

Αρχύτου:
Περί Αρμονικού και Ψυχοακουστικής

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης

Καθηγητής Τμήματος Μουσικών Σπουδών
Φιλοσοφικής Σχολής Πανεπιστημίου Αθηνών,
Κοσμήτωρ της Διεθνούς Επιστημονικής Εταιρείας της Αρχαίας Ελληνικής Φιλοσοφίας
hspyridis@music.uoa.gr
<http://users.uoa.gr/~hspyridis>

Βιογραφικά Στοιχεία Αρχύτου

Ο Αρχύτας ο Ταραντίνος (430-350 π.Χ.), υιός του Μνησαγόρου ή, όπως διασώζεται από τον Αριστοξένο, του Εστιαίου. Υπήρξε Πυθαγόρειος φιλόσοφος, μηχανικός, μαθηματικός, στρατιωτικός και πολιτικός ηγέτης του Τάραντα.

Ο Πλάτων εμαθήτευσε επί διετία κοντά του, όταν επεσκέφθηκε τη Σικελία και μυήθηκε από αυτόν στον Πυθαγορισμό. Με επιστολή του Αρχύτου προς τον τύραννο Διονύσιο τον Α΄ ο τύραννος δεν εφόνευσε τον Πλάτωνα που είχε φυλακίσει ως συνωμότη.

Υπήρξε επίσης διδάσκαλος του Ευδόξου του Κνιδίου.

Θεωρείται ιδρυτής της επιστημονικής Μηχανικής με την οποία πρώτος ασχολήθηκε επί τη βάσει των αρχών των Μαθηματικών.

Είναι ο πρώτος που κατεσκεύασε «πετομηχανή» με πεπιεσμένο αέρα, η οποία πέταξε σε απόσταση 200 μέτρων και ήταν, πιθανώς, το πρώτο αεριοθούμενο.

Ο Αρχύτας «... έποίησεν περιστεράν ξυλίνην πετομένην» που αναφέρεται από τον Γέλλιο και τον Φαβρίνο.

Άλλοι τομείς της δραστηριότητός του ήσαν η Αριθμητική, η Γεωμετρία, η Στερεομετρία, η Ακουστική και η Θεωρία της Μουσικής.

Έργα του από τα οποία διασώζονται ελάχιστα αποσπάσματα είναι:

- ✓ Δήλιο Πρόβλημα
- ✓ Αναλογίες
- ✓ Περί Μαθηματικής
- ✓ Διατριβές
- ✓ Περί δεκάδος
- ✓ Περί αυλών
- ✓ Περί μηχανής
- ✓ Περί Γεωργίας

- ✓ Αρμονικός, όπου καθιερώνει τα τρία γένη της Μουσικής, το εναρμόνιο, το χρωματικό και το διατονικό
- ✓ Περιγραφή περιφοράς μιας ερμητικά κλειστής σφαίρας γύρω από τη Γη
- ✓ Εφευρέσεις: κοχλίας, βίδα, τροχαλία, παιδική ροκάνα.

Τον αναφέρουν οι: Αθήναιος, Βιτρούβιος, Γέλλιος, Διογένης ο Λαέρτιος, Ευτόκιος, Ιάμβλιχος, Πλούταρχος, Πορφύριος, Πτολεμαίος, Φαβωρίνος.

Στοιχεία περί Τετραχόρδου

Το σύνολον τεσσάρων διαδοχικών (=έξις μελωδουμένων κατά τον Βακχείο) χορδών ή φθόγγων που δομούν τη διατεσσάρων συμφωνία $\left(\frac{4}{3}\right)$ ονομάζεται τετράχορδο.

Το τετράχορδο υπήρξε το πρώτο μουσικό σύστημα της προϊστορικής Ελλάδος. Με την ανάπτυξη της μουσικής κατά την ιστορική εποχή έγινε η βάση του σχηματισμού του επταχόρδου και του οκταχόρδου και, αργότερα, των Τελείων (Μείζον, Έλασσον και Αμετάβολον) συστημάτων.

Υπήρχαν τρία γένη τετραχόρδου: το διατονικό (διάτονον), το χρωματικό (χρῶμα) και το εναρμόνιο (άρμονία) με αντίστοιχες διαστηματικές δομές:





τούτων δὲ φυσικώτερον μὲν ἐστὶ τὸ διάτονον (πᾶσι γὰρ καὶ τοῖς ἀπαιδευτοῖς παντάπασι μελωδητὸν ἐστὶ), τεχνικώτερον δὲ τὸ χρῶμα (παρὰ γὰρ μόνοις μελωδεῖται τοῖς πεπαιδευμένοις), ἀκριβέστερον δὲ τὸ ἐναρμόνιον· παρὰ γὰρ τοῖς ἐπιφανεστάτοις ἐν μουσικῇ τετύχηκε παραδοχῆς, τοῖς δὲ πολλοῖς ἐστὶν ἀδύνατον· ὅθεν ἀπέγνωσαν τινες τὴν κατὰ δίεσιν μελωδίαν, διὰ τὴν αὐτῶν ἀσθένειαν καὶ παντελῶς ἀμελώδητον εἶναι τὸ διάστημα ὑπολαβόντες.

Αριστείδης Κοϊντιλιανός, *Περί Μουσικῆς*, 1, 9, 16-24.

Οἱ ἄκροι φθόγγοι ἐνὸς τετραχόρδου ονομάζονται ἐστῶτες ἢ ἀκλινεῖς, διότι τὸ μουσικὸ τους ὕψος ἦταν ἀναλλοίωτο καὶ ὁ λόγος τους ἔδινε ΠΑΝΤΟΤΕ τὴν ἐπίτριτη σχέση $\left(\frac{4}{3}\right)$.

Οἱ ἐσωτερικοὶ φθόγγοι τοῦ τετραχόρδου ονομάζονται κινούμενοι ἢ φερόμενοι, διότι τὸ μουσικὸ τους ὕψος ἀλλάζε εἴτε πρὸς τὰ πάνω, εἴτε πρὸς τὰ κάτω, καὶ, κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο, ἐσχηματίζοντο τὰ γένη τοῦ τετραχόρδου καὶ οἱ ποικίλες χρώες.

Να σημειωθεῖ ὅτι μετὰ τῶν τεσσάρων φθόγγων τοῦ τετραχόρδου σχηματίζονται τρία μουσικὰ διαστήματα τὸ μέγεθος τῶν ὁποίων ἐκφράζεται ἀπὸ ἕνα λόγος.

Χαρακτηριστικὸς λόγος στο διατονικὸ τετράχορδο εἶναι ὁ τονιαῖος, στο χρωματικὸ τετράχορδο εἶναι ὁ τριμημιτόνιος καὶ στο ἐναρμόνιο τετράχορδο εἶναι ὁ διτονιαῖος.

Κατὰ τὸν Αρχύτα **Ἠγούμενος** εἶναι ὁ ἐπιμόριος λόγος πρὸς τὴν νήτη· εἶναι τὸ οξύτερο διάστημα τοῦ τετραχόρδου. **Ἐπόμενος** εἶναι ὁ ἐπιμόριος λόγος πρὸς τὴν υπάτη· εἶναι τὸ βαρύτερο διάστημα τοῦ τετραχόρδου. **Μέσος** εἶναι ὁ ἐπιμόριος λόγος μετὰ τὴν Ἠγούμενου καὶ Ἐπομένου.

Ὁ Αρχύτας θεωρεῖ ὅτι μαλακότερα φαίνονται τὰ γένη πρὸς τὸν Ἠγούμενο λόγος καὶ συντονότερα αὐτὰ πρὸς τὸν Ἐπόμενο λόγος.

Αρχύταις κατατομῆς τετραχόρδου

Αρχύτας δὲ ὁ Ταραντῖνος μάλιστα τῶν Πυθαγορείων ἐπιμεληθεὶς μουσικῆς πειρᾶται μὲν τὸ κατὰ τὸν λόγον ἀκόλουθον διασφάζειν, οὐκ ἐν ταῖς συμφωνίαις μόνον, ἀλλὰ καὶ ταῖς τῶν τετραχόρδων διαιρέσεσιν, ὡς οἰκείου τῇ φύσει τῶν ἐμμελῶν ὄντος τοῦ συμμετρου τῶν ὑπεροχῶν. ταύτη δ' ὅμως τῇ προθέσει χρῆσάμενος εἰς ἔνια μὲν καὶ τέλειον αὐτῆς φαίνεται διαμαρτάνων, ἐν δὲ τοῖς πλείστοις τοῦ μὲν τοιούτου περικρατῶν, ἀπάδων δὲ

σαφῶς τῶν ἄντικρυς ἤδη ταῖς αἰσθήσεσιν ὠμολογημένων, ὡς αὐτίκα εἰσόμεθα ἐκ τῆς κατ' αὐτὸν τῶν τετραχόρδων διαιρέσεως. τρία μὲν τοίνυν οὗτος ὑφίσταται γένη, τό τε ἐναρμόνιον καὶ τὸ χρωματικὸν καὶ τὸ διατονικόν· ἐκάστου δὲ αὐτῶν ποιεῖται τὴν διαίρεσιν οὕτως. τὸν μὲν γὰρ ἐπόμενον λόγον ἐπὶ τῶν τριῶν γενῶν τὸν αὐτὸν ὑφίσταται καὶ ἐπὶ κζ, τὸν δὲ μέσον ἐπὶ μὲν τοῦ ἐναρμονίου ἐπὶ λε, ἐπὶ δὲ τοῦ διατονικοῦ ἐπὶ ζ, ὥστε καὶ τὸν ἡγούμενον τοῦ μὲν ἐναρμονίου γένους συνάγεσθαι ἐπὶ δ, τοῦ δὲ διατονικοῦ ἐπὶ η. τὸν δὲ ἐν τῷ χρωματικῷ γένει δεῦτερον ἀπὸ τοῦ ὀξυτάτου φθόγγου λαμβάνει διὰ τοῦ τὴν αὐτὴν θέσιν ἔχοντος ἐν τῷ διατονικῷ. φησὶ γὰρ λόγον ἔχειν τὸν ἐν τῷ χρωματικῷ δεῦτερον ἀπὸ τοῦ ὀξυτάτου πρὸς τὸν ὅμοιον τὸν ἐν τῷ διατονικῷ τὸν τῶν σνς πρὸς τὰ σμγ. συνίσταται δὴ τὰ τοιαῦτα τετράχορδα κατὰ τοὺς ἐκκειμένους λόγους ἐν πρώτοις ἀριθμοῖς τούτοις. ἐὰν γὰρ τοὺς μὲν ὀξυτάτους τῶν τετραχόρδων ὑποστησώμεθα αφιβ, τοὺς δὲ βαρυτάτους κατὰ τὸν ἐπίτριτον λόγον τῶν αὐτῶν βις, ταῦτα μὲν ποιήσει τὸν ἐπὶ κζ πρὸς τὰ αζμδ καὶ τοσοῦτων ἔσονται πάλιν ἐν τοῖς τρισὶ γένεσιν οἱ δεῦτεροι ἀπὸ τῶν βαρυτάτων. τῶν δ' ἀπὸ τοῦ ὀξυτάτου δευτέρων ὁ μὲν τοῦ ἐναρμονίου γένους ἔσται αωρ. ταῦτα γὰρ πρὸς μὲν τὰ αζμδ ποιεῖ τὸν ἐπὶ λε λόγον, πρὸς δὲ τὰ αφιβ τὸν ἐπὶ δ· ὁ δὲ τοῦ διατονικοῦ γένους τῶν αὐτῶν ἔσται αψα. καὶ ταῦτα γὰρ πρὸς μὲν τὰ αζμδ τὸν ἐπὶ ζ ποιεῖ λόγον, πρὸς δὲ τὰ αφιβ τὸν ἐπὶ η· ὁ δὲ τοῦ χρωματικοῦ καὶ αὐτὸς ἔσται τῶν αὐτῶν αψβ· ταῦτα γὰρ λόγον ἔχει πρὸς τὰ αψα ὃν τὰ σνς πρὸς τὰ σμγ.

Κλαύδιος Πτολεμαῖος, *Αρμονικά*, 1, 13, 9-38.

[Ο Αρχύτας ο Ταραντίνος που ασχολήθηκε με τη μουσική περισσότερο από όλους τους Πυθαγορείους, προσπαθεί να διαφυλάξει τη διαδικασία που ακολουθεί τους λόγους όχι μόνο στις συμφωνίες, αλλά και στις κατατομές των τετραχόρδων, διότι αυτό που κατεξοχήν χαρακτηρίζει τη μουσική είναι η διαστηματική συμμετρία...

Τρία λοιπόν γένη υφίστανται: και το εναρμόνιο, και το χρωματικό και το διατονικό· στο καθένα από αυτά τα γένη κατά τον εξής τρόπο πραγματοποιεί την κατατομή.

Όσον αφορά στον επόμενο λόγο και στα τρία γένη τοποθετεί τον ίδιο λόγο, τον επεικοσιέβδομο¹ $\left(\frac{28}{27}\right)$, όσον αφορά στον μέσο λόγο στο εναρμόνιο γένος τοποθετεί τον επιτριακοστόπεμπτον $\left(\frac{36}{35}\right)$, στο διατονικό γένος τοποθετεί τον εφέβδομο $\left(\frac{8}{7}\right)$, ώστε να

¹ Σημείωση: Στο διατονικό και στο χρωματικό γένος θα έπρεπε οι επόμενοι λόγοι να ήσαν ίσοι προς $\left(\frac{256}{243}\right)$, δηλαδή ένα λείμμα, ενώ στο εναρμόνιο γένος ο επόμενος λόγος θα έπρεπε να είναι ίσος περίπου με μισό λείμμα. Όμως, ο Αρχύτας διαφοροποιείται από την καθαρτό Πυθαγόρειο κατατομή του τετραχόρδου των τριῶν γενῶν και με μία προσέγγιση ἀπὸ το λείμμα παράγει τὸν επεικοσιέβδομο λόγο, $\left(\frac{28}{27}\right)$, τὸν οποίον τοποθετεῖ ὡς ἐπόμενο λόγο στις κατατομές και τῶν τριῶν γενῶν. Αρχύτειος πρωτοτυπία!

$$\left(\frac{256}{243} \cong \frac{252}{243} = \frac{9 \cdot 28}{9 \cdot 27} = \frac{28}{27}\right)$$

Αυτή η προσέγγιση δεν είναι και τόσο αθῶα, δεδομένου ότι τὸ λείμμα $\left(\frac{256}{243}\right)$ με μέγεθος 0,9022 ημίτονα καθίσταται $\left(\frac{28}{27}\right)$ με μέγεθος 0.6296 ημίτονα, οδηγώντας σε μία ἀρίστη μεν κατατομή του εναρμονίου γένους, ἀλλὰ σε κατατομές του διατονικοῦ και χρωματικοῦ γένους με μεγεθυμένους τους μέσους λόγους.

προκύπτει ηγούμενος λόγος για μεν το εναρμόνιο γένος ο επιτέταρτος² $\left(\frac{5}{4}\right)$, για δε το διατονικό γένος ο επόγδοος³ $\left(\frac{9}{8}\right)$.

Πίνακας 1: Οι κατατομές των τετραχόρδων των τριών γενών με όσους λόγους (ηγούμενος, μέσος, επόμενος) δίδει ο Αρχύτας.

Γένος 4χόρδου	Οξείς φθόγγοι	Ηγούμενος	Φθόγγος	Μέσος	Φθόγγος	Επόμενος	Βαρείς φθόγγοι
Εναρμόνιον	α	$\frac{5}{4}$	β	$\frac{36}{35}$	γ	$\frac{28}{27}$	δ
Διατονικόν	ε	$\frac{9}{8}$	ζ	$\frac{8}{7}$	η	$\frac{28}{27}$	θ
Χρωματικόν	ι	$\frac{32}{27}$	κ	$\frac{243}{224}$	λ	$\frac{28}{27}$	μ

όπου α,β,γ,δ,ε,ζ,η,θ,ι,κ,λ,μ ∈ N είναι οι φθόγγοι των τετραχόρδων.

Τον δεύτερο φθόγγο από τον οξύτερο φθόγγο του χρωματικού γένους τον λαμβάνει σε σχέση με τον φθόγγο που κατέχει την ίδια θέση στο διατονικό γένος, διότι λέει ο δεύτερος φθόγγος από τον οξύτερο φθόγγο στο χρωματικό γένος ως προς τον ομοιόθετο του φθόγγο από τον οξύτερο φθόγγο στο διατονικό γένος έχει λόγο ίσο προς⁴ $\left(\frac{256}{243}\right)$.

Δημιουργούνται λοιπόν τα τέτοιου είδους τετράχορδα σύμφωνα με τους δεδομένους λόγους και με αυτούς τους ακεραίους αριθμούς.

Διότι, εάν παραστήσωμε τους οξύτερους φθόγγους των τετραχόρδων με τον αριθμό 1512 και τους βαρύτερους φθόγγους κατά τον επίτριο λόγο αυτών, τον αριθμό 2016, ο οποίος θα σχηματίσει τον επεικοσιέβδομο λόγο ως προς τον αριθμό 1944. Και οι ίδιοι αριθμοί θα είναι και στα τρία γένη οι φθόγγοι οι δεύτεροι από τους βαρύτερους φθόγγους.

² Απόδειξη: Στο εναρμόνιο γένος $\frac{36}{35} \cdot \frac{28}{27} = \frac{16}{15}$ και $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{16}{15}} = \frac{5}{4}$

³ Απόδειξη: Στο διατονικό γένος $\frac{8}{7} \cdot \frac{28}{27} = \frac{32}{27}$ και $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{32}{27}} = \frac{9}{8}$

⁴

$\frac{\kappa}{\zeta} = \frac{256}{243}$

Πίνακας 2: Οι κατατομές των τετραχόρδων των τριών γενών με όσες τιμές φθόγγων δίδει ο Αρχύτας.

Γένος 4χόρδου	Οξείς φθόγγοι	Ηγούμενος	Φθόγγος	Μέσος	Φθόγγος	Επόμενος	Βαρείς φθόγγοι
Εναρμόνιον	α=1512	$\frac{5}{4}$	β=1890	$\frac{36}{35}$	γ=1944	$\frac{28}{27}$	δ=2016
Διατονικόν	ε=1512	$\frac{9}{8}$	ζ=1701	$\frac{8}{7}$	η=1944	$\frac{28}{27}$	θ=2016
Χρωματικόν	ι=1512	$\frac{32}{27}$	κ	$\frac{243}{224}$	λ=1944	$\frac{28}{27}$	μ=2016

Όσον αφορά στους δεύτερους φθόγγους από τον οξύτερο φθόγγο· ο φθόγγος στο εναρμόνιο γένος θα είναι ο 1890, διότι αυτός ως προς τον φθόγγο 1944 σχηματίζει τον επιτριακοστόπεμπτο λόγο⁵ και ως προς τον φθόγγο 1512 σχηματίζει τον επιτέταρτο λόγο⁶· ο αντίστοιχος φθόγγος του διατονικού γένους θα είναι ο 1701· και αυτό διότι ως προς μεν τον φθόγγο 1944 σχηματίζει τον εφέβδομο λόγο⁷ ως προς τον φθόγγο 1512 δε σχηματίζει τον επόγδοο λόγο⁸.

Ο δεύτερος φθόγγος στο χρωματικό γένος θα είναι κατά τα δεδομένα ο 1792, διότι αυτός ως προς τον φθόγγο 1701 έχει τον ίδιο λόγο⁹ που έχουν ο αριθμός 256 προς τον αριθμό 243.

5

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{36}{35} \rightarrow \frac{1944}{\beta} = \frac{36}{35} \rightarrow \beta = \frac{35}{36} \cdot 1944 = 1890$$

6

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1890}{1512} = \frac{5}{4}$$

7

$$\frac{\eta}{\zeta} = \frac{8}{7} \rightarrow \frac{1944}{\zeta} = \frac{8}{7} \rightarrow \zeta = \frac{7}{8} \cdot 1944 = 1701$$

8

$$\frac{\zeta}{\epsilon} = \frac{1701}{1512} = \frac{9}{8}$$

9

$$\frac{\kappa}{\zeta} = \frac{256}{243} \rightarrow \frac{\kappa}{1701} = \frac{256}{243} \rightarrow \kappa = \frac{256}{243} \cdot 1701 = 1792$$

Οπότε:

$$\frac{\lambda}{\kappa} = \frac{1944}{1792} = \frac{243}{224}$$

$$\frac{\kappa}{\iota} = \frac{1792}{1512} = \frac{32}{27}$$

Πίνακας 3: Οι κατατομές των τετραχόρδων των τριών γενών με υπολογισμένους όλους τους λόγους (ηγούμενος, μέσος, επόμενος) και όλες τις τιμές των φθόγγων βάσει των Αρχυτείων δεδομένων.

Γένος 4χόρδου	Οξείς φθόγγοι	Ηγούμενος	Φθόγγος	Μέσος	Φθόγγος	Επόμενος	Βαρείς φθόγγοι
Εναρμόνιον	α=1512	$\frac{5}{4}$	β=1890	$\frac{36}{35}$	γ=1944	$\frac{28}{27}$	δ=2016
Διατονικόν	ε=1512	$\frac{9}{8}$	ζ=1701	$\frac{8}{7}$	η=1944	$\frac{28}{27}$	θ=2016
Χρωματικόν	ι=1512	$\frac{32}{27}$	κ=1792	$\frac{243}{224}$	λ=1944	$\frac{28}{27}$	μ=2016

Πίνακας 4: Οι κατατομές των τετραχόρδων των τριών γενών με ονοματισμένους όλους τους λόγους (ηγούμενος, μέσος, επόμενος) τους βάσει των Αρχυτείων δεδομένων.

Γένος 4χόρδου	Οξείς φθόγγοι	Ηγούμενος	Φθόγγος	Μέσος	Φθόγγος	Επόμενος	Βαρείς φθόγγοι
Εναρμόνιον	1512	$\frac{5}{4}$ Τρίτη μείζων χρωματική	1890	$\frac{36}{35}$ Εναρμόνιος δίεσις ηλαττωμένη	1944	$\frac{28}{27}$ Εναρμόνιος δίεσις	2016
Διατονικόν	1512	$\frac{9}{8}$ Επόγδοος ή μείζων τόνος	1701	$\frac{8}{7}$ Υπερμείζων τόνος	1944	$\frac{28}{27}$ Εναρμόνιος δίεσις	2016
Χρωματικόν	1512	$\frac{32}{27}$ Πυθαγόρειον τριμήτονον	1792	$\frac{243}{224}$ Ελάχιστος τόνος μελωδικός	1944	$\frac{28}{27}$ Εναρμόνιος δίεσις	2016

Πίνακας 5: Οι κατατομές των τετραχόρδων των τριών γενών με υπολογισμένα τα μεγέθη σε ημίτονα όλων των λόγων τους (ηγούμενος, μέσος, επόμενος) βάσει των Αρχυτείων δεδομένων.

Γένος 4χόρδου	Οξείς φθόγγοι	Μέγεθος Ηγούμενου σε συγκερασμένα ημίτονα	Φθόγγος	Μέγεθος Μέσου σε συγκερασμένα ημίτονα	Φθόγγος	Μέγεθος Επομένου σε συγκερασμένα ημίτονα	Βαρείς φθόγγοι
Εναρμόνιον	1512	3,8631 Τρίτη μείζων χρωματική	1890	0,4877 Εναρμόνιος δίεσις ηλαττωμένη	1944	0,6296 Εναρμόνιος δίεσις	2016
Διατονικόν	1512	2,0391 Επόγδοος ή μείζων τόνος	1701	2,3117 Υπερμείζων τόνος	1944	0,6296 Εναρμόνιος δίεσις	2016
Χρωματικόν	1512	2,9414 Πυθαγόρειον τριμήτονον	1792	1,4095 Ελάχιστος τόνος μελωδικός	1944	0,6296 Εναρμόνιος δίεσις	2016

Το ασύνθετο Αρχύτειο δίτονο

Το ασύνθετο δίτονο είναι το χαρακτηριστικό διάστημα ενός εναρμονίου τετραχόρδου. Το δίτονο εμφανίζεται μεταξύ του λιχανού (ή της Παρανήτης) και του φθόγγου κορυφής του τετραχόρδου λ.χ. μεταξύ λιχανού μέσων και της μέσης ή μεταξύ παρανήτης και νήτης υπερβολαίων.

Ο Αρχύτας στο Πυθαγόρειο δίτονο κάνοντας μια μικρή προσέγγιση δόμησε ένα νέο δίτονο, την τρίτη μείζονα χρωματική.

$$\left(\left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{81}{64} \cong \frac{80}{64} = \frac{5}{4}\right)$$

Αυτή η προσέγγιση φαινομενικώς είναι αθώα, δεδομένου ότι το Πυθαγόρειο δίτονο με μέγεθος 4,0782 ημίτονα καθίσταται επιτέταρτος με μέγεθος 3,8631 ημίτονα, γεγονός που σημαίνει ότι η Πυθαγόρειος και η Αρχύτειος τρίτη διαφέρουν μεταξύ τους κατά ένα κόμμα $\left(\frac{\left(\frac{9}{8}\right)^2}{\frac{80}{64}} = \frac{\frac{81}{64}}{\frac{80}{64}} = \frac{81}{80}\right)$.

$$\left(\frac{\left(\frac{9}{8}\right)^2}{\frac{80}{64}} = \frac{\frac{81}{64}}{\frac{80}{64}} = \frac{81}{80}\right)$$

Κερματισμός επιμορίου διαστήματος εις m ($m \in N$) ίσα περίπου μεταξύ τους επιμόρια διαστήματα

Ο Ηράκλειτος αναφέρεται στη δημιουργία πολυπλοκότητας από τη διάσπαση του ενός σε πολλά. Όταν αυτή η διάσπαση, αυτός ο διαχωρισμός δεν γίνεται κατά τυχαίο τρόπο, αλλά γίνεται «κατά λόγον», τότε δεν επέρχεται καμία αλλοίωση.

Τούτο μας διδάσκει ο Αρχύτας ο Πυθαγόρειος με την ακόλουθη διαδικασία:

Ως γνωστό, από δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς $n, n+1 \in N$ δομείται το επιμόριο διάστημα $\frac{n+1}{n}$.

Μεταξύ αυτών των δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών δεν είναι δυνατόν να παρεμβληθεί άλλος φυσικός αριθμός, έστω ο $m \in N$, με τον οποίο το ανωτέρω επιμόριο διάστημα να διαιρείται σε δύο μικρότερα επιμόρια διαστήματα τα $\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{m} \cdot \frac{m}{n}$.

Τα ανωτέρω εκφράζονται με την τρίτη πρόταση της Ευκλείδειου *Κατατομής Κανόνος*: «Επιμορίου διαστήματος ουδείς μέσος, οὔτε εἷς οὔτε πλείους, ἀνάλογον ἐμπεσεῖται ἀριθμός».

Ο Αρχύτας, ο Πυθαγόρειος, πολλαπλασιάζοντας και τους δύο όρους της επιμορίου σχέσεως $\frac{n+1}{n}$ επί έναν φυσικό αριθμό m , κατέστησε τους διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς $n, n+1$ μη διαδοχικούς $mn, m(n+1)$, οπότε μεταξύ τους πλέον μπορούν να παρεμβληθούν $(m-1)$ το πλήθος μέσοι και το αρχικό επιμόριο διάστημα να μπορεί πλέον να διαιρεθεί σε m το πλήθος μικρότερα, περίπου ίσα μεταξύ τους, επιμόρια διαστήματα.

$$\frac{n+1}{n} = \frac{(n+1) \cdot m}{n \cdot m} = \frac{(n+1) \cdot m}{((n+1) \cdot m) - 1} \cdot \frac{((n+1) \cdot m) - 1}{((n+1) \cdot m) - 2} \dots \frac{((n+1) \cdot m) - (m-1)}{((n+1) \cdot m) - m}$$

Επί παραδείγματι η διχή διαίρεση του επογδόου τόνου με την Αρχύτειο διαδικασία μας παρέχει το μείζον $\left(\frac{17}{16}\right)$ και το έλασσον $\left(\frac{18}{17}\right)$ ημίτονα: $\frac{9}{8} = \frac{9 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{18}{16} = \frac{18}{17} \cdot \frac{17}{16}$.

Πυθαγόρειος ΨΥΧΟΑΚΟΥΣΤΙΚΗ δια της Θεωρίας του Συμμίγειν

Συμμείγνυμι ἢ **-ύω** (ὀρθότ. τοῦ **συμμίγνυμι**). Ἰων. ἐν. **συμμίσγω**· μειγνύω ομοῦ, αναμειγνύω (ανακατώνω) κάτι μαζί με ἄλλο, φέρω κάτι εἰς σχέση πρὸς ἄλλο, το συνδέω, το συνενώνω, το συνάπτω, το «σμίγω», ανακοινώνω (μεταδίδω) κάτι σε κάποιον. Γνωστοί μας οἱ συμμιγείς ἀριθμοί λ.χ. $30^\circ 15' 40''$, $4^\circ 30' 15''$.

PORPHYR. in Ptolem. harm. I 6 p. 107D. τῶν Πυθαγορικῶν τινες, ὡς Ἄ. καὶ Δίδυμος ἱστοροῦσι, μετὰ τὸ καταστήσασθαι τοὺς λόγους τῶν συμφωνιῶν συγκρίνοντες αὐτοὺς πρὸς ἀλλήλους καὶ τοὺς συμφώνους μᾶλλον ἐπιδεικνύει βουλόμενοι τοιοῦτόν τι ἐποιοῦν· πρώτους λαβόντες ἀριθμούς, οὓς ἐκάλουν *πυθμένας*, τῶν τοὺς λόγους τῶν συμφωνιῶν ἀποτελούντων ... τούτους οὖν τοὺς ἀριθμούς ἀποδόντες ταῖς συμφωνίαις ἐσκόπουν καθ' ἕκαστον λόγον, τῶν τοὺς ὅρους περιεχόντων ἀριθμῶν ἀφελόντες ἀφ' ἑκατέρων τῶν ὄρων ἀνὰ μονάδα, τοὺς ἀπολειπομένους ἀριθμούς μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν οἵτινες εἶεν· οἷον τῶν β α, οἵπερ ἦσαν τῆς διὰ πασῶν, ἀφελόντες ἀνὰ μονάδα ἐσκόπουν τὸ καταλειπόμενον· ἦν δὲ ἐν. τῶν δὲ δ καὶ γ, οἵτινες ἦσαν τῆς διὰ τεσσάρων, ἀφελόντες ἀνὰ μονάδα εἶχον ἐκ μὲν οὖν τῶν τεσσάρων ὑπολειπόμενον τὸν τρία, ἐκ δὲ τῶν τριῶν τὸν δύο· ὥστ' ἀπὸ συναμφοτέρων τῶν ὄρων μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τὸ ὑπολειπόμενον ἦν πέντε. τῶν δὲ γ καὶ β, οἵτινες ἦσαν τῆς διὰ πέντε, ἀφελόντες ἀνὰ μονάδα εἶχον ἐκ μὲν τῶν τριῶν ὑπολειπόμενα δύο, ἐκ δὲ τῶν δύο ὑπολειπόμενον ἐν, ὥστε τὸ συναμφοτέρον λειπόμενον εἶναι τρία. ἐκάλουν δὲ τὰς μὲν ἀφαιρουμένας μονάδας ὁμοία, τὰ δὲ λειπόμενα μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἀνόμοια, διὰ δύο αἰτίας, ὅτι ἐξ ἀμφοῖν τῶν ὄρων ὁμοία ἢ ἀφαίρεσις ἐγένετο καὶ ἴση· ἴση γὰρ ἢ μονὰς τῆι μονάδι· ὧν ἀφαιρουμένων ἐξ ἀνάγκης τὰ ὑπολειπόμενα ἀνόμοια καὶ ἄνισα. ἐὰν γὰρ ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῆι, τὰ λοιπὰ ἔσται ἄνισα. οἱ δὲ πολλαπλάσιοι λόγοι καὶ ἐπιμόριοι, ἐν οἷς θεωροῦνται αἱ συμφωνίαι, ἐν ἀνίσωις ὄροις ὑφεστήκασιν, ἀφ' ὧν ἴσων ἀφαιρουμένων τὰ λοιπὰ πάντως ἄνισα. γίνεται οὖν τὰ ἀνόμοια τῶν συμφωνιῶν συμμιγέτα· *συμμίσειν* δὲ λέγουσιν οἱ Πυθαγόρειοι τὸ ἔνα ἐξ ἀμφοτέρων ἀριθμῶν λαβεῖν. ἔσται οὖν τὰ ἀνόμοια συντεθέντα καὶ καθ' ἑκάστην τῶν συμφωνιῶν τοιαῦτα· τῆς μὲν διὰ πασῶν ἐν, τῆς δὲ διὰ τεσσάρων πέντε, τῆς δὲ διὰ πέντε τρία. ἐφ' ὧν δ' ἄν, φασί, τὰ ἀνόμοια ἐλάσσονα ἦι, ἐκεῖνα τῶν ἄλλων εἰσὶ συμφωνότερα· σύμφωνον μὲν ἐστὶν ἢ διὰ πασῶν, ὅτι ταύτης τὰ ἀνόμοια ἐν· μεθ' ἦν ἢ διὰ πέντε, ὅτι ταύτης τὰ ἀνόμοια τρία· τελευταία δὲ ἢ διὰ τεσσάρων, ὅτι ταύτης τὰ ἀνόμοια πέντε [= fr. 4 Blass].

[Κάποιοι ἐκ τῶν Πυθαγορικῶν, ὅπως αναφέρουν ὁ Αρχύτας καὶ ὁ Δίδυμος, μετὰ τὴν καθιέρωση τῶν λόγων τῶν συμφωνιῶν συγκρίνοντές τοὺς μεταξύ τους κἰ ἐπιθυμοῦντες να ἐπιδείξουν ποῖος εἶναι ευφωνέστερος, ἔκαναν κάτι σαν αὐτό:

Έλαβαν ακέραιους (=πρώτους) αριθμούς, τους οποίους αποκαλούσαν πυθμένες, που αποτελούσαν τους λόγους των συμφωνιών...αυτούς λοιπόν τους αριθμούς αφού τους απέδωσαν στις συμφωνίες εξήταζαν την περίπτωση εκάστου λόγου, αφού αφαιρούσαν από τους αριθμούς που αποτελούσαν τους όρους του λόγου από μία μονάδα, ποιοι αριθμοί απέμεναν μετά την αφαίρεση. Λόγου χάριν από τους αριθμούς 2 και 1, οι οποίοι ήσαν οι όροι της διαπασών $\left(\frac{2}{1}\right)$, αφαιρώντας από τον καθένα τους τη μονάδα εξήταζαν το τι απέμενε· ήταν δε μονάδα¹⁰ $\frac{2-1}{1-1} \rightarrow \frac{1}{?} = 1$

Από τους αριθμούς 4 και 3, οι οποίοι ήσαν οι όροι της διατεσσάρων $\left(\frac{4}{3}\right)$, αφαιρώντας από τον καθένα τους τη μονάδα είχαν λοιπόν από μεν τον τέσσερα υπόλοιπο τον τρία από δε τον τρία είχαν υπόλοιπο τον δύο $\frac{4-1}{3-1} \rightarrow \frac{3}{2}$ · ώστε εξ αμφοτέρων των όρων μετά την αφαίρεση το άθροισμα των υπολοίπων ήταν πέντε $3 + 2 = 5$.

Από τους αριθμούς 3 και 2, οι οποίοι ήσαν οι όροι της διαπέντε $\left(\frac{3}{2}\right)$, αφαιρώντας από τον καθένα τους τη μονάδα είχαν από μεν τον τρία υπόλοιπο τον δύο από δε τον δύο είχαν υπόλοιπο τον ένα $\frac{3-1}{2-1} \rightarrow \frac{2}{1}$ · ώστε εξ αμφοτέρων των όρων το άθροισμα των υπολοίπων ήταν τρία $2 + 1 = 3$.

Αποκαλούσαν τις μεν αφαιρούμενες μονάδες όμοια, τα δε υπόλοιπα μετά την αφαίρεση των μονάδων ανόμοια, για δύο λόγους, διότι από τους δύο όρους όμοια και ίση αφαίρεση γινόταν· διότι ίση είναι η μονάς με τη μονάδα· αφαιρουμένων των μονάδων κατ'ανάγκη τα προκύπτοντα υπόλοιπα θα είναι ανόμοια και άνισα. Διότι, εάν από ανίσους αριθμούς αφαιρεθούν ίσοι αριθμοί, τα υπόλοιπα θα είναι άνισα.

Οι πολλαπλάσιοι λόγοι και οι επιμόριοι λόγοι δια των οποίων διατυπώνονται οι συμφωνίες, με ανίσους όρους εκφράζονται από τους οποίους, εάν αφαιρεθούν ίσα, τα υπόλοιπα οπωσδήποτε θα είναι άνισα. Προκύπτουν λοιπόν τα ανόμοια των συμφωνιών δια συμμείξεως.

Σύμμιξις δε οι Πυθαγόρειοι αποκαλούν την λήψη ενός αριθμού από τους δύο αριθμούς. Και θα είναι τα ανόμοια εκάστης συμφωνίας μετά την σύμμιξις τα εξής:

της μεν διαπασών το ένα,

της δε διατεσσάρων το πέντε,

της δε διαπέντε το τρία.

Λένε ότι όσο τα ανόμοια είναι μικρότερα, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η συμφωνία· σύμφωνη είναι η διαπασών, διότι το ανόμοιό της είναι το ένα· μετά από αυτήν έρχεται η

¹⁰ Παρατήρηση: Κατά την αναφερομένη διαδικασία του συμμίγειν στους αριθμούς του διαπασών αντιμετωπίζεται η αφαίρεση 1-1. Για τους αρχαιοέλληνες αυτή η διαφορά μεταξύ ίσων αριθμών δεν εσήμαινε μαθηματικώς κάτι ή εσήμαινε το τίποτα, διότι έλεγαν «οὐκ ἔστι διαφορά ἐν τῇ ἰσότητι» και την προσπερνούσαν αγνοώντας την και συνέχιζαν την επίλυση του προβλήματος με τους υπόλοιπους αριθμούς αυτού, εφ' όσον υπήρχαν. Σήμερα γι'αυτές τις περιπτώσεις έχουμε το μηδέν, το ουδέτερο σημείο της προσθαφαιρέσεως, που τότε ως σύμβολο το αγνοούσαν, αλλά ως ουσία, δηλαδή ως τίποτα, το ελάμβαναν υπόψη τους.

διαπέντε, διότι αυτής το ανόμοιο είναι το τρία· και τελευταία έρχεται η διατεσσάρων, διότι αυτής το ανόμοιο είναι το πέντε.

Δηλαδή, επειδή για τα ανόμοια ισχύει η σχέση $1 < 3 < 5$,

οι συμφωνίες ως προς την ευφωνία τους κατατάσσονται ως $\frac{2}{1} > \frac{3}{2} > \frac{4}{3}$.

Συμφωνία

Συμφωνία είναι η μείξη και η κράση δύο συνηχούντων φθόγγων. Για τους Πυθαγορείους και για τους αρχαίους Έλληνες εν γένει οι συμφωνίες εντός της οκτάβας ήσαν: η διατεσσάρων (4/3), η διαπέντε (3/2) και η διαπασών (2/1).

ἔστι δὲ συμφωνία μὲν κρᾶσις δύο φθόγγων, ὀξυτέρου καὶ βαρυτέρου· <διαφωνία δὲ τούναντίον δύο φθόγγων ἀμιξία>, ὥστε μὴ κραθῆναι, ἀλλὰ τραχυνθῆναι τὴν ἀκοήν.

Κλεονεΐδης, *Αρμονική Εισαγωγή*, 5, 17-20.

συμφωνία δ' ἔστι δυεῖν φθόγγων ὀξύτητι καὶ βαρύτητι διαφερόντων κατὰ τὸ αὐτὸ πᾶσις καὶ κρᾶσις. δεῖ γὰρ τοὺς φθόγγους συγκρουσθέντας ἔν τι ἕτερον εἶδος φθόγγου ἀποτελεῖν παρ' ἐκείνους, ἐξ ὧν φθόγγων ἡ συμφωνία γέγονεν.

Πορφύριος, *Σχόλια εἰς τὰ Ἀρμονικά του Πτολεμαίου*, 35, 26-29.

σύμφωνα μὲν, ἐπειδὴ οἱ περιέχοντες φθόγγοι διάφοροι τῷ μεγέθει ὄντες, ἅμα κρουσθέντες ἢ ὁμως ποτὲ ἠχήσαντες ἐγκραθῶσιν ἀλλήλοις οὕτως, ὥστε ἐνοειδῆ τὴν ἐξ αὐτῶν φωνὴν γενέσθαι καὶ οἶον μίαν· διάφωνοι δὲ, ὅταν διεσχισμένη πῶς καὶ ἀσύγκρατος ἢ ἐξ ἀμφοτέρων φωνῆ ἀκούηται.

Νικόμαχος, *Αρμονικόν Εγχειρίδιον*, 12, 1, 25-30.

ἔλεγον δὲ οἱ περὶ τὸν Ἀρχύταν ἐνὸς φθόγγου γίνεσθαι κατὰ τὰς συμφωνίας τὴν ἀντίληψιν τῆι ἀκοῇ.

Αρχύτας, *Μαρτυρίες*, Σπάραγμα 17, 1-30

[Ἐλεγον οἱ Αρχύτειοι ὅτι ἡ ἀκοή ἀντιλαμβάνεται ἕνα φθόγγο ἀπὸ κάθε συμφωνία.]

Πρέπει να διευκρινισθεῖ ὅτι δια τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως ὑπονοούσαν ὅτι ἡ ἀκοή ἀντιλαμβάνεται ἕνα φθόγγο ἀπὸ τὴν κράση τῶν δύο συνηχούντων φθόγγων τῆς ἐκάστοτε συμφωνίας, που σημαίνει ὅτι ἡ ἀρχαιοελληνικὴ μουσικὴ ἦτο τουλάχιστον διφωνικὴ καὶ ὄχι μονοφωνικὴ.