράγματα, τότε καλώς την εν λόγω πρότασιν την παραλείπει, ως αυτονόητον, ο Βοήθιος. Αλλ' αυτή η βολική άποψις ανατρέπεται εκ της ονοματολογίας των πολλαπλασίων, των επιμορίων, των επιμερών, των πολλαπλασιεπιμορίων και των πολλαπλασιεπιμερών αριθμών, την οποία μας παραθέτει ο Νικόμαχος ο Γερασηνός<sup>47</sup> εις το έργον του *Αριθμητική εισαγωγή* και η οποία για όλους αυτούς τους αριθμούς είναι μονολεκτική. Όντως, ας παραθέσωμεν αριθμόν παραδειγμάτων, ως ταύτα αναφέρονται εις το σχετικόν κεφάλαιον του προαναφερθέντος συγγράμματος.

Εκ των πολλαπλασίων αριθμών: Τριπλάσιος  $\frac{\alpha}{\beta} = 3$

Εκ των επιμορίων αριθμών: Επίτριτος  $\frac{\alpha}{\beta} = 1 + \frac{1}{3}$

Εκ των επιμερών αριθμών: Επιδιμερής  $\frac{\alpha}{\beta} = 1 + \frac{2}{3}$

Εκ των πολλαπλασιεπιμορίων αριθμών: Διπλασιεπίτριτος  $\frac{\alpha}{\beta} = 2 + \frac{1}{3}$

Εκ των πολλαπλασιεπιμερών αριθμών: Διπλασι(ο)επιδιμερής  $\frac{\alpha}{\beta} = 2 + \frac{2}{3}$

Ως αντίλογος υποστηρίζεται η άποψις ότι όντως εις την αρχαίαν εποχήν μόνον οι πολλαπλάσιοι και οι επιμόριοι αριθμοί εξεφωνούνται μονολεκτικώς, ενώ οι επιμερείς, οι πολλαπλασιεπιμόριοι και οι πολλαπλασιεπιμερείς αριθμοί εξεφωνούνται δια περισσοτέρων της μιας λέξεων και ότι ο Νικόμαχος ο Γερασηνός (50-120 μ.Χ.) επενόησεν κατά την συγγραφήν του έργου του *Αριθμητική εισαγωγή* τον μονολεκτικόν τρόπον εκφωνήσεως όλων των πέντε ειδών αριθμών της καλουμένης *μεγαλυτέρας ανισότητος*.

<sup>47</sup> Νικόμαχος ο Γερασηνός. Πυθαγόρειος φιλόσοφος από τα Γέρασα της Πετραίας Αραβίας. Έζησεν ή το δεύτερον ήμισυ του Α' μ.Χ. αιώνος ή περί το μέσον του Β' μ.Χ. αιώνος. Συνέγραψεν πλήθος σημαντικών έργων εκ των οποίων σώζονται: «*Αριθμητική Εισαγωγή*» εις δύο βιβλία, μια μεταφυσική των αριθμών, η οποία εξεδόθη υπό του Hoche το 1864 εις την Λειψίαν. Το έργο αυτό αληθώς αξιόλογον, το υπομνημάτισε ο Ιάμβλιχος και ο Φιλόπονος, μετεφράσθη δε υπό του Απουληίου εις την Λατινικήν γλώσσαν. Εις το έργον αυτό εμπεριέχεται και το «*θεώρημα του Νικομάχου*» κατά το οποίον κάθε κύβος φυσικού αριθμού δύναται να εκφρασθεί ως άθροισμα ορισμένων διαδοχικών περιττών αριθμών κατά το γενικό σχήμα:

$$v^3 = [v(v-1)+1] + [v(v-1)+3] + \dots + [v(v-1)+2v-1]$$

οπότε:

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 3+5$$

$$3^3 = 7+9+11$$

$$4^3 = 13+15+17+19$$

«*Εγχειρίδιον Αρμονικής*» εις δύο βιβλία, το οποίον εξεδόθη εις την συλλογήν των μουσικών συγγραφέων υπό των Meibom και Carl Jan το έτος 1895, «*Σύλλογή Πυθαγορείων δογμάτων*» κ.α. Εκτός των έργων αυτών ο Φώτιος αναφέρει και το έργον «*Αριθμητικά θεολογούμενα*», το οποίον πραγματεύεται την μυστικήν σημασίαν των αριθμών.

Προσωπικώς τον ανωτέρω αντίλογον δεν τον αποδέχομαι. Πιστεύω ακραδάντως ότι, εάν ο Νικόμαχος επενόει κάτι το διαφορετικόν από το ό,τι ήτο αποδεκτόν υπό των «παλαιών», όσον αφορά εις την ονομασίαν και εκφώνησιν των πέντε ειδών των αριθμών της καλουμένης μεγαλύτερας ανισότητος, αφ' ενός μεν θα το εδήλωνε και αφ' ετέρου θα παρέθετε και τον «παλαιόν» τρόπον εκφωνήσεως του αριθμού παραπλεύρως εις τον νεοεισαγόμενον ιδικόν του τρόπον.

Υποστηρίζω την άποψιν ότι και τα πέντε είδη των αριθμών της καλουμένης μεγαλύτερας ανισότητος εξεφωνούνται μονολεκτικώς, αλλά ο Ευκλείδης αποδέχεται μόνον τα δύο πρώτα είδη των αριθμών, διότι αυτά και μόνον αυτά οδηγούν εις αριθμητικές σχέσεις εκπεφρασμένας δια των ενσαρκωτών της ιεράς τετρακτύος (1, 2, 3, 4), αι οποίαι υποδηλούν το σύμφωνον ή το διάφωνον ενός μουσικού διαστήματος<sup>48</sup>.

Όντως, οι **πολλαπλάσιοι** αριθμοί  $\frac{\alpha}{\beta} = n$  για  $n=1,2,3,4$  θεωρούνται υπό των Πυθαγορείων ότι εκφράζουν εύφωνα ή σύμφωνα διαστήματα και συγκεκριμένως την ταυτοφωνίαν ή ομοφωνίαν, την διαπασών, την διαπασών και διαπέντε (διαπασών+διαπέντε) και την δις διαπασών, αντιστοίχως.

Οι **επιμόριοι** αριθμοί  $\frac{\alpha}{\beta} = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$  για  $n=1,2,3$  θεωρούνται υπό των Πυθαγορείων ότι εκφράζουν τα εύφωνα ή σύμφωνα διαστήματα διαπασών  $\left(\frac{2}{1}\right)$ , διαπέντε ή ημιόλιον  $\left(\frac{3}{2}\right)$ , διατεσσάρων ή επίτριτον  $\left(\frac{4}{3}\right)$ , αντιστοίχως.

Ο μικρότερος **επιμερής** αριθμός είναι ο  $\frac{\alpha}{\beta} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ .

Ο αριθμός αυτός εμπεριέχει τον αριθμόν 5, όστις, κατά τους Πυθαγορείους, δεν είναι ούτε είς εκ των αριθμών της ιεράς τετρακτύος, ούτε είς πυθαγόρειος αριθμός. Σημειωτέον ότι οι πυθαγόρειοι αριθμοί αναλύονται εις γινόμενον πρώτων παραγόντων, έκαστον των οποίων είναι δύναμις του αριθμού 2 ή/και του αριθμού 3 με εκθέτην μεγαλύτερον του μηδενός. Συνεπώς, ο επιμερής ούτος αριθμός δεν δύναται να εκφράζει εύφωνον ή σύμφωνα διάστημα.

Ο μικρότερος **πολλαπλασιεπιμόριος** αριθμός είναι ο  $\frac{\alpha}{\beta} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ .

Και ο αριθμός αυτός εμπεριέχει τον αριθμόν 5, όστις, κατά τους Πυθαγορείους, δεν είναι ούτε είς εκ των αριθμών της ιεράς τετρακτύος, ούτε είς πυθαγόρειος αριθμός. Συνεπώς, ο πολλαπλασιεπιμόριος αυτός αριθμός δεν δύναται να εκφράζει εύφωνον ή σύμφωνα διάστημα.

<sup>48</sup> Πρβλ. σχετικόν κεφάλαιον για το Θεμελιώδες Πυθαγόρειον αξίωμα για την μουσική συμφωνίαν.



Ο μικρότερος **πολλαπλασιεπιμερής αριθμός** είναι ο  $\frac{\alpha}{\beta} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ .

Ο αριθμός αυτός εμπεριέχει τον αριθμόν 8, όστις, κατά τους Πυθαγορείους, ναί μεν είναι πυθαγόρειος αριθμός ( $8 = 2^3 \cdot 3^0$ ), αλλά δεν συμπίπτει με έναν εκ των αριθμών της ιεράς τετρακτύος. Δεν δύναται, συνεπώς, να εκφράζει εύφωνον ή σύμφωνον διάστημα<sup>49</sup>.

Αφού, λοιπόν, οι μικρότεροι των επιμερών, των **πολλαπλασιεπιμορίων** και των **πολλαπλασιεπιμερών αριθμών** δεν είναι δυνατόν να εκφράζουν σύμφωνα μουσικά διαστήματα, κατά μείζονα λόγον και άπαντες οι αντίστοιχοι μεγαλύτεροι των αριθμοί δεν είναι δυνατόν, κατά την άποψιν των Πυθαγορείων, να εκφράζουν σύμφωνα μουσικά διαστήματα.

Προς κατανόησιν των ανωτέρω να μην λανθάνει της προσοχής ημών το γεγονός ότι οι «κανονικοί», ήτοι οι μουσικοί οι εχρησιμοποιούντες τον κανόνα (=μονόχορδον) για ακουστικά πειράματα, κατ' αρχάς εχρησιμοποιούν τον αρχέγονον κανόνα, τον Πυθαγόρειον, τον διηρημένον εις τέσσερα ίσα μέρη. Τούτο σημαίνει ότι ο κανών έφερε δεσμούς (=τάστα) με τας αριθμήσεις 1, 2, 3, 4 και υπεστήριζεν εις την μουσικήν πράξιν εύφωνα μουσικά διαστήματα εκφραζόμενα MONON δια σχέσεων μεταξύ των αριθμών της ιεράς τετρακτύος<sup>50</sup>.

Εις επίρρωσιν αυτών ανατρέχω εις το Πυθαγόρειον πείραμα με τα δονούμενα τμήματα της χορδής του μονοχόρδου κατά Γαυδέντιον και εις την Φιλολάειον λέξιν «άρμονίας δέ μέγεθος συλλαβὰ καὶ δι' ὄξειᾶν»<sup>51</sup> (Νικόμαχος, Εγχειρίδιον Αρμονικής, 9.1.14-15).

<sup>49</sup> Να μην λανθάνει της προσοχής ημών ότι αυτό το διάστημα είναι το διαπασών και διατεσσάρων (διαπασών + τετάρτη)  $\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}\right)$ , το οποίον, επειδή εκφράζεται με **πολλαπλασιεπιμερή σχέσιν**, εντάσσεται εις τα διάφωνα ή ασύφωνα διαστήματα, κατά τους Πυθαγορείους.

<sup>50</sup> Οι παλαιότεροι γοῦν τῶν ἀρμονικῶν, καὶ μάλιστα οἱ τῆς τοῦ Πυθαγόρου αἰρέσεως, οἵτινες ὡς ἀρχὴν τῶν ὄλων τὸν ἀριθμὸν ὑπελάμβανον, οὐδαμῶς παρεδέχοντο ὡς σύμφωνον τὸ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ τεσσάρων σύστημα, ἐπειδὴπερ ὁ λόγος αὐτοῦ οὐκ ἐν ἐπιμορίοις συνίσταται λόγους, ὡς τὰ λοιπὰ σύμφωνα, τὸ μὲν διὰ τεσσάρων ἐν ἐπιτρίτῳ, τὸ δὲ διὰ πέντε ἐν ἡμιολίῳ, τὸ διὰ πασῶν ἐν ἡμιολίῳ καὶ ἐπιτρίτῳ, τὸ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ πέντε ἐν ἡμιολίῳ, ἐπιτρίτῳ καὶ ἡμιολίῳ, καὶ τὸ δις διὰ πασῶν ἐν ἡμιολίῳ, ἐπιτρίτῳ καὶ ἡμιολίῳ καὶ ἐπιτρίτῳ, καὶ ὅτι οὐκ ἐν τοῖς ἀπὸ μονάδος μέχρι τετράδος ἀριθμοῖς, καθάπερ καὶ τῶν ἄλλων ἀπάντων ἀρμονικῶν συστημάτων ἕκαστον τεθεώρηται, διότι καὶ ὁ τέσσαρα τελειωτικὸς τοῦ δέκα ἐστί. Πῶς δὲ αἱ συμφωνίαι πᾶσαι ἐντὸς τῆς τετράδος θεθεώρηται, ἢ ὁ μὲν ἐπιτρίτος τοῦ διὰ τεσσάρων λόγος ἀπὸ τοῦ δ πρὸς τὸν γ, ὁ δὲ ἡμιόλιος τοῦ διὰ πέντε λόγος ἀπὸ τοῦ γ πρὸς τὸν β, ὁ δὲ διπλάσιος τοῦ διὰ πασῶν λόγος ἀπὸ τοῦ δ πρὸς τὸν β, καὶ ἀπὸ τοῦ β πρὸς τὸν ἕνα· ὁ δὲ τριπλάσιος τοῦ διὰ πασῶν ἅμα καὶ διὰ πέντε λόγος Ι ἀπὸ τοῦ τρία πρὸς τὸ ἕν· ὁ δὲ τετραπλάσιος τοῦ δις διὰ πασῶν λόγος ἀπὸ τοῦ δ πρὸς τὸ ἕν; Γεωργίου Παχυμέρη, *Περὶ Ἀρμονικῆς*, Κεφάλαιο Ι, Στίχοι 9-23.

<sup>51</sup> Αἱ ἐννοιαὶ «άρμονία», «συλλαβὰ» καὶ «δι' ὄξειᾶν» σχετίζονται με τὰ μεγέθη τῶν μουσικῶν διαστημάτων «διαπασών», «διατεσσάρων» καὶ «διαπέντε», ἀντιστοίχως.

**8. Το θεμελιώδες Πυθαγόρειον αξίωμα για την μουσική συμφωνία και η θεωρία των διακροτημάτων κατά Hermann von Helmholtz<sup>52</sup>**

Εἷς μουσικός ἦχος χαρακτηρίζεται ἐκ τῆς ἀρμονικῆς τοῦ δομῆς, ἴτοι ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀρμονικῶν τοῦ (=ἠμιτονοειδῶν ἡχῶν).

Κατὰ τὴν συνήχησιν δύο μουσικῶν ἡχῶν οἱ ἀρμονικοὶ ἐκάστου συμμετέχουν εἰς τὴν διέγερσιν τοῦ ὠτός τοῦ ἀκροατοῦ.

Ἐχει ἀποδειχθεῖ ἐπιστημονικῶς ὅτι ὅσον μικρότεροι εἶναι οἱ ἀριθμοί, οἱ ἐκφράζοντες τὸν λόγον τῶν θεμελίων τῶν δύο μουσικῶν ἡχῶν (=Πυθαγόρειον διάστημα θεμελίων), τόσο μεγαλύτερος εἶναι ὁ βαθμὸς τῆς συμφωνίας τοῦ διαστήματός τῶν, διότι κατὰ τὴν θεωρίαν τῶν διακροτημάτων οἱ μικροὶ ἀριθμοὶ εἰς τὸ Πυθαγόρειον διάστημα τῶν θεμελίων συνεπάγονται τὴν ἀπουσίαν τῶν ἐνοχλητικῶν διακροτημάτων μεταξύ τῶν ὑψηλοτέρας τάξεως ἀρμονικῶν, τῶν προκαλούντων τὴν δυσἀρμονίαν.

<sup>52</sup> Βλέπε Σπυρίδης, Χαράλαμπος (2005). *Φυσικὴ καὶ Μουσικὴ Ἀκουστικὴ*. Θεσσαλονίκη: Ἐκδόσεις Grapholine. σ. 622 κ.ε.