

Τέλειον Μείζον Σύστημα κατά χρῶμα παρὰ Πλάτωνι

1. Περί αλληγορίας

Οι μεμνημένοι Πυθαγόρειοι κατείχον την απόκρυφον γνώσιν και «ἐπὶ ποιῆῃ θανάτου» δεν την εκκοινολόγουν εις τους αμυήτους, διότι «οὐ τὰ πάντα τοῖς πᾶσι ρητὰ». Ὅμως, ωρισμένοι των «παλαιῶν»¹ φιλοσόφων, τραγικῶν και ποιητῶν εδίδασκον κρυφίως «μῦθῳ φιλοσοφοῦντες» απόκρυφές τινες διδασκαλίες.

Το επιφανειακόν νόημα εν τῇ αλληγορίᾳ δυνατόν να κατανοηθῆ τῇ βοηθείᾳ της Γραμματικῆς και του Συντακτικῶ· η καθαυτῶ, ὅμως, απόκρυφος γνώσις αντλείται δια των Πυθαγορείων Μαθηματικῶν και της Πυθαγορείου Αρμονικῆς (Μουσικῆς).

Οι πυθαγόρειοι ανεκάλυψαν τις βασικές αρχές της παγκοσμίου αρμονίας, τις εξέφρασαν δια μουσικῶν λόγων και δι' αυτῶν ἤρμωσαν τους φθόγγους.

Ο Πλάτων υπό του Σωκράτους εδιδάχθη την Φιλοσοφίαν, υπό του Αρχύτου του Ταραντίνου εμνήθη εις τον Πυθαγορισμόν² και, ιδρύων την Ακαδημίαν, κατέστη ο πρώτος ιθύνων ενός μονίμου Ἰδρύματος για την προαγωγήν της επιστημονικῆς γνώσεως κι ερεῦνης.

¹ οἱ παλαιοὶ πολλοῖς αἰνίγμασιν ἐχρῶντο και μάλιστα πρὸς τοὺς ἱερεῖς

Stephanus page 281 section B lines 1-2
Plutarchus: Aetia Romana et Graeca (263d-304f).

Οἱ γὰρ παλαιοὶ τὰ ποιήματα αὐτῶν πρῶτον ἐν προομίοις και αἰνίγμασιν γεγράφασιν· ὕστερον δὲ και καθόλου φανερῶ ἐχρῶντο τῷ λόγῳ.
Scholia in Aeschylum: Scholia in Prometheus vinctum (scolia vetera)
Vita-argumentum-scholion-epigram sch verse 610 line 3.

² Οἱ Πυθαγορικοὶ, οἷς πολλαχῇ ἔπεται Πλάτων
Θέων Σμυρναῖος, *Των κατὰ το μαθηματικὸν χρησίμων*, 12, 10.

Εις τα γραπτά του Πλάτωνος ενυπάρχει ο δυϊσμός των Πυθαγορείων συστοιχιών, τον οποίον ο Πυθαγορισμός, μήτρα πολλών φιλοσοφιών, είχε πρωτοεισαγάγει εις τον ελληνικόν κόσμον. Ο Πλάτων εις αυτά ευρύτατα αλληγορεί επιλέξας την μουσικήν ως μίαν δύναμιν ικανήν να προβάλλει μια φιλοσοφικήν σύνθεσιν διατυπωμένην δια Μαθηματικών προτάσεων.

Όμως, οι φιλόλογοι αποφεύγουν την εμβάθυνσιν εν ταις Πλατωνικαίς αλληγορίαις «απλουστεύοντες το κείμενον» και οι μαθηματικοί αντιμετωπίζουν τις διατυπούμενες μαθηματικές προτάσεις «ποιητική άδεία» με αποτέλεσμα εν πολλοίς ο Πλάτων να εξακολουθεί να είναι οικτρώς αδικημένος ως μη εισέτι κατανοούμενος.

2. Πυθαγόρειες «συστοιχίες»

Ο Πυθαγόρειος δυϊσμός υλοποιείται δια δέκα «συστοιχιών», ήτοι δέκα ζευγών εναντιοτήτων των λεγομένων αντιζων καθ' Ηράκλειτον, εναντίων κατά Παρμενίδην και κατ' Εμπεδοκλέα.

Επί των συστοιχιών αυτών στηρίζεται ολόκληρος η μεταφυσική αλήθεια και επ' αυτών εφίλοσόφησαν κατά τον ορθότερον τρόπον οι Νεοπλατωνικοί και ιδίως ο Πρόκλος.

ἔτεροι δὲ τῶν αὐτῶν τούτων τὰς ἀρχὰς δέκα λέγουσιν εἶναι τὰς κατὰ συστοιχίαν λεγομένας, πέρασ [καί] ἄπειρον, περιττὸν [καί] ἄρτιον, ἐν [καί] πλῆθος, δεξιὸν [καί] ἀριστερόν, ἄρρεν [καί] θῆλυ, ἡρεμοῦν [καί] κινούμενον, εὐθύ [καί] καμπύλον, φῶς [καί] σκότος, ἀγαθὸν [καί] κακόν, τετράγωνον [καί] ἑτερόμηκες·
Αριστοτέλης, *Μετά τα Φυσικά*, 986 a, 22-26

3. Πυθαγόρειες³ Αναλογικότητες ή Αναλογίες ή Μεσότητες

Κατά τον ρουν της Ιστορίας οι θρησκείες ενεκλώβισαν τον άνθρωπον μεταξύ δύο αντιζών: το αγαθόν και το κακόν, ήτοι τον Θεόν και τον Διάβολον και το απ' ανέκαθεν τιθέμενον μέγα φιλοσοφικόν ή/και θεολογικόν ερώτημα «οποία η στάσις του ανθρώπου μεταξύ των αντιζών;» χρήζει απαντήσεως.

Οι Πυθαγόρειοι απήντησαν εκφραζόμενοι μαθηματικώς δι' ακεραίων και μόνον αριθμών εις το εν λόγω ερώτημα με ΔΕΚΑ θέσεις –στάσεις ζωής- εκ των απείρων θεωρητικώς υπαρχουσών Γεωμετρικών θέσεων μεταξύ των αντιζών, ήτοι ΔΕΚΑ ανά λόγον μεσότητες, η μελέτη των οποίων αποτελεί την θεωρίαν των μεσοτήτων ή των αναλογικότητων ή των αναλογιών.

³ Οι δέκα αναλογίες μνημονεύονται υπό του Νικομάχου εις την πραγματείαν του *Αριθμητική Εισαγωγή* και υπό του Πάππου εις την πραγματείαν του *Συναγωγή*.

4. Τέλεια Μείζονα Συστήματα

4.1. Το Τέλειον Μείζον Σύστημα

Εδομείτο υπό δύο ζευγών συνημμένων τετραχόρδων εν διαζεύξει και του προσλαμβανομένου φθόγγου ως χαμηλοτέρου, δι' ὃ και ονομάζεται σύστημα Διεζευγμένον.



Το Τέλειον Μείζον Σύστημα εδομείτο υπό δύο ζευγών συνημμένων τετραχόρδων εν διαζεύξει και του προσλαμβανομένου φθόγγου ως χαμηλοτέρου.

4.2. Το Τέλειον Μείζον Αμετάβολον Σύστημα

Πλέον των τεσσάρων τετραχόρδων του Τελείου Μείζονος Συστήματος τούτο εμπεριέχει και πέμπτων τετραχόρδων συνημμένων τῇ Μέσῃ.



Το Σύστημα Τέλειον Μείζον Αμετάβολον

Ο Πλάτων διδάσκει μόνον το Τέλειον Μείζον Σύστημα εις το οποίον υπάρχουν τέσσερα μη αναμειγνύμενα τετράχορδα -<τὰ Ἡσιόδου γένη>- Υπατών, Μέσων, Διεζευγμένων, Υπερβολαίων.

<τὰ Ἡσιόδου γένη> χρυσοῦν τε καὶ ἀργυροῦν καὶ χαλκοῦν καὶ σιδηροῦν ὁμοῦ δὲ μίγντος σιδηροῦ ἀργυρῷ καὶ χαλκοῦ χρυσοῦ ἀνομοιότης ἐγγενήσεται καὶ ἀνωμαλία ἀνάρμοστος.

Πλάτωνος, Πολιτεία, 547a, 1-5

Όντως, εις το Τέλειον Μείζον Αμετάβολον σύστημα δύο εκ των πέντε υπάρχοντων εν αὐτῷ τετραχόρδων αναμιγνύονται. Πρόκειται περί του τετραχόρδου συνημμένων, το οποίον δομεῖται εκ των φθόγγων Μέση, Τρίτη συνημμένων, Παρανήτη συνημμένων και Νήτη συνημμένων και περί του τετραχόρδου Διεζευγμένων, το οποίον δομεῖται εκ των φθόγγων Παραμέση, Τρίτη διεζευγμένων, Παρανήτη διεζευγμένων και Νήτη Διεζευγμένων. Δεδομένου ότι οι φθόγγοι Παρανήτη συνημμένων και Νήτη συνημμένων συμπίπτουν, αντιστοίχως, μετά των φθόγγων Τρίτη διεζευγμένων και Παρανήτη διεζευγμένων, τα εν λόγω τετράχορδα εμπλέκονται-αναμιγνύονται. Συνεπώς, ο Πλάτων δεν ομιλεῖ για τις δύο αρμονίες του Τελείου Μείζονος Αμεταβόλου συστήματος.

5. Αρμονικός Συγγραφεύς

Περί αὐτοῦ του ειδικοῦ αρχαιοέλληνας επιστήμονος σας παραπέμπω εις δύο ορισμούς, διδομένους υπό του Πορφυρίου και του Ιαμβλίχου.

ἄρμονικὸς δ' ἐστὶ ὁ περὶ τοῦ ἡρμωσμένου ποιούμενος τοὺς λόγους Πορφύριος, *Υπόμνημα εις τα Αρμονικά του Πτολεμαίου*, 23, 6

Ἀρμονικὸς ὁ περὶ τὴν τοῦ Πυθαγόρου ἄρμονικὴν ἐπιστήμην καὶ τοὺς ἄρμονικοὺς λόγους ἀσχολούμενος. Ιάμβλιχος, *Περί του Πυθαγορικοῦ Βίου*, 25, 115, 4

Οι συγγράψαντες περί την ἄρμονικὴν ἐπιστήμην καὶ τοὺς ἄρμονικοὺς λόγους βιβλία ονομάζονται Αρμονικοὶ Συγγραφεῖς. Δεν κατέστη γνωστὸν ἄχρι στιγμῆς ὅτι εκ των υπαρχάντων ἀρμονικῶν συγγραφέων Μέγιστος τυγχάνει ο Πλάτων και ἰδοῦ διατί:

Εἶναι ο μόνος, ο οποίος ἀλληγορικῶς τῷ τρόπῳ μας δίδει λεπτομερέστατες πληροφορίες για τὴν δόμησιν των διατονικῶν κλιμάκων εις τὴν Γένεσιν Ψυχῆς Κόσμου εις το ἔργον του *Τίμαιος*

τῆς ἀμερίστου και ἀεὶ κατὰ ταῦτὰ ἐχούσης οὐσίας και τῆς αὐτῆς περὶ τὰ σώματα γινομένης μεριστῆς τρίτον ἐξ ἀμφοῖν ἐν μέσῳ συνεκράσατο οὐσίας εἶδος, τῆς τε ταυτοῦ φύσεως [αὐτῆς] και τῆς τοῦ ἐτέρου, και κατὰ ταῦτὰ συνέστησεν ἐν μέσῳ τοῦ τε ἀμεροῦς αὐτῶν και τοῦ κατὰ τὰ σώματα μεριστοῦ· και τρία λαβὼν αὐτὰ ὄντα συνεκράσατο εις μίαν πάντα ἰδέαν, τὴν θατέρου φύσιν δύσμεικτον οὐσαν εις ταυτὸν συναρμόττων βίαν. Πλάτων, *Τίμαιος*, 35a1

Ἔως τῶρα γνωρίζατε ὅτι για το Πυθαγόρειον ἐναρμόνιον γένος μοναδικές πηγές πληροφορίας ἦσαν οι υπ' αριθμὸν 17 και 18 προτάσεις της Μουσικομαθηματικῆς πραγματείας *Ευκλείδου Κατατομῆς Κανόνος* (3^{ος} π.Χ. αἰ.).

Σήμερα σας ἀναφέρω, διότι δεν το ἐχομεν ἀντιληφθεῖ ὅτι ο Πλάτων εις τὴν *Πολιτείαν* του κυρίως δι' ἐνὸς πολλαπλασιαστικοῦ ἀριθμητικοῦ, του ἔννεακαιεικοσικαιεπτακοσιο-

πλασιάκις (729), μας δίδει πληροφορίες για την δομήν του εναρμονίου πενταχόρδου διακόσια έτη προ του Ευκλείδου.

Οὐκοῦν ἐάν τις μεταστρέψας ἀληθεία ἡδονῆς τὸν βασιλέα τοῦ τυράννου ἀφεστηκότα λέγη ὅσον ἀφέστηκεν, ἐννεακαιεικοσικαιεπτακοσιοπλασιάκις ἥδιον αὐτὸν ζῶντα εὐρήσει τελειωθεῖση τῇ πολλαπλασιώσει, τὸν δὲ τύραννον ἀνιαρότερον τῇ αὐτῇ ταύτῃ ἀποστάσει. Πλάτων, *Πολιτεία*, 587d12

Ουδείς των υπαρξάντων αρμονικῶν συγγραφέων ἔγραψε περί του χρωματικῶν γένους παρά μόνον ο Πλάτων. Η σχετικὴ περικοπή, ἥτις εἶναι μοναδική, δεν κατενοήθη και δεν ἀπεδόθη ορθῶς οὔτε ἀκόμη ὑπὸ του μεγίστου Πρόκλου.

ὦν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεῖς δύο ἄρμονίας παρέχεται τρις ἀύξηθεις Πλάτων, *Πολιτεία*, 546c1

6. Τέλειον Μείζον Σύστημα κατά χρώμα παρά Πλάτωνι

Θα σας ομιλήσω περί του ὑπὸ του Πλάτωνος λεγομένου γεωμετρικῶν ἀριθμῶν. Η ἀσάφεια της ἀναφορᾶς του Πλάτωνος περί του γεωμετρικῶν ἀριθμῶν εἶναι τόσο μεγάλη, ὥστε εἶχε καταστεί παροιμιώδης για τους ἀρχαίους. Τούτου του γεγονότος ἐνεκα ὑπῆρξεν προβληματισμὸς μήπως παλαιότερον ἐγένετο λαθροχειρία ἐπὶ του κειμένου. Το δυστύχημα για την Φιλοσοφίαν εἶναι ὅτι εἰς οὐδὲν εκ των σωζομένων φιλοσοφικῶν συγγραμμάτων δεν ὑπάρχει ἶχνος διασαφηνίσεως περί του συγκεκριμένου προβλήματος.

Ὦντως, ἀπαιτεῖται ὑψίστου βαθμοῦ μύησις, ἥτοι βαθύτατες γνώσεις Πυθαγορείου Ἀριθμητικῆς, Γεωμετρίας και Μουσικῆς, οι οποίες εἰς 20λεπτον ομιλίαν δεν μεταφέρονται. Ὁμως, ἐντὸς του τακτοῦ χρόνου θα παραθέσω την λύσιν του προβλήματος για πρώτην φοράν, το οποίον ἐν ὀλίγοις ἀφορᾶ εἰς την κατατομήν του κανόνος κατά χρώμα παρά Πλάτωνι ἢ, ὅπως λέγομεν εἰς την Βυζαντινὴν Μουσικὴν, κατά το χρωματικὸν γένος.

Ο Πλούταρχος εἰς το ἔργον του *Περὶ Μουσικῆς* εκθειάζει τον Πλάτωνα ὡς ἐμπειρότατον περί των θεμάτων της ἀρμονίας (=διαπασῶν) «ὁ Πλάτων ... ἔμπειρος ἀρμονίας ἦν». Εκκινούμεν εκ της σεμνῆς, ουρανοῦ φύσεως, θείας, καλῆς και δαιμονίου ἀρμονίας, το μουσικὸν διάστημα το οποίον εκθειάζει ο Ἀριστοτέλης «ὅτι σεμνὴ ἢ ἀρμονία και θεῖόν τι και μέγα, Ἀριστοτέλης ὁ Πλάτωνος ταυτὶ λέγει ἢ δὲ ἀρμονία ἐστὶν οὐρανοῦ τὴν φύσιν ἔχουσα θεῖαν και καλὴν και δαιμονίαν».

Το διάστημα της ἀρμονίας (2:1), παρεμβάλλοντες ἐν πρώτοις ἐν αὐτῷ δύο μεσότητες, το καθιστώμεν τετραμερές. Οι δύο μεσότητες, τρίτη και τετάρτη, εἶναι η ἀρμονικὴ ἢ ὑπενάντιος και η ἐναντίος της ὑπεναντίου.

Δοθέντων δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν α και γ ($\alpha > \gamma$), δομούντων την Πλατωνικὴν συστοιχίαν ταυτὸν-θάτερον, ἥτοι 2:1, κατά την Πυθαγόρειον θεωρίαν περί Μεσοτήτων η ἀρμονικὴ ἢ ὑπενάντιος μεσότης

$$\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2 + 1} = \frac{4}{3}$$

προκύπτει εκ του ορισμού της Αρμονικής ή υπεναντίου αναλογίας

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$$

Τοιαύτην αναλογίαν $2, \frac{4}{3}, 1$ δομούν οι ακέραιοι αριθμοί 6, 4, 3.

Η ενάντιος της υπεναντίου μεσότης

$$\beta = \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha + \gamma} = \frac{2^2 + 1^2}{2 + 1} = \frac{5}{3}$$

προκύπτει εκ του ορισμού της εναντίου της υπεναντίου αναλογίας

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Τοιαύτην αναλογίαν $2, \frac{5}{3}, 1$ δομούν οι ακέραιοι αριθμοί 6, 5, 3.

Εκ των ορισμών των ανωτέρω αναλογιών τα μέρη των και τα μεγέθη των και οι υπεροχές των είναι «κατ' ἀριθμὸν καὶ ἰσομετρίαν». Τούτο τονίζεται, διότι εις το πρότον κλάσμα της αναλογίας συμμετέχουν όχι απλοί αριθμοί, αλλά διαφορές (=μεγέθη) αριθμών.

Επί τῇ βάσει της Πυθαγορείου ρήσεως «ἀρμονία ἐστὶ κρᾶσις καὶ σύνθεσις ἐναντίων» ἐνθα υπονοεῖται ὅτι ἡ διαπασών (=οκτάβα) δομεῖται ὑπὸ της συνθέσεως δύο ἐναντιοτήτων, ἤτοι της ἀρμονικῆς ἢ υπεναντίου και της ἐναντίου της υπεναντίου αναλογιών ἢ αναλογικοτήτων, την περίπτωση των δύο αναφερθεισών ἐναντιοτήτων την γράφω 3, 4, 5, 6.

Ὅμως, οἱ προκύψαντες τέσσερις ἀριθμοὶ δομούν και μίαν Αριθμητικὴν αναλογίαν

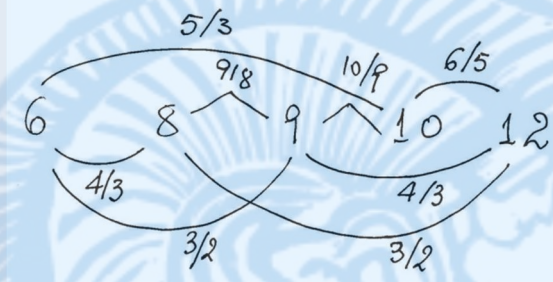
$$\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta} = \frac{\gamma}{\gamma}$$

Η μεσότης $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{6 + 3}{2} = \frac{9}{2}$ της οποίας για να εντεθεί μεταξύ αυτών των αριθμών

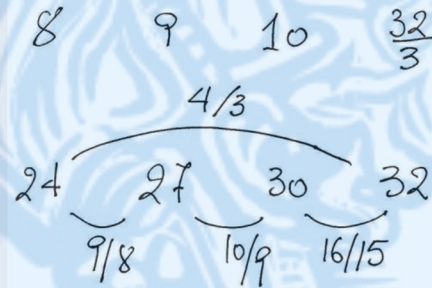
απαιτεί ὅπως ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ να εἶναι ἄρτιοι. Δια τούτο διπλασιάζω και τους τέσσερις προαναφερθέντες ἀριθμούς 3, 4, 5, 6 και ἐνθένω και τον 9, τον ἀριθμητικὸν των μέσων. Τοιουτοτρόπως, το διάστημα της ἀρμονίας (2:1), παρεμβληθεισών των τριών μεσοτήτων, κατέστη πενταμερές 6, 8, 9, 10, 12. Λεπτολογούντες ἐτι περισσότερο, διαπιστούμεν την ὑπαρξιν και πέμπτῃς ἀναλογίας, της γεωμετρικῆς ἀναλογίας, ἣτις ἐκφράζεται ἐμπλέγδην και ἐναλλάγδην ὑπὸ της σχέσεως $(\frac{9}{6} = \frac{12}{8})$.

Μεταξύ των διαδοχικών ὀρων της ἀριθμητικῆς ἀναλογίας 6, 9, 12 σχηματίζονται τα μουσικά διαστήματα του διατονικοῦ γένους διαπέντε ($9/6=3/2$) και διατεσσάρων ($12/9=4/3$), ἐνὼ μεταξύ των διαδοχικών ὀρων της ἀρμονικῆς ἢ υπεναντίου ἀναλογίας 6, 8, 12 σχηματίζονται τα μουσικά διαστήματα διατεσσάρων ($8/6=4/3$) και διαπέντε

($12/8=3/2$). Μεταξύ των διαδοχικών όρων της εναντίου της υπεναντίου αναλογίας 6, 10, 12 σχηματίζονται τα μουσικά διαστήματα του χρωματικού γένους μείζων έκτη χρωματική ($10/6=5/3$) και τρίτη ελάσσων χρωματική ($12/10=6/5$). Μεταξύ της αρμονικής (8) και αριθμητικής (9) μεσότητος σχηματίζεται το διάστημα του επογδού τόνου ($9/8$) και μεταξύ αριθμητικής (9) και της εναντίου της υπεναντίου μεσότητος (10) σχηματίζεται ο ελάσσων χρωματικός τόνος ($10/9$).



Ανθυφαιρουμένων των διαστημάτων του διατονικού και του χρωματικού γένους, γεννώνται νέα λίαν ενδιαφέροντα χρωματικά μουσικά διαστήματα, ως είναι φερ' ειπείν το χρωματικόν ημίτονον ($16/15$), δια του οποίου ομού οι δύο προαναφερθέντες τόνοι δομούν τετράχορδον ($9/8 \cdot 10/9 \cdot 16/15 = 4/3$).



Δια δύο τετραχόρδων καθορίζονται τα μέρη της χρωματικής δομής του διαπασών δια ρητών αριθμών ως ακολούθως:

Το ένα τετράχορδον του διαπασών περιχαρακούται μεταξύ των αριθμών 6 και 8, ήτοι της Νήτης και της Παραμέσης.

Το έτερον τετράχορδον του διαπασών περιχαρακούται μεταξύ των αριθμών 12 και 9, ήτοι της Υπάτης και της Μέσης.

Τα προμνημονευθέντα δύο τετράχορδα είναι διεξευγμένα, οπότε μεταξύ των υπάρχει ο επόγδος τόνος.

Τοιουτοτρόπως, εδομήθη, ως Αριστοτέλης μνημονεύει, το διαπασών διάστημα δια των αδρομερών του διαστηματικών στοιχείων, ήτοι δια των δύο τετραχόρδων του και του επογδού διαζευκτικού τόνου.

Τώρα πρέπει να προχωρήσωμεν εις την μικροδομήν αυτού του μεμονωμένου διαπασών, ήτοι εις τον πρέποντα κερματισμόν των τετραχόρδων του, όστις οφείλει να είναι ο αυτός δι' αμφοτέρα τα τετράχορδα.

Καθοδηγός μας θα είναι η διπλή πεμπάς ($2 \cdot 5 = 10$), ήτοι ο αριθμός δέκα, η μεσότης της εναντίου της υπεναντίου αναλογίας. Το μόνον δεδομένον είναι ότι μεταξύ της αριθμητικής μεσότητας, ήτοι του αριθμού 9, και της εναντίου της υπεναντίου μεσότητας, ήτοι του αριθμού 10, δομείται το διάστημα του ελάσσονος χρωματικού τόνου ($10/9$). Τίνι τρόπω, όμως, θα κερματίσωμεν το υπόλοιπον του τετραχόρδου, το ευρισκόμενον μεταξύ των αριθμών 10 και 12 άνευ οιασδήποτε αυθαιρεσίας;

Για τον ορθόν κερματισμόν του εν λόγω τετραχόρδου πρέπει

Περίπτωσης 1^η: Τον ελάσσονα τόνον ($10/9$) να ακολουθεί μείζων τόνος ($9/8$) και κατόπιν το χρωματικόν ημίτονον ($16/15$).

Τον ίδιον κερματισμόν πρέπει να εμφανίζει και το έτερον τετράχορδον μεταξύ των αριθμών 6 και 8. Συνεπώς, η διαστηματική δομή του μεμονωμένου χρωματικού διαπασών εκφράζεται ως:

6	20/3	15/2	8	9	10	45/4	12
---	------	------	---	---	----	------	----

και μετά την ακεραιοποίησιν των αριθμών εκφράζεται ως:

72	80	90	96	108	120	135	144
----	----	----	----	-----	-----	-----	-----

Περίπτωσης 2^η: Τον ελάσσονα τόνον ($10/9$) να ακολουθεί το χρωματικόν ημίτονον ($16/15$) και κατόπιν ο μείζων τόνος ($9/8$).

Τον ίδιον κερματισμόν πρέπει να εμφανίζει και το έτερον τετράχορδον μεταξύ των αριθμών 6 και 8. Συνεπώς, η διαστηματική δομή του μεμονωμένου χρωματικού διαπασών εκφράζεται ως:

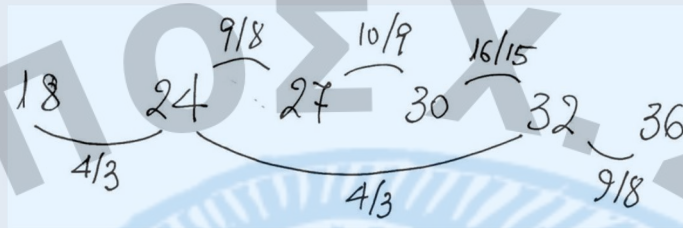
6	20/3	64/9	8	9	10	32/3	12
---	------	------	---	---	----	------	----

και μετά την ακεραιοποίησιν των αριθμών εκφράζεται ως:

54	60	64	72	81	90	96	108
----	----	----	----	----	----	----	-----

Για τους επαΐοντες, θα εδυνάμεθα να δομήσωμεν το διαπασών όχι ως αυτόνομον μουσικὴν οντότητα, αλλά ως ήμισυ ενός Μείζονος Τελείου Συστήματος, εμπεριέχοντος – κατά τα γνωστά- δύο αρμονίες, ήτοι δύο διαπασών. Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν τα τετράχορδα εἶναι συνημμένα και όχι διεζευγμένα και αὐτὴν τὴν δομὴν περιγράφει ο Πλάτων με τις ασυνήθεις ποιητικῶς διατυπούμενες μαθηματικῆς εκφράσεις.

Το πρώτο των συνημμένων τετραχόρδων ευρίσκεται μεταξύ των αριθμών 6 και 8. Ακολουθεί το δεύτερον συνημμένον τετράχορδον δομούμενον εκ του επογδόου τόνου μεταξύ των αριθμών 8 και 9, εκ του ελάσσονος χρωματικού τόνου μεταξύ των αριθμών 9 και 10 και εξ ενός διαστήματος $16/15$ μεταξύ του αριθμού 10 και ενός αριθμού $x=32/3$. Το καινοφανές μουσικόν διάστημα $16/15$ ονομάζεται ημίτονον χρωματικόν. Ο μη ακέραιος αριθμός $x=32/3$ επιβάλλει τον τριπλασιασμόν όλων των αριθμών των εμπλεκόμενων εις το διαπασών, ώστε να εκφράζωνται δι' ακεραίων αριθμών.



Για πρώτη φορά εμφανίζεται η χρωματική δομή του τετραχόρδου των Διεζευγμένων εξ επογδίου τόνου (9/8), ελάσσονος χρωματικού τόνου (10/9) και εκ χρωματικού ημιτόνου (16/15) κατά την κατιούσαν διαδοχήν.

Ομοίαν δομήν οφείλει να έχει και το έτερον τετράχορδον, το περιχαρακωμένον μεταξύ των αριθμών 18 και 24.

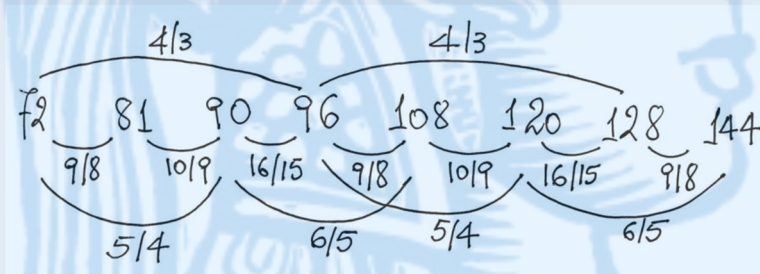
Εις τον συγκεκριμένον κατακερματισμόν του τετραχόρδου (18, 24) εμφανίζονται οι μη ακέραιοι αριθμοί 81/4 και 45/2,

18	81/4	45/2	24	27	30	32	36
----	------	------	----	----	----	----	----

οι οποίοι επιβάλλουν τον τετραπλασιασμόν όλων των εμπλεκομένων εις την δομήν του διαπασών αριθμών

72	81	90	96	108	120	128	144
----	----	----	----	-----	-----	-----	-----

με την κάτωθι διαστηματικήν μικροδομήν:



Εν άλλοις λόγοις, έχομεν μίαν διαστηματικήν δομήν, μίαν κλίμακα μικτού χαρακτήρος, εμπεριέχουσα μείζονες τρίτες και ελάσσονες χρωματικές τρίτες (5:4, 6:5), μείζονες διατονικούς (9:8) και ελάσσονες χρωματικούς (10:9) τόνους καθώς επίσης και χρωματικά ημίτονα (16/15).

Αλληγορών ο Πλάτων

✓ δια της εκφράσεως «οι πολίτες της ανωτάτης εισοδηματικής τάξεως» υπονοεί τους μουσικούς φθόγγους, οι οποίοι γεννώνται υπό του επιτρίτου πυθμένου (4/3). Μόνον οι πολίτες αυτοί δύνανται να δομούν τετράχορδα.

✓ η παρουσία του ανθρωπείου άρρενος αριθμού, του 5, συμβάλλει εις την εμφάνισιν των πολιτών της δευτέρας τάξεως, ήτοι των διαστημάτων της ελάσσονος χρωματικής τρίτης (6/5).

✓ οι πολίτες της τρίτης κάστας δομούν μείζονα (9/8) και ελάσσονα (10/9) τονιαία, αλλά και ήμιτονιαία (16/15) μουσικά διαστήματα εντός των τετραχόρδων.

Αυτοί είναι οι κάτοικοι της ιδανικής Πλατωνικής Πολιτείας, οι ταξινομούμενοι εις τρεις διαφορετικές κλάσεις –κάστες- πολιτών μειουμένου πολιτικού κύρους –status- των αρχόντων, των επίκουρων και των δημιουργών.

Εκ της ανωτέρω αλληγορίας καταφαίνεται ότι οι φθόγγοι εκ διαφορετικών μουσικών τάξεων επιτελούν διαφορετικές μουσικές λειτουργίες, απαραίτητες εις την μουσικήν σύνθεσιν, ήτοι την Πολιτείαν, ως συνόλου.

Με αυτήν την διαστηματική δομήν του διαπασών 9/8 10/9 16/15 9/8 10/9 16/15 9/8, ήτοι τετράχορδον, τετράχορδον, επόγδοος τόνος και μόνον δυνάμεθα να δομήσωμεν Τέλειον Μείζον Σύστημα, είτε λαμβάνοντες το έτερον διαπασών αριστερόθεν του υπάρχοντος δια διαιρέσεως των υπαρχουσών ενδείξεων δια 2

36	40.5	45	48	54	60	64	72	81	90	96	108	120	128	144
----	------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----

είτε λαμβάνοντες το έτερον διαπασών δεξιόθεν του υπάρχοντος δια πολλαπλασιασμού των υπαρχουσών ενδείξεων επί 2

72	81	90	96	108	120	128	144	162	180	192	216	240	256	288
----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Η πρώτη διαδικασία λόγω της εμφανίσεως ενός μη ακεραίου αριθμού

36	40.5	45	48	54	60	64	72
----	------	----	----	----	----	----	----

μας υποχρεώνει να διπλασιάσωμεν τους εμπλεκόμενους εις το δις διαπασών σύστημα αριθμούς, οπότε καταλήγομεν εις τους ίδιους αριθμούς με την δευτέραν διαδικασία, ήτοι:

72	81	90	96	108	120	128	144	162	180	192	216	240	256	288
----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Αυτή είναι η κατατομή του κανόνος κατά το Τέλειον Μείζον Σύστημα του χρωματικού γένους, τους αριθμούς της οποίας ο Πλάτων εσκεμμένως αλλάζει, διατηρών τις μεταξύ των σχέσεις, προκειμένου να τους καταστήσει συμβατούς προς τους όρους «δυναμένων και δυναστευομένων».