Με αφορμή ένα πρόβλημα Πανελλαδικών:

Τι έμαθα από τα λάθη μου

Αποστολάτος Θεοχάρης
Τμήμα Φυσικής 19 Ιουνίου 2015

Προς τι η ομιλία;

Η προκατάληψη

Η πραγματικότητα,
τα φροντιστήρια
Και ο Landau

….ναι αλλά κυλάει;

$$\frac{(\dot{\phi})^2}{2} = \frac{g}{R-r} e^{-2\mu\phi} \int_0^{\phi} e^{2\mu\psi} (\cos\phi - \mu \sin\phi) d\psi$$

$$\dot{\theta} = \frac{\mu}{\kappa r} \sqrt{g(R-r)} \int_0^{\phi} \left(\frac{\sin\psi}{F(\psi)} + F(\psi) \right) d\psi$$

$$F(\psi) = \sqrt{2e^{-2\mu\psi} \int_0^{\psi} e^{2\mu u} (\cos u - \mu \sin u) du}$$

Κύλιση για ϕ_0 τέτοιο ώστε:

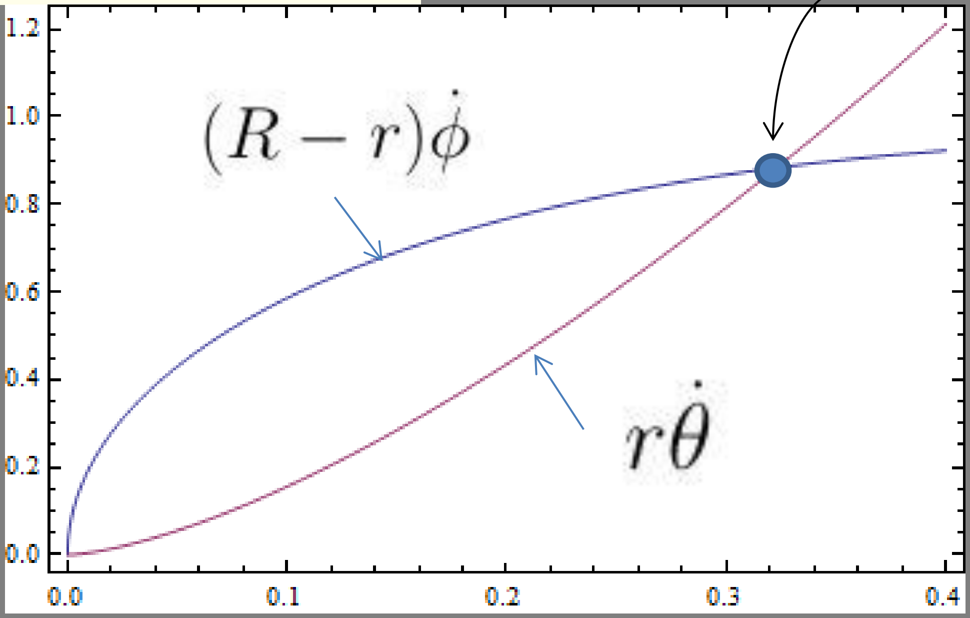
$$r\dot{\theta} = (R-r)\dot{\phi} \Leftrightarrow F(\phi_0) = \frac{\mu}{\kappa}\int_0^{\phi_0}\left(\frac{\sin\psi}{F(\psi)} + F(\psi)\right)d\psi$$

Για $\mu >> 1$:

$$\sqrt{3-2x_0-3e^{-2x_0}} = \frac{3}{\kappa}\int_0^{x_0}\frac{1-e^{-2x}}{\sqrt{3-2x-3e^{-2x}}}dx$$

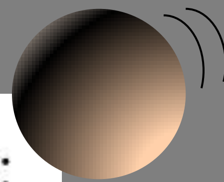
αριθμητική λύση:

$\mu\phi_0 = x_0 = 0.3229$



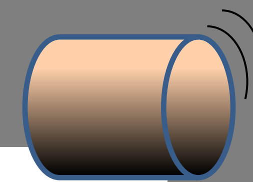
Για ομογενή σφαίρα:

$$x_0 = \mu\phi_0 = 0.323$$

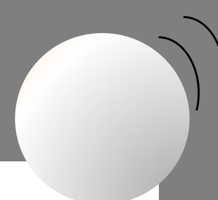


Για κύλινδρο:

$$x_0 = \mu\phi_0 = 0.385$$

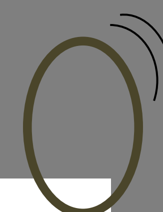


Πάντα ανεξάρτητο από τις διαστάσεις!



Για κούφια σφαίρα (σφ. φλοιό):

$$x_0 = \mu\phi_0 = 0.477$$



Για δακτύλιο:

$$x_0 = \mu\phi_0 = 0.626$$

…και ως που πάει;

Απώλεια ενέργειας (για $\mu >> 1$): $\Delta E = 0.0494 \dfrac{mg(R-r)}{\mu}$

(αντίστοιχη γωνία εκκίνησης $\mu\tilde{\phi}_0 = 0.0494$)

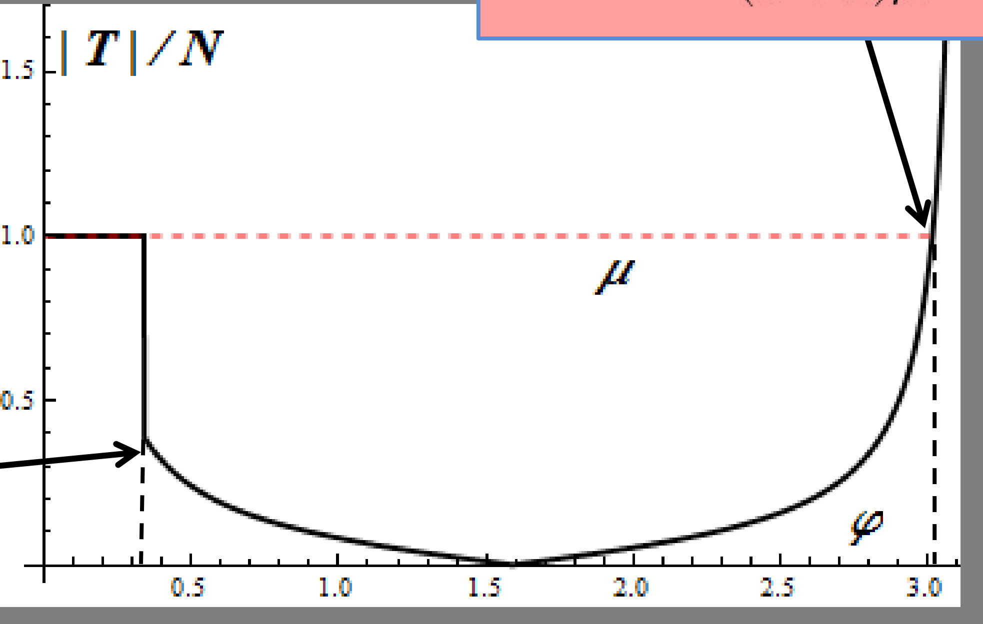
Λογικά (;) η κύλιση σταματά και πάλι στο κατοπτρικό σημείο της εκκίνησης: $\phi_1 = \pi - \phi_0$ και μετά συνεχίζει με ολίσθηση.

Με αυτή την υπόθεση όμως η ολίσθηση μέχρι να γίνει $d\phi/dt = 0$ συνεχίζει μέχρι το ... $\phi_2 = \pi$! (που πήγε η ενέργεια;)

Κατά την κύλιση:

$$0 \le \frac{|T|}{N} = \frac{\kappa|\cos\phi|}{(3+\kappa)\sin\phi - \frac{2\Delta E}{mg(R-r)}} \le \mu$$

$$\phi_1 = \frac{k + 2\times 0.0494}{(3+k)\mu}$$

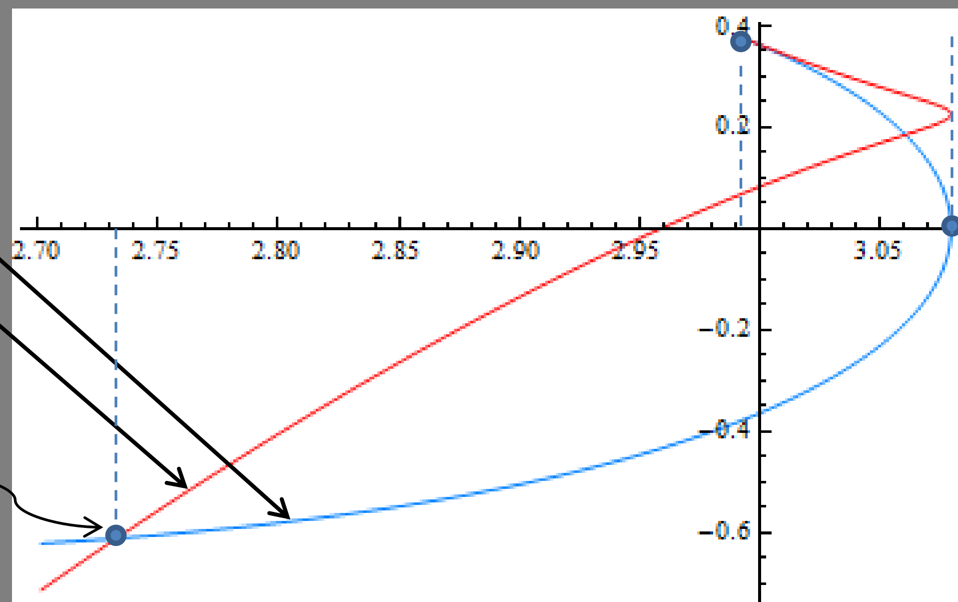


ϕ_0

Η σφαίρα ανεβαίνει με ολίσθηση
ως το $\phi_2 = \pi - 0.0622/\mu$
χωρίς όμως να έχει σταματήσει η περιστροφή!

$(R-r)\dot{\phi}$

$r\dot{\theta}$



Η κύλιση αρχίζει πάλι
στο $\phi_3 = \pi - 0.4088/\mu$

κι όταν πηδάει;

Αν το σώμα βληθεί από το κατώτερο σημείο με ταχύτητα v_0 κατάλληλη για υπερπήδηση σε ύψος H πάνω από το χείλος θα κυλίσει σε όλη τη διαδρομή αν

$$\mu \geq \frac{\kappa(R-r)}{2(1+\kappa)H}$$

ή για $v_0^2 \geq 2g(R-r)\left(1+\dfrac{\kappa}{2\mu}\right)$

Όταν επιστρέψει όμως θα ολισθήσει πολύ
και θα χάσει αρκετή ενέργεια μέχρι να ξαναρχίσει η κύλιση.
Πολύ πιθανό να μην ξαναολισθήσει ποτέ πλέον.

Ένα video με λόγια

Ολίσθηση ως το $\phi_0 = 0.3229/\mu$
Απώλεια ενέργειας $\Delta E = 0.0494\frac{mg(R-r)}{\mu}$

Κύλιση ως το $\phi_1 = \pi - 0.1467/\mu$

Ολίσθηση ως το $\phi_2 = \pi - 0.0622/\mu$
και πίσω στο $\phi_3 = \pi - 0.4088/\mu$
Ολική απώλεια ενέργειας $\Delta E = 0.1124\frac{mg(R-r)}{\mu}$

Κύλιση ... ολίσθηση ... μέχρι ....

Η ολίσθηση σταματά οριστικά όταν η απώλεια ενέργειας ξεπεράσει το κατώφλι του

$$\Delta E_{\text{κατ}} = \frac{\kappa}{1+\kappa}\frac{mg(R-r)}{\mu} = 0.285\frac{mg(R-r)}{\mu}$$

The End