ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας & Μηχανικής

ΠΑΛΛΟΜΕΝΟΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΑΣΤΕΡΕΣ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΟΝΟΜΑ: ΠΑΠΠΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ
Α.Μ. : 200127

Εργασία στα πλαίσια του μαθήματος
του μεταπτυχιακού προγράμματος
σπουδών

ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΑΣΤΕΡΩΝ

ΠΑΛΛΟΜΕΝΟΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΑΣΤΕΡΕΣ
ΚΑΙ
ΑΚΤΙΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Εισαγωγή.

Το 1595 ένας ιερέας και ερασιτέχνης αστρονόμος, ο David Fabricius, παρατηρώντας το άστρο *ο Ceti* για ένα χρονικό διάστημα αρκετών μηνών διαπίστωσε ότι η λαμπρότητα του άστρου εξασθενούσε μέχρι που εξαφανίστηκε τελείως και έμεινε αόρατο για αρκετούς μήνες μέχρι να ξαναεμφανιστεί και να επανέλθει στην αρχική του λαμπρότητα. Το άστρο το ονόμασε *Mira* για να τονίσει αυτό το θαυμαστό φαινόμενο και ήταν ο πρώτος παλλόμενος μεταβλητός αστέρας που ανακαλύφθηκε. Το 1784 ο John Goodricke του York ανακάλυψε έναν άλλον μεταβλητό αστέρα, τον *δ Cephei* με σημαντικά μικρότερη περίοδο μεταβολής της λαμπρότητάς του, 5 μέρες 8 ώρες και 48 λεπτά. Αυτού του τύπου τους παλλόμενους αστέρες τους ονομάζουμε κλασσικούς Κηφείδες (classical Cepheids). Από τότε έχουν ανακαλυφθεί χιλιάδες παλλόμενοι μεταβλητοί αστέρες. Τους μεταβλητούς αστέρες τους χωρίζουμε σε διάφορες κατηγορίες ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους.

Κλασσικοί Κηφείδες (*δ Cephei*). Αυτού του τύπου οι αστέρες πρώτο παρατηρήθηκαν το 1784 όπως είπαμε και παραπάνω, αλλά τους δόθηκε ιδιαίτερο βάρος μετά την παρατήρηση της Henrietta Swan Leavitt ότι υπάρχει μια σχέση ανάμεσα στην λαμπρότητά τους και την περίοδο τους. Συγκεκριμένα παρατήρησε ότι όσο πιο λαμπροί ήταν οι αστέρες τόσο μεγαλύτερη ήταν η περίοδος τους. Στο αποτέλεσμα αυτό έφτασε από την παρατήρηση άστρων αυτού του τύπου που βρίσκονταν στο Μικρό Νέφος του Μαγγελάνου. Αυτό σήμαινε ότι επειδή οι αστέρες βρίσκονταν χονδρικά στην ίδια απόσταση, η σχέση που συνέδεε τα φαινόμενα μεγέθη τους θα έπρεπε να συνδέει και τα απόλυτα μεγέθη και άρα η σχέση λαμπρότητας-περιόδου ήταν στην πραγματικότητα σχέση απόλυτης λαμπρότητας-περιόδου. Με άλλα λόγια αν μπορούσαμε να μετρήσουμε την περίοδο ενός τέτοιου άστρου θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε το απόλυτο μέγεθος και μετρώντας το φαινόμενο μέγεθος θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε την απόστασή του. Όλα αυτά με την προϋπόθεση ότι θα μπορούσε να μετρηθεί με ανεξάρτητη μέθοδο η απόσταση ενός κλασσικού Κηφείδα για να μπορέσουμε να βαθμονομήσουμε την σχέση λαμπρότητας περιόδου. Τελικά η σχέση που προέκυψε είναι

$$\boxed{\log_{10}\frac{\langle L\rangle}{L_{\odot}} = 1,15\log_{10}\Pi^{d} + 2,47} \quad (0.1)$$

ή

$$M = -2,80\log_{10}\Pi^{d} - 1,43 \quad (0.2)$$

όπου $\langle L \rangle$ είναι η μέση λαμπρότητα του αστέρα, M είναι το μέσο απόλυτο μέγεθος στο ορατό και Π^d η περίοδος της ανάπλασης σε μέρες. Με τις παραπάνω σχέσεις και την σχέση

$$M - m = 5 - 5\log_{10} r \quad (0.3)$$

μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση του αστέρα σε parsec. Τα παραπάνω αποτελέσματα μας έδωσαν την δυνατότητα να μετράμε μεγάλες αποστάσεις γιατί οι αστέρες αυτού του τύπου είναι ιδιαίτερα λαμπροί και μπορούν να παρατηρηθούν σε μεγάλες αποστάσεις.
Ποια είναι όμως γενικά τα φυσικά χαρακτηριστικά των κλασσικών Κηφείδων; Οι κλασσικοί Κηφείδες ή Κηφείδες πληθυσμού I είναι μεταβλητοί αστέρες με περιόδους από 1 ως 50 ημέρες που εκτελούν ακτινική ταλάντωση. Η μεταβολή του φαινόμενου μεγέθους τους κυμαίνεται από 0.1 ως 2 μεγέθη. Είναι αστέρες με μάζες $M \gtrsim 5M_{\odot}$, με μεγάλη λαμπρότητα και φασματικό τύπο που κυμαίνεται από F στο μέγιστο μέχρι G και K στο ελάχιστο. Η μεταβολή της λαμπρότητάς τους οφείλεται κυρίως στην μεταβολή της επιφανειακής τους θερμοκρασίας που έχει πλάτος της τάξης των 1000-1500 K. Γιατί όμως ξεκινάνε τις ταλαντώσεις αυτοί οι αστέρες; Από το πλήθος των παλλόμενων αστέρων που υπολογίζουμε ότι υπάρχουν σε σχέση με το πλήθος των άστρων του Γαλαξία φαίνεται ότι το φαινόμενο της ανάπλασης είναι μεταβατικό φαινόμενο. Η θέση που καταλαμβάνουν οι κλασσικοί Κηφείδες στο διάγραμμα Hertzsprung-Russell είναι έξω από την κύρια ακολουθία σε μια περιοχή που λέγεται ζώνη αστάθειας. Υπάρχουν διάφορες περιοχές αστάθειας από τις οποίες περνάνε οι αστέρες διαφόρων μαζών κατά την διάρκεια της εξέλιξής τους. Καθώς εξελίσσεται ένας αστέρας φεύγει από την κύρια ακολουθία. Στην τροχιά που ακολουθεί στο διάγραμμα H-R μπορεί να συναντήσει κάποια περιοχή αστάθειας. Μπαίνοντας στην περιοχή αστάθειας ο αστέρας αρχίζει να ταλαντώνεται και η ταλάντωση τροφοδοτείτε μέχρι ο αστέρας να βγει από την περιοχή της αστάθειας. Οι κλασσικοί Κηφείδες όπως είπαμε παραπάνω παρατηρούνται στην ζώνη αστάθειας. Η ζώνη αστάθειας είναι μια περιοχή μικρού σχετικά πλάτους που είναι σχεδόν παράλληλη με τον άξονα της λαμπρότητας, δηλαδή κατά μήκος της ζώνης αστάθειας η θερμοκρασία των αστέρων είναι σχεδόν σταθερή, ενώ η λαμπρότητα αυξάνεται. Γνωρίζουμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα ενός άστρου τόσο μεγαλύτερη είναι και η λαμπρότητά του όταν περνάει από την ζώνη αστάθειας και επειδή τα άστρα φεύγουν από την κύρια ακολουθία ακολουθώντας σχεδόν οριζόντιες τροχιές μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η σχέση μάζας λαμπρότητας που υπάρχει στην κύρια ακολουθία παραμένει. Τα παραπάνω μπορούμε να τα συνοψίσουμε χονδρικά στις παρακάτω σχέσεις

$$L_* \propto M_*^{\,4}, \quad L_* = 4\pi R_*^{\,2}\sigma T_{eff}^{\,4}, \quad T_{eff} \simeq const.$$

Από τις σχέσεις αυτές μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι η μέση πυκνότητα ενός άστρου σε σχέση με την λαμπρότητά του είναι

$$\bar{\rho}_* \propto \frac{M_*}{R_*^{\,3}} \propto L_*^{\,-5/4}$$

και όπως θα δείξουμε παρακάτω η μέση πυκνότητα συνδέεται με την περίοδο της ταλάντωσης μέσω της σχέσης

$$\boxed{\Pi\sqrt{\bar{\rho}} = const.} \quad (0.4)$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις φαίνεται ότι υπάρχει σχέση που συνδέει την περίοδο με την λαμπρότητα ενός παλλόμενου αστέρα που διέρχεται από την ζώνη αστάθειας η οποία είναι της μορφής

$$\log_{10} L \propto \frac{8}{5} \log_{10} \Pi \quad (0.5)$$

που είναι η ίδια μορφή με την σχέση που έχουμε για τους κλασσικούς Κηφείδες.
Υπάρχουν ακόμα δύο τύποι Κηφείδων, οι Κηφείδες πληθυσμού ΙΙ (ή αστέρες τύπου *W Virginis*) και οι νάνοι Κηφείδες (ή αστέρες τύπου *δ Scuti*).

Οι *W Virginis* είναι όπως είπαμε άστρα πληθυσμού ΙΙ που βρίσκονται στην ζώνη αστάθειας. Εκτελούν ακτινικές ταλαντώσεις με περιόδους από 2 ως 45 ημέρες. Η διακύμανση στην λαμπρότητά τους είναι της ίδιας τάξης με αυτή των κλασσικών Κηφείδων και γενικά οι καμπύλες φωτός τους μοιάζουν με αυτές των κλασσικών Κηφείδων. Η διαφορά τους είναι ότι οι *W Virginis* είναι από εξελικτική άποψη μεγαλύτερης ηλικίας αστέρες που έχουν φύγει από το οριζόντιο κομμάτι της εξελικτικής τους διαδρομής. Έτσι ενώ έχουν την ίδια λαμπρότητα με τους κλασσικούς Κηφείδες, έχουν μικρότερη μάζα και άρα μικρότερη πυκνότητα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα για την ίδια περίοδο ανάπαλσης οι *W Virginis* να είναι τέσσερις φορές λιγότερο λαμπροί. Αυτή τους η ομοιότητα είχε μπερδέψει αρχικά τους αστρονόμους με αποτέλεσμα να υπολογίζονται λάθος οι αποστάσεις των γαλαξιών. Η διόρθωση του λάθους είχε ως αποτέλεσμα την αναθεώρηση αυτών των αποστάσεων κατά ένα παράγοντα της τάξης του 2 (οι αποστάσεις διπλασιάστηκαν περίπου).

Οι *δ Scuti* είναι άστρα μικρής μάζας που βρίσκονται χαμηλά στην ζώνη αστάθειας των Κηφείδων και κοντά στην κύρια ακολουθία. Είναι φασματικού τύπου F και εκτελούν ακτινικές και μη ακτινικές ταλαντώσεις με περιόδους που κυμαίνονται από 1 ως 3 ώρες.

Οι αστέρες τύπου *RR Lyrae* είναι άλλος ένας σημαντικός τύπος παλλόμενων αστέρων. Είναι άστρα πληθυσμού ΙΙ με μικρή μάζα και εκτελούν ακτινικές ταλαντώσεις με περίοδο από 1,5 ως 24 ώρες. Βρίσκονται και αυτά στην περιοχή της ζώνης αστάθειας των Κηφείδων και συγκεκριμένα βρίσκονται λίγο πάνω από την περιοχή των *δ Scuti* και κάτω από την περιοχή των *δ Cepheids* καταλαμβάνοντας μια οριζόντια περιοχή σχεδόν σταθερής λαμπρότητας. Έχουν φασματικό τύπο από A ως F με απόλυτο μέγεθος περίπου +0,8 και το πλάτος της διακύμανσης τους είναι από 0,2 ως 2 μεγέθη. Έχει παρατηρηθεί κάποια από αυτά να ταλαντώνονται με 2 συχνότητες, την θεμελιώδη και την πρώτη αρμονική όπως θα δούμε παρακάτω, με λόγο περιόδων $P_1/P_0 \approx 0,745$. Τα άστρα αυτά παρατηρούνται στα σφαιρωτά σμήνη και βοήθησαν στον προσδιορισμό των αποστάσεων τους, λόγω της ιδιότητας που έχουν να έχουν σχεδόν σταθερή μέση λαμπρότητα. Γνωρίζοντας λοιπόν το φαινόμενο μέγεθος ενός άστρου *RR Lyrae* από την

$$M - m = 5 - 5\log_{10} r$$

μπορούμε να υπολογίσουμε την απόστασή του και άρα την απόσταση του σφαιρωτού σμήνους.

Χαμηλά στην ζώνη αστάθειας και κάτω από την κύρια ακολουθία στην περιοχή των λευκών Νάνων βρίσκονται οι μεταβλητοί αστέρες τύπου *ZZ Ceti*. Αυτοί οι αστέρες είναι λευκοί νάνοι που εκτελούν μη ακτινικές ταλαντώσεις με πολύ μικρές περιόδους από 100 ως 1000

δευτερόλεπτα και μεταβολές στην λαμπρότητα από 0,001 μέχρι 0,2 μεγέθη στο ορατό. Αυτοί οι αστέρες αποτελούν τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα μη ακτινικά παλλόμενων αστέρων.
Τα άστρα που έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα βρίσκονται πάνω στην ζώνη αστάθειας και οι μηχανισμοί που ενεργοποιούν τις ταλαντώσεις τους σχετίζονται. Υπάρχουν όμως και παλλόμενοι μεταβλητοί αστέρες που βρίσκονται εκτός της ζώνης αστάθειας και παρακάτω θα αναφέρουμε τους βασικότερους.

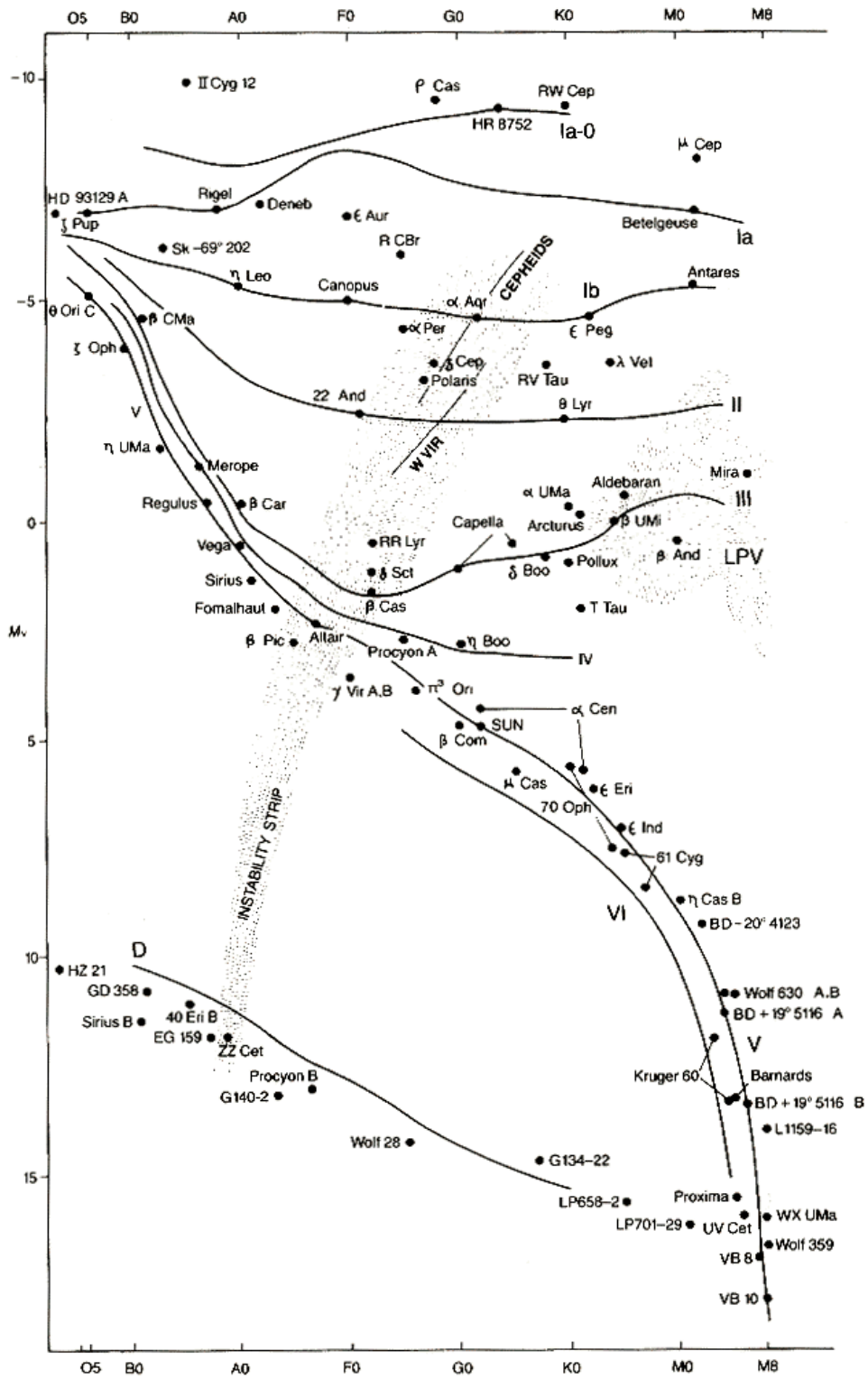
Οι αστέρες του τύπου *β Cephei* είναι μια ενδιαφέρουσα κατηγορία τέτοιων αστέρων. Χαρακτηριστικό άστρο αυτής της κατηγόριας είναι το *β Canis Majoris*. Τα άστρα αυτά είναι φασματικού τύπου O με B και βρίσκονται σε μια λεπτή ζώνη στο πάνω άκρο της κύριας ακολουθίας στην περιοχή των άστρων με μάζες $10-20M_{\odot}$. Εκτελούν ακτινικές και μη ακτινικές ταλαντώσεις με περίοδο από 3 ως 7 ώρες και πλάτος από 0,01 ως 0,3 μεγέθη στο ορατό. Ο ακριβής μηχανισμός που οδηγεί τις ταλαντώσεις αυτών των αστέρων δεν είναι γνωστός.

Οι αστέρες τύπου *Mira* είναι και γνωστοί ως μακροπερίοδοι μεταβλητοί. Είναι ερυθροί Γίγαντες που εκτελούν ακτινικές ταλαντώσεις με περιόδους από 80 ως 1000 μέρες και διακύμανση της λαμπρότητας από 2,5 ως 11 μεγέθη. Έχουν φασματικούς τύπους M, C και S και είναι άστρα με μάζα μερικών ηλιακών μαζών. Συνήθως οι αστέρες πληθυσμού I έχουν περιόδους μεγαλύτερες των 200 ημερών, ενώ οι αστέρες πληθυσμού II έχουν περιόδους μικρότερες των 200 ημερών. Τα άστρα αυτά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουν έναν σχεδόν συμπαγή πυρήνα και ένα τεράστιο εξωτερικό κέλυφος που κάνει την ταλάντωση. Η τόσο μεγάλη τους περίοδος οφείλεται στην πολύ μικρότερή τους μέση πυκνότητα, αφού είναι ουσιαστικά άστρα τα οποία έχουν αυξήσει μέχρι και 100 φορές την ακτίνα τους. Μερικές φορές παρατηρούνται ενδείξεις μη κανονικότητας στην μεταβολή της λαμπρότητάς τους και υπάρχουν μοντέλα που προτείνουν την ύπαρξη ντετερμινιστικού χάους.

Οι αστέρες τύπου *RV Tauri* είναι η τελευταία βασική κατηγορία παλλόμενων μεταβλητών αστέρων. Είναι παλλόμενοι Γίγαντες φασματικού τύπου από G ως K με σχετικά μεγάλη λαμπρότητα. Είναι κυρίως άστρα πληθυσμού II. Εκτελούν ακτινικές ταλαντώσεις και έχουν χαρακτηριστική διακύμανση λαμπρότητας. Οι περίοδοί τους κυμαίνονται από 30 ως 150 ημέρες και η μεταβολή της λαμπρότητάς τους φτάνει μέχρι και τα 3 με 4 μεγέθη. Η θέση τους στο διάγραμμα H-R είναι κάπου ανάμεσα στους Κηφείδες και τους αστέρες τύπου *Mira*. Κάποιοι πιστεύουν ότι αυτού του τύπου τα άστρα είναι η μικρής μάζας συνιστώσα των άστρων τύπου *Mira* στο μεταβατικό στάδιο από τον κλάδο των Γιγάντων στους λευκούς Νάνους.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι διάφορες περιοχές των μεταβλητών αστέρων καθώς και η ζώνη αστάθειας που διασχίζει το διάγραμμα H-R. Το σχήμα δείχνει και διάφορα άστρα τυπικά των διαφόρων περιοχών.

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε τους μηχανισμούς των ακτινικών ταλαντώσεων που θα μας δώσουν το φυσικό υπόβαθρο για το φαινόμενο των μεταβλητών αστέρων που περιγράψαμε παραπάνω. Έτσι θα δούμε γιατί και πως πάλλεται ένα άστρο, από τι εξαρτάται η συχνότητα της ταλάντωσης του και αν είναι ευσταθής αυτή η ταλάντωση.


O5
B0
A0
F0
G0
K0
M0
M8
-10
-5
0
5
10
15
M_v
II Cyg 12
ρ Cas
RW Cep
HR 8752
Ia-0
μ Cep
HD 93129 A
Rigel
Deneb
ε Aur
ζ Pup
Betelgeuse
Ia
Sk -69° 202
R CBr
η Leo
Canopus
CEPHEIDS
Antares
Ib
θ Ori C
β CMa
α Aqr
α Per
ε Peg
ζ Oph
δ Cep
λ Vel
Polaris
RV Tau
22 And
θ Lyr
II
V
η UMa
Merope
W VIR
Mira
α UMa
Aldebaran
III
Regulus
β Car
Capella
Arcturus
β UMi
Vega
RR Lyr
β And
LPV
δ Boo
Pollux
Sirius
δ Sct
Fomalhaut
β Cas
T Tau
β Pic
Altair
Procyon A
η Boo
IV
γ Vir A,B
π³ Ori
α Cen
SUN
β Com
μ Cas
ε Eri
70 Oph
ε Ind
61 Cyg
INSTABILITY STRIP
η Cas B
VI
BD-20° 4123
D
HZ 21
GD 358
Wolf 630 A,B
BD+19° 5116 A
Sirius B
40 Eri B
EG 159
ZZ Cet
V
Kruger 60
Barnards
Procyon B
G140-2
BD+19° 5116 B
L 1159-16
Wolf 28
G134-22
LP658-2
Proxima
WX UMa
LP701-29
UV Cet
Wolf 359
VB 8
VB 10

1ο Κεφάλαιο.

Πριν αρχίσουμε να μιλάμε για τις ταλαντώσεις ενός άστρου πρέπει πρώτα να δούμε τι χρειάζεται για την περιγραφή της δομής του. Η περιγραφή της δομής ενός άστρου θα γίνει με την βοήθεια κάποιον μεγεθών όπως είναι η μάζα, η ακτίνα, η πυκνότητα, η πίεση κ.α., τα οποία θα είναι γενικά κάποιες συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις αυτές θα σχετίζονται μεταξύ τους μέσο κάποιον εξισώσεων που θα λέγονται και εξισώσεις δομής του αστέρα. Άρα λύνοντας τις εξισώσεις δομής θα έχουμε την περιγραφή ενός αστέρα.

Αρχικά θεωρούμε ότι τα άστρα είναι κατανομές αερίων μαζών που δεν περιστρέφονται και στις οποίες οι μόνες δυνάμεις που επιδρούν είναι η βαρύτητα και η πίεση. Αύτη η αέρια κατανομή θα είναι μια σφαιρικά συμμετρική κατανομή. Λόγω της συμμετρίας θα χρειαστούμε μόνο μία χωρική μεταβλητή καθώς και μία χρονική μεταβλητή. Αν ως χορική μεταβλητή επιλέξουμε την απόσταση από το κέντρο του αστέρα, τότε θα έχουμε μια Eulerian περιγραφή του ρευστού μας.
Αρχικά μας ενδιαφέρει να δούμε ποια θα είναι η κατανομή της μάζας μέσα στο άστρο. Η μάζα θα είναι μια συνάρτηση της μορφής $m(r,t)$ και θα μας χρειαστεί και η συνάρτηση της πυκνότητας $\rho(r,t)$. Αν θεωρήσουμε έναν φλοιό με πάχος dr και εσωτερική ακτίνα r, τότε σε αυτόν θα περιέχετε μάζα

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr - 4\pi r^2 \rho u dt \quad (1.1)$$

όπου ο πρώτος όρος είναι η μάζα που περιέχετε μέσα στον φλοιό την στιγμή t και ο δεύτερος όρος είναι η μάζα που μπαίνει ή βγαίνει από τον φλοιό λόγω της κίνησης του ρευστού. Από αυτή την εξίσωση έχουμε ότι

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \text{ και } \frac{\partial m}{\partial t} = -4\pi r^2 \rho u$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι για την περιγραφή μας πρέπει να πάρουμε υπόψη μας και τις κινήσεις του ρευστού. Προκειμένου να αποφύγουμε περίπλοκες εκφράσεις, λόγω της σφαιρικής συμμετρίας υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε την μάζα ως ανεξάρτητη μεταβλητή πηγαίνοντας έτσι σε μια περιγραφή όπου το σύστημα συντεταγμένων μας ακολουθεί την κίνηση του ρευστού. Αυτή η περιγραφή λέγεται Lagrangian περιγραφή του ρευστού. Θεωρώντας λοιπόν σφαίρες σταθερής μάζας, η εξίσωση που θα μας δίνει την ακτίνα $r(m,t)$ θα είναι

$$\boxed{\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}} \quad (1.2)$$

και αυτή ακριβός η διαφορική εξίσωση μας δίνει και τον μετασχηματισμό από το ένα σύστημα συντεταγμένων στο άλλο.

Ας εξετάσουμε τώρα την εξίσωση της κίνησης του ρευστού μέσα στο άστρο. Αρχικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα άστρο είναι μια κατανομή ύλης σε ισορροπία και άρα δεν υπάρχουν επιταχύνσεις στο εσωτερικό του. Δηλαδή έχουμε ισορροπία δυνάμεων, οι οποίες όπως είπαμε και παραπάνω μπορούν να οφείλονται μόνο στην πίεση και την βαρύτητα. Αν θεωρήσουμε έναν

σφαιρικό φλοιό πάχους dr, τότε στο εσωτερικό του θα υπάρχει πίεση P_i και στο εξωτερικό του θα υπάρχει πίεση P_e. Η μεταβολή της πίεσης θα είναι

$$P_i - P_e = -\frac{\partial P}{\partial r} dr$$

και αυτή η διαφορά θα πρέπει να οφείλεται στο βάρος του σφαιρικού φλοιού και άρα θα έχουμε

$$-\frac{\partial P}{\partial r} dr = \frac{Gmdm}{r^2} \frac{1}{4\pi r^2}$$

από όπου καταλήγουμε στην σχέση $\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{Gm}{r^2}\rho$ για την Eulerian περιγραφή και στην σχέση

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}} \quad (1.3)$$

για την Lagrangian περιγραφή. Οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφουν το άστρο στην κατάσταση της υδροστατικής ισορροπίας., όπου δεν έχουμε καθόλου κινήσεις και οι δυνάμεις της πίεσης και του βάρους εξουδετερώνονται πλήρως. Αν θεωρήσουμε ότι οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα φλοιό δεν εξουδετερώνονται πλήρως, τότε θα έχουμε μια συνισταμένη δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας που θα έχει ως αποτέλεσμα την επιτάχυνση του φλοιού. Θα έχουμε δηλαδή

$$dm \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial m} dm - \frac{Gm}{4\pi r^4} dm$$

και άρα η εξίσωση που θα περιγράφει την κίνηση ενός σφαιρικού φλοιού θα είναι

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}} \quad (1.4)$$

Από την εξίσωση αυτή μπορεί να οριστεί μια χρονική κλίμακα που να σχετίζεται με τις κινήσεις του ρευστού που μπορεί να οφείλονται σε αποκλίσεις από την υδροστατική ισορροπία. Έτσι παίρνουμε την υδροστατική χρονική κλίμακα που είναι $\tau_{hydr} \approx \left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2}$ και για την περίπτωση του Ήλιου είναι περίπου 27 λεπτά, ένας χρόνος αρκετά μικρός.

Αυτές οι εξισώσεις περιγράφουν την δυναμική και κινηματική κατάσταση του άστρου. Για την περιγραφή του άστρου χρειαζόμαστε ακόμα να ξέρουμε το ισοζύγιο της ενέργειας στο εσωτερικό του. Θεωρούμε έναν σφαιρικό φλοιό μάζας dm και πάχους dr και θεωρούμε ότι η ενέργεια ανά δευτερόλεπτο που μπαίνει στον φλοιό από το εσωτερικό είναι $l(r)$ ενώ η ενέργεια που βγαίνει είναι $l + dl$. Η επιπλέον ενέργεια μπορεί να οφείλεται στην παραγωγή ενέργειας από τις πυρηνικές αντιδράσεις μέσα στο άστρο ή λόγω συμπίεσης, εκτόνωσης, ψύξης ή άλλων θερμοδυναμικών διαδικασιών του φλοιού. Αν θεωρήσουμε ότι ο ρυθμός παραγωγής πυρηνικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας είναι ε τότε θα έχουμε για το κέλυφος

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \varepsilon - \frac{dq}{dt} \quad (1.5)$$

όπου dq είναι η θερμότητα ανά μονάδα μάζας που προστίθεται στο κέλυφος από τα γειτονικά στον χρόνο dt. Η παραπάνω σχέση από τον 1ο θερμοδυναμικό νόμο μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \varepsilon - \frac{\partial u}{\partial t} - P\frac{\partial \upsilon}{\partial t} \quad (1.6)$$

όπου οι ποσότητες u και υ αντίστοιχα είναι οι εσωτερική ενέργεια και ο όγκος ανά μονάδα μάζας. Η παραπάνω εξίσωση χρησιμοποιώντας σχέσεις από την θερμοδυναμική μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της θερμοκρασίας και της πίεσης ως

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \varepsilon - c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t} \quad (1.7)$$

όπου $\delta := -\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_P$ και ρ η πυκνότητα. Αυτή η εξίσωση περιγράφει την διατήρηση της ενέργειας στο εσωτερικό του άστρου. Υπάρχει ακόμα ένας παράγοντας που πρέπει να συμπεριλάβουμε στην εξίσωση της διατήρησης της ενέργειας και αυτός είναι η ενέργεια που μεταφέρεται από τα νετρίνα. Έτσι αν είναι ε_ν ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας ανά μονάδα μάζας από τα νετρίνα, η εξίσωση θα πάρει την μορφή

$$\boxed{\frac{\partial l}{\partial m} = \varepsilon - \varepsilon_\nu - c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}} \quad (1.8)$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφέρουμε ακόμα δύο χαρακτηριστικές χρονικές κλίμακες. Η πρώτη χρονική κλίμακα περιγράφει τον χρόνο που θα χρειαζόταν ένα άστρο για να ακτινοβολήσει όλη του την βαρυτική ενέργεια και είναι $\tau_{KH} = \frac{|E_g|}{L}$ και λέγεται χρονική κλίμακα Kelvin-Helmholtz και η άλλη χρονική κλίμακα περιγράφει τον χρόνο που θα χρειαζόταν ένα άστρο για να ακτινοβολήσει όλη του την πυρηνική ενέργεια και είναι $\tau_n = \frac{E_n}{L}$ και λέγετε πυρηνική χρονική κλίμακα. Η χρονική κλίμακα Kelvin-Helmholtz μπορεί να εκφραστεί και συναρτήσει των μεγεθών του αστέρα οπότε και παίρνει την μορφή $\tau_{\mathrm{KH}} \approx \frac{GM^2}{2RL}$. Για τον Ήλιο οι δύο χρονικές κλίμακες είναι $\tau_{KH} \approx 1,6 \cdot 10^7$ χρόνια και $\tau_n \approx 10^{11}$ χρόνια. Παρατηρούμε λοιπόν ότι ισχύει $\tau_n \gg \tau_{KH} \gg \tau_{hydr}$. Αυτό μας λεει ότι ανάλογα με την διαδικασία που μελετάμε μπορούμε να απλοποιήσουμε τις εξισώσεις μας αγνοώντας όρους που εξελίσσονται σε χρονικές κλίμακες πολύ μεγαλύτερες από αυτές που μας ενδιαφέρουν.

Μας χρειάζεται ακόμα να ξέρουμε και πως ακριβός μεταφέρεται η ενέργεια από την μία περιοχή του άστρου στην άλλη. Η ενέργεια στο εσωτερικό του άστρου μπορεί να μεταφερθεί με δύο διαδικασίες, με ακτινοβολία και με μεταφορά. Για τη μεταφορά της ενέργειας με ακτινοβολία, επειδή στο εσωτερικό του άστρου η μέση ελεύθερη διαδρομή των φωτονίων είναι πάρα πολύ μικρή (η $\ell_{ph} = 1/\kappa\rho$ για την περίπτωση του Ήλιου είναι περίπου 2 cm), μπορούμε να

θεωρήσουμε ότι περιγράφετε από μια εξίσωση διάχυσης. Άρα η ροή της ενέργειας των φωτονίων θα προκύπτει από την γενική εξίσωση διάχυσης $j = -D\nabla n$ όπου ο συντελεστής διάχυσης θα είναι $D = \frac{1}{3}c\ell_{ph}$, η πυκνότητα ενέργειας θα είναι $n = aT^4$ και η ροή της ενέργειας των φωτονίων θα είναι $j = F$ και λαμβάνοντας υπόψη μας και την σφαιρική συμμετρία θα έχουμε

$$F = -\frac{4ac}{3}\frac{T^3}{\kappa\rho}\frac{\partial T}{\partial r} \quad (1.9)$$

όπου κ είναι ο συντελεστής απορρόφησης και a η σταθερά ακτινοβολίας που συνδέεται με την σταθερά των Stefan-Boltzmann με την σχέση $\sigma = ca/4$. Αν αντικαταστήσουμε με την λαμπρότητα $l = 4\pi r^2 F$ και παμε στις συντεταγμένες της μάζας η εξίσωση θα πάρει την τελική μορφή

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{3}{64\pi^2 ac}\frac{\kappa l}{r^4 T^3} \quad (1.10)$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $F = -\frac{4ac}{3}\frac{T^3}{\kappa\rho}\frac{\partial T}{\partial r}$ που περιγράφει την ροή της ενέργειας για τον μηχανισμό της ακτινοβολίας είναι της ίδιας μορφής με την εξίσωση που περιγράφει την ροή ενέργειας λόγο αγωγής της θερμότητας, είναι δηλαδή της μορφής $F = -k\nabla T$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε την ροή της ενέργειας και για τους δύο μηχανισμούς ως

$$F = -\frac{4ac}{3}\frac{T^3}{\rho}\left(\frac{1}{\kappa_{rad}} + \frac{1}{\kappa_{cd}}\right)\nabla T \quad (1.11)$$

και ορίζοντας έναν γενικευμένο συντελεστή απορρόφησης κ μπορούμε να περιγράψουμε με την εξίσωση (1.10) και τα δύο φαινόμενα. Αν επιπλέον ορίσουμε την βαθμίδα

$$\nabla_{rad} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_{rad} = \frac{3}{16\pi acG}\frac{\kappa l P}{mT^4}$$

τότε μπορούμε να γράψουμε την (1.10) ως

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P}\nabla_{rad}} \quad (1.12)$$

Η εξίσωση (1.12) μπορεί να περιγράψει την διάδοση της ενέργειας ακόμα και αν αυτή γίνεται με μεταφορά απλά επιλέγοντας αντί για την ∇_{rad} την κατάλληλη βαθμίδα ∇ που θα προέκυπτε από την κατάλληλη θεωρία μεταφοράς. Και σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε μια χρονική κλίμακα τ_{adj}, η οποία λέγεται χρονική κλίμακα της θερμοκρασιακής προσαρμογής και περιγράφει πόσο γρήγορα θα έχουμε μεταβολές σε ένα θερμοκρασιακό προφίλ.

Τελικά οι εξισώσεις που μας χρειάζονται για την περιγραφή ενός αστρικού μοντέλου, οι εξισώσεις δομής δηλαδή, είναι οι εξισώσεις

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial m} &= \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \\ \frac{\partial P}{\partial m} &= -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial l}{\partial m} &= \varepsilon - \varepsilon_\nu - c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t} \\ \frac{\partial T}{\partial m} &= -\frac{GmT}{4\pi r^4 P}\nabla \end{aligned}} \quad (1.13)$$

και συμπληρώνονται από μια καταστατική εξίσωση και μια εξίσωση που περιγράφει την χρονική εξέλιξη της συγκέντρωσης των διαφόρων στοιχείων μέσα στο άστρο.

2ο Κεφάλαιο

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε τις εξισώσεις που περιγράφουν την δομή ενός άστρου στην κατάσταση της ισορροπίας. Για να μελετήσουμε τις ταλαντώσεις ενός άστρου όμως δεν αρκεί η μελέτη της ισορροπίας. Για την μελέτη των ταλαντώσεων θα πρέπει να μελετήσουμε διαταραχές γύρω από την ισορροπία. Θα θεωρήσουμε δηλαδή διαταραχές των μεγεθών που περιγράφουν την κατάσταση του άστρου και θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά των διαταραχών.

Πριν μπούμε στην διαδικασία να μελετήσουμε με αυστηρότητα τις διαταραχές από την ισορροπία ενός αστρικού μοντέλου, μπορούμε να βγάλουμε κάποια ποιοτικά συμπεράσματα για τις αστρικές ταλαντώσεις από μια ποιοτική ανάλυση των μέσων τιμών των μεγεθών που περιγράφουν την δομή ενός άστρου. Θεωρούμε λοιπόν ότι το άστρο μας χαρακτηρίζεται από τα μεγέθη

M = ολική μάζα του άστρου
R = ακτίνα του άστρου
$\overline{\rho} = \frac{3}{4\pi}\frac{M}{R^3}$ = μέση πυκνότητα του άστρου
$\overline{P}$ = μέση πίεση στο εσωτερικό του άστρου
$\overline{\gamma}_{ad} = \Gamma = \frac{\overline{\rho}}{\overline{P}}\frac{\partial \overline{P}}{\partial \overline{\rho}}$ = μέσος αδιαβατικός εκθέτης

Έτσι στο εσωτερικό του άστρου στην κατάσταση ισορροπίας έχουμε δύο δυνάμεις που αλληλοεξουδετερώνονται. Οι δυνάμεις αυτές είναι η μέση άνωση και το μέσο βάρος που είναι

$$\overline{F}_{\acute{\alpha}\nu\omega\sigma\eta} = \frac{\overline{P}}{R}$$
$$\overline{F}_{\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma} = \frac{GM\overline{\rho}}{R^2} = \frac{4}{3}G\pi\overline{\rho}^2 R$$

Αν τώρα θεωρήσουμε μια ακτινική διαταραχή στην οποία η επιφάνεια του άστρου από την ακτίνα R έχει πάει στην ακτίνα R+δR τότε θα έχουμε διαταραχή στην μέση πυκνότητα και στην μέση πίεση που θα είναι

$$\overline{\rho} + \delta\overline{\rho} = \overline{\rho} - 3\frac{3}{4\pi}\frac{M}{R^4}\delta R = \overline{\rho} - 3\frac{\overline{\rho}}{R}\delta R$$
$$\overline{P} + \delta\overline{P} = \overline{P} + \frac{\overline{P}}{\overline{\rho}}\Gamma\delta\overline{\rho} = \overline{P} - 3\frac{\Gamma\overline{P}}{R}\delta R$$

Έτσι η αντίστοιχη αλλαγή στις δυνάμεις θα είναι

$$\delta\overline{F}_{\acute{\alpha}\nu\omega\sigma\eta} = \frac{\delta\overline{P}}{R} - \frac{\overline{P}}{R^2}\delta R = -(3\Gamma+1)\overline{F}_{\acute{\alpha}\nu\omega\sigma\eta}\left(\frac{\delta R}{R}\right)$$

$$\delta\overline{F}_{\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma} = \frac{4}{3}G\pi\overline{\rho}^2(-5\delta R) = -5\overline{F}_{\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma}\left(\frac{\delta R}{R}\right)$$

Η δύναμη επαναφοράς της διαταραχής με βάση τα παραπάνω είναι

$$F = \delta\overline{F}_{\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma} - \delta\overline{F}_{\acute{\alpha}\nu\omega\sigma\eta} = -5\overline{F}_{\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma}\left(\frac{\delta R}{R}\right) + (3\Gamma+1)\overline{F}_{\acute{\alpha}\nu\omega\sigma\eta}\left(\frac{\delta R}{R}\right)$$

και έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία επιτάχυνσης που θα είναι $F = -\overline{\rho}\delta\ddot{R}$. Από τη σχέση αυτή και αν πάρουμε υπόψη μας ότι $\overline{F}_{\acute{\alpha}\nu\omega\sigma\eta} = \overline{F}_{\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma}$ έχουμε τελικά την σχέση

$$\delta\ddot{R} = -3\left(\Gamma - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\pi G\overline{\rho}\right)\delta R \quad (2.1)$$

Η σχέση αυτή ορίζει την συχνότητα του βασικού κανονικού τρόπου ταλάντωσης του άστρου

$$\boxed{\omega^2 = 4\pi G\left(\Gamma - \frac{4}{3}\right)\overline{\rho}} \quad (2.2)$$

Η σχέση για την συχνότητα των ακτινικών ταλαντώσεων στην οποία καταλήξαμε βλέπουμε ότι έχει κάποια ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά. Βλέπουμε λοιπόν ότι μας δίνει μια σχέση περιόδου-πυκνότητας της μορφής $\Pi\sqrt{\overline{\rho}} = const.$ (πράγμα το οποίο χρησιμοποιήσαμε για να βγάλουμε την σχέση περιόδου-λαμπρότητας των Κηφείδων) και επιπλέον μας δίνει μια συγκεκριμένης μορφής εξάρτηση της συχνότητας από τον μέσο αδιαβατικό εκθέτη. Βλέπουμε λοιπόν ότι όσο ο μέσος αδιαβατικός εκθέτης είναι μεγαλύτερος από $\frac{4}{3}$ τότε το άστρο είναι δυναμικά ευσταθές και οι διαταραχές οδηγούν σε αρμονικές ταλαντώσεις ενώ αν ο μέσος αδιαβατικός εκθέτης γίνει μικρότερος από $\frac{4}{3}$ τότε το άστρο είναι δυναμικά ασταθές σε διαταραχές με αποτέλεσμα οι διαταραχές να αυξάνουν εκθετικά. Αν ο μέσος αδιαβατικός εκθέτης είναι $\frac{4}{3}$ τότε το άστρο βρίσκεται σε αδιάφορη ισορροπία. Αυτά τα δύο βασικά χαρακτηριστικά που παρήγαγε αυτό το ποιοτικό μοντέλο παραμένουν και στις πιο αυστηρές αναλύσεις των ακτινικών ταλαντώσεων όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Προχωράμε λοιπόν στην αυστηρή μελέτη των διαταραχών. Θεωρούμε την λύση των εξισώσεων δομής $P_0(m), r_0(m), \rho_0(m)$ που περιγράφει ένα άστρο στην κατάσταση της υδροστατικής ισορροπίας. Αν για κάποιο λόγο διαταραχθεί η υδροστατική ισορροπία, τότε οι νέες συναρτήσεις που θα περιγράφουν το άστρο μας θα είναι οι $P(m,t), r(m,t), \rho(m,t)$.
Στην παρακάτω μελέτη μας θα θεωρήσουμε ότι οι διαταραχές από την ισορροπία θα είναι μικρές και μόνο στην ακτινική διεύθυνση και θα έχουν την ίδια τιμή παντού στην επιφάνεια κάθε

ομόκεντρης σφαίρας. Αυτές οι διαταραχές θα μας οδηγήσουν στην μελέτη και περιγραφή καθαρά ακτινικών ταλαντώσεων. Στο σημείο αυτό να υπενθυμίσω ότι η περιγραφή της δομής του άστρου γίνεται ως συνάρτηση της μάζας γιατί αυτό μας το επιτρέπει κατ' αρχήν η σφαιρική συμμετρία και γιατί απλοποιεί τις εξισώσεις μας καθώς στην περιγραφή μας ακολουθούμε τις κινήσεις του ρευστού κινούμενοι πάνω σε σφαίρες σταθερής μάζας, δηλαδή ακολουθούμε την Lagrangian περιγραφή του ρευστού.
Μα βάση τα παραπάνω θεωρούμε για τις διαταραγμένες συναρτήσεις την μορφή

$$P(m,t) = P_0(m) + P_1(m,t) = P_0(m)\left[1 + p(m)e^{i\omega t}\right]$$
$$r(m,t) = r_0(m) + r_1(m,t) = r_0(m)\left[1 + x(m)e^{i\omega t}\right]$$
$$\rho(m,t) = \rho_0(m) + \rho_1(m,t) = \rho_0(m)\left[1 + d(m)e^{i\omega t}\right]$$

όπου οι διαταραχές έχουμε θεωρήσει ότι έχουν χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{i\omega t}$ και οι συναρτήσεις p, x, d είναι πολύ μικρές ($\ll 1$).
Αν τώρα βάλουμε τις παραπάνω εκφράσεις στην εξίσωση κίνησης του ρευστού και κρατήσουμε μόνο όρους πρώτης τάξης ως προς τις διαταραχές θα έχουμε

$$\frac{\partial P(m,t)}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \Rightarrow$$
$$\frac{\partial P_0}{\partial m}[1 + pe^{i\omega t}] + P_0\frac{\partial p}{\partial m}e^{i\omega t} = -\frac{Gm}{4\pi r_0^{\,4}}[1 - 4xe^{i\omega t}] - \frac{(i\omega)^2 r_0 x e^{i\omega t}}{4\pi r_0^{\,2}}[1 - 2xe^{i\omega t}] \Rightarrow$$
$$\cancel{\frac{\partial P_0}{\partial m}} + \frac{\partial P_0}{\partial m}p\,\cancel{e^{i\omega t}} + P_0\frac{\partial p}{\partial m}\cancel{e^{i\omega t}} = \cancel{-\frac{Gm}{4\pi r_0^{\,4}}} + 4x\,\cancel{e^{i\omega t}}\frac{Gm}{4\pi r_0^{\,4}} + \frac{\omega^2 r_0 x\,\cancel{e^{i\omega t}}}{4\pi r_0^{\,2}} \Rightarrow$$
$$\frac{\partial(P_0 p)}{\partial m} = \left(4\frac{Gm}{r_0^{\,2}} + \omega^2 r_0\right)\frac{x}{4\pi r_0^{\,2}}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει και την σχέση $\frac{\partial P_0}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r_0^{\,4}}$ που ικανοποιούν τα μεγέθη στην ισορροπία. Χρησιμοποιώντας και πάλι την σχέση της υδροστατικής ισορροπίας και την σχέση $\frac{\partial r_0}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r_0^{\,2}\rho_0} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r_0^{\,2}\rho_0}\frac{\partial}{\partial r_0}$ που ισχύει στην ισορροπία, η παραπάνω εξίσωση θα πάρει την μορφή

$$-\frac{1}{\cancel{4\pi r_0^{\,2}}}\frac{Gm}{r_0^{\,2}}p + P_0\frac{1}{\cancel{4\pi r_0^{\,2}}\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r_0} = \left(4\frac{Gm}{r_0^{\,2}} + \omega^2 r_0\right)\frac{x}{\cancel{4\pi r_0^{\,2}}} \Rightarrow$$
$$\frac{P_0}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r_0} = \left(4\frac{Gm}{r_0^{\,2}} + \omega^2 r_0\right)x + \frac{Gm}{r_0^{\,2}}p$$

Με την παραπάνω διαδικασία οδηγηθήκαμε σε μια έκφραση που ικανοποιούν οι διαταραχές, χρησιμοποιώντας μία από τις εξισώσεις δομής (συγκεκριμένα την εξίσωση κίνησης του

ρευστού), τις διαταραγμένες εκφράσεις των μεγεθών και τις εξισώσεις που ικανοποιούν τα μεγέθη στην υδροστατική ισορροπία. Επιπλέον έχουμε εκφράσει την διαφορική μας εξίσωση συναρτήσει της μεταβλητής r_0 της ισορροπίας. Αυτό είναι απόλυτα νόμιμο και μέσα στα πλαίσια της Lagrangian περιγραφής του ρευστού, αφού για το μέγεθος r_0 της ισορροπίας υπάρχει σαφής συναρτησιακή σχέση που το συνδέει με τη μάζα m. Αν τώρα βάλουμε τις διαταραγμένες εκφράσεις μας στην εξίσωση δομής $\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$ θα πάρουμε

$$\frac{\partial r_0}{\partial m}[1 + xe^{i\omega t}] + r_0 \frac{\partial x}{\partial m} e^{i\omega t} = \frac{1}{4\pi r_0^{\,2} \rho_0}[1 - 2xe^{i\omega t}][1 - de^{i\omega t}] \Rightarrow$$

$$\cancel{\frac{\partial r_0}{\partial m}} + \frac{\partial r_0}{\partial m} x \cancel{e^{i\omega t}} + r_0 \frac{\partial x}{\partial m} \cancel{e^{i\omega t}} = \cancel{\frac{1}{4\pi r_0^{\,2} \rho_0}} - \frac{1}{4\pi r_0^{\,2} \rho_0}[2x + d]\cancel{e^{i\omega t}} \Rightarrow$$

$$\cancel{\frac{1}{4\pi r_0^{\,2} \rho_0}} x + \cancel{\frac{1}{4\pi r_0^{\,2} \rho_0}} r_0 \frac{\partial x}{\partial r_0} = -\cancel{\frac{1}{4\pi r_0^{\,2} \rho_0}}[2x + d] \Rightarrow$$

$$r_0 \frac{\partial x}{\partial r_0} = -3x - d$$

Αρα οι εξισώσεις που περιγράφουν τις διαταραχές μας είναι οι εξισώσεις

$$\frac{P_0}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r_0} = \left(4\frac{Gm}{r_0^{\,2}} + \omega^2 r_0 \right) x + \frac{Gm}{r_0^{\,2}} p$$

$$r_0 \frac{\partial x}{\partial r_0} = -3x - d$$

όπου έχουμε δύο διαφορικές εξισώσεις και τρεις άγνωστες συναρτήσεις p, x, d.

Θα θεωρήσουμε επιπλέον ότι οι διαταραχές μας εξελίσσονται τόσο γρήγορα ώστε δεν προλαβαίνουμε να έχουμε μεταφορά θερμότητας και άρα οι διαταραχές είναι αδιαβατικές. Αυτό σημαίνει ότι θα έχουμε μια σχέση που θα συνδέει την διαταραχή στην πίεση με την διαταραχή στην πυκνότητα και προκύπτει να είναι

$$\frac{\Delta P}{P_0} = \gamma_{ad} \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \Rightarrow \frac{\cancel{P_0}\, p\, \cancel{e^{i\omega t}}}{\cancel{P_0}} = \gamma_{ad} \frac{\cancel{\rho_0}\, d\, \cancel{e^{i\omega t}}}{\cancel{\rho_0}} \Rightarrow$$

$$p = \gamma_{ad} d$$

και αυτή η εξίσωση κλίνει το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφουν τις διαταραχές. Συνολικά λοιπόν οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη των διαταραχών είναι

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{P_0}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r_0}=\left(4\frac{Gm}{r_0^{\,2}}+\omega^2 r_0\right)x+\frac{Gm}{r_0^{\,2}}p\\ r_0\frac{\partial x}{\partial r_0}=-3x-d\\ p=\gamma_{ad}d\end{gathered}} \qquad (2.3)$$

Παραγωγίζοντας την δεύτερη εξίσωση ως προς r_0 και χρησιμοποιώντας τις άλλες δύο εξισώσεις έχουμε

$$\frac{\partial x}{\partial r_0}+r_0\frac{\partial^2 x}{\partial r_0^{\,2}}=-3\frac{\partial x}{\partial r_0}-\frac{1}{\gamma_{ad}}\frac{\partial p}{\partial r_0}\Rightarrow$$

$$r_0\frac{\partial^2 x}{\partial r_0^{\,2}}+4\frac{\partial x}{\partial r_0}=-\frac{1}{\gamma_{ad}}\frac{\rho_0}{P_0}\left[\left(4\frac{Gm}{r_0^{\,2}}+\omega^2 r_0\right)x+\frac{Gm}{r_0^{\,2}}p\right]\Rightarrow$$

$$r_0\frac{\partial^2 x}{\partial r_0^{\,2}}+4\frac{\partial x}{\partial r_0}=-\frac{1}{\gamma_{ad}}\frac{\rho_0}{P_0}\left[\left(4\frac{Gm}{r_0^{\,2}}+\omega^2 r_0\right)x+\frac{Gm}{r_0^{\,2}}\gamma_{ad}\left(-3x-r_0\frac{\partial x}{\partial r_0}\right)\right]\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial r_0^{\,2}}+\left(\frac{4}{r_0}-\frac{\rho_0}{P_0}\frac{Gm}{r_0^{\,2}}\right)\frac{\partial x}{\partial r_0}+\frac{\rho_0}{\gamma_{ad}P_0}\left[\omega^2+\left(4-3\gamma_{ad}\right)\frac{Gm}{r_0^{\,3}}\right]x=0$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση περιγράφει το πλάτος μιας διαταραχής ως συνάρτηση του βάθους r_0 στον αστέρα και συγκεκριμένα περιγράφει το πλάτος μια ταλάντωσης με συχνότητα ω. Για να ολοκληρωθεί η περιγραφή της ταλάντωσης χρειαζόμαστε ακόμα συνοριακές συνθήκες στο κέντρο και την επιφάνεια του αστέρα. Παρατηρούμε ότι στο κέντρο του άστρου ο συντελεστής μπροστά από τον όρο $\frac{\partial x}{\partial r_0}$ απειρίζετε ενώ ο συντελεστής μπροστά από τον όρο x παραμένει πεπερασμένος. Επειδή δεν θέλουμε η λύση μας να απειρίζετε στο κέντρο του αστέρα πρέπει να απαιτήσουμε την συνοριακή συνθήκη $\left.\frac{\partial x}{\partial r_0}\right|_{r_0=0}=0$. Συγκεκριμένα αν θεωρήσουμε ότι η λύση μας έχει την μορφή $x=a_0+a_1 r_0+a_2 r_0^{\,2}+\ldots$, τότε για να έχει καλή συμπεριφορά η λύση πρέπει να είναι $a_1=0$ και $a_2=-\frac{1}{10}\frac{\rho_c}{\gamma_{ad}P_c}\left[\omega^2+\left(4-3\gamma_{ad}\right)\frac{4\pi}{3}G\rho_c\right]a_0$. Η συνοριακή συνθήκη για την επιφάνεια του αστέρα δεν είναι άλλη από την απαίτηση να μηδενίζετε η πίεση στην επιφάνεια, δηλαδή $p=0$ που μεταφράζεται για το x στη συνθήκη $R_0\left.\frac{\partial x}{\partial r_0}\right|_{r_0=R_0}+3x\big|_{r_0=R_0}=0$. Τέλος αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση $\frac{\partial^2 x}{\partial r_0^{\,2}}+\left(\frac{4}{r_0}-\frac{\rho_0}{P_0}\frac{Gm}{r_0^{\,2}}\right)\frac{\partial x}{\partial r_0}+\frac{\rho_0}{\gamma_{ad}P_0}\left[\omega^2+\left(4-3\gamma_{ad}\right)\frac{Gm}{r_0^{\,3}}\right]x=0$ με $r_0^{\,4}P_0$ και χρησιμοποιώντας την εξίσωση της υδροστατικής ισορροπίας έχουμε τελικά

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r_0}\left(r_0^{\,4} P_0 \frac{\partial x}{\partial r_0} \right) + \frac{r_0^{\,4}\rho_0}{\gamma_{ad}}\left[\omega^2 + \left(4 - 3\gamma_{ad}\right)\frac{Gm}{r_0^{\,3}} \right] x = 0} \quad (2.4)$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση μαζί με τις γραμμικές και ομογενής συνοριακές συνθήκες που αναφέραμε παραπάνω αποτελούν ένα πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm - Liouville. Οι ιδιότητες και οι ιδιοσυναρτήσεις των προβλημάτων Sturm-Liouville έχουν τις ιδιότητες :

1. Υπάρχει μια άπειρη ακολουθία ιδιοτιμών ω_n^2.
2. Οι ιδιοτιμές ω_n^2 είναι πραγματικές και αποτελούν μια αύξουσα ακολουθία $\omega_0^2 < \omega_1^2 < \ldots, \quad \omega_{n\to\infty}^2 \to \infty$.
3. Οι ιδιοσυνάρτηση x_0 της μικρότερης (θεμελιώδης) ιδιοτιμής ω_0 δεν έχει κανένα κομβικό σημείο στο διάστημα $0 < r_0 < R_0$. Οι ιδιοσυναρτήσεις των ανώτερων ιδιοτιμών ω_n (νιοστή αρμονική) έχουν αντίστοιχα n κομβικά σημεία στο ίδιο διάστημα.
4. Οι κανονικοποιημένες ιδιοτιμές x_n αποτελούν πλήρη βάση και είναι ορθογώνιες μεταξύ τους σύμφωνα με την σχέση $\int_0^{R_0} r_0^4 \rho_0 x_m x_n dr_0 = \delta_{mn}$.

Επειδή οι ιδιοσυναρτήσεις είναι πλήρης βάση, έχουμε την δυνατότητα να μελετήσουμε οποιαδήποτε διαταραχή αρκεί να την αναπτύξουμε στην βάση των ιδιοσυναρτήσεων και να μελετήσουμε την εξέλιξη της κάθε συνιστώσας.
Τα παραπάνω αποτελέσματα μας ανοίγουν τον δρόμο για την μελέτη της δυναμικής ευστάθειας ενός αστέρα. Αν η ιδιοτιμή ω_n^2 είναι θετική, τότε η συχνότητα ω_n θα είναι πραγματική. Αυτό σημαίνει ότι οι διαταραχές θα εξελίσσονται ως $e^{i\omega_n t}$ και άρα θα εκτελούν ταλάντωση με σταθερό πλάτος. Δηλαδή θα έχουμε ένα δυναμικά ευσταθή αστέρα για τον δεδομένο κανονικό τρόπο ταλάντωσης. Αν η ιδιοτιμή ω_n^2 είναι αρνητική, τότε η συχνότητα ω_n θα είναι φανταστική. Συγκεκριμένα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\pm\omega_n = \pm i\chi$ και οι διαταραχές θα εξελίσσονται ως $e^{\mp\chi t}$. Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει μία συνιστώσα της διαταραχής που θα αυξάνει το πλάτος της εκθετικά με τον χρόνο κυριαρχώντας στην εξέλιξη του συστήματος. Σε αυτή την περίπτωση το σύστημά μας είναι δυναμικά ασταθές. Τα δύο ενδεχόμενα που παρουσιάσαμε παραπάνω ορίζουν δύο περιοχές, την περιοχή της δυναμικής ευστάθειας και την περιοχή της δυναμικής αστάθειας. Οι δύο αυτές περιοχές χωρίζονται από την περίπτωση του $\omega_0^2 = 0$ που περιγράφει την περίπτωση της αδιάφορης ισορροπίας. Γιατί όμως επιλέγουμε την ιδιοτιμή ω_0 για να κάνουμε τον διαχωρισμό; Σύμφωνα με τις ιδιότητες των προβλημάτων Sturm-Liouville οι ιδιοτημές $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots$ είναι μεγαλύτερες από την ιδιοτιμή ω_0^2, έτσι αν η ω_0^2 είναι θετική τότε όλες οι επόμενες ιδιοτημές θα είναι και αυτές θετικές και αρα θα έχουμε δυναμική ευστάθεια σε κάθε περίπτωση. Αν η ιδιοτιμή ω_0^2 είναι αρνητική τότε είναι πιθανό να υπάρχει κάποιος πεπερασμένος αριθμός αρνητικών ιδιοτιμών εκτός της ω_0^2 για τις οποίες το άστρο θα είναι δυναμικά ασταθές. Άρα το πρόσημο της ιδιοτιμής ω_0^2 διαχωρίζει τις δύο περιοχές. Από τι εξαρτάτε όμως το πρόσημο της ω_0^2; Ολοκληρώνοντας την παραπάνω διαφορική εξίσωση έχουμε

$$\cancel{\left[r_0^{\,4} P_0 \frac{\partial x_0}{\partial r_0} \right]_0^{R_0}} + \frac{\omega_0^2}{\gamma_{ad}} \int_0^{R_0} r_0^{\,4} \rho_0 x_0 dr_0 + \frac{\left(4 - 3\gamma_{ad}\right)}{\gamma_{ad}} \int_0^{R_0} \frac{Gm}{r_0^{\,3}} r_0^{\,4} \rho_0 x_0 dr_0 = 0$$

όπου ο συνοριακός όρος είναι μηδέν. Έτσι έχουμε τελικά για την ω_0^2 την σχέση

$$\boxed{\omega_0^2 = G\left(3\gamma_{ad} - 4\right) \frac{\int_0^{R_0} \frac{m(r_0)}{r_0^{\,3}} r_0^{\,4} \rho_0 x_0 dr_0}{\int_0^{R_0} r_0^{\,4} \rho_0 x_0 dr_0}} \quad (2.5)$$

Όπως φαίνεται από την παραπάνω σχέση το πρόσημο της ιδιοτιμής ω_0^2 εξαρτάται μόνο από την τιμή του αδιαβατικού εκθέτη. Αυτό οφείλεται στο ότι οι συναρτήσεις όπως η πυκνότητα και η μάζα που είναι μέσα στα ολοκληρώματα είναι παντού θετικές, ενώ η ιδιοσυνάρτηση x_0 δεν έχει κόμβους όπως έχουμε αναφέρει και άρα κρατάει σταθερό το πρόσημό της στο διάστημα $0 < r_0 < R_0$. Άρα θα έχουμε $sign\,\omega_0^2 = sign\left(3\gamma_{ad} - 4\right)$, που σημαίνει ότι για $\gamma_{ad} > 4/3$ βρισκόμαστε σε κατάσταση δυναμικής ευστάθειας, ενώ για $\gamma_{ad} < 4/3$ βρισκόμαστε σε κατάσταση δυναμικής αστάθειας. Η σχέση για την θεμελιώδη συχνότητα μας δίνει άλλη μία πληροφορία που έχουμε συναντήσει και παραπάνω. Η ποσότητα

$$\frac{\int_0^{R_0} \frac{m(r_0)}{r_0^{\,3}} r_0^{\,4} \rho_0 x_0 dr_0}{\int_0^{R_0} r_0^{\,4} \rho_0 x_0 dr_0}$$

μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο της μέσης πυκνότητας και η σχέση που δίνει την θεμελιώδη συχνότητα μπορεί να πάρει την μορφή

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{4}{3}\pi G\left(3\gamma_{ad} - 4\right)\mu\bar{\rho}} \quad (2.6)$$

όπου μ είναι μια θετική σταθερά. Βλέπουμε λοιπόν ότι η γενική και αυστηρή ανάλυση που έχουμε κάνει για τις ακτινικές ταλαντώσεις παράγει την περίφημη σχέση περιόδου-πυκνότητας που έχουμε ξανασυναντήσει.

Έτσι ο αστέρας *δ Cephei* έχει μέση πυκνότητα $\bar{\rho} = 5,6 \cdot 10^{-4}\, gr \cdot cm^{-3}$ και περίοδο περίπου 129 ώρες ή 5,4 ημέρες. Αυτό σημαίνει ότι η σχέση $\Pi\sqrt{\bar{\rho}} = const.$ μας δίνει την τιμή $0,128$ για τη σταθερά, όπου η περίοδος μετριέται σε ημέρες και η πυκνότητα σε $gr \cdot cm^{-3}$. Αν θεωρήσουμε έναν ερυθρό γίγαντα με μάζα $1M_\odot$ και ακτίνα $300R_\odot$ τότε η περίοδος είναι 560 ημέρες ενώ για έναν αστέρα νετρονίων με μέση πυκνότητα $\bar{\rho} = 10^6\, gr \cdot cm^{-3}$ η περίοδος είναι περίπου 11 δευτερόλεπτα. Βλέπουμε λοιπόν ότι η παραπάνω περιγραφή αναπαράγει τις παρατηρούμενες περιόδους ανάπαλσης των μεταβλητών τύπου *Mira* και τύπου *ZZ Ceti* που θεωρείται ότι ανήκουν στην κατηγορία των αστέρων που πάλλονται με αυτόν τον μηχανισμό.

3ο Κεφάλαιο

Στην παραπάνω περιγραφή επειδή θεωρήσαμε αδιαβατικές διαταραχές, δεν χρειάστηκε να πάρουμε υπόψη μας στην μελέτη τον μηχανικών ταλαντώσεων τις άλλες δυο εξισώσεις δομής που αφορούν την λαμπρότητα και την θερμοκρασία. Στην πραγματικότητα όμως οι μεταβολές στο άστρο δεν είναι αδιαβατικές αφού από τις ταλαντώσεις επηρεάζονται ο ρυθμός με τον οποίο ρέει η θερμότητα και ο ρυθμός παραγωγής πυρηνικής ενέργειας. Επειδή όμως η ταλάντωση εξελίσσεται στην υδροστατική χρονική κλίμακα οι διαδικασίες είναι με καλή ακρίβεια σχεδόν αδιαβατικές.

Έτσι για τις αδιαβατικές ταλαντώσεις που θεωρήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο θα έχουμε από την εξίσωση ιδιοτιμών (2.4) τις ιδιοσυναρτήσεις $x_{ad}^{(n)}$ από τις οποίες μπορούμε απευθείας να υπολογίσουμε τις $d_{ad}^{(n)}$ και $p_{ad}^{(n)}$ από τις εξισώσεις $r_0 \dfrac{\partial x}{\partial r_0} = -3x - d$ και $p = \gamma_{ad} d$. Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι οι διαταραχές στην θερμοκρασία και την λαμπρότητα είναι της μορφής

$$T(m,t) = T_0(m) + T_1(m,t) = T_0(m)\left[1 + \theta(m)e^{i\omega t}\right]$$
$$l(m,t) = l_0(m) + l_1(m,t) = l_0(m)\left[1 + \lambda(m)e^{i\omega t}\right]$$

η αδιαβατική θερμοβαθμίδα που ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\nabla_{ad} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_S$$

θα μας δώσει την μεταβολή στην θερμοκρασία ως $\theta_{ad}^{(n)} = \nabla_{ad} p_{ad}^{(n)}$ γιατί θα έχουμε

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \nabla_{ad} \frac{\Delta P}{P_0} \Rightarrow \frac{\cancel{T_0}\,\theta\, \cancel{e^{i\omega t}}}{\cancel{T_0}} = \nabla_{ad} \frac{\cancel{P_0}\, p\, \cancel{e^{i\omega t}}}{\cancel{P_0}} \Rightarrow$$
$$\theta = \nabla_{ad} p$$

και η διαταραχή της λαμπρότητας θα είναι μηδέν λόγω αδιαβατικότητας.

Για την πλήρη ανάλυση του μη αδιαβατικού προβλήματος θα πρέπει να υπολογίσουμε και τις διαταραγμένες εξισώσεις για την διατήρηση της ενέργειας και την μεταφορά της θερμότητας. Έτσι αν στην (1.8) εισάγουμε τις διαταραγμένες ποσότητες και επιπλέον θεωρήσουμε ότι ο διαταραγμένος ρυθμός παραγωγής πυρηνικής ενέργειας είναι από το ανάπτυγμα Taylor

$$\varepsilon(T,P) = \varepsilon_0 + \left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right|_0 \Delta T + \left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial P}\right|_0 \Delta P$$

θα πάρουμε την εξίσωση

$$\frac{\partial l_0}{\partial m}(1+\lambda e^{i\omega t})+l_0\frac{\partial \lambda}{\partial m}e^{i\omega t} = \varepsilon_o+\left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right|_0\Delta T+\left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial P}\right|_0\Delta P-c_P\frac{\partial T_0(1+\theta e^{i\omega t})}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho_0(1+de^{i\omega t})}\frac{\partial P_0(1+pe^{i\omega t})}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial l_0}{\partial m}(\cancel{1}+\lambda e^{i\omega t})+l_0\frac{\partial \lambda}{\partial m}e^{i\omega t} = \cancel{\varepsilon_o}+\left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right|_0 T_0\theta e^{i\omega t}+\left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial P}\right|_0 P_0 p e^{i\omega t} -c_P T_0\theta(i\omega)e^{i\omega t}+\frac{\delta(1-\cancel{de^{i\omega t}})}{\rho_0}P_0 p(i\omega)e^{i\omega t} \Rightarrow$$

από όπου κρατώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης ως προς τις διαταραχές έχουμε

$$l_0\frac{\partial \lambda}{\partial m}=-\frac{\partial l_0}{\partial m}\lambda+\left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right|_0 T_0\theta+\left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial P}\right|_0 P_0 p-c_P T_0\theta(i\omega)+\frac{\delta}{\rho_0}P_0 p(i\omega)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial m}=-\frac{\varepsilon_0}{l_0}\left(\lambda-\left.\frac{\partial \ln\varepsilon}{\partial \ln T}\right|_0\theta-\left.\frac{\partial \ln\varepsilon}{\partial \ln P}\right|_0 p\right)-i\omega\frac{\delta P_0}{\rho_0}\left(\frac{\theta}{\left[\frac{\delta P_0}{c_P T_0\rho_0}\right]}-p\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial \lambda}{\partial m}=-\frac{\varepsilon_0}{l_0}\left(\lambda-\varepsilon_T\theta-\varepsilon_P p\right)-i\omega\frac{\delta P_0}{\rho_0}\left(\frac{\theta}{\left[\frac{\delta P_0}{c_P T_0\rho_0}\right]}-p\right)} \quad (3.1)$$

όπου έχουμε ορίσει τις ποσότητες $\varepsilon_T=\left.\frac{\partial \ln\varepsilon}{\partial \ln T}\right|_0$ και $\varepsilon_P=\left.\frac{\partial \ln\varepsilon}{\partial \ln P}\right|_0$. Η (3.1) είναι η διαταραγμένη εξίσωση διατήρησης της ενέργειας και συνοδεύεται από την συνοριακή συνθήκη η λαμπρότητα στο κέντρο να είναι μηδέν, δηλαδή $l_0\lambda\big|_{m=0}=0$, και την συνοριακή συνθήκη η λαμπρότητα στην επιφάνεια να είναι $L=4\pi R^2\sigma T^4$ που μας δίνει την σχέση $\lambda\big|_{r_0=R_0}=2x\big|_{r_0=R_0}+4\theta\big|_{r_0=R_0}$. Μας μένει ακόμα η εξίσωση (1.10) από την οποία εισάγοντας τις διαταραγμένες ποσότητες έχουμε

$$\frac{\partial T_0(1+\theta e^{i\omega t})}{\partial m}=-\frac{3}{64\pi^2 ac}\frac{\left(\kappa_0+\left.\frac{\partial \kappa}{\partial T}\right|_0\Delta T+\left.\frac{\partial \kappa}{\partial P}\right|_0\Delta P\right)l_0(1+\lambda e^{i\omega t})}{r_0^{\,4}(1+xe^{i\omega t})^4 T_0^{\,3}(1+\theta e^{i\omega t})^3}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ανάπτυγμα $\kappa(T,P)=\kappa_0+\left.\frac{\partial \kappa}{\partial T}\right|_0\Delta T+\left.\frac{\partial \kappa}{\partial P}\right|_0\Delta P$ για τον συντελεστή απορρόφησης όπως είχαμε κάνει και για τον ρυθμό παραγωγής πυρηνικής ενέργειας. Κρατώντας όρους πρώτης τάξης η εξίσωση θα γίνει

$$\cancel{\frac{\partial T_0}{\partial m}} + \frac{\partial T_0}{\partial m}\theta e^{i\omega t} + T_0 \frac{\partial \theta}{\partial m} e^{i\omega t} = -\frac{3}{64\pi^2 ac}\frac{\kappa_0 l_0}{r_0^4 T_0^3}\left[\cancel{1} + \left.\frac{\partial \kappa}{\partial T}\right|_0 \frac{T_0}{\kappa_0}\theta e^{i\omega t} + \left.\frac{\partial \kappa}{\partial P}\right|_0 \frac{P_0}{\kappa_0} p e^{i\omega t} + \lambda e^{i\omega t} - 4x e^{i\omega t} - 3\theta e^{i\omega t}\right]$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial m} = -\frac{3}{64\pi^2 ac}\frac{\kappa_0 l_0}{r_0^4 T_0^4}\left[\left.\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln T}\right|_0 \theta + \left.\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln P}\right|_0 p + \lambda - 4x - 4\theta\right]$$

και την σχέση αυτή μετά από πράξεις την φέρνουμε στην μορφή

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial m} = -\frac{3}{64\pi^2 ac}\frac{\kappa_0 l_0}{r_0^4 T_0^4}\left[\kappa_P p + \left(\kappa_T - 4\right)\theta + \lambda - 4x\right]} \quad (3.2)$$

όπου έχουμε ορίσει τις ποσότητες $\kappa_T = \left.\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln T}\right|_0$ και $\kappa_P = \left.\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln P}\right|_0$. Έτσι οι εξισώσεις (3.1) και (3.2) ολοκληρώνουν το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τις μη αδιαβατικές ταλαντώσεις. Η επίλυση αυτού του συστήματος είναι πολύ δύσκολη και για αυτό το λόγο προκειμένου να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για τις μη αδιαβατικές ταλαντώσεις θα κάνουμε την προσέγγιση της ημι-αδιαβατικότητας. Δηλαδή θα θεωρήσουμε ότι οι ταλαντώσεις είναι σχεδόν αδιαβατικές και άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιοσυναρτήσεις $x_{ad}^{(n)}$, $p_{ad}^{(n)}$ και $\theta_{ad}^{(n)} = \nabla_{ad} p_{ad}^{(n)}$ αλλά οι αποκλίσεις από την αδιαβατικότητα θα έχουν αποτέλεσμα μεταβολές της λαμπρότητας που θα δίνονται από τη σχέση

$$\lambda = -\frac{64\pi^2 acr_0^4 T_0^4}{3\kappa_0 l_0}\frac{\partial \theta_{ad}}{\partial m} + 4x_{ad} - \kappa_P p_{ad} + \left(4 - \kappa_T\right)\theta_{ad} \quad (3.3)$$

Στην μελέτη των αδιαβατικών ταλαντώσεων επειδή δεν είχαμε μεταφορά ενέργειας προς και από την ταλάντωση του άστρου, το πλάτος παρέμενε σταθερό. Σε αυτή την περίπτωση η μη αδιαβατικότητα δίνει την δυνατότητα στην ταλάντωση να κερδίζει ή να χάνει ενέργεια και άρα να αυξάνεται ή να ελαττώνεται το πλάτος της. Αυτό σημαίνει ότι αν σε κάποια φάση της εξέλιξής του ένα άστρο αναγκαστεί να κάνει κάποια ταλάντωση, τότε ανάλογα με το αν θα μπορεί να την τροφοδοτήσει με ενέργεια ή όχι, η ταλάντωση θα ενισχύεται ή θα αποσβένεται. Αυτό εισάγει την έννοια της ταλαντωτικής ευστάθειας. Αν δηλαδή σε ένα άστρο που κάνει αρμονική ταλάντωση, προκειμένου να μην ελαττωθεί το πλάτος της ταλάντωσης πρέπει να του εισάγουμε ενέργεια (το έργο W που παράγεται είναι αρνητικό) τότε λέμε ότι το άστρο είναι ταλαντωτικά ευσταθές. Αν προκειμένου να μην αυξηθεί το πλάτος πρέπει να του αφαιρέσουμε ενέργεια (το έργο W που παράγεται είναι θετικό) τότε το άστρο είναι ταλαντωτικά ασταθές. Για να μελετήσουμε την ταλαντωτική ευστάθεια θεωρούμε λοιπόν ένα φλοιό μάζας dm που κερδίζει στην μονάδα του χρόνου και ανά μονάδα μάζας ενέργεια $\frac{dq}{dt}$. Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι η λαμπρότητα μεταβάλετε ως $l = l_0(1 + \lambda \cos \omega t)$, από την (1.5) θα έχουμε

$$\frac{dq}{dt} = \varepsilon - \frac{\partial l}{\partial m} = \cancel{\varepsilon_0} + \delta\varepsilon - \cancel{\frac{\partial l_0}{\partial m}} - \frac{\partial l_0 \lambda}{m}\cos\omega t$$

όπου οι όροι της ισορροπίας απλοποιούνται και μας δίνουν ότι η ενέργεια που προσφέρεται τελικά είναι

$$\frac{dq}{dt} = \delta\varepsilon - \frac{\partial l_0 \lambda}{m}\cos\omega t$$

Για να υπολογίσουμε το έργο θα χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο για το χρονικό διάστημα μίας περιόδου $dW = dm\oint \frac{dq}{dt}dt$ όπου πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\oint \frac{dq}{dt}dt$. Επειδή η όλη διαδικασία θεωρούμε ότι είναι κυκλική η μεταβολή της εντροπίας θα πρέπει να είναι μηδέν. Έτσι αν θεωρήσουμε $T = T_0(1+\theta_{ad}\cos\omega t)$ θα έχουμε

$$\oint ds = \oint \frac{ds}{dt}dt = \oint \frac{1}{T_0(1+\theta_{ad}\cos\omega t)}\frac{dq}{dt}dt = 0 \Rightarrow$$

$$\cancel{\frac{1}{T_0}}\oint \frac{dq}{dt}dt - \cancel{\frac{1}{T_0}}\oint \theta_{ad}\cos\omega t\frac{dq}{dt}dt = 0$$

που μας δίνει για το έργο την σχέση

$$W = \int_0^M dm\oint \theta_{ad}\cos\omega t\frac{dq}{dt}dt = \int_0^M dm\oint \theta_{ad}\cos\omega t\left(\delta\varepsilon - \frac{\partial l_0\lambda}{\partial m}\cos\omega t\right)dt \Rightarrow$$

$$W = \cancel{\int_0^M dm\oint \theta_{ad}\delta\varepsilon\cos\omega t dt} - \int_0^M dm\oint \theta_{ad}\frac{\partial l_0\lambda}{\partial m}\cos^2\omega t dt \Rightarrow$$

$$W = -\int_0^M dm\oint \theta_{ad}\frac{\partial l_0\lambda}{\partial m}\cos^2\omega t dt = -\frac{\pi}{\omega}\int_0^M \theta_{ad}\left(\lambda\varepsilon_0 + l_0\frac{\partial\lambda}{\partial m}\right)dm \Rightarrow$$

$$\boxed{W = -\frac{\pi}{\omega}\int_0^M \theta_{ad}\left(\lambda\varepsilon_0 + l_0\frac{\partial\lambda}{\partial m}\right)dm} \quad (3.4)$$

όπου το ολοκλήρωμα ως προς το $\cos\omega t$ σε μία περίοδο έχει μηδενική συνεισφορά. Όταν το έργο που υπολογίζεται από τη σχέση (3.4) είναι $W > 0$ τότε οι ταλαντώσεις διεγείρονται και αυξάνει το πλάτος τους και όταν $W < 0$ οι ταλαντώσεις αποσβένονται και το πλάτος τους ελαττώνεται. Η εξίσωση (3.4) μπορεί να μας οδηγήσει σε δύο μηχανισμούς διέγερσης και συντήρησης των ταλαντώσεων.

Αν θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε σε περιοχή του άστρου όπου δεν έχουμε παραγωγή ενέργειας, τότε ο όρος με το ε_0 δεν συνεισφέρει στο έργο και άρα το ολοκλήρωμα θα είναι

$$W = -\frac{\pi}{\omega}\int_0^M \theta_{ad} l_0 \frac{\partial\lambda}{\partial m}dm \quad (3.5)$$

Αυτό μας λέει ότι από τη συμπεριφορά του $\frac{\partial \lambda}{\partial m}$ θα εξαρτάτε η ευστάθεια της ταλάντωσης. Έτσι θεωρώντας μια περιοχή του άστρου κοντά στην επιφάνεια όπου προφανώς δεν θα έχουμε παραγωγή πυρηνικής ενέργειας, η ταλάντωση θα έχει την μορφή $r = r_0(1 + x_{ad}\cos\omega t)$ όπου θα είναι $x_{ad} > 0$ καθώς θεωρούμε ότι αρχικά το άστρο έχει εκτονωθεί. Αυτό σημαίνει ότι η διαταραχή στην θερμοκρασία και την πίεση θα είναι θ_{ad}, $p_{ad} < 0$ στην περιοχή που μελετάμε. Αν επιπλέον θεωρήσουμε ότι το άστρο εκτελεί ταλάντωση με τον θεμελιώδη κανονικό τρόπο ταλάντωσης, τότε η διαταραχή της θερμοκρασίας δεν θα αλλάζει πουθενά πρόσημο. Αυτό σημαίνει ότι αφού $\theta_{ad} < 0$ παντού η σχέση (3.5) θα δίνει θετικό έργο $W > 0$ για $\frac{\partial \lambda}{\partial m} > 0$ και αρνητικό έργο $W < 0$ για $\frac{\partial \lambda}{\partial m} < 0$. Για να δούμε από ποιους παράγοντες εξαρτάτε το $\frac{\partial \lambda}{\partial m}$ θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (3.3) από την οποία θα πάρουμε

$$\frac{\partial \lambda}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\left[-\frac{64\pi^2 acr_0^4 T_0^4}{3\kappa_0 l_0}\frac{\partial \theta_{ad}}{\partial m} + 4x_{ad} + 4\theta_{ad}\right] - \frac{\partial}{\partial m}\left[\left(\kappa_P + \nabla_{ad}\kappa_T\right)p_{ad}\right] \quad (3.6)$$

όπου βλέπουμε ότι ο πρώτος παράγοντας στα δεξιά της εξίσωσης έχει συμπεριφορά που εξαρτάτε μόνο από τα χαρακτηριστικά της ταλάντωσης, ενώ ο δεύτερος παράγοντας έχει συμπεριφορά που εξαρτάτε και από τον συντελεστή απορρόφησης της ατμόσφαιρας, δηλαδή την αδιαφάνειά της. Έτσι αν η διαμόρφωση της αδιαφάνειας είναι κατάλληλη τότε μπορεί με αυτό τον μηχανισμό να έχουμε τροφοδότηση των ταλαντώσεων και ενίσχυση του πλάτους τους. Για παράδειγμα κοντά στην επιφάνεια ενός άστρου όπου έχουμε μεγάλο πλάτος ταλάντωσης και άρα μεγάλη εκτόνωση, θα έχουμε κατά απόλυτη τιμή μεγάλο πλάτος για την διαταραχή της πίεσης, το οποίο καθώς θα πηγαίνουμε προς το εσωτερικό του άστρου θα ελαττώνεται. Αλλά επειδή θα έχουμε και $p_{ad} < 0$ λόγω εκτόνωσης θα είναι $\frac{\partial p_{ad}}{\partial m} < 0$. Αν επιπλέον θεωρήσουμε για απλότητα ότι οι ποσότητες $\kappa_P, \nabla_{ad}, \kappa_T$ είναι σταθερές τότε φαίνεται από την (3.6) ότι θετικό $\left(\kappa_P + \nabla_{ad}\kappa_T\right)$ οδηγεί σε θετική συνεισφορά για το λ και άρα ενίσχυση της ταλάντωσης. Πρέπει να επισημάνουμε ότι την σημαντικότερη συνεισφορά στην εξίσωση (3.6) την έχουν οι όροι με τις πρώτες παραγώγους της πίεσης και της θερμοκρασίας, δηλαδή

$$\frac{\partial \lambda}{\partial m} \sim 4\nabla_{ad}\frac{\partial p_{ad}}{\partial m} - \left(\kappa_P + \nabla_{ad}\kappa_T\right)\frac{\partial p_{ad}}{\partial m}$$

όπου βλέπουμε πως σύμφωνα με αυτά που είπαμε παραπάνω ο δεύτερος όρος είναι θετικός και είναι αποσταθεροποιητικός παράγοντας ενώ ο πρώτος όρος είναι αρνητικός και έχει την τάση να προκαλεί απόσβεση των ταλαντώσεων. Σημαντικός παράγοντας που μπορεί να ενεργοποιήσει αυτόν τον μηχανισμό για την τροφοδότηση των ταλαντώσεων είναι ο ιονισμός του αστρικού υλικού, γιατί από τον ιονισμό εξαρτάτε η αδιαβατική θερμοβαθμίδα. Έτσι σε μια ζώνη ιονισμού η ελάττωση του ∇_{ad} μπορεί να προκαλέσει ενίσχυση του δεύτερου όρου έναντι του πρώτου και άρα αστάθεια.

Ο παραπάνω μηχανισμός είναι ο μηχανισμός στον οποίο οφείλεται η ζώνη αστάθειας που είδαμε πως υπάρχει στο διάγραμμα H-R και στην οποία βρίσκονται οι Κηφείδες, οι *W Virginis*, οι *δ Scuti*, οι *RR Lyrae* και οι *ZZ Ceti*.

Ο πρώτος μηχανισμός διέγερσης των ταλαντώσεων στηριζόταν στην αδιαφάνεια κάποιων στρωμάτων του αστέρα. Ο δεύτερος μηχανισμός στηρίζεται στον ρυθμό παραγωγής της πυρηνικής ενέργειας. Θεωρούμε λοιπόν ότι βρισκόμαστε σε μια περιοχή στο εσωτερικό του άστρου όπου κυριαρχεί η παραγωγή πυρηνικής ενέργειας. Σε αυτή την περιοχή θα θεωρήσουμε ότι η διαταραχή στην λαμπρότητα οφείλεται μόνο στην διαταραχή του ρυθμού παραγωγής ενέργειας, δηλαδή $l_0 \frac{\partial \lambda}{\partial m} = \varepsilon_0 (\varepsilon_p p_{ad} + \varepsilon_T \theta_{ad})$, και η εξίσωση (3.4) που δίνει το έργο θα πάρει την μορφή

$$W = -\frac{\pi}{\omega} \int_0^M \theta_{ad} \left(\lambda \varepsilon_0 + \varepsilon_0 (\varepsilon_p p_{ad} + \varepsilon_T \theta_{ad}) \right) dm \Rightarrow$$

$$W = -\frac{\pi}{\omega} \int_0^M \theta_{ad} \varepsilon_0 \left(\lambda + (\varepsilon_p + \nabla_{ad} \varepsilon_T) p_{ad} \right) dm$$

όπου βλέπουμε πως το έργο εξαρτάται από τον παράγοντα $\varepsilon_p + \nabla_{ad} \varepsilon_T$, δηλαδή εξαρτάτε από το πως μεταβάλλεται ο ρυθμός παραγωγής της πυρηνικής ενέργειας. Φυσικά τα παραπάνω ισχύουν μόνο στην περιοχή όπου $\varepsilon_0 \neq 0$. Το πρόβλημα αυτού του μηχανισμού είναι ότι δρα κοντά στο κέντρο του άστρου, όπου παράγεται η πυρηνική ενέργεια, και εκεί τα πλάτη των διαταραχών είναι πολύ μικρότερα από ότι στην επιφάνεια με αποτέλεσμα το έργο να είναι μικρό και να μην μπορεί αυτός ο μηχανισμός να υπερνικήσει τις αποσβέσεις συνολικά στο άστρο. Όταν όμως για κάποιο μοντέλο η πίεση της ακτινοβολίας έχει σημαντική συνεισφορά ή ακόμα και την σημαντικότερη τότε παρατηρείται ότι το πλάτος της ταλάντωσης στο εσωτερικό είναι συγκρίσιμο με το πλάτος στην επιφάνεια με αποτέλεσμα ο μηχανισμός να υπερισχύει των αποσβέσεων. Αυτές τις συνθήκες τις συναντάμε σε άστρα μεγάλης μάζας που βρίσκονται στο άνω άκρο της κύριας ακολουθίας.

4ο Κεφάλαιο

Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε κάποια στοιχεία για τις ακτινικές ταλαντώσεις των σχετικιστικών αστέρων. Επειδή μια αυστηρή περιγραφή θα ξέφευγε από τα πλαίσια αυτής της εργασίας θα δούμε κάποια βασικά στοιχεία μέσα από το ποιοτικό μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε και στην αρχή της περιγραφής των Νευτώνειων ακτινικών ταλαντώσεων. Έτσι ορίζουμε και πάλι τις ποσότητες

M = ολική μάζα του άστρου

R = ακτίνα του άστρου

$\bar{\rho} = \frac{3}{4\pi}\frac{M}{R^3}$ = μέση πυκνότητα του άστρου

$\bar{P}$ = μέση πίεση στο εσωτερικό του άστρου

$\bar{\gamma}_{ad} = \Gamma = \frac{\bar{\rho}}{\bar{P}}\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\rho}}$ = μέσος αδιαβατικός εκθέτης

Στο εσωτερικό του άστρου πάλι θα έχουμε τις δύο δυνάμεις της μέσης άνωσης και του μέσου βάρους να αλληλοεξουδετερώνονται. Η διαφορά όμως από την Νευτώνεια περίπτωση είναι ότι η δύναμη του βάρους στην σχετικότητα θα έχει πιο περίπλοκη μορφή η οποία προκύπτει από την εξίσωση Oppenheimer-Volkov

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(\rho + P)(m(r) + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m(r))} \quad (4.1)$$

και μπορεί να γραφτεί υπό μορφή αναπτύγματος ως

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho}{r^2}(1 + \frac{P}{\rho c^2})(1 + 4\pi r^3 \frac{P}{m(r)c^2})(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2})^{-1} \quad (4.2)$$

Έτσι οι μέσες δυνάμεις θα είναι

$$\bar{F}_{\acute{\alpha}\nu\omega\sigma\eta} = \frac{\bar{P}}{R}$$

$$\bar{F}_{\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma} = \frac{GM\bar{\rho}}{R^2}(1 + \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}c^2})(1 + 4\pi R^3 \frac{\bar{P}}{Mc^2})(1 - \frac{2GM}{Rc^2})^{-1}$$

Το μέσο βάρος σε πρώτη προσέγγιση μπορεί να πάρει την μορφή

$$\bar{F}_{\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma} = \frac{GM\bar{\rho}}{R^2} + \frac{GM\bar{P}}{R^2c^2} + \frac{2G^2M^2\bar{\rho}}{R^3c^2} + \frac{4\pi GR\bar{\rho}\bar{P}}{c^2} =$$

$$= \frac{4}{3}G\pi\bar{\rho}^2 R + 4\frac{4\pi G}{3c^2}R\bar{\rho}\bar{P} + \left(\frac{4\pi G}{3c}\right)^2 \bar{\rho}^3 R^3$$

Αν τώρα θεωρήσουμε πάλι μια ακτινική διαταραχή στην οποία η επιφάνεια του άστρου από την ακτίνα R έχει πάει στην ακτίνα R+δR τότε θα έχουμε διαταραχή στην μέση πυκνότητα και στην μέση πίεση που θα είναι

$$\bar{\rho}+\delta\bar{\rho}=\bar{\rho}-3\frac{3}{4\pi}\frac{M}{R^4}\delta R=\bar{\rho}-3\frac{\bar{\rho}}{R}\delta R$$
$$\bar{P}+\delta\bar{P}=\bar{P}+\frac{\bar{P}}{\bar{\rho}}\Gamma\delta\bar{\rho}=\bar{P}-3\frac{\Gamma\bar{P}}{R}\delta R$$

Έτσι η αντίστοιχη αλλαγή στις δυνάμεις θα είναι

$$\delta\bar{F}_{\acute{\alpha}\nu\omega\sigma\eta}=\frac{\delta\bar{P}}{R}-\frac{\bar{P}}{R^2}\delta R=-(3\Gamma+1)\bar{F}_{\acute{\alpha}\nu\omega\sigma\eta}\left(\frac{\delta R}{R}\right)$$
$$\delta\bar{F}_{\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma}=\frac{4}{3}G\pi\bar{\rho}^2(-5\delta R)+4\frac{4\pi G}{3c^2}\bar{\rho}\bar{P}(-2-3\Gamma)\delta R$$

Η δύναμη επαναφοράς της διαταραχής με βάση τα παραπάνω είναι

$$F=\delta\bar{F}_{\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma}-\delta\bar{F}_{\acute{\alpha}\nu\omega\sigma\eta}=\frac{4}{3}G\pi\bar{\rho}^2(-5\delta R)+4\frac{4\pi G}{3c^2}\bar{\rho}\bar{P}(-2-3\Gamma)\delta R+(3\Gamma+1)\bar{F}_{\acute{\alpha}\nu\omega\sigma\eta}\left(\frac{\delta R}{R}\right)$$

και έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία επιτάχυνσης που θα είναι $F=-\bar{\rho}\delta\ddot{R}$. Από τη σχέση αυτή και αν πάρουμε υπόψη μας ότι $\bar{F}_{\acute{\alpha}\nu\omega\sigma\eta}=\bar{F}_{\beta\acute{\alpha}\rho o\varsigma}$ έχουμε τελικά την σχέση

$$\boxed{\delta\ddot{R}=-\left[3\left(\Gamma-\frac{4}{3}\right)-\frac{4M}{Rc^2}\left(2+3\Gamma\right)\right]\frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}\delta R}\quad(4.3)$$

Η σχέση αυτή ορίζει την συχνότητα του βασικού κανονικού τρόπου ταλάντωσης του άστρου

$$\boxed{\omega^2=\left[3\left(\Gamma-\frac{4}{3}\right)-\frac{4M}{Rc^2}\left(2+3\Gamma\right)\right]\frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}}\quad(4.4)$$

όπου βλέπουμε ότι αν θεωρήσουμε πως το άστρο είναι Νευτώνειο, δηλαδή στο όριο όπου $c\to\infty$, τότε καταλήγουμε στο αποτέλεσμα που είχαμε βγάλει και παραπάνω που λέει ότι όσο ο μέσος αδιαβατικός εκθέτης είναι μεγαλύτερος από $\frac{4}{3}$ τότε το άστρο είναι ευσταθές και οι διαταραχές οδηγούν σε αρμονικές ταλαντώσεις ενώ αν ο μέσος αδιαβατικός εκθέτης γίνει μικρότερος από $\frac{4}{3}$ τότε το άστρο είναι ασταθές σε διαταραχές με αποτέλεσμα οι διαταραχές να αυξάνουν εκθετικά. Η διαφοροποίηση στην σχετικιστική περίπτωση είναι ότι ο επιπλέον όρος που προκύπτει από τις σχετικιστικές διορθώσεις έχει ως αποτέλεσμα η κρίσιμη τιμή του αδιαβατικού εκθέτη για την οποία έχουμε αστάθεια να είναι μεγαλύτερη του $\frac{4}{3}$. Άρα βλέπουμε

ότι οι σχετικιστικές διορθώσεις εισαγάγουν επιπλέον αστάθειες. Τα παραπάνω ποιοτικά αποτελέσματα προκύπτουν και από πιο αυστηρή διερεύνηση των ακτινικών ταλαντώσεων. Συγκεκριμένα μια πιο αυστηρή μελέτη θα μας έδινε πάλι ένα πρόβλημα ιδιοτημών Sturm-Liouville όπως προέκυψε με τις Νευτώνειες ακτινικές ταλαντώσεις που θα έχει ακριβός τις ίδιες ιδιότητες όσων αφορά τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιοσυναρτήσεις.

Η χρήση ενός σχετικιστικού μοντέλου για την περιγραφή των ακτινικών ταλαντώσεων αποδεικνύεται πως έχει νόημα μόνο για Αστέρες Νετρονίων και για άστρα πολύ μεγάλης μάζας (μάζες της τάξης των $100M_{\odot}$) τα οποία είναι πλήρως σχετικιστικά, ενώ ακόμα και για λευκούς Νάνους τα σχετικιστικά φαινόμενα δεν είναι αρκετά σημαντικά για να έχουν αισθητό αποτέλεσμα.

Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα της μελέτης της ευστάθειας των Αστέρων Νετρονίων μέσω των ακτινικών τους ταλαντώσεων είναι ότι εμφανίζεται άνω όριο στην κεντρική πυκνότητα που μπορεί να έχει ένα τέτοιο άστρο. Αυτό οφείλεται στο ότι από κάποια τιμή της κεντρικής πυκνότητας[1] και πάνω, ο θεμελιώδης κανονικός τρόπος ταλάντωσης είναι ασταθής και αυτό έχει ως αποτέλεσμα να εμφανίζεται άνω όριο στην μάζα των Αστέρων Νετρονίων. Το όριο αυτό λέγεται όριο Oppenheimer -Volkoff.

[1] Πρέπει να επισημάνουμε ότι για την μελέτη των Αστέρων Νετρονίων στα μοντέλα χρησιμοποιούνται πολυτροπικές καταστατικές εξισώσεις, αφού οι ιδιότητες της ύλη στο εσωτερικό τους μπορούν να περιγραφούν γενικά παντού με αυτή τη μορφή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα μοντέλα μας να διατηρούν τις γενικές ιδιότητες των μοντέλων που προκύπτουν από την λύση της εξίσωσης Lane-Emden. Αυτό με την σειρά του έχει ως αποτέλεσμα τα μοντέλα μας για δεδομένη επιλογή της καταστατικής εξίσωσης να αποτελούν μια μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων που προσδιορίζονται απόλυτα από την κεντρική τους πυκνότητα. Δηλαδή η κεντρική πυκνότητα προσδιορίζει την μάζα και την ακτίνα του Αστέρα Νετρονίων.

Βιβλιογραφία

1. KIPPENHAHN, R. WEIGERT, A. (1991) **STELLAR STRUCTURE AND EVOLUTION** (SPRINGER-VERLAG)
2. MISNER, C.W. THORNE, K.S. WHEELER, J.A. (1998) **GRAVITATION** (W.H. FREEMAN AND COMPANY)
3. ZEL'DOVICH, YA.B. NOVIKOV, I.D. (1996) **STARS AND RELATIVITY** (DOVER PUBLICATIONS)
4. SHAPIRO, S.L. TEUKOLSKY, S.A. (1983) **BLACK HOLES, WHITE DWARFS AND NEUTRON STARS** (JHON WILEY & SONS)
5. BRADLEY W. CARROLL, DALE A. OSTLIE (1996) **MODERN ASTROPHYSICS** (ADDISON-WESLEY)
6. FRANK SHU **ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗ ΤΟΜΟΣ Ι** (ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ)
7. ΛΑΣΚΑΡΙΔΗΣ ΠΑΥΛΟΣ **ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΑΣΤΕΡΩΝ** (ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥΣ ΦΟΙΤΗΤΕΣ)
8. MUNTEANU, A., GARCIA-BERRO, E., JOSE, J. arXiv:astro-ph/0301538v1