Αριθμητική Ανάλυση 2

Εργασία 2

Άσκηση 1
Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση ode23 με AbsTol 10^{-6} και RelTol 10^{-3}, να λύσετε αριθμητικά το π.α.τ.

$$\begin{cases} y' = (4-t)^{-2}\cos((4-t)^{-1}), \quad 0 \le t \le 3.9 \\ y(0) = sin\left(\frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας το ίδιο πλήθος σημείων με την ode23, να λύσετε το π.α.τ. με την μέθοδο Runge-Kutta του Ralston.
Η ακριβής λύση είναι $y(t) = \sin((4-t)^{-1})$.

Να συγκρίνετε τα σφάλματα της ode23 με αυτά της Runge-Kutta του Ralston.

Άσκηση 2
Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} y'(t) = \begin{bmatrix} -1.4 & 1.2 \\ 1.2 & 0.4 \end{bmatrix} y(t), \quad 0 \le t \le 2 \\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Να λυθεί αριθμητικά χρησιμοποιώντας την ode23.
Η ακριβής λύση του συστήματος είναι $y(t) = 1.2\, e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix} - 0.4\, e^{t} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$.

Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των αριθμητικών και των ακριβών λύσεων του συστήματος (γράφημα 1: $t - y_1$ακριβής(t) και $t - y_1$προσεγγιστική(t), γράφημα 2: παρόμοια για y_2)
Να υπολογιστούν τα σφάλματα των αριθμητικών λύσεων y_1 και y_2 του συστήματος και να γίνει η γραφική παράσταση τους.

Άσκηση 3
Θεωρήστε το πρόβλημα «Κυνηγού - Θηράματος»

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t), \quad \text{με} \quad x(t) = \text{πληθυσμός θηραμάτων} \\ y'(t) = cx(t)y(t) - dy(t) \qquad\qquad y(t) = \text{πληθυσμός κυνηγών} \end{cases}$$

όπου a=1.0, b=0.002, c=10^{-5}, d=0.08 και αρχικές τιμές x(0)=20000, y(0)=500.

Δείξτε αριθμητικά ότι το πρόβλημα έχει μια περιοδική λύση (x(t),y(t)) δηλ. ότι υπάρχει ένα $T > 0$ (να βρεθεί αριθμητικά απο τις τιμές x(t), y(t), για $t \ge 0$) τέτοιο ώστε $x(t+T) = x(t),\ y(t+T) = y(t) \quad \forall t \ge 0$.

Άσκηση 4

Να προσδιοριστεί (αριθμητικά) ο τύπος των διαγραμμάτων φάσης των παρακάτω συστημάτων:

$$y' = Ay$$

όπου

- $A = \begin{pmatrix} -1.4 & 1.2 \\ 1.2 & 0.4 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 0,25 \\ 0,25 & -1 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0.5 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 0.5 & -2 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$