Πλάτωνος ἀλληγορία περὶ ἀγαθογονίας καὶ κακογονίας

Χαράλαμπος Χ. Σπυρίδης

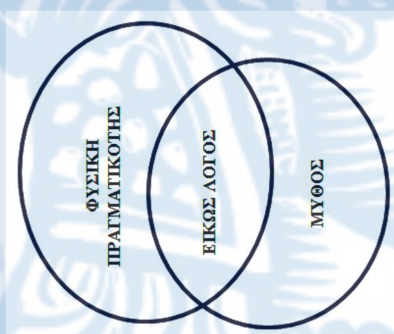
Καθηγητής Τμήματος Μουσικών Σπουδών
Φιλοσοφικής Σχολής Πανεπιστημίου Αθηνών,
Κοσμήτωρ της Διεθνούς Επιστημονικής Εταιρείας της Αρχαίας Ελληνικής Φιλοσοφίας
hspyridis@music.uoa.gr
http://users.uoa.gr/~hspyridis

Ο εικώς λόγος

Μελετούντες Πυθαγόρεια και Πλατωνικά κείμενα πρέπει να έχωμεν κατά νουν τον πολυφωνικόν αινιγματικόν λόγον αυτών των συγγραφέων ως εργαλείον μυστικής διδασκαλίας, διότι επρέσβευον ότι «οὐ τὰ πάντα τοῖς πᾶσι ῥητὰ».

Ο Αριστοτέλης και ο Αριστόξενος μαρτυρούν ότι η μυστικότης ήτο χαρακτηριστική για τους πρωίμους Πυθαγορείους, διότι «εκάλυπτον» πάντα όσα ιδιαιτέρως σημαντικά δεν επεθύμουν να προσφέρουν «ανοικτά» εις τους ακροατάς των.

Εχρησιμοποίουν την αλληγορίαν ή τον αινιγματικόν λόγον ή τον «εικότα λόγον», τον καθοριζόμενον υπό της τομής των συνόλων της φυσικής πραγματικότητος και του μύθου.



Δια της λογοτεχνικής τεχνικής του εικότος λόγου καθίστη ο Πλάτων σαφή ταυτοχρόνως εις άπαντας τους αναγνώστας του δια του ιδίου κειμένου διαφορετικά ουσιώδη μηνύματα ούτως, ώστε έκαστος εξ αυτών να αντιλαμβάνεται ἓν και μόνον ἓν σημαινόμενον, το ονομαζομένον «υπόνοια», βάσει του περισσεύματος του νοός του.

Μολονότι φαίνεται εξαιρετικώς εκτός λογικής εἷς φιλόσοφος να μην ανακοινοί σκοπίμως μετά σαφηνείας και διαυγείας ἓν αξιόλογον συμπέρασμα, τούτο κατά κόρον συμβαίνει εις τον Πλάτωνα· όμως δεν έτυχεν της δεούσης προσοχής υπό των μελετητών του Πλατωνικού έργου.

Θεωρώ απίστευτον το γεγονός ότι ουδείς εκ των Πλατωνιστών επεσήμανεν την εσκεμμένως υπό του Πλάτωνος τεθαμμένην ουσιαστικωτάτην μουσικήν γνώσιν εις το χωρίον του γεωμετρικού αριθμού εις το Η΄ Βιβλίον της Πλατωνικής Πολιτείας (546 c 1-7) με αποτέλεσμα να στερούμεθα μέχρι σήμερον της μοναδικής, αρχαιοτάτης και πολυτιμωτάτης γνώσεως περί του χρωματικού γένους της αρχαιοελληνικής μουσικής, υλοποιούμενον δια συγκεκριμένης κατατομής εφ' ενός μονοχόρδου.

Περί της του Πλάτωνος αλληγορίας «Ἐκ δύο ἀγαθῶν ἀγαθογονίαν πάντως ἔσεσθαι καὶ ἐκ δύο τῶν ἐναντίων τὸ ἐναντίον, ἐκ δὲ μικτῶν πάντως κακογονίαν οὐδέποτε δὲ ἀγαθογονίαν» (Ιάμβλιχος, *Περί της Νικομαχείου Αριθμητικής Εισαγωγής*, 82, 21-24).

Ο Ιάμβλιχος αναφέρεται εις θέματα ευγονικής αντιμετωπίζων το σχετικόν απόσπασμα εκ του χωρίου περί τον γεωμετρικόν αριθμόν της Πλατωνικής Πολιτείας εις δύο έργα του:

- *Περί του Πυθαγορικού Βίου* και
- *Εισαγωγή εις την Νικομάχειον Αριθμητικήν*.

Εις το πρώτον αναπτύσσει τα της ευγονικής κατά κυριολεξίαν και εις το δεύτερον κατ' αλληγορίαν.

Το Ιαμβλίχειον χωρίον εκ του έργου *Περί του Πυθαγορικού Βίου* έχει ως ακολούθως:

ὑπελάμβανον δὲ δεῖν πολλὴν πρόνοιαν ποιεῖσθαι τοὺς τεκνοποιουμένους τῶν ἐσομένων ἐκγόνων. πρώτην μὲν οὖν εἶναι καὶ μεγίστην πρόνοιαν τὸ προσάγειν αὑτὸν πρὸς τὴν τεκνοποιίαν σωφρόνως τε καὶ ὑγιεινῶς βεβιωκότα τε καὶ ζῶντα καὶ μήτε πληρώσει χρώμενον τροφῆς ἀκαίρως μήτε προσφερόμενον τοιαῦτα ἀφ' ὧν χείρους αἱ τῶν σωμάτων ἕξεις γίνονται, μήτι δὴ μεθύοντά γε, ἀλλ' ἥκιστα πάντων· ᾤοντο γὰρ ἐκ φαύλης τε καὶ ἀσυμφώνου καὶ ταραχώδους κράσεως μοχθηρὰ γίνεσθαι τὰ σπέρματα.

Ιάμβλιχος, *Βίος Πυθαγορικός*, 31, 211, 1 – 31, 212, 1.

[Και προσέτι εθεώρουν ότι όσοι τεκνοποιούν πρέπει να λαμβάνουν ιδιαιτέραν πρόνοιαν περί των μελλοντικών απογόνων. Η πρώτη λοιπόν και μεγίστη πρόνοια είναι έκαστος να παράσχει τον εαυτόν του για να γεννηθούν τέκνα, έχων ήδη ζήσει και συνεχίζων να ζει σωφρόνως και υγιεινώς, χωρίς να χορταίνει με τροφάς αδιακρίτως, χωρίς να τρέφεται με τροφάς, αίτινες καθιστούν χειροτέρας τας σωματικάς έξεις, αλλά υπεράνω όλων χωρίς να έρχεται εις κατάστασιν μέθης. Διότι εθεώρουν ότι τα μοχθηρά σπέρματα προκύπτουν εκ φαύλων, δυσαρμονικών και ταραχωδών χαρακτήρων.]

Ο ψυχίατρος Κωστής Μπάλλας εις το πόνημά του «*Πυθαγόρας και Πυθαγόρειοι*», (2001), Αθήνα, Εκδόσεις Προσκήνιο, αντιμετωπίζων και αυτός το ανωτέρω Ιαμβλίχειον χωρίον, το αποδίδει ελευθέρως κατά λέξιν ως ακολούθως:

«*Η προσοχή των Πυθαγορείων είχε στραφεί και προς την ευγονική. Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι τα χαρακτηριστικά των γονέων μεταδίδονται στους απογόνους και για τούτο οι μέλλοντες γονείς θα πρέπει να προνοούν για την υγεία των παιδιών που θα αποχτήσουν. Γι' αυτό οφείλουν να ζουν με τρόπο υγιεινό, αποφεύγοντας κάθε υπερβολή είτε στη διατροφή είτε στη λήψη οινοπνευματωδών*».

Εις την αλληγορίαν περί των ανθρωπείων γεννητών, ένθα ο Πλάτων μνημονεύει το νυφικόν ή γαμικόν γεγονός, υποκρύπτονται, κατά τον Ιάμβλιχον (*Εισαγωγή εις την Νικομάχειον Αριθμητικήν*) θεμελιώδη «θεωρήματα» της Πυθαγορείου Αριθμητικής, άτινα απαραιτήτως δέον, όπως ληφθούν υπ' όψιν προκειμένου να προβώμεν εις την ορθήν λύσιν του προβλήματος του γεωμετρικού αριθμού.

Και ο Πρόκλος (*Σχόλια εις την Πολιτείαν του Πλάτωνος*, 2, 8, 13-14) συμφωνεί μετά των Ιαμβλιχείων απόψεων υποστηρίζων πολύ ορθώς ότι:

«τὸ γὰρ ἀπὸ ἀριθμῶν ἐνδείκνυσθαι τὴν ἀλήθειαν ἀπ' εἰκόνων ἐστὶ διδάσκειν»

[Η φανέρωσις της αληθείας δια των αριθμών είναι διδασκαλία μέσῳ εικόνων].

Προκειμένου πάντα ταύτα καταστούν κατανοητά δέον, όπως εκτεθεί η Πυθαγόρειος ιεραρχία των αριθμών.

Εις τα Πυθαγόρεια Μαθηματικά η τριάς ήτο ο πρώτος αριθμός. Προς κατανόησιν της ιδιομορφίας ταύτης αναγκαίον, όπως δοθεί ο Πυθαγόρειος ορισμός του αριθμού, όστις τυγχάνει εντελώς διάφορος του Θαλού
«Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος» (Ευκλείδου, *Στοιχείων ζ.*)

Κατά τους Πυθαγορείους (Ιάμβλιχος, *Θεολογούμενα Αριθμητικής*, 7, 17-18) αριθμός είναι η οντότης της οποίας «*ὁ πολλαπλασιασμὸς τῆς συνθέσεως μείζων*», τουτέστιν το γινόμενον επί τον εαυτόν της είναι μεγαλύτερον του αθροίσματος μετά του εαυτού της. Εν Αλγεβρικῇ διατυπώσει:
$x \cdot x > x + x \Rightarrow x^2 > 2x$

Η μονάς, κατά τον ανωτέρω Πυθαγόρειον ορισμόν, δεν εθεωρείτο αριθμός, διότι $1 \cdot 1 < 1 + 1 \Rightarrow 1 < 2$, αλλ' εθεωρείτο ο γεννήτωρ των αριθμών.

Η δυάς είναι η μεσότης μεταξύ του πλήθους, ήτοι του αριθμού, και της μονάδος.
Ούτε η δυάς κατά τον ανωτέρω Πυθαγόρειον ορισμόν εθεωρείτο αριθμός, διότι, είτε πολλαπλασιαζομένη επί τον εαυτόν της, είτε προστιθεμένη εις αυτόν παράγει ιδίαν ποσότητα, δεδομένου ότι 2 x 2 = 2 + 2 = 4. Η καθ' αὑτῷ Ιαμβλίχειος διατύπωσις (*Θεολογούμενα Αριθμητικής*, 7, 14-18) έχει ως ακολούθως:

«Ὅτι ἡ δυὰς συντεθεῖσα ἴσα δύναται τῷ ἀπ' αὐτῆς γινομένῳ· ἡ γὰρ σύνθεσις ταύτης καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦτο αὐτὸ ποιεῖ [ἤγουν τὸν δ], καίτοι ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁ πολλαπλασιασμὸς τῆς συνθέσεως μείζων.»

Για τους Πυθαγορείους, επειδή 3 x 3 > 3 + 3, η τριάς ήτο ο πρώτος αριθμός.

Κατά τον Πυθαγόραν, αρχή των πάντων, ήτοι δημιουργός, είναι η αριθμητική μονάς. Την εξελικτικήν δημιουργίαν αναλαμβάνει η δυάς ή ζεύξις. Δια της συνενώσεως μονάδος και δυάδος γεννάται η τριάς, ο πρώτος αριθμός.

ἐπεὶ γὰρ πάντα καὶ ἐκ τοῦ ἑνός ἐστι καὶ ἐκ τῆς μετὰ τὸ ἓν δυάδος καὶ ἥνωταί πως ἀλλήλοις

Πρόκλος, *Σχόλια εις τον Πλατωνικόν Τίμαιον*, 1, 78, 6-7.

Η συνένωσις ή συνεύρεσις ή σύμμι(ει)ξις ή ανάμι(ει)ξις ή συζυγία ή σύνθεσις δύο αριθμών εκαλείτο «γάμος».

Περί ανθρώπων η σύμμι(ει)ξις ή σύζευξις σημαίνει επιμι(ει)ξίαν, σαρκικήν συνουσίαν, τουτέστιν γάμον.

Οι Πυθαγόρειοι εις την μουσικήν αντιμετωπίζουν μίαν ιεραρχίαν αριθμών· τους αρτίους και τους περιττούς αριθμούς.

Ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος.
Ευκλείδου, *Στοιχείων* ζ.

Περισσὸς ἀριθμός ἐστιν ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα ἢ [ὁ] μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.
Ευκλείδου, *Στοιχείων* ζ.

Συγκεκριμένως, πάντες οι άρτιοι αριθμοί ($2k$, $k\in N$) θεωρούνται φαύλοι αριθμοί, ενώ πάντες οι περιττοί (περὶ ἴσοι) αριθμοί ($2k+1=k+1+k$, $k\in N$) θεωρούνται αγαθοί αριθμοί.

Κατά τον Ιάμβλιχον, τον Πλούταρχον και τον Πρόκλον οι Πυθαγόρειοι είχον δύο μαθηματικών διαδικασιών γάμους, ήτοι γάμον κατά σύνθεσιν ή κατά παράθεσιν ή δια προσθέσεως καὶ γάμον κατά πολυπλασίωσιν ή δια πολλαπλασιασμού.

Το μελετούμενον Ιαμβλίχειον χωρίον αναφέρεται εις γάμους ή συζυγίας κατά πολυπλασίωσιν ή δια πολλαπλασιασμού μεταξύ συγκεκριμένων ομοίων αριθμών εκ των οποίων ως τέκνα θα προκύψουν επιφανείς αριθμοί.

«...οὕτως αἱ συζυγίαι τῶν ὁμοίων ἔσονται πρὸς τοὺς ὁμοίους καὶ ποιήσουσιν ἀριθμοὺς ἐπιφανεῖς κατά τε σύνθεσιν καὶ πολλαπλασιασμὸν ἐξ ἀλλήλων».

Ὅτι Δημήτριος ὁ γεωμέτρης μέν, Πορφυρίου δὲ διδάσκαλος, εἰς τὴν σύζευξιν τῶν ὁμοίων ἀνάγει πάντα καὶ ἐκ τῶν ἀριθμῶν δείκνυσθαί φησιν, ὅτι καὶ ἐν τῇ φύσει κατὰ τὴν μῖξιν τῶν ἀνομοίων κρατεῖ τὸ χεῖρον. καὶ γὰρ τίκτουσι περιττοὺς οἱ περιττοὶ καὶ οἱ χείρους ἐναντίους, οἱ ἄρτιοι· ὁ γὰρ ἐξ ἀρτίου ἄρτιος. οἱ δὲ ἐξ ἀμφοῖν τοῖς χείροσιν ὁμοιοῦνται· ὁ γὰρ ἐξ ἀρτίου καὶ περισσοῦ ἄρτιος. εἶναι οὖν τὸν ἀριθμὸν δηλωτικὸν τῆς ἐν τῇ συζεύξει τῶν ἀγαθῶν καὶ μὴ ἀγαθῶν εἰς τὸ χεῖρον φορᾶς.

Πρόκλος, *Σχόλια εις την Πολιτείαν του Πλάτωνος*, 2, 23, 14-22.

[Ο Δημήτριος ο γεωμέτρης, ο διδάσκαλος του Πορφυρίου, ανάγει το σύνολον των δογμάτων εις την σύζευξιν των ομοίων και υποστηρίζει ότι εκ των αριθμών καταδεικνύεται ό,τι και εις την φύσιν, κατά την πράξιν του πολλαπλασιασμού μεταξύ των ανομοίων επικρατεί το χειρότερον. Όντως, <δια του πολλαπλασιασμού> οι περιττοί αριθμοί γεννούν περιττούς αριθμούς, ενώ οι χειρότεροι, οι άρτιοι, τους εναντίους· διότι ο προερχόμενος εκ του πολλαπλασιασμού αρτίων αριθμών είναι άρτιος. Οι προερχόμενοι εξ άλλου εκ του πολλαπλασιασμού και των δύο (αρτίων και περιττών) ομοιάζουν προς τους χειροτέρους (εννοεί τους αρτίους)· διότι εκ του πολλαπλασιασμού αρτίου επί περιττόν <προκύπτει> άρτιος αριθμός. Ο αριθμός, λοιπόν, είναι δηλωτικός της πορείας επί τα χείρω, όταν συζεύγνυνται αγαθά και μη αγαθά.]

Ο Ιάμβλιχος, εδραζόμενος επί της Νικομαχείου Αριθμητικής, εν άλλοις λόγοις επί της Πυθαγορείου Αριθμητικής, αλληγορικώς αναφέρει ότι:

- εκ δύο αγαθών γονέων του αυτού χαρακτήρος γεννάται εἷς καθ’ όλα αγαθός γόνος·
- εκ δύο γονέων αντιθέτων χαρακτήρων γεννάται εἷς καθ’ όλα μη αγαθός (φαύλος) γόνος·
- εκ της συμμίξεως αγαθού και φαύλου γονέως γεννάται γόνος εκ πάσης απόψεως φαύλος και ποτέ αγαθός.

Τα ανωτέρω προσπαθεί να τεκμηριώσει και αναλύσει εις το έργον του *Εις την Νικομάχου Γερασηνού Αριθμητικήν Εισαγωγήν* (82, 6 - 83, 18), επικαλούμενος τα κάτωθι εκ της Νικομαχείου Αριθμητικής «θεωρήματα»:

«οἱ μὲν τετράγωνοι δυνάμεις εἰσὶν ἰδίῳ τινῶν μήκει αὐξηθέντων ἀριθμῶν, ἑτερομήκεις δὲ οὐκ ἰδίῳ ἀλλ' ἑτέρῳ, οὐκ ἀπεικότως ἑτερομήκεις ἐκλήθησαν, οὗ κατὰ ἀντιδιαστολὴν τοὺς τετραγώνους οὐκ ἦν ἀπρεπὲς ἰδιομήκεις καλεῖν. οἱ δὲ παλαιοὶ ταὐτούς τε καὶ ὁμοίους αὐτοὺς ἐκάλουν διὰ τὴν περὶ τὰς πλευράς τε καὶ γωνίας ὁμοιότητα καὶ ἰσότητα, ἀνομοίους δὲ ἐκ τοῦ ἐναντίου καὶ θατέρους τοὺς ἑτερομήκεις.»

[Οι τετράγωνοι είναι τα γινόμενα (=αι δυνάμεις) αριθμών τινών, οίτινες ηυξήθησαν κατά το ίδιον μήκος, ενώ ετερομήκεις είναι τα γινόμενα (=αι δυνάμεις) αριθμών τινών, οίτινες ηυξήθησαν κατά διαφορετικόν μήκος· δεν ωνομάσθησαν παραλόγως ετερομήκεις, όνομα εις αντιδιαστολή προς το οποίον δε θα ήτο απρεπές να αποκαλούμε τους τετραγώνους αριθμούς ιδιομήκεις. Οι παλαιοί τους απεκάλουν ιδίους και ομοίους λόγῳ της ομοιότητος και της ισότητος εις τας πλευράς και εις τας γωνίας των, ενώ αντιθέτως απεκάλουν ανομοίους και άλλους τους ετερομήκεις.]


3X3

Τους αριθμούς τους προκύπτοντας εκ του γινομένου δύο διαφορετικών ακεραίων αριθμών τους ωνόμαζον είτε ετερομήκεις, είτε προμήκεις.

Το γινόμενον δύο διαδοχικών ακεραίων αριθμών $\left[n\cdot(n+1)\ \ n\in N\right]$ γεννά έναν ετερομήκη[1] αριθμόν, ήτοι έναν επίπεδον αριθμόν με μήκος κατά μονάδα μακρύτερον του πλάτους.

---

[1] Πάλιν οὖν ἄνωθεν ἑτερομήκης ἀριθμὸς λέγεται, οὗ ἐπιπέδως σχηματογραφηθέντος τετράπλευρος μὲν καὶ τετραγώνιος γίνεται ἡ καταγραφή, οὐ μὴν ἶσαι ἀλλήλαις αἱ πλευραὶ οὐδὲ τὸ μῆκος τῷ πλάτει ἶσον, ἀλλὰ παρὰ μονάδα, οἷον ὁ β, ὁ ς, ὁ ιβ, ὁ κ, ὁ λ, ὁ μβ καὶ οἱ ἑξῆς· ἂν γὰρ αὐτοὺς ἐπιπέδως διαγράφῃ τις, πάντως οὕτω ποιήσει· ἅπαξ β β, δὶς γ ς, τρὶς δ ιβ καὶ τοὺς ἑξῆς ἀναλόγως· τετράκις ε, πεντάκις ς, ἑξάκις ζ, ἑπτάκις η καὶ ἐπ' ἄπειρον, μόνον ἵνα μονάδι μείζων ἡ ἑτέρα πλευρὰ τῆς λοιπῆς ᾖ, ἄλλῳ δὲ μηδενὶ ἀριθμῷ·

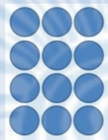
Νικόμαχος Γερασηνός, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 17, 1, 1-13.

οἱ μὲν τετράγωνοι δυνάμεις εἰσὶν ἰδίῳ τινῶν μήκει αὐξηθέντων ἀριθμῶν, ἑτερομήκεις δὲ οὐκ ἰδίῳ ἀλλ' ἑτέρῳ, οὐκ ἀπεικότως ἑτερομήκεις ἐκλήθησαν, οὗ κατὰ ἀντιδιαστολὴν τοὺς τετραγώνους οὐκ ἦν ἀπρεπὲς ἰδιομήκεις καλεῖν. οἱ δὲ παλαιοὶ ταὐτούς τε καὶ ὁμοίους αὐτοὺς ἐκάλουν διὰ τὴν περὶ τὰς πλευράς τε καὶ γωνίας ὁμοιότητα καὶ ἰσότητα, ἀνομοίους δὲ ἐκ τοῦ ἐναντίου καὶ θατέρους τοὺς ἑτερομήκεις.

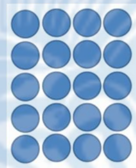
Ιάμβλιχος, Εις την Νικομάχου Γερασηνού Αριθμητικήν Εισαγωγήν, 82, 6-13.

3X(3+1)

Εις έναν ετερομήκη αριθμόν, εάν το n είναι περιττός αριθμός, τότε το (n+1) θα είναι άρτιος αριθμός, εάν το n είναι άρτιος αριθμός, τότε το (n+1) θα είναι περιττός αριθμός. Εις αμφοτέρας τας περιπτώσεις το γινόμενόν των θα είναι πάντοτε άρτιος αριθμός.



3X(3+1)



4X(4+1)

Το γινόμενον δύο μη διαδοχικών ακεραίων αριθμών $\left[n\cdot(n+k)\ n,k\in N,\ k>1\right]$ γεννά έναν προμήκη[2] αριθμόν, ήτοι έναν επίπεδον αριθμόν με μήκος κατά k μονάδας μακρύτερον του πλάτους. Οι προμήκεις αριθμοί ονομάζονται και μακρύτεροι εις το πρόσθιον μέρος των.

Εάν το n είναι περιττός αριθμός και εάν το k είναι άρτιος αριθμός, τότε το (n+k) θα είναι περιττός αριθμός. Εις την περίπτωσιν ταύτην ο προμήκης αριθμός $\left[n\cdot(n+k)\ n,k\in N,\ k>1\right]$ θα είναι περιττός αριθμός ως γινόμενον δύο ομοίων αριθμών.

Παράδειγμα: n=3, k=2, n+k=3+2=5, n(n+k)=3·5=15

Εάν το n είναι περιττός αριθμός και εάν το k είναι περιττός αριθμός, τότε το (n+k) θα είναι άρτιος αριθμός. Εις την περίπτωσιν ταύτην ο προμήκης αριθμός $\left[n\cdot(n+k)\ n,k\in N,\ k>1\right]$ θα είναι άρτιος αριθμός ως γινόμενον δύο ανομοίων αριθμών.

Παράδειγμα: n=3, k=5, n+k=3+5=8, n(n+k)=3·8=24

Εάν το n είναι άρτιος αριθμός και εάν το k είναι περιττός αριθμός τότε το (n+k) θα είναι περιττός αριθμός. Εις την περίπτωσιν ταύτην ο προμήκης αριθμός $\left[n\cdot(n+k)\ n,k\in N,\ k>1\right]$ θα είναι άρτιος αριθμός ως γινόμενον δύο ανομοίων αριθμών.

[2] ἐὰν δὲ ἄλλως παρὰ τὴν μονάδα διαφέρωσιν ἀλλήλων αἱ πλευραί, οἷον δυάδι, τριάδι, τετράδι ἢ ἐφεξῆς, ὡς τὰ δὶς δ ἢ τρὶς ϛ ἢ τετράκις η ἢ ὅπως ποτὲ οὖν ἑτέρως, οὐκέτι κυρίως ὁ τοιοῦτος ἑτερομήκης κληθήσεται, ἀλλὰ προμήκης·

Νικόμαχος Γερασηνός, Αριθμητική Εισαγωγή, 2, 17, 1, 13-19.

Παράδειγμα: $n=4$, $k=3$, $n+k=4+3=7$, $n(n+k)=4\cdot 7=28$

Εάν το n είναι άρτιος αριθμός και εάν το k είναι άρτιος αριθμός, τότε το (n+k) θα είναι άρτιος αριθμός. Εις την περίπτωσιν ταύτην ο προμήκης αριθμός $\left[n\cdot(n+k)\ \ n,k\in N,\ \ k>1\right]$ θα είναι άρτιος αριθμός ως γινόμενον δύο ομοίων αριθμών.

Παράδειγμα: $n=4$, $k=2$, $n+k=4+2=6$, $n(n+k)=4\cdot 6=24$

Σημειωτέον ότι τους προμήκεις αριθμούς, είτε είναι άρτιοι, είτε είναι περιττοί, ο Πλάτων τους εκλαμβάνει ως φαύλους αριθμούς.

Εκ των άρτι εκτεθέντων προκύπτουν:

- «ἐν δὲ τῇ ἐκθέσει ἑκατέρου εἴδους <ὁμοίων καὶ ἀνομοίων ἀριθμῶν> οἱ μὲν <τετράγωνοι ἀριθμοὶ> ἕνα παρ' ἕνα περισσοὶ καὶ ἄρτιοι γενήσονται, ὅτι οἱ τοιοῦτοι αὐτοὺς αὐξάνουσιν·»

[Και κατά την παράθεση εκάστου εκ των δύο ειδών αριθμών <ὁμοίων καὶ ἀνομοίων ἀριθμῶν> *κεχωρισμένως, οι τετράγωνοι θα είναι εναλλάξ περιττοί και άρτιοι, επειδή όμοιοι αριθμοί τους αυξάνουν·]*

n	n+1
άρτιος	περιττός
περιττός	άρτιος

n^2	$(n+1)^2$
άρτιος	περιττός
περιττός	άρτιος

- «οἱ δ' ἑτερομήκεις πάντες ἄρτιοι, ὅτι περισσὸς ἄρτιον ἢ ἄρτιος περισσὸν μηκύνει, πᾶς δὲ περισσὸς κατ' ἄρτιον αὐξηθεὶς[3] ἄρτιον γεννᾷ.»

[άπαντες οι ετερομήκεις, όμως, είναι άρτιοι, επειδή εἷς περιττός πολλαπλασιάζει έναν άρτιον ή εἷς άρτιος έναν περιττόν, και πας περιττός πολλαπλασιαζόμενος επί έναν άρτιον γεννά άρτιον.]

n	(n+1)	n(n+1)
άρτιος	περιττός	άρτιος · περιττός = άρτιος
περιττός	άρτιος	περιττός · άρτιος = άρτιος

- Το άρτιον και το περιττόν ενός προμήκους αριθμού εξαρτάται εκ του αρτίου και του περιττού των αριθμών n και k.

«καὶ ἐπεὶ ἐνταῦθα λόγου ἐσμέν, ἰστέον ὅτι χρήσιμον ἡμῖν τοῦτο ἔσται τὸ παράδειγμα εἰς τὸν ἐν τῇ Πλάτωνος πολιτείᾳ γαμικὸν ἀριθμόν, ἔνθα φησὶν

[3] Υπό την έννοιαν του πολλαπλασιασθείς. Περιττός επί άρτιον αριθμόν άρτιον αριθμόν γεννά.

ἐκ δύο ἀγαθῶν ἀγαθογονίαν πάντως ἔσεσθαι καὶ ἐκ δύο τῶν ἐναντίων τὸ ἐναντίον, ἐκ δὲ μικτῶν πάντως κακογονίαν οὐδέποτε δὲ ἀγαθογονίαν.»

[Και επειδή ευρισκόμεθα εις αυτό το σημείον του λόγου, πρέπει να γνωρίζωμεν ότι τούτο το παράδειγμα θα μας είναι χρήσιμον για τον γαμήλιον αριθμόν εις την Πολιτείαν του Πλάτωνα, όπου λέγει ότι εκ δύο αγαθών γονέων οπωσδήποτε θα υπάρξει γέννησις αγαθών (αγαθός · αγαθός = αγαθός) *και εκ δύο αντιθέτων το αντίθετον* (φαύλος · φαύλος = φαύλος)*, από δε μικτούς γονείς οπωσδήποτε γέννησις κακών και ουδέποτε αγαθών* (αγαθός · φαύλος = φαύλος) και (φαύλος · αγαθός = φαύλος)*.]*

Ερώτησις

Γιατί οι τετράγωνοι αριθμοί είτε είναι άρτιοι, είτε είναι περιττοί, εκλαμβάνονται ως αγαθοί αριθμοί;

«καὶ γὰρ ἐκ μὲν τῆς τῶν περισσῶν καθ' ἑαυτοὺς συνόδου καὶ ἐπισυνθέσεως ἡγουμένης μονάδος ἐγίνοντο τετράγωνοι τῆς τἀγαθοῦ φύσεως ὄντες ἀπὸ τοιούτων· αἰτία δὲ τούτου ἥ τε ἰσότης καὶ πρὸ ταύτης τὸ ἕν·»

[Διότι αθροίζοντες *διαδοχικούς περιττούς αριθμούς εκ της φυσικής σειράς αυτών με πρώτην την μονάδα, εγεννώντο τετράγωνοι αριθμοί, οίτινες ανήκουν εις την φύσιν του αγαθού, επειδή και οι γεννήτορές τους (οι περιττοί αριθμοί) είναι τοιούτοι (αγαθοί)· αιτία αυτού του γεγονότος είναι και η ισότης και προ αυτής το ένα.]*

Απόδειξις

Οι περιττοί αριθμοί $[(2 \cdot n+1),\ n \in N]$ χαρακτηρίζονται εκ της ταυτότητος, τουτέστιν εκ της φύσεως της μονάδος. Εκκινούντες εκ της μονάδος πάντοτε και αθροίζοντες διαδοχικούς περιττούς αριθμούς εκ της φυσικής σειράς αυτών 1, 3, 5, 7, 9, ... λαμβάνομεν τετραγώνους αριθμούς

1, 3, 5, 7, 9, ...

$1+3=4=2^2$

$1+3+5=9=3^2$

$1+3+5+7=16=4^2$

$1+3+5+7+9=25=5^2$

....

....

Κατά τα ανωτέρω, τα τετράγωνα $[(n \cdot n=n^2),\ n \in N]$ συμμετέχουν της ταυτότητος αφενός μεν, διότι γεννώνται δια πολλαπλασιασμού ενός ακεραίου αριθμού επί τον εαυτόν του[4], αφετέρου, διότι γεννώνται δια της ενώσεως περιττών αριθμών.

Ερώτησις

Γιατί οι ετερομήκεις αριθμοί εκλαμβάνονται πάντοτε ως φαύλοι αριθμοί;

«ἐκ δὲ τῆς τῶν ἀρτίων ἡγουμένης δυάδος ἑτερομήκεις τῆς ἐναντίας φύσεως ὄντες, διότιπερ καὶ οἱ γεννήτορες· πάλιν δὲ αἰτία τούτου ἥ τε ἀνισότης καὶ πρὸ ταύτης ἡ ἀόριστος δυάς.»

[Εκκινούντες εκ της δυάδος και προσθέτοντες αρτίους αριθμούς, εγεννώντο ετερομήκεις αριθμοί, οι οποίοι ανήκουν εις την αντίθετον φύσιν, επειδή εις ταύτην ανήκουν και οι γεννήτορές των· πάλιν και αυτού του πράγματος αιτία είναι και η ανισότης και προ αυτής η αόριστος δυάς.]

Απόδειξις

Οι άρτιοι αριθμοί $[2 \cdot n,\ n \in N]$ χαρακτηρίζονται εκ της ετερότητος, τουτέστιν εκ της φύσεως της απροσδιορίστου δυάδος. Εκκινούντες εκ της δυάδος πάντοτε και αθροίζοντες διαδοχικούς αρτίους αριθμούς εκ της φυσικής σειράς αυτών 2, 4, 6, 8, 10, ... λαμβάνομε ετερομήκεις αριθμούς[5]

[4] Κατ’ αυτόν τον τρόπον προκύπτουν σχήματα τα τετράγωνα, με ίσας τας γωνίας των και τας πλευράς των.

Τετράγωνος δέ ἐστιν ἀριθμὸς ὁ συνεχὴς τούτῳ καὶ μηκέτι τρεῖς, ὡς ὁ πρόσθεν, ἀλλὰ τέσσαρας ἐν τῇ καταγραφῇ γωνίας ἀποδιδούς, ἐν ἰσοπλεύρῳ μέντοι καὶ αὐτὸς σχηματισμῷ, οἷον α, δ, θ, ιϛ, κε, λϛ, μθ, ξδ, πα, ρ·

Νικόμαχος Γερασηνός, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 9, 1, 1-9.

οἱ τετράγωνοι ὑπό τινων ἀριθμῶν ἰδίῳ μήκει μηκυνθέντων γίνονται, ταυτὸν ἔχοντες τὸ μῆκος τῷ πλάτει, ἰδιομήκεις ἂν κυρίως καὶ ταυτομήκεις λέγοιντο, οἷον δὶς β, τρὶς γ, τετράκις δ καὶ οἱ ἐφεξῆς·

Νικόμαχος Γερασηνός, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 18, 3, 1-6.

[5] γεννᾶται δὲ καὶ οὗτος (ο τετράγωνος) στοιχηδὸν ἐκτεθέντος φυσικοῦ ἀριθμοῦ τῇ μονάδι ἐπισωρευθέντων οὐκέτι τῶν ἐφεξῆς τοῖς ἐφεξῆς, ὡς δέδεικται, ἀλλὰ τῶν παρ’ ἕνα κειμένων πάντων, τουτέστι τῶν περισσῶν· πρῶτος γὰρ ὁ α δυνάμει πρῶτος τετράγωνος, δεύτερος ὁ α καὶ γ ἐνεργείᾳ πρῶτος τετράγωνος, τρίτος δὲ ὁ α καὶ γ καὶ ε ἐνεργείᾳ δεύτερος τετράγωνος, τέταρτος δὲ ὁ α καὶ γ καὶ ε καὶ ζ ἐνεργείᾳ τρίτος τετράγωνος καὶ ὁ ἑξῆς τοῖς προτέροις προσσωρευθέντος τοῦ θ γίνεται καὶ ὁ μετ’ αὐτόν τοῦ ια προστεθέντος καὶ οὕτως ἀεί. καὶ ἐπὶ τούτων δὲ συμβέβηκε τοσούτων μονάδων τὴν ἑκάστου πλευρὰν εἶναι, ὁπόσοιπερ ἂν ὦσιν οἱ εἰς τὴν αὐτοῦ γένεσιν ἐπισωρευθέντες ἀριθμοί.

Νικόμαχος Γερασηνός, Αριθμητική Εισαγωγή, 2, 9, 3, 1- 2, 9, 4, 4.

$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots$

$2+4=6=2\cdot 3$

$2+4+6=12=3\cdot 4$

$2+4+6+8=20=4\cdot 5$

$2+4+6+8+10=30=5\cdot 6$

…………………………………

……………………………………

«καὶ εἰ κρᾶσις δὲ γένοιτο καὶ ὡς ἂν εἴποι τις γάμος ἀρτίου καὶ περισσοῦ, οἱ γεννώμενοι ὄγκοι καὶ τῆς καθ’ ἑκατέρου φύσεως εἴτε μονάδι διαφέροιεν οἱ γεννήτορες εἴτε καὶ μείζονί τινι ἀριθμῷ·»

[Και αν γίνει ανάμειξις και, όπως θα έλεγεν κανείς, γάμος του άρτιου και του περιττού, οι αριθμοί οίτινες γεννώνται θα είναι ανόμοιοι και θα ανήκουν εις την φύσιν της διαφορετικότητος, είτε οι γεννήτορές των διαφέρουν κατά μίαν μονάδα είτε και κατά τινα μεγαλύτερον αριθμόν], αφού θα πρόκειται είτε περί ετερομηκών, είτε περί προμηκών αριθμών.

«καὶ τοῦτό φησιν ὁ θειότατος Πλάτων παριδόντας τοὺς τῆς πολιτείας αὐτοῦ ἄρχοντας καὶ ἀρχούσας, διὰ τὸ μὴ τεθράφθαι ἐν τοῖς μαθήμασιν ἢ εἰ καὶ τραφεῖεν παρενθυμηθέντας, τοὺς γάμους φύρδην ἀναμίξειν, ἀφ’ ὧν φαῦλοι γενόμενοι οἱ ἔγγονοι ἀρχὴ στάσεως καὶ διαφορᾶς τῇ συμπάσῃ πολιτείᾳ γενήσονται».

[*και ο θεϊκότατος Πλάτων λέγει ότι, εάν οι άρχοντες και αι αρχόντισσαι της πολιτείας του παραβλέψουν αυτό, επειδή δεν έχουν ανατραφεί με τα μαθηματικά ή, αν και έχουν ανατραφεί, το παραγνωρίσουν, θα ανακατέψουν φύρδην μίγδην τους γάμους, από τους οποίους οι απόγονοι θα γεννηθούν κακοί και θα αποτελέσουν αρχήν διχονοίας και διαφοράς για ολόκληρον την πολιτείαν*.]

Ο Thomas Taylor εις τας σελίδας 224-225 του βιβλίου του *Η Θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων*, (1995), Αθήνα, Εκδόσεις Ιάμβλιχος, Μτφρ. Μαρίας Οικονομοπούλου, βασιζόμενος επί της *Αριθμητικής Εισαγωγής* του Νικομάχου του Γερασηνού, αναφέρει ότι οι Πυθαγόρειοι, οίτινες ενεβάθυνον εις την έρευναν των πρώτων αρχών των πραγμάτων και έδωσαν εις την φύσιν όλων των όντων έναν διττόν διαχωρισμόν, ισχυρίζονται, όπως ακριβώς κάνει και ο Πλάτων εις την κατά Τίμαιον *Γένεσιν Ψυχής Κόσμου*, ότι εις την ουσίαν όλων των όντων συμμετέχει και το ταυτόν (=ομοιότης) και το θάτερον (=ετερότης). Το ταυτόν, το οποίον σχετίζεται με την μονάδα, είναι η αιτία ενός αναλλοιώτου τρόπου υπάρξεως, ενῷ το θάτερον σχετίζεται με την δυάδα την απροσδιόριστον και είναι η αιτία ενός μεταβλητού τρόπου υπάρξεως.

Ο Thomas Taylor παραθέτει ελευθέραν ερμηνείαν της ανωτέρω Ιαμβλιχείου περικοπής περί τον «γεωμετρικόν ή νυφικόν ή γαμικόν» αριθμόν κατά λέξιν ως ακολούθως:

«*Αυτό το παράδειγμα θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε το γαμικό αριθμό στην Πολιτεία του Πλάτωνα. Διότι εκεί λέει ότι από δύο γονείς αγαθούς θα γεννηθεί ένας καθόλα αγαθός γόνος·* (περιττός · περιττός = περιττός) *αλλά το αντίθετο από την ένωση δύο αντίθετων χαρακτήρων* (άρτιος · άρτιος = άρτιος).
Από την ένωση κακού και αγαθού γονέα ο γόνος θα είναι από κάθε άποψη κακός και ποτέ αγαθός (άρτιος · περιττός = άρτιος). *Διότι από τη σύνδεση περιττών αριθμών μεταξύ τους, με την πρόσθεση της μονάδας*[6]*, η οποία στη σύνθεση προηγείται αυτών, παράγονται οι τετράγωνοι αριθμοί, οι οποίοι, επειδή παράγονται από τέτοιους αριθμούς, μετέχουν της φύσης του αγαθού. Αιτία δε τούτου είναι η ισότητα*[7] *και προηγείται αυτής το ένα*[8]*. Από τη σύνδεση όμως άρτιων αριθμών, με τη δυάδα*[9] *να ηγείται, παράγονται αριθμοί ετερομήκεις που έχουν αντίθετη φύση, διότι τέτοιοι ακριβώς είναι και οι γεννήτορές τους. Αιτία δε τούτου είναι η ανισότητα*[10] *και προηγείται αυτής η αόριστη δυάδα*[11]*. Και εάν μία μίξη πρέπει να γίνει, σαν ένα πάντρεμα του άρτιου με τον περιττό, ο γόνος θα συμμετέχει στη φύση και των δύο, είτε οι γεννήτορες του διαφέρουν κατά τη μονάδα*[12]*, είτε κατά κάποιον μεγαλύτερο αριθμό*[13]*. Διότι οι παραγόμενοι αριθμοί είναι είτε ετερομήκεις, είτε προμήκεις. Από τετράγωνους αριθμούς αναμεμιγμένους (πολλαπλασιαζομένους) μεταξύ τους γεννιούνται οι*

---

[6] Η απόδειξις εξετέθη προηγουμένως.

[7] $x^2 = x \cdot x$ (δύο ίσοι όροι, εξ ου η ισότης).

[8] $1^2 = 1 \cdot 1$

[9] Η απόδειξις εξετέθη προηγουμένως.

[10] $x \cdot (x+1)$ (δύο άνισοι αριθμοί, εξ οὗ η ανισότης).

[11] $1 \cdot (1+1) = 1 \cdot 2 = 2$

[12] Εννοεί τους ετερομήκεις αριθμούς.

[13] Εννοεί τους προμήκεις αριθμούς.

τετράγωνοι[14]*, από ετερομήκεις παράγονται αριθμοί όμοιοι προς αυτούς*[15]*, αλλά από μικτούς αριθμούς ποτέ δε γεννιούνται τετράγωνοι, αλλά αριθμοί που είναι εντελώς ετερογενείς*[16]*. Αυτό λέει ο θείος Πλάτωνας σχετικά με τους αρσενικούς και τους θηλυκούς άρχοντες στην Πολιτεία του, ότι δηλαδή, όταν δεν έχουν ανατραφεί με τις μαθηματικές επιστήμες, ή αν και έχουν ανατραφεί με αυτές, έλθουν σε γάμου κοινωνία με τρόπο σύγχυσης και αταξίας, θα γεννήσουν απόγονους εξαχρειωμένους, οι οποίοι θα είναι η αρχή της οχλαγωγίας και της διχόνοιας σε ολόκληρη την πολιτεία*».

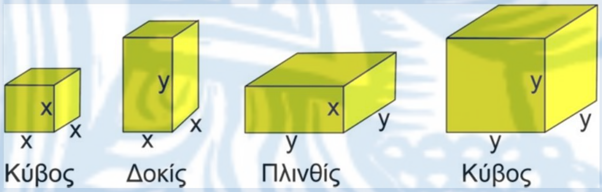
Ἓν εκ των μαθηματικών θεωρημάτων του Πλάτωνος των εκτιθεμένων εις τον Τίμαιον αναφέρει:
«νῦν δὲ στερεοειδῆ γὰρ αὐτὸν προσῆκεν εἶναι, τὰ δὲ στερεὰ μία μὲν οὐδέποτε, δύο δὲ ἀεὶ μεσότητες συναρμόττουσιν».

Η αλγεβρική αποκωδικοποίησις του εν λόγῳ θεωρήματος διατυπούται δια της τριπλής ισότητος:

$$\frac{xxx}{xxy} = \frac{xxy}{xyy} = \frac{xyy}{yyy} = \frac{x}{y}$$

ενώ η γεωμετρική αποκωδικοποίησις αυτού έχει ως εξής:

Δοθέντων δύο κύβων, ενός μικρού κι ενός μεγάλου, παρεμβάλλονται μεταξύ αυτών, ώστε να σχηματίζουν αναλογίαν, μία δοκίς, ήτις έχει την βάσιν του μικρού κύβου και το ύψος του μεγάλου κύβου και μία πλινθίς, ήτις έχει την βάσιν του μεγάλου κύβου και το ύψος του μικρού κύβου.



Το Πλατωνικόν τούτο θεώρημα το ανέφερον, διότι ιδιαιτέραν σημασίαν έχουν οι αριθμοί, οίτινες προκύπτουν εκ του γινομένου τριών αριθμών και «παριστούν» ἓν στερεόν, το οποίον, κατά τα προαναφερθέντα, είτε είναι κύ-

[14] $x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y)^2$

[15] $x \cdot (x+1) \cdot x \cdot (x+1) = x^2 \cdot (x+1)^2 = \left(x \cdot (x+1)\right)^2$

[16] $x \cdot x \cdot (x+1) = x^2 \cdot (x+1)$

βος[17] (οἱ κύβοι <αριθμοί> ἰσάκις ἶσοι ἰσάκις), είτε πλινθίς (πλινθίδες λέγονται <οι αριθμοί οι> ἰσάκις ἶσοι ἐλαττονάκις), είτε δοκίς (ἔστι δὲ δοκὶς ἀριθμὸς ἰσάκις ἶσος μειζονάκις), είτε σφηνίσκος (σφηνίσκοι ἦσαν <αριθμοί> ἀνισάκις ἄνισοι ἀνισάκις).

Οι στερεοί αριθμοί πλην των κύβων χαρακτηρίζονται εκ της ετερότητος, δηλαδή εκ της φύσεως της απροσδιορίστου δυάδος.

Ερώτησις

Γιατί οι κύβοι αριθμοί είτε είναι άρτιοι, είτε είναι περιττοί, εκλαμβάνονται ως αγαθοί αριθμοί;

Σημειωτέον ότι και οι κύβοι, εις τον χώρον των τριών διαστάσεων, επειδή προκύπτουν εκ του πολλαπλασιασμού τριών ίσων αριθμών, συμμετέχουν της ταυτότητος και έχουν την ιδιότητα της μη μεταβολής. Γεννώνται μόνον δια της ενώσεως περιττών αριθμών και ποτέ δια της ενώσεως αρτίων κατά τον ακόλουθον τρόπον:

Εκκινούμεν εκ της μονάδος εις την φυσικήν σειρά των περιττών αριθμών 1, 3, 5, 7, 9, ... Ο πρώτος αριθμός της σειράς, η μονάς, είναι κύβος εν δυνάμει. Οι δύο περιττοί αριθμοί μετά την μονάδα δίδουν άθροισμα 8, το οποίον είναι ο κύβος του 2. Οι τρεις περιττοί αριθμοί μετά το 5 δίδουν άθροισμα 27, το οποίον είναι ο κύβος του 3 κ.ο.κ.

1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

$1 = 1^3$

$3 + 5 = 8 = 2^3$

$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$

....

....

Εκ των μέχρι τούδε εκτεθέντων[18],

[17] Νικόμαχος, *Αριθμητική Εισαγωγή*, 2, 17, 6.

[18] ὁ κύβος παραλληλεπίπεδός ἐστιν, ἀλλ’ οὗτος μὲν ἔχει πάσας τὰς πλευρὰς ἴσας, …
ἑτερομήκεις μὲν οὖν εἰσιν οἱ ἔχοντες μονάδι μόνῃ τὰς πλευρὰς ἀνίσους· οἷον ὁ ϛ ἑτερομήκης, τρὶς γὰρ β ϛ, ὁ δὲ γ τῆς δυάδος μονάδι μόνον μείζων ἐστίν· ὡσαύτως ὁ ιβ ἑτερομήκης, τρὶς γὰρ δ ιβ, ὁ δὲ δ τῶν γ μονάδι μείζων ἐστίν· οὕτως ἔχει καὶ ὁ κ, δ^κις τὰ ε κ, καὶ ὁ λ καὶ ὁ μβ, ϛ^κις γὰρ τὰ ζ καὶ ἐπὶ παντὸς ἑτερομήκους τὸ αὐτό·

- Οι τετράγωνοι και οι κυβικοί αριθμοί ονομάζονται και ισομήκεις, επειδή αι πλευραί των τετραγώνων σχημάτων των ή των κυβικών στερεών των είναι ισομήκεις, λόγῳ της μεταξύ των ισότητος.
- Οι ετερομήκεις αριθμοί είναι ανισομήκεις, επειδή αι πλευραί των ορθογωνίων σχημάτων των διαφέρουν κατά μίαν μονάδα.
- Οι προμήκεις αριθμοί είναι ανισομήκεις, επειδή αι πλευραί των ορθογωνίων σχημάτων των διαφέρουν κατά περισσοτέρας της μιας μονάδας.
- Οι υπόλοιποι στερεοί αριθμοί (δοκίδες ή πλινθίδες ή σκαληνά), ως αναφέρονται υπό του Νικομάχου του Γερασηνού, είναι ανισομήκεις, επειδή τουλάχιστον μία εκ των πλευρών των στερεών των είναι διαφορετικού μήκους των υπολοίπων.

Ο Πλάτων ονομάζει **αγαθούς** αριθμούς, πέραν των περιττών αριθμών, τα τετράγωνα και τους κύβους, διότι υπάρχουν πάντοτε κατά τον ίδιον τρόπον και διατηρούν μίαν ισότητα. Τονίζει ότι εξ αγαθών αριθμών αγαθοί αριθμοί παράγονται.

(περιττός · περιττός = περιττός)

$$\alpha^2 \cdot \beta^2 = (\alpha \cdot \beta)^2$$

$$\alpha^3 \cdot \beta^3 = (\alpha \cdot \beta)^3$$

προμήκεις δέ εἰσιν οἱ πλείοσι μονάσιν ἔχοντες τὸ ἄνισον ἐν ταῖς πλευραῖς, οἷον ὁ ιε προμήκης, τρὶς γὰρ ε, ὁ δὲ ε τοῦ γ δυάδι μείζων· ὡσαύτως καὶ ὁ ιη προμήκης, τρὶς γὰρ ϛ ιη, τοῦ δὲ γ ὁ ϛ τριάδι μείζων ἐστί, καὶ ἐπὶ πάντων ὁμοίως. ταῦτα μὲν οὖν περὶ τούτων.

Διατί δὲ τὸ μονάδι πλεονάζον ἑτερόμηκες ἐκάλουν, οὐχὶ δὲ καὶ τὸ πλείοσι, διδάσκει. Πυθαγόρας γάρ φησι καὶ οἱ τούτου διάδοχοι. πυθμενικῶς ἐν τῇ δυάδι τὸ ἕτερον θεωρεῖσθαι· τῶν γὰρ ἀριθμῶν ἐν τῇ μονάδι μὲν τὸ αὐτὸ καὶ τὴν ταυτότητα λέγων, ἐν τῇ δυάδι δὲ τὴν ἑτερότητα· ἡ μὲν γὰρ μονὰς ἀδιαίρετος καὶ οὐδὲν πολλαπλασιαζομένη χωρεῖ ἕτερον, εὐλόγως οὖν τοῦ ταυτοῦ καὶ τῆς ταυτότητός ἐστιν αἰτία· ἡ δὲ δυὰς τὴν πρώτην διαίρεσιν ἐπεδέξατο, οἱονεὶ διχάς τις οὖσα· εἰκότως οὖν ἐπ’ αὐτῆς πυθμενικῶς τὸ ἕτερον ἔλεγον ἐνθεωρεῖσθαι καὶ τὴν ἑτερότητα. οὕτω καὶ ὁ Πλάτων Πυθαγόρειος ὢν τὸν μὲν ἔξωθεν τοῦ παντὸς κύκλον ἕνα ὄντα ἀδιαίρετον καὶ μίαν ἔχοντα κατ’ εἶδος κίνησιν ταυτοῦ ἐκάλει, τὸν δὲ ἐντὸς εἰς πλείονας διαιρεθέντα καὶ κύκλους καὶ κινήσεις θατέρου, διὸ καὶ ἡ Ἑλληνικὴ χρῆσις ἐπὶ μὲν δύο προσαγορεύει τὸ ἕτερον, ἐπὶ δὲ πλήθους τὸ ἄλλο, εἰ καὶ οἱ Ἀθηναῖοι, ὡς καὶ ἐφ’ ἑτέρων παραχρησάμενοι τῇ φωνῇ καὶ ἐπὶ πλήθους τὸ ἕτερον κατεχρήσαντο.

Ιωάννης Φιλόπονος, *Εις την Αριθμητικήν Εισαγωγήν του Νικομάχου*, 55, 1-26.

τὸ γὰρ δυνάμενον πᾶν πρὸς τὸ δυναστευόμενον ἀποδίδοται. καὶ πρὸς τούτοις ὁμοιούντων τε καὶ ἀνομοιούντων ἀριθμῶν· ὁμοιούντων μὲν τῶν τετραγωνικῶν ἢ κυβικῶν, ἀνομοιούντων δὲ τῶν ἀνίσοις χρωμένων πλευραῖς ἢ ἐπιπέδων ἢ στερεῶν. καὶ ἐπὶ τούτοις καθ’ ὑποδιαίρεσιν τῶν ἀνομοιούντων ἑξῆς φησιν· αὐξόντων τε καὶ φθινόντων· αὐξόντων μὲν τῶν ἰσάκις ἴσων μειζονάκις, ὧν ἐπὶ τὸ μεῖζον ἡ πρόοδος ἀπὸ τῆς ἰσότητος, φθινόντων δὲ τῶν ἰσάκις ἴσων ἐλασσονάκις· ὧν τοῖς μὲν ὄνομα πλινθίδες φασὶ τοῖς φθίνουσιν, τοῖς δὲ δοκίδες τοῖς αὔξουσιν.

Πρόκλος, Εις τας Πολιτείας του Πλάτωνος Υπόμνημα, 2, 36, 11-21.

Ο ίδιος ονομάζει **φαύλους** αριθμούς, πέραν των αρτίων αριθμών, τους επιπέδους ετερομήκεις και προμήκεις αριθμούς καθώς επίσης τους στερεούς αριθμούς δοκίδας, πλινθίδας και σκαληνά.

Φιλοσοφικώς, πᾶν άυλον ον, λόγῳ της αμεταβλήτου φύσεώς του, φέρει τον χαρακτήρα της ταυτότητος, ενῷ πᾶν υλικόν ον, λόγῳ της μεταβλητής και ασταθούς φύσεώς του, φέρει τον χαρακτήρα της ετερότητος.

Πᾶν αμετάβλητον ον φύσει και ουσίᾳ είναι ωρισμένον, συγκεκριμένον, αναλλοίωτον και *ἐς ἀεὶ* το ίδιον. Ταύτα τα χαρακτηριστικά φέρει η μονάς.

Και οι αριθμοί οι σχηματιζόμενοι εκ της μονάδος –κύβοι, τετράγωνοι, περιττοί- κατά τους Πυθαγορείους είναι συγκεκριμένοι και κατέχουν μίαν ομοιότητα υπάρξεως.

Αντιθέτως, η δυάς, οι άρτιοι αριθμοί, οι ετερομήκεις αριθμοί, οι προμήκεις αριθμοί και οι στερεοί δοκίδες ή πλινθίδες ή σκαληνά έχουν μεταβλητήν και αόριστον φύσιν συνεπείᾳ του αποχωρισμού των εκ μιας συγκεκριμένης ουσίας.

Κατά τους Πυθαγορείους, όπως ο κόσμος συνίσταται εκ της ταυτότητος, της αμερούς, και εκ της ετερότητος, της μεριστής, ούτω και πᾶς αριθμός δομείται εκ τετραγώνων αριθμών, οίτινες συμμετέχουν εις το αμετάβλητον, και εξ ετερομηκών (και εκ προμηκών) αριθμών, οίτινες συμμετέχουν εις την μεταβλητότητα.

Επίσης, κατά την θεωρίαν των αντιξόων ή αντιθέτων[19], η φιλότης και το νείκος, διέπουν τα πάντα εις τον κόσμον, υπό την έννοιαν ότι, επερχομένη η

---

[19] Και άλλοι φιλόσοφοι ωμίλησαν περί των αντιθέτων ή αντιξόων δια των οποίων η Φύσις επιτυγχάνει την αρμονίαν.

Ο Πρόκλος (*Σχόλια στον Πλατωνικόν Τίμαιον 1, 176, 28*) τονίζει: «καὶ εἷς ἀποτελεῖται κόσμος ἐξ ἐναντίων ἡρμοσμένος».

Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός (*Αριθμητική Εισαγωγή, 1, 6, 3, 1-2*) αναφέρει: «πᾶν δὲ ἡρμοσμένον ἐξ ἐναντίων πάντως ἥρμοσται».

Ο Ηράκλειτος ο Εφέσιος, ο σκοτεινός φιλόσοφος, (Σπαράγματα, σπάραγμα 10, 1-5) κηρύσσει: «ἴσως δὲ τῶν ἐναντίων ἡ φύσις γλίχεται καὶ ἐκ τούτων ἀποτελεῖ τὸ σύμφωνον, οὐκ ἐκ τῶν ὁμοίων· ὥσπερ ἀμέλει τὸ ἄρρεν συνήγαγε πρὸς τὸ θῆλυ καὶ οὐχ ἑκάτερον πρὸς τὸ ὁμόφυλον καὶ τὴν πρώτην ὁμόνοιαν διὰ τῶν ἐναντίων συνῆψεν, οὐ διὰ τῶν ὁμοίων».

Ο Αριστοτέλης (*De mundo, Bekker, Σελ. 396b, 7-8 και 15-17*) συμπληρώνων την ανωτέρω ρήσιν του σκοτεινού φιλοσόφου, επισημαίνει Ἴσως δὲ τῶν ἐναντίων ἡ φύσις γλίχεται καὶ ἐκ τούτων ἀποτελεῖ τὸ σύμφωνον…».
Επειδή «Ἔοικε δὲ καὶ ἡ τέχνη τὴν φύσιν μιμουμένη τοῦτο ποιεῖν», και η μουσική, συνδυάζουσα τους οξείς με τους βαρείς και τους μακρούς με τους βραχείς φθόγγους, πραγματοποιεί μίαν αρμονίαν με διαφορετικάς φωνάς.

φιλότης εις τα δίχα φρονέοντα και αντιτιθέμενα, γεννάται ο δεσμός της αρμονίας ή της φιλότητος και, κατά κάποιον τρόπον, αυτά ομονοούν και ηρεμούν.

Τα πολυμιγέα και δίχα φρονέοντα εκφράζονται δι' αριθμών, διότι, ως τονίζει ο Πρόκλος (Πλάτωνος «*Αλκιβιάδη i*», 259, 13-14) «*και ο Πυθαγόρας των μεν όντων πάντων σοφώτατον έλεγεν είναι τον αριθμόν*» οι αριθμοί της δεκάδος, λόγῳ της αφηρημένης φύσεώς των, αποτελούν τα θεία πρότυπα της κοσμικής και μουσικής αρμονίας, απεικονίζοντες τας θείας ιδέας.

Πᾶς αριθμός δομείται εκ περιττών και εξ αρτίων αριθμών. Οι περιττοί αριθμοί είναι η σταθερότης, κατέχουν την δύναμιν μιας αμετακινήτου ουσίας και είναι συγκεκριμένοι. Οι άρτιοι αριθμοί είναι η ασταθής και κινητή αλλαγή καθώς επίσης μία ασαφής συσσώρευσις πλήθους. Αυτοί οι αντίθετοι ως προς την φύσιν και τον χαρακτήρα των αριθμοί, ενούμενοι, παράγουν το σώμα των αριθμών.

Πάντα τα ανωτέρω σημαίνουν ότι η αρμονία αφορά εις το πλήθος των εναντίων, ήτοι των εναντιοτήτων και των αντιθέσεων, αίτινες συνθέτουν τον κόσμον άπαντα.

«μουσικὴ δὲ ὀξεῖς ἅμα καὶ βαρεῖς, μακρούς τε καὶ βραχεῖς, φθόγγους μίξασα ἐν διαφόροις φωναῖς μίαν ἀπετέλεσεν ἁρμονίαν»
(Ηράκλειτος, *Σπαράγματα*, σπάραγμα 10, γρ. 9)

Και ο Πλούταρχος (*Περί Πολυφιλίας,* 96E, 7-8), τέλος, συμφωνών με όλους τους προηγουμένους, γράφει: «ἡ μὲν γὰρ περὶ ψαλμοὺς καὶ φόρμιγγας ἁρμονία δι' ἀντιφώνων ἔχει τὸ σύμφωνον».