

Εφαρμογές στη γενική θεωρία της

σχετικότητας:

Ο χώρος γύρω από συμπαγή αστροφυσικά
αντικείμενα

Γεώργιος Παππάς
Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Αστρονομίας, Αστροφυσικής και Μηχανικής

28 Ιουνίου 2012

- Παρουσίαση κυρήτρων.
- Η αναλυτική λύση Two-Soliton.
 - Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής μετρικής.
 - Κατάλληλος μετασχηματισμός συντεταγμένων.
 - Κατάλληλη αντιστοίχηση αναλυτικής με αριθμητική μετρική (αριθμητικά πολύπολα).
 - Επιλογή κριτηρίων σύγκρισης.
- Αποτελέσματα της σύγκρισης.
- Αστροφυσικές εφαρμογές.

• Κίνητρα.

- Τεράστιος όγκος πληροφοριών από τη γειτονά συμπαγών αντικειμένων στο ηλεκτρομαγνητικό φάσμα.
- Οι κλασικές λύσεις των Schwarzschild και Kerr δεν μπορούν να αποδώσουν όλες τις υδιότητες ρεαλιστικών αστέρων νετρονίων.
- Οι μέχρι τώρα χρησιμοποιούμενες αναλυτικές λύσεις (Hartle-Thorne¹, Manko et al.²) δεν είναι αρκετά ικανοποιητικές.
- Οι αριθμητικές λύσεις είναι όσο ακριβείς θέλουμε, αλλά δεν είναι εύχρηστες.
- Οι αναλυτικές λύσεις θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και για να ελέγξουν την θεωρία της Βαρύτητας.

¹ J. B. Hartle and K. S. Thorne, ApJ **153** (1968), 807.

² V. S. Manko, E. W. Mielke, and J. D. Sanabria-Gómez, Phys. Rev. D **61** (2000), 081501.

- **Η αναλυτική λύση Two-Soliton.**

Στοιχείο μήκους στάσμων και αξιονικά συμμετρικά χωρόχρονα γ

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\phi)^2 + f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2]$$

Οι εξισώσεις πεδίου ανάγονται στην εξίσωση του Ernst

$$(Re(\mathcal{E}))\nabla^2\mathcal{E} = \nabla\mathcal{E} \cdot \nabla\mathcal{E}$$

$$\text{όπου } \mathcal{E} = f + i\psi \text{ και } f = -\xi^a\xi_a, \psi_a \equiv \nabla_a\psi = \epsilon_{abcd}\xi^b\nabla^c\xi^d.$$

• Το δυναμικό του Ernst στον αξιονα καθορίζει το δυναμικό του Ernst παγτού.

Η Two-Soliton είναι μια λύση 4ων παραμέτρων και προκύπτει από την επιλογή του δυναμικού στον αξιονα της μορφής:

$$e(z) = \frac{(z - M - ia)(z + ib) - k}{(z + M - ia)(z + ib) - k}$$

$$e(z) = \frac{(z - M - ia)(z + ib) - k}{(z + M - ia)(z + ib) - k}$$

Πρώτα πολύπολα της μετρουκής:

$$\begin{aligned} M_0 &= M, \quad M_2 = -(a^2 - k)M, \\ M_4 &= \left(a^4 - (3a^2 - 2ab + b^2)k + k^2 + \frac{1}{7}(2a^2 - k)M^2 \right) M \\ J_1 &= aM, \quad J_3 = -[a^3 - (2a - b)k]M. \end{aligned}$$

Η Two-Soliton μπορεί να καλύψει όλο το φάσμα περιστροφών και μεταβαύγει με συγεχή τρόπο στις λύσεις Schwarzschild και Kerr³. Περιέχει ως υποπερίπτωση την λύση των Manko et al.⁴

$$k = -\frac{1}{4} (M^2 - (a - b)^2) - \frac{M^2 b^2}{M^2 - (a - b)^2} + ab.$$

³T. P. Sotiriou and G.P., J. Phys.: Conf. Ser. **8** (2005), 23.

⁴V. S. Manko, E. W. Mielke, and J. D. Sanabria-Gómez, Phys. Rev. D **61** (2000), 081501.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(\rho, z) &= \frac{E_+}{E_-}, \\
 f(\rho, z) &= \frac{E_+ E_-^* + E_+^* E_-}{2E_- E_-^*}, \\
 e^{2\gamma(\rho, z)} &= \frac{E_+ E_-^* + E_+^* E_-}{2K_0 K_0^* \prod_{k=1}^4 R_k}, \\
 \omega(\rho, z) &= \frac{2Im [E_- H^* - E_-^* G]}{E_+ E_-^* + E_+^* E_-}.
 \end{aligned}$$

Óπου για παράδειγμα οι όριζουσες E_\pm υπορούν να εκφραστούν ως $E_\pm = A \mp B$, με

$$\begin{aligned}
 A &= -16dk(r_- r_+ + R_- R_+) M^2 \\
 &\quad - [(4(a-b)^2(ab-d-k) - 4((a-2b)b-d)M^2)(R_- r_+ + r_- R_+) \\
 &\quad - 4i((a-b)(ab-d-k) - bM^2)(R_- r_+ - r_- R_+) \kappa_-] \kappa_+^2 \\
 &\quad + [(4(a-b)^2(ab+d-k) - 4((a-2b)b+d)M^2)(r_- R_- + r_+ R_+) \\
 &\quad - 4i((a-b)(ab+d-k) - bM^2)(r_- R_- - r_+ R_+) \kappa_+] \kappa_-^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= 2\kappa_- \kappa_+ M [i(R_+ - R_-)(\kappa_+ - \kappa_-)(2k(a-b) + b(M^2 - a^2 + b^2 - \kappa_- \kappa_+)) \\
 &\quad + i(r_- - r_+)(\kappa_- + \kappa_+)(2k(a-b) + b(M^2 - a^2 + b^2) + b\kappa_- \kappa_+) \\
 &\quad + 2d((M^2 - a^2 + b^2)(R_- - r_- - r_+ + R_+) - \kappa_- \kappa_+(r_- + R_- + r_+ + R_+))] .
 \end{aligned}$$

Η λύση Two-Soliton παρουσιάστηκε στην εργασία, V. S. Manko, J. Martín, and E. Ruiz, *Six-parameter solution of the Einstein-Maxwell equations possessing equatorial symmetry*, Journal of Mathematical Physics **36** (1995), 3063-3073, όπου περιέχει και ηλεκτρομαγνητικά πολύπολα.

Σχεδόν όλες οι εκφράσεις για τις μετρικές συναρτήσεις στην συγκεκριμένη εργασία ήταν λάθος ή εύχαν τυπογραφικά προβλήματα.

1ο Ηθικό Δίδαγμα: δεν εμπιστεύόμαστε τυφλά τα αποτελέσματα δύλων.

- Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής μετρικής:
Κατάλληλος μετασχηματισμός συντεταγμένων.

Αναλυτική μετρική: Συντεταγμένες Weyl-Παπαπέτρου

$$ds^2 = -f(dt - w d\phi)^2 + f^{-1} \left[e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2 \right]$$

Αριθμητική μετρική: Ημι-ισοτροπικές συντεταγμένες

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + B^2 e^{-2\nu} r^2 \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\mu} (dr^2 + r^2 d\theta^2)$$

Για να γίνει η οποιαδήποτε σύγκριση ανάμεσα στις αριθμητικές και τις αναλυτικές μετρικές, θα πρέπει να εκφραστούν όλη μετρικές στις ίδιες συντεταγμένες.

Η συντεταγμένη ρ ορίζεται ως $\rho \equiv (g_{t\phi})^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}$.

Από τις εξισώσεις πεδίου προκύπτει ότι η συνάρτηση $\rho \equiv r \sin \theta B = \varpi B$ ικανοποιεί την

$$\frac{\partial^2(\varpi B)}{\partial \varpi^2} + \frac{\partial^2(\varpi B)}{\partial \zeta^2} = 0$$

όπου $\varpi \equiv r \sin \theta$, $\zeta \equiv r \cos \theta$. Άρα η ρ μπορεί να ορισθεί απευθείας ως η μία από τις Weyl-Παπαπέτρου συντεταγμένες, ενώ η άλλη συντεταγμένη, η $z = z(\varpi, \zeta)$, προκύπτει ως η αρμονική συζυγής της ρ και ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \varpi} &= -\frac{\partial \rho}{\partial \zeta} = -\varpi \frac{\partial B}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} &= \frac{\partial \rho}{\partial \varpi} = B + \varpi \frac{\partial B}{\partial \varpi}. \end{aligned}$$

Προσοχή!!

Η εξίσωση $\frac{\partial^2(\varpi B)}{\partial \varpi^2} + \frac{\partial^2(\varpi B)}{\partial \zeta^2} = 0$ ισχύει μόνο στο κενό και όχι μέσα στην ύλη.

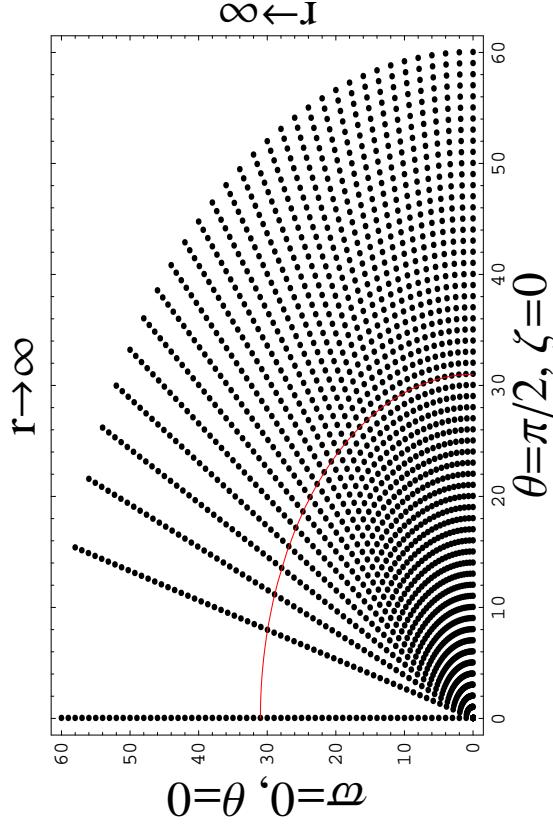
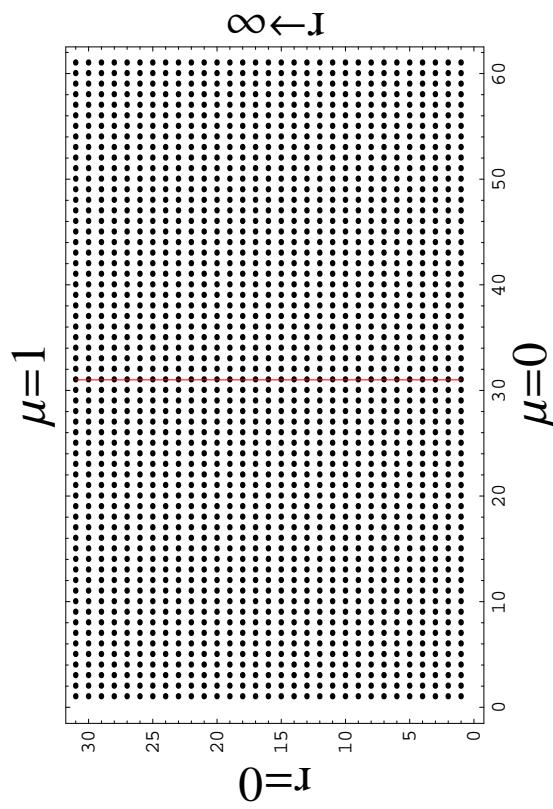
Άρα, δεν μπορεί να ολοκληρώσει κανείς τις συνθήκες Cauchy-Riemann από το κέντρο του άστρου, όπου $z = 0$, και κατά μήκος του άξονα συμετρίας για να υπολογίσει το z σε όλο τον άξονα.

Στη βιβλιογραφία το λάθος αυτό δεν έχει αποφευχθεί.
20 Ηδυκό Διδαγμα: δεν εμπιστεύμαστε τυφλά τα αποτελέσματα αλλων.

Για τον υπολογισμό του z παντού έξω από το άστρο, θα πρέπει να βρεθεί μια κατάλληλη διαδρομή ολοκλήρωσης που να μην μπαίνει στις περιοχές όπου έχουμε ύλη.

Λίγα λόγια για τον RNS.

Πλάγια:



Το πλέγμα στις συντεταγμένες x και μ και στις συντεταγμένες r και ζ . Η ακτινική συντεταγμένη ορίζεται ως $r = \frac{x r_e}{1-x}$.

Ολοκλήρωση για τον υπολογισμό του z ξεκινώντας από το σημερινό επίπεδο $z(\varpi, \zeta = 0) = 0$,

$$\begin{aligned} z(r, \mu) &= r_e \left(x_0^2 \int_0^\mu \frac{\partial B}{\partial x} d\mu' + \frac{x_0}{1 - x_0} \int_0^\mu B d\mu' \right) \\ &\quad + \left(\mu \int_{r_0}^r B dr' + (\mu^2 - 1) \int_{r_0}^r \frac{\partial B}{\partial \mu} dr' \right). \end{aligned}$$

Σύγδεση των μετρικών συναρτήσεων,

$$\begin{aligned} f &= e^{2\nu} - \omega^2 \rho^2 e^{-2\nu}, \\ w &= -\frac{\omega \rho^2 e^{-2\nu}}{f}, \\ e^{2\gamma} &= f \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial \varpi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \zeta} \right)^2 \right]^{-1} e^{2\mu}. \end{aligned}$$

Από την γωνιακή ολοκλήρωση, το σφάλμα που εισάγει ο ψετασχηματισμός των συντεταγμένων είναι γενικά της τάξης του $\Delta z/M \simeq 10^{-6} - 10^{-7}$. Άρα έχουμε έναν καλό αλγόριθμο μετασχηματισμού συντεταγμένων για να συγκρίνουμε αναλυτικές με αριθμητικές μετρικές στις ίδιες συντεταγμένες⁵.

- Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής μετρικής:
Κατάλληλη αντιστοίχηση αναλυτικής με αριθμητική μετρική.

Πώς θα αντιστοιχίσουμε μια αναλυτική μετρική σε μια αριθμητική μετρική:

Η αντιστοίχηση θα πρέπει να γίνει χρησιμοποιώντας καθολικά και όχι τοπικά κριτήρια.

Έχει αποδειχθεί ότι στην περίπτωση των στάσιμων και αξιονικά συμμετρικών χωρόχρονων, το φάσμα των πολυπολικών ροπών χαρακτηρίζεται πλήρως του χωρόχρονο. Άρα τα πολύπολα είναι καλά κριτήρια για μια καθολική αντιστοίχηση των λύσεων (υπόθεση).

Ποια είναι τα πολύπολα της αριθμητικής μετρικής;

- Πολύπολα αριθμητικών μετρικών.

Νευτώνεια πολύπολα:

$$\Phi(r) = \frac{\mathcal{Q}}{r} + \frac{\mathcal{Q}_a x^a}{r^3} + \frac{\mathcal{Q}_{ab} x^a x^b}{r^5} + \dots$$

όπου, \mathcal{Q} , \mathcal{Q}_a , \mathcal{Q}_{ab} , είναι ολοκληρώματα στην πηγή που έχουν τη μορφή,

$$\mathcal{Q} = \int \rho d^3x, \quad \mathcal{Q}_a = \int x^a \rho d^3x, \dots$$

Τα πολύπολα είναι γενικά τα γυστικές ποσότητες.

Ορισμός των πολυπόλων στο άπειρο:

$$x^a \rightarrow \tilde{x}^a = r^{-2} x^a, \quad \tilde{r}^2 = \tilde{x}^a \tilde{x}_a = r^{-2}$$

$$\Phi(r) = \tilde{r} \left(\mathcal{Q} + \mathcal{Q}_a \tilde{x}^a + \mathcal{Q}_{ab} \tilde{x}^a \tilde{x}^b + \dots \right)$$

Αν ορίσουμε το δυναμικό στο άπειρο ως $\tilde{\Phi} = \tilde{r}^{-1} \Phi$, τότε τα πολύπολα είναι,

$$P_{a_1 \dots a_n} = \tilde{D}_{a_n} P_{a_1 \dots a_{n-1}} = \tilde{D}_{a_1} \dots \tilde{D}_{a_n} \tilde{\Phi}$$

Σχετικιστικές πολυπολικές ροπές:

- Γενίκευση των γευτώνειων πολυπολικών ροπών,
- Ορίζονται για ασυμπτωτικά επίπεδους χωρόχρονους στο άπειρο από κατάλληλο «δυναμικό» μέσω αναδρομικής σχέσης,
- Γιαρχουν δύο ομάδες πολυπόλων, τα πολύπολα μάζας και τα πολύπολα της περιστροφής,
- Για τις δύο ομάδες έχουν δύο δυναμικά που παράγουν τα πολύπολα, τα δυναμικά Φ_M , Φ_J ,
- Το πολύπολο τάξης n δεν είναι απλά n -οστή παράγωγος του αντίστοιχου δυναμικού, όπως στη νευτώνεια περίπτωση, αλλά έχουμε και επιπλέον συγεισφορά από συνδυασμούς χαμηλότερης τάξης πολυπόλων.

Τα πολύπολα στην περίπτωση των αξονικά συμμετρικών και στάσιμων χωροχρόνων ανάγονται από ταυνυστικές σε βαθμωτές ποσότητες εξαύτας της αξονικής συμμετρίας.

Αριθμητικοί χωρόχρονοι για γρήγορα περιστρεφόμενους αστέρες γετρούων.

Το 1976 οι Butterworth & Ipser έγραψαν το στοιχείο μήκους για έναν στάσιμο και αξονικά συμμετρικό χωρόχρονο⁶ (ο οποίος διέθετε δύο πεδία Killing, ένα χρονοειδές ξ^a , και ένα χωροειδές η^a)

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + r^2 \sin^2 \theta B^2 e^{-2\nu} (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2(\zeta-\nu)} (dr^2 + r^2 d\theta^2),$$

Οι μετρικές συναρτήσεις αυτού του χωροχρόνου έχουν το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα:

$$\begin{aligned} \nu &= \sum_{l=0}^{\infty} \nu_{2l}(r) P_{2l}(\mu), \\ \omega &= \sum_{l=0}^{\infty} \omega_{2l}(r) P_{2l+1,\mu}(\mu), \\ B &= \sum_{l=0}^{\infty} B_{2l}(r) T_{2l}^{1/2}(\mu), \end{aligned}$$

όπου P_l είναι τα πολυώνυμα Legendre, $\mu = \cos \theta$, και $T_l^{1/2}$ είναι τα πολυώνυμα Gegenbauer.

⁶ E. M. Butterworth and J. R. Ipser, ApJ 204, 200 (1976).

Από τις εξισώσεις πεδίου προκύπτει ότι τα παραπάνω ασυμπτωτικά αναπτύγματα αν γραφούν αναλυτικά έχουν τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 \nu &= \left\{ -\frac{M}{r} + \frac{1}{3}\tilde{B}_0\frac{M}{r^3} + \frac{J^2}{r^4} + \left[-\frac{\tilde{B}_0^2}{5} + \frac{\tilde{B}_2^2}{15} - \frac{12J^2}{5} \right] \frac{M}{r^5} + \dots \right\} \\
 &\quad + \left\{ \frac{\tilde{\nu}_2}{r^3} - 2\frac{J^2}{r^4} + [\dots] \frac{1}{r^5} + \dots \right\} P_2(\mu) \\
 &\quad + \left\{ \frac{\tilde{\nu}_4}{r^5} + \dots \right\} P_4(\mu) + \dots \\
 \omega &= \left\{ \frac{2J}{r^3} - \frac{6JM}{r^4} + \frac{6}{5} \left[8 - 3\frac{\tilde{B}_0}{M^2} \right] \frac{JM^2}{r^5} + (\dots) \frac{J}{r^6} + \dots \right\} P_{1,\mu}(\mu) \\
 &\quad + \left\{ \frac{\tilde{\omega}_2}{r^5} + (\dots) \frac{1}{r^6} - \dots \right\} P_{3,\mu}(\mu) + \dots \\
 B &= \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\tilde{B}_0}{r^2} \right) T_0^{1/2}(\mu) + \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{\tilde{B}_2^2}{r^4} T_2^{1/2}(\mu) + \dots
 \end{aligned}$$

Το 1989 οι Komatsu, Eriguchi, & Hachisu⁷ έγραψαν το ίδιο στοιχείο μήκους χρησιμοποιώντας διαφορετικές μετρικές συγρησεις,

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + r^2 \sin^2 \theta e^{2\beta} (d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\alpha} (dr^2 + r^2 d\theta^2).$$

όπου αυτές οι μετρικές συναρτήσεις σχετίζονται με τις προηγούμενες μέσω των σχέσεων,

$$\nu_{\text{BI}} = \nu_{\text{KEH}} = \nu, \quad B_{\text{BI}} e^{-\nu} = e^{\beta_{\text{KEH}}}, \quad \zeta_{\text{BI}} = \nu + \alpha_{\text{KEH}}.$$

Για την ολοκλήρωση των εξισώσεων πεδίου εισήγαγαν έναν διαφορετικό αλγόριθμο που στηριζόταν στη χρήση συναρτήσεων Green. Ο κώδικας RNS στηρίζεται σε αυτόν τον αλγόριθμο.

⁷H. Komatsu, Y. Eriguchi, and I. Hachisu, MNRAS 237, 355 (1989).

Οι παρακάτω συνδυασμοί των συναρτήσεων $\nu_{\text{ΚΕΗ}}$ και $\beta_{\text{ΚΕΗ}}$,

$$\gamma = \nu_{\text{ΚΕΗ}} + \beta_{\text{ΚΕΗ}}, \quad \rho = \nu_{\text{ΚΕΗ}} - \beta_{\text{ΚΕΗ}},$$

μαζί με τη συνάρτηση ω μπορούν να εκφραστούν ως αναπτύγματα σε δυνάμεις του $1/r$ που έχουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-2 \frac{M_{2n}}{r^{2n+1}} + \alpha_n \tau \epsilon_r(\zeta) P_{2n}(\mu) \right), \\ \omega &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{2n-1} \frac{S_{2n-1}}{r^{2n+1}} + \alpha_n \tau \epsilon_r(\zeta) \frac{P_{2n-1}^1(\mu)}{\sin \theta} \right), \\ \gamma &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D_{2n-1}}{r^{2n}} + \alpha_n \tau \epsilon_r(\zeta) \frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin \theta} \right). \end{aligned}$$

Οι συντελεστές M_{2n} και S_{2n-1} των παραπάνω αναπτύγματων, σε απευθείας αναλογία με τη γεντάνεια περίπτωση, χειρήσηκε στο παρελθόν ότι αντιστοιχούσαν στα σχετικούσα πολύπολα της μάζας και της στροφοριαής αντίστοιχα. Συγκρίνοντας τις παραπάνω εκφράσεις με τις αντίστοιχες εκφράσεις των BI βλέπουμε ότι έχουμε την αντιστοιχία $M_2 = -\tilde{\nu}_2$ και $S_3 = \frac{3}{2}\tilde{\omega}_2$.

Αυτή η υπόθεση δεν ήταν σωστή.

Σχετικιστικά αριθμητικά πολύπολα.

Το 1995 ο Ryan πρότεινε έναν αλγόριθμο για την μέτρηση των πολυπολικών ροπών ενός χωρόχρονου από την παρατήρηση βαρυτικών κυκλάτων⁸.

Ο αλγόριθμος του Ryan εκφράζει την απώλεια εγέργειας ανά λογαριθμική μεταβολή της τροχιακής συχνότητας, $\Delta \tilde{E}$ ενός σωματιδίου που πέφτει αδιαβατικά προς ένα κεντρικό αντικείμενο, ως ανάπτυγμα σε δυνάμεις της τροχιακής συχνότητας της κυκλικής τροχιάς στην οποία βρίσκεται το σωματίδιο.

Οι συντελεστές αυτού του αναπτύγματος είναι συναρτήσεις των σχετικιστικών πολυπολικών ροπών.

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{E} = & \frac{1}{3}v^2 - \frac{1}{2}v^4 + \frac{20}{9}\frac{S_1}{M^2}v^5 + \left(-\frac{27}{8} + \frac{M_2}{M^3}\right)v^6 + \frac{28}{3}\frac{S_1}{M^2}v^7 \\ & + \left(-\frac{225}{16} + \frac{80}{27}\frac{S_1^2}{M^4} + \frac{70}{9}\frac{M_2}{M^3}\right)v^8 + \left(\frac{81}{2}\frac{S_1}{M^2} + 6\frac{S_1 M_2}{M^5} - 6\frac{S_3}{M^4}\right)v^9 + \dots\end{aligned}$$

όπου $v = (M\Omega)^{1/3}$ και $S_1 = J$.

⁸F. D. Ryan, Phys. Rev. D 52, 5707 (1995).

Αν εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Ryan στην περίπτωση των αριθμητικών μετρικών, μπορούμε να ταυτοποιήσουμε τα σωστά σχετικιστικά πολύπολα.

Από τον αλγόριθμο του Ryan και την μετρική των Butterworth & Ipson υπολογίζουμε για την τροχιακή συχνότητα

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{-g_{t\phi,r} + \sqrt{(g_{t\phi,r})^2 - g_{tt,r}g_{\phi\phi,r}}}{g_{\phi\phi,r}},$$

το ανάπτυγμα σε σειρά ως προς την παράμετρο $x = (M/r)^{1/2}$, το οποίο μετά το αντιστρέφουμε για να πάρουμε την έκφραση

$$\begin{aligned} x &= v + \frac{v^3}{2} + \frac{jv^4}{3} + \frac{1}{24}(13 + 4b - 6q)v^5 + \frac{jv^6}{2} \\ &\quad + \frac{(97 + 28b + 56j^2 - 144q)v^7}{144} \\ &\quad + \frac{(373j + 292bj - 330jq - 270w_2)v^8}{360} + O(v^9), \end{aligned}$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει τις ποσότητες $j = \frac{J}{M^2}$, $q = \frac{\nu_2}{M^3}$, $w_2 = \frac{\omega_2}{M^4}$, $b = \frac{B_0}{M^2}$.

Το επόμενο βήμα είναι να εκφράσουμε την ενέργεια ανά μονάδα μάζας,

$$\tilde{E} = \frac{-g_{tt} - g_{t\phi}\Omega}{\sqrt{-g_{tt} - 2g_{t\phi}\Omega - g_{\phi\phi}\Omega^2}},$$

ως σειρά σε δυνάμεις του $x = (M/r)^{1/2}$ καλ να αγτικαταστήσουμε την προηγούμενη εκφραση για το x . Ο τελικός υπολογισμός του

$$\Delta \tilde{E} = -\frac{d\tilde{E}}{d \log \Omega} = -\frac{v d\tilde{E}}{3 dv},$$

θα μας δώσει το ανάπτυγμα,

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{E} &= \frac{v^2}{3} - \frac{v^4}{2} + \frac{20jv^5}{9} - \frac{(89 + 32b + 24q)}{24}v^6 + \frac{28jv^7}{3} \\ &\quad \frac{5(1439 + 896b - 256j^2 + 672q)v^8}{432} \\ &+ \frac{((421 + 64b - 60q)j - 90w_2)v^9}{10} + O(v^{10}), \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές του προηγούμενου αναπτύγματος με τους συντελεστές του αρχικού αναπτύγματος του Ryan, βλέπουμε ότι τα σωστά πρώτα πολύπολα είναι⁹,

$$\begin{aligned} M_2^{corr} &= -\tilde{\nu}_2 - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4} + b\right)M^3 = M_2 - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4} + b\right)M^3, \\ S_3^{corr} &= \frac{3}{2}\tilde{\omega}_2 - \frac{12}{5}\left(\frac{1}{4} + b\right)jM^4 = S_3 - \frac{12}{5}\left(\frac{1}{4} + b\right)jM^4. \end{aligned}$$

Για πάρχουν λεπτά θέματα που μπορούν να μας διαφέύγουν για αρκετό καιρό. Το Ηθικό Δίδαγμα: δεν εμπιστεύομαστε τυφλά τα αποτελέσματα αλλων.

⁹G.P. and T. A. Apostolatos, Phys. Rev. Lett. 108 (2012), 231104.

Συνέπειες της διόρθωσης στα πολύπολα.

Ποσοτικά αποτελέσματα της διόρθωσης:

EoS AU.

#	M	j	M_2	S_3	b	$\Delta M_2(\%)$	$\Delta S_3(\%)$
4	2.087	0.414	-6.08	-10.0	-0.23	4.032	3.805
9	2.111	0.650	-15.2	-40.5	-0.20	4.008	3.716
10	2.112	0.661	-15.7	-42.7	-0.20	4.002	3.706
12	3.164	0.194	-1.68	-1.37	-0.24	21.63	31.69
15	3.231	0.485	-12.0	-26.6	-0.20	18.43	24.82
17	3.273	0.603	-20.2	-58.1	-0.18	16.92	21.80
19	3.304	0.676	-27.0	-90.4	-0.17	15.86	19.77
20	3.318	0.706	-30.3	-107.	-0.16	15.40	18.88
21	3.388	0.510	-12.8	-27.8	-0.19	26.05	42.10
22	3.388	0.510	-12.9	-28.1	-0.19	25.75	41.32
28	3.458	0.659	-26.0	-82.7	-0.17	19.79	27.20
29	3.477	0.694	-30.1	-103.	-0.16	18.91	25.31
30	3.487	0.713	-32.5	-115.	-0.16	18.45	24.34

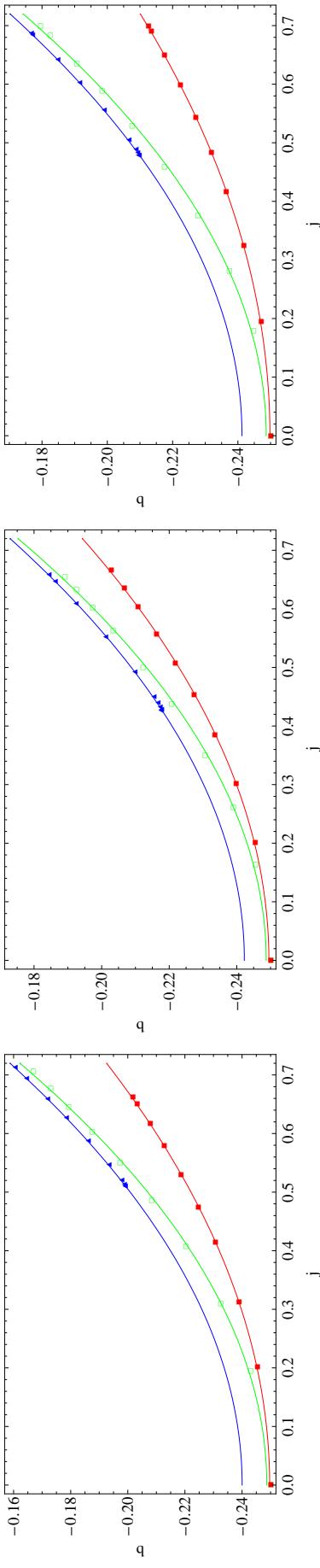
EoS FPS.

#	M	j	M_2	S_3	b	$\Delta M_2(\%)$	$\Delta S_3(\%)$
5	2.087	0.452	-7.85	-14.6	-0.22	3.634	3.311
7	2.098	0.557	-12.0	-28.0	-0.21	3.575	3.228
9	2.106	0.636	-15.9	-42.9	-0.20	3.504	3.136
10	2.109	0.666	-17.6	-49.9	-0.20	3.469	3.091
14	2.686	0.349	-4.81	-7.43	-0.23	11.63	12.90
17	2.727	0.562	-14.6	-39.0	-0.20	9.428	9.805
19	2.744	0.633	-19.7	-60.8	-0.19	8.734	8.866
20	2.750	0.654	-21.4	-69.0	-0.18	8.543	8.607
21	2.823	0.427	-6.54	-11.7	-0.21	17.55	22.14
22	2.823	0.428	-6.69	-12.1	-0.21	16.97	21.12
29	2.882	0.647	-21.1	-67.6	-0.18	10.64	11.25
30	2.884	0.658	-22.2	-72.8	-0.18	10.42	10.94

EoS L.

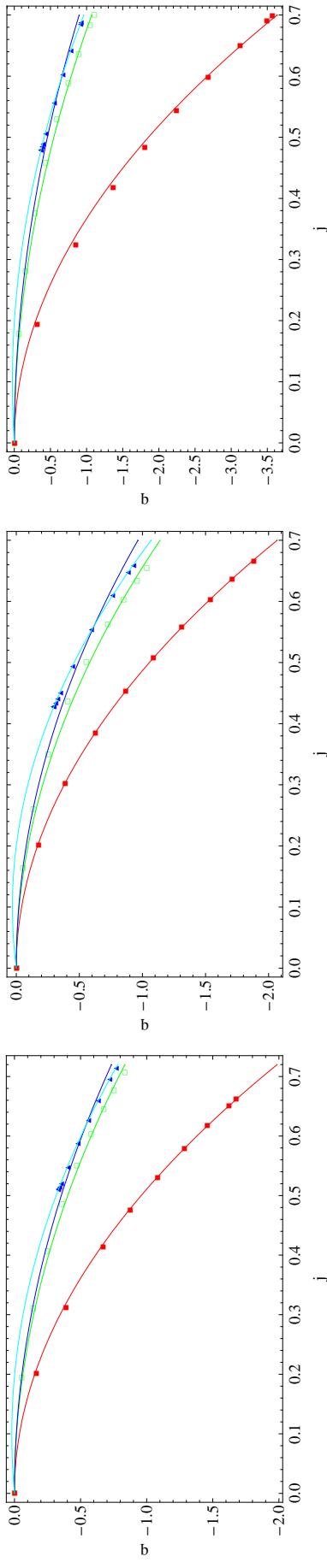
#	M	j	M_2	S_3	b	$\Delta M_2(\%)$	$\Delta S_3(\%)$
4	2.080	0.417	-12.2	-22.0	-0.23	1.352	1.175
7	2.090	0.598	-24.4	-63.5	-0.22	1.399	1.210
9	2.096	0.690	-32.1	-97.1	-0.21	1.417	1.220
10	2.097	0.698	-32.9	-100.	-0.21	1.420	1.222
14	4.051	0.375	-18.5	-45.4	-0.22	11.94	13.57
17	4.120	0.588	-51.8	-210.	-0.19	10.25	11.09
19	4.160	0.682	-74.9	-365.	-0.18	9.478	9.998
20	4.167	0.700	-79.8	-401.	-0.17	9.335	9.794
21	4.321	0.478	-29.0	-88.0	-0.20	17.68	22.66
22	4.321	0.479	-29.5	-90.2	-0.20	17.19	21.82
28	4.396	0.641	-66.0	-299.	-0.18	12.60	14.32
29	4.418	0.684	-78.7	-389.	-0.17	11.92	13.28
30	4.420	0.686	-79.4	-394.	-0.17	11.89	13.24

Σύνδεση των πολυπόλων με την παράμετρο περιστροφής.



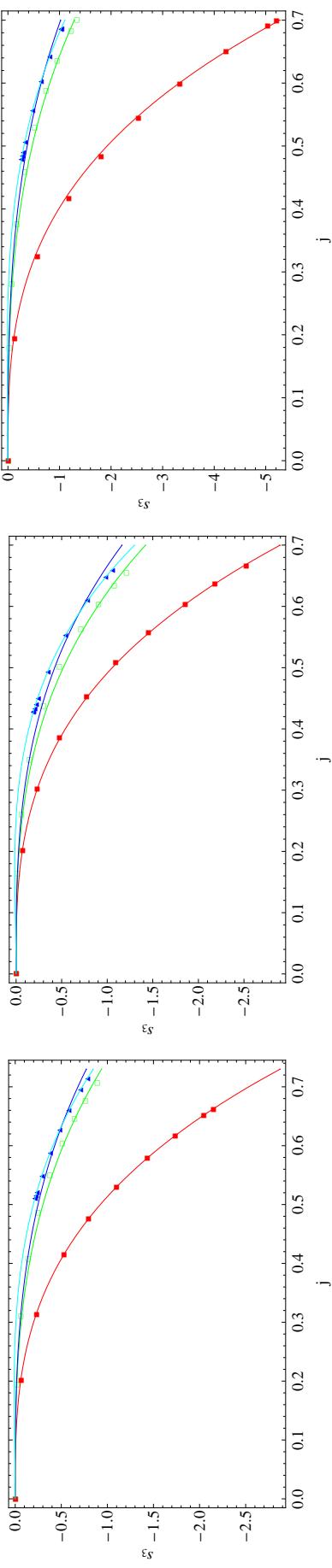
Γραφικές παραστάσης του b για τις διάφορες καταστατικές εξισώσεις (αριστερά AU, μέση FPS και δεξιά L). Τα διαφορετικά χρύματα αντιστοιχούν σε διαφορετικές ακολουθίες αστέρων γεντροών.

$$b = -1/4 + a_1 j^2, \quad a_1 > 0.$$



Γραφικές παραστάσης του ανηγγιένου τετραπόλου q για τις διάφορες καταστατικές εξισώσεις (αριστερά AU, μέση FPS και δεξιά L). Τα διαφορετικά χρώματα αντιστοιχούν σε διαφορετικές ακολουθίες αστέρων γετρούλων.

$$q = a_2 j^2, \quad a_2 < 0.$$



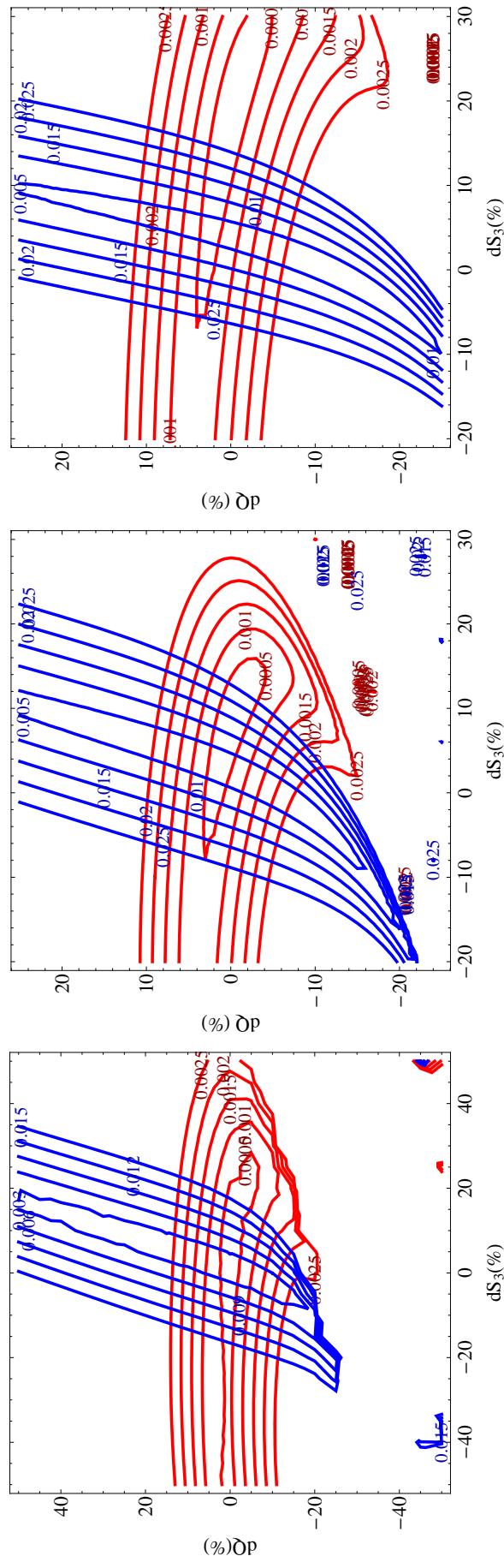
Γραφικές παραστάσης του ανηγμένου οκταπόλου περιστροφής s_3 για τις διάφορες καταστατικές εξισώσεις (αριστερά AU, μέση FPS και δεξιά L). Τα διαφορετικά χρώματα αντιστοιχούν σε διαφορετικές ακολουθίες αστέρων γετρούων.

$$s_3 = a_3 j^3, \quad a_3 < 0.$$

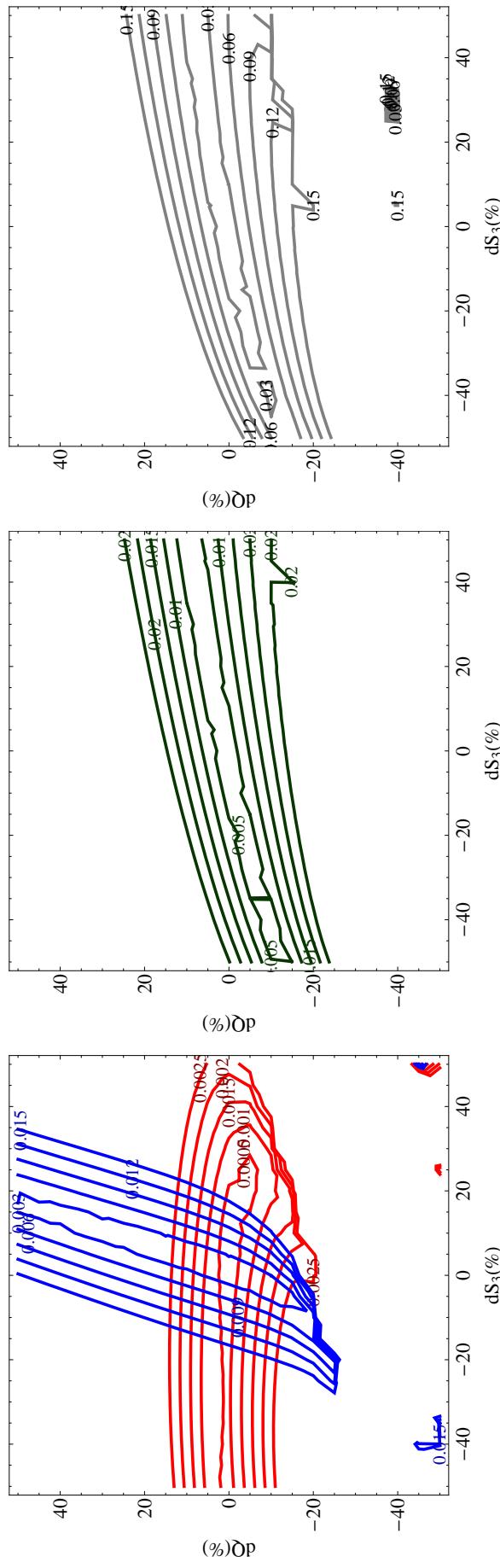
Επιστροφή στο ζήτημα της αντιστοίχησης αναλυτικών και αριθμητικών μετρικών. Είναι τα αριθμητικά πολύπολα που υπολογίσαμε καλά κριτήρια για μα καθολική αντιστοίχηση των λύσεων;

Μέτρο της απόκλισης δύο μετρικών μεταξύ τους:

$$\sigma_{ij} = \left(\int_{R_s}^{\infty} (g_{ij}^n - g_{ij}^a)^2 dr \right)^{1/2}.$$



Contour plots της απόκλισης των g_{tt} και $g_{t\phi}$ ανάμεσα στην αριθμητική μετρική και την αναλυτική μετρική Two-Soliton για τρία διαφορετικά μοντέλα (αριστερά #15 EoS AU, μέση #28 EoS AU και δεξιά #28 EoS L).



Contour plots της απόκλισης των g_{tt} και $g_{t\phi}$ ανάμεσα στην αριθμητική και την αναλυτική μετρική (αριστερά), της απόκλισης της τροχιακής συχνότητας Ω (δεξιά) και της σχετικής διαφοράς του $Risco$ (κέντρο) για το μοντέλο #15 της EoS AU.

Το συμπέρασμα είναι ότι η επιλογή της ταύτισης των πρώτων πολυτόλων πολυπόλων της αναλυτικής μετρικής με τα πρώτα πολύπολα της αριθμητικής μετρικής δίνει καλή αντιστοίχηση ανάμεσα στις δύο γεωμετρίες.

• Σύγκριση αριθμητικής και αναλυτικής μετρικής: Επιλογή κριτηρίων σύγκρισης.

Κριτήρια ως γεωμετρικό και φυσικό νόημα. Κριτήρια ως αστροφυσικό ενδιαφέρον.

- Μετρικές συναρτήσεις (g_{tt} : ερυθρομετάθεση, $g_{t\phi}$: dragging of inertial frames, $g_{\phi\phi}$: μετρά την περίμετρο των κύκλων).
- Ακτίνα της τελευταίας ευσταθούς κυκλικής τροχιάς (δίσκους προσαύξησης).
- Τροχιακή συχνότητα των κυκλικών τροχιών στο ισημερινό επίπεδο.
- Συχνότητες της ταλάντωσης και της μετάπτωσης των διαταραγμάτων σημερινών κυκλικών τροχιών (δίσκοι προσαύξησης και QPOs).
- Η μεταβολή της ενέργειας ανά λογαριθμική μεταβολή της τροχιακής συχνότητας $\Delta \tilde{E}$ (εκπεμπόμενο φάσμα από δίσκους).

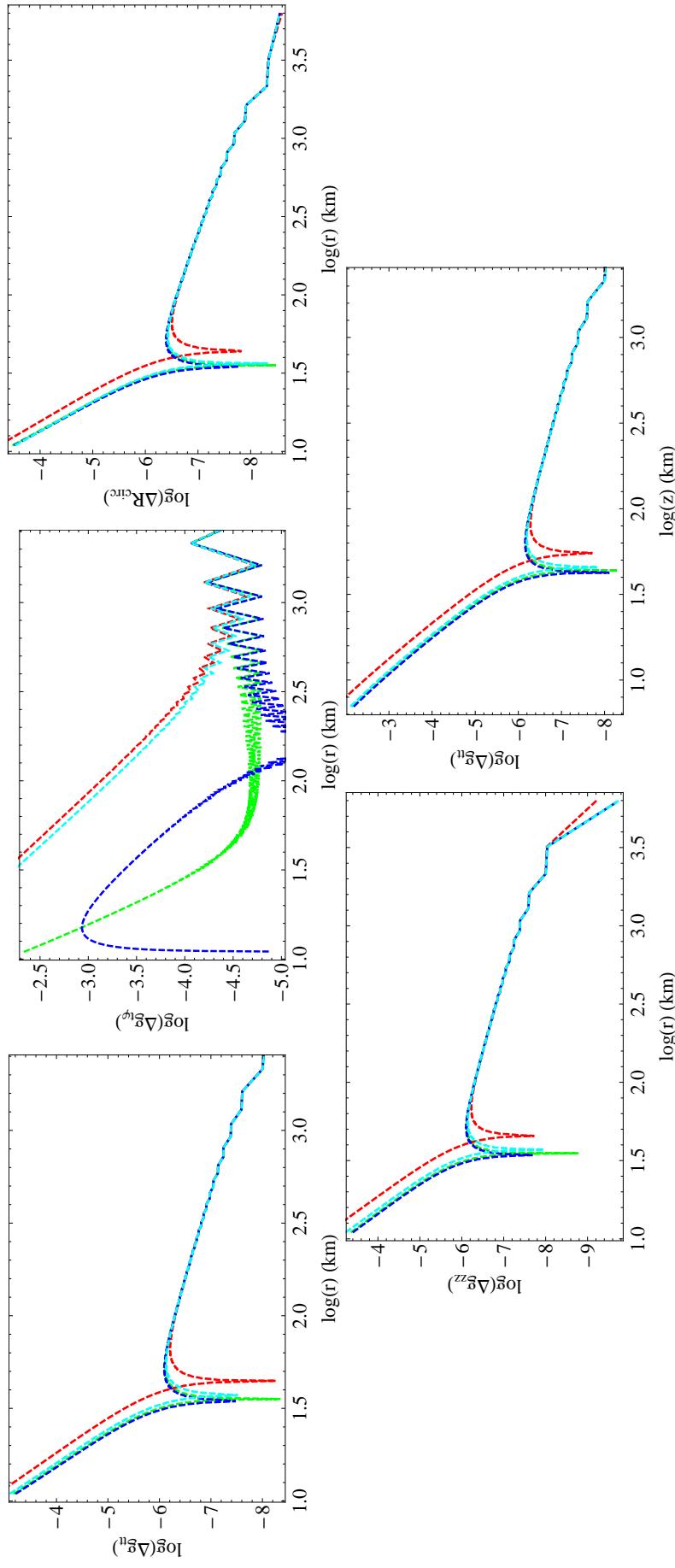
- **Αποτελέσματα της σύγκρισης.**

Για την σύγκριση των αριθμητικών μετρικών με την αναλυτική λύση Two-Soliton έχουμε χρησιμοποιήσει για εποπτεία ακόμα δύο μετρικές. Την Hartle-Thorne και την Manko et al..

Οι δύο αυτές μετρικές μας δίνουν μια βάση για βγάλουμε συμπεράσματα για την πιστότητα της Two-Soliton να περιγράφει τα αργά και τα γρήγορα περιστρεφόμενα άστρα αντίστοιχως.

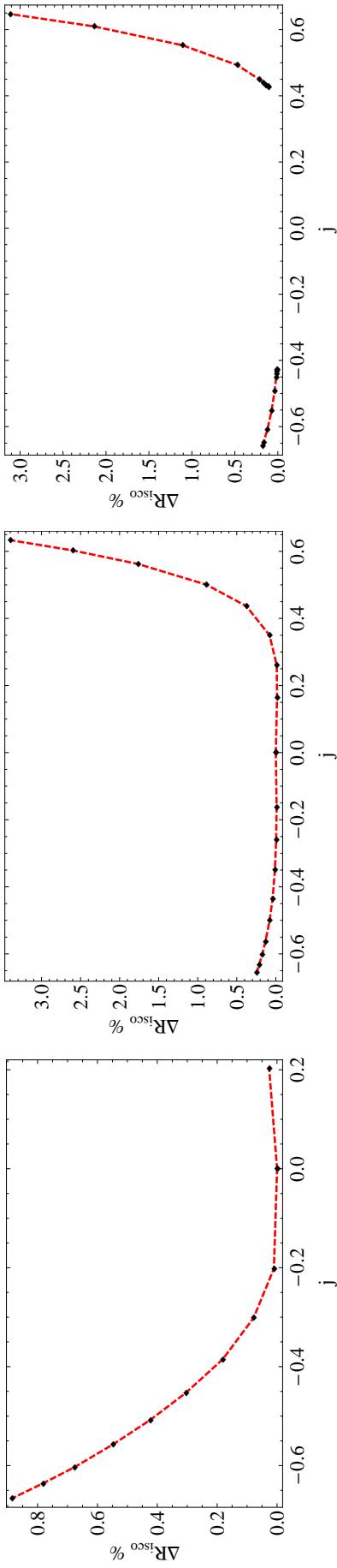
Η Hartle-Thorne θέλει προσοχή προκειμένου να χρησιμοποιηθεί συγεπώδης. Εμείς θα την χρησιμοποιήσουμε ως μια εξωτερική μετρική τριών παραμέτρων τόσο για τα αργά όσο και για τα γρήγορα περιστρεφόμενα άστρα.

Μετρικές συναρτήσεις.



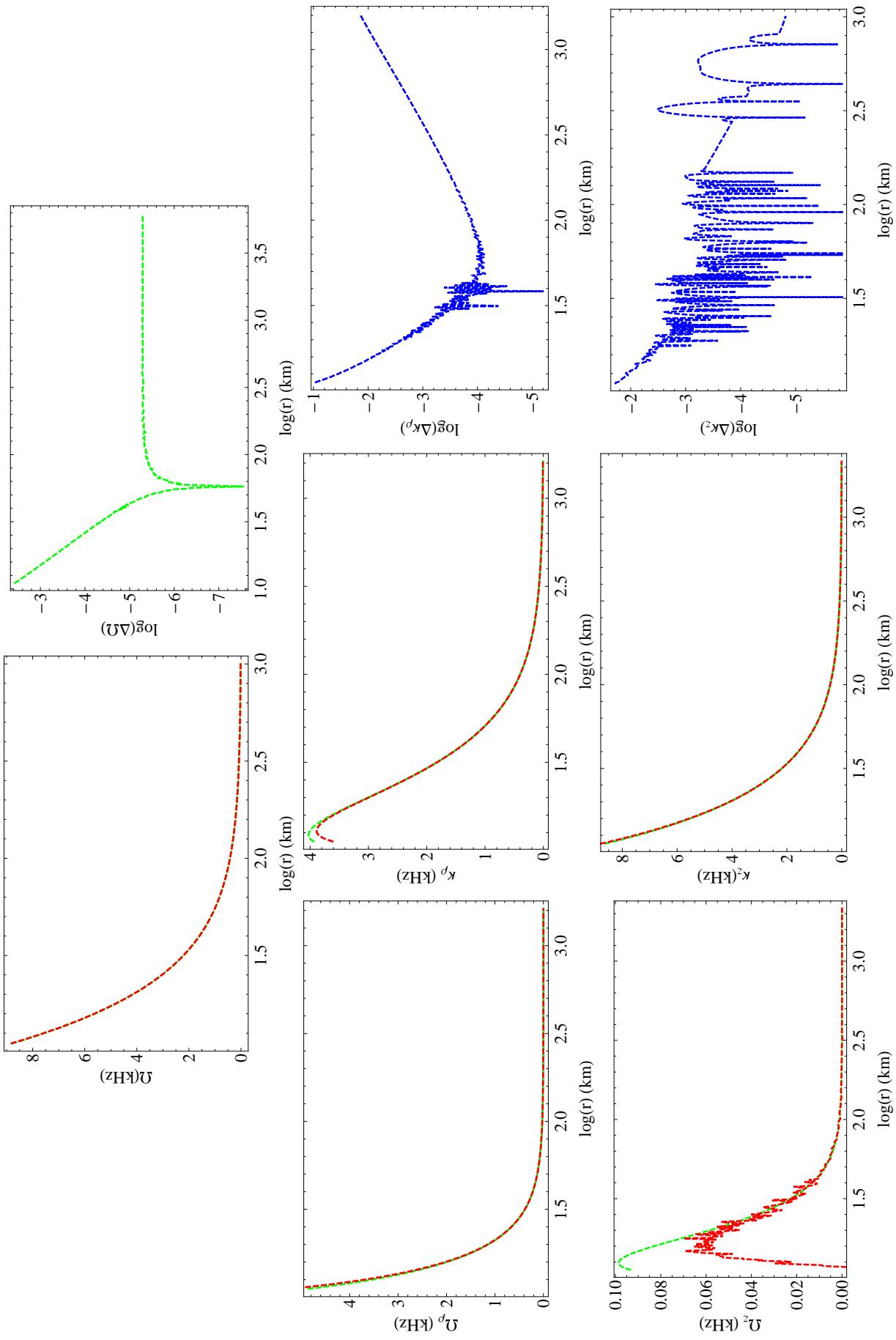
Οι γραφικές παραστάσεις απεικονίζουν διαδοχικά το λογάριθμο της σχετικής διαφοράς ανάμεσα στην αναλυτική και την αριθμητική μετρική για τις μετρικές συναρτήσεις g_{tt} , $g_{t\phi}$, $\sqrt{g_{\phi\phi}} = R_{circ}$ και g_{zz} στο ισημερινό επίπεδο και για το g_{tt} στο άξονα συμμετρίας. Τα σχήματα είναι ενδεικτικά όλων των μοντέλων. Οι συγκεκριμένες καμπύλες αφορούν το μοντέλο #10 της καταστατικής εξίσωσασης AU.

Θέση του R_{ISCO} .

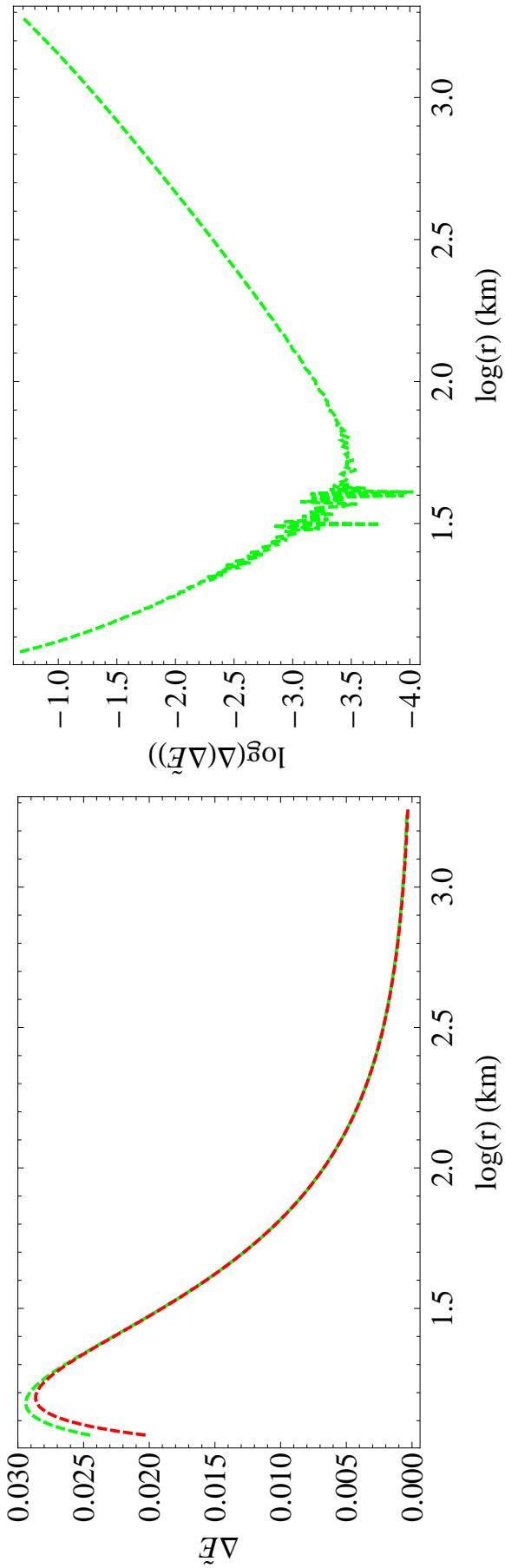


Η σχετική διαφορά ανάμεσα στο αριθμητικό και το αναλυτικό R_{ISCO} , αριστερά για την πρώτη, στη μέση για τη δεύτερη και δεξιά για την τρίτη αικόλουθα αστρων της καταστατικής FPS, όπου η ακτίνα του ISCO είναι εξώ από την επιφάνεια του άστρου.

Συχνότητες Ω , Ω_ρ , Ω_z , κ_ρ , κ_z .



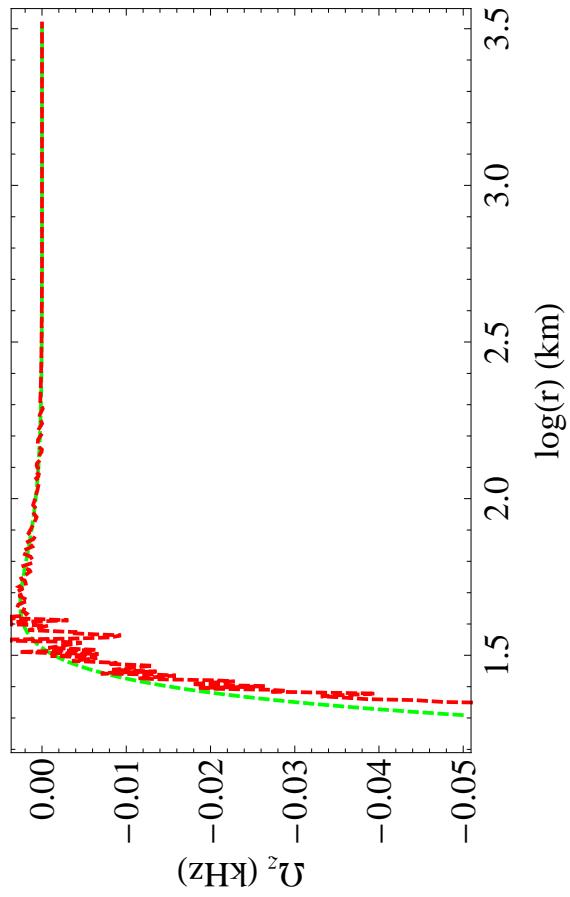
Σύγκριση στο $\Delta \tilde{E}$.



Αριστερά όχουμε την απεικόνιση του αναλυτικού και του αριθμητικού $\Delta \tilde{E}$ και δεξιά έχουμε τον λογάριθμο της σχετικής τους διαφοράς. Οι συγκεκρινένες καμπύλες αφορούν το μοντέλο #10 της καταστατικής εξίσωσης AU.

Συμπεράσματα.

Η διερεύνηση αυτή μας έδειξε ότι (α) η επιλογή των πολυπόλων είναι καλό κριτήριο ταύτισης μετριών και εκτός από το τετράπολο έχει σημασία να προσδιοριστεί και το οκτάπολο της περιστροφής, (β) η Two-Soliton είναι μια καλή επιλογή μετρικής για να περιγράψει τον χώρο γύρω από αστέρες νεφρούλων και (γ) οι υδιότητες αυτού του χώρου μπορεύ να διαφέρουν αρκετά από τις αντίστοιχες της γεωμετρίας Kerr και η Two-Soliton είναι ικανή να συλλάβει αυτή την ξεχωριστή συμπεριφορά¹⁰.



¹⁰G.P., J. Phys.: Conf. Ser. 189 (2009), 012028; G.P. and T. A. Apostolatos, in preparation.

- Αστροφυσικές εφαρμογές.

Διπλά συστήματα ακτίνων X:

- Χαμηλής μάζας (low mass X-ray binaries, LMXRBS)
- Γψηλής μάζας (high mass X-ray binaries, HMXRBS)

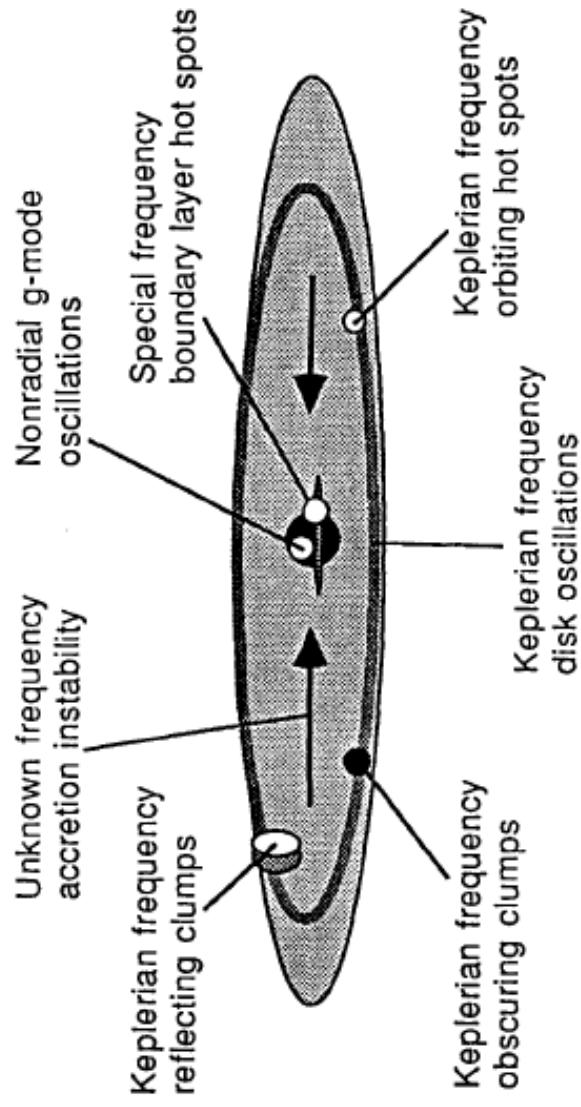
LMXRBS:

- Γπάρχει ένα συμπαγές αντικείμενο που είναι μαύρη τρύπα ή αστέρας γετρογίων.
- Γπάρχει κάποιος δίσκος προσαύξησης.
- Η εκπομπή του δίσκου είναι στυς ακτίνες X.

Πρόσβαση σε περιοχές όπου η βαρύτητα είναι ισχυρή (η παράμετρος $\varepsilon \equiv R_s/r$ πλησύει τη μονάδα).

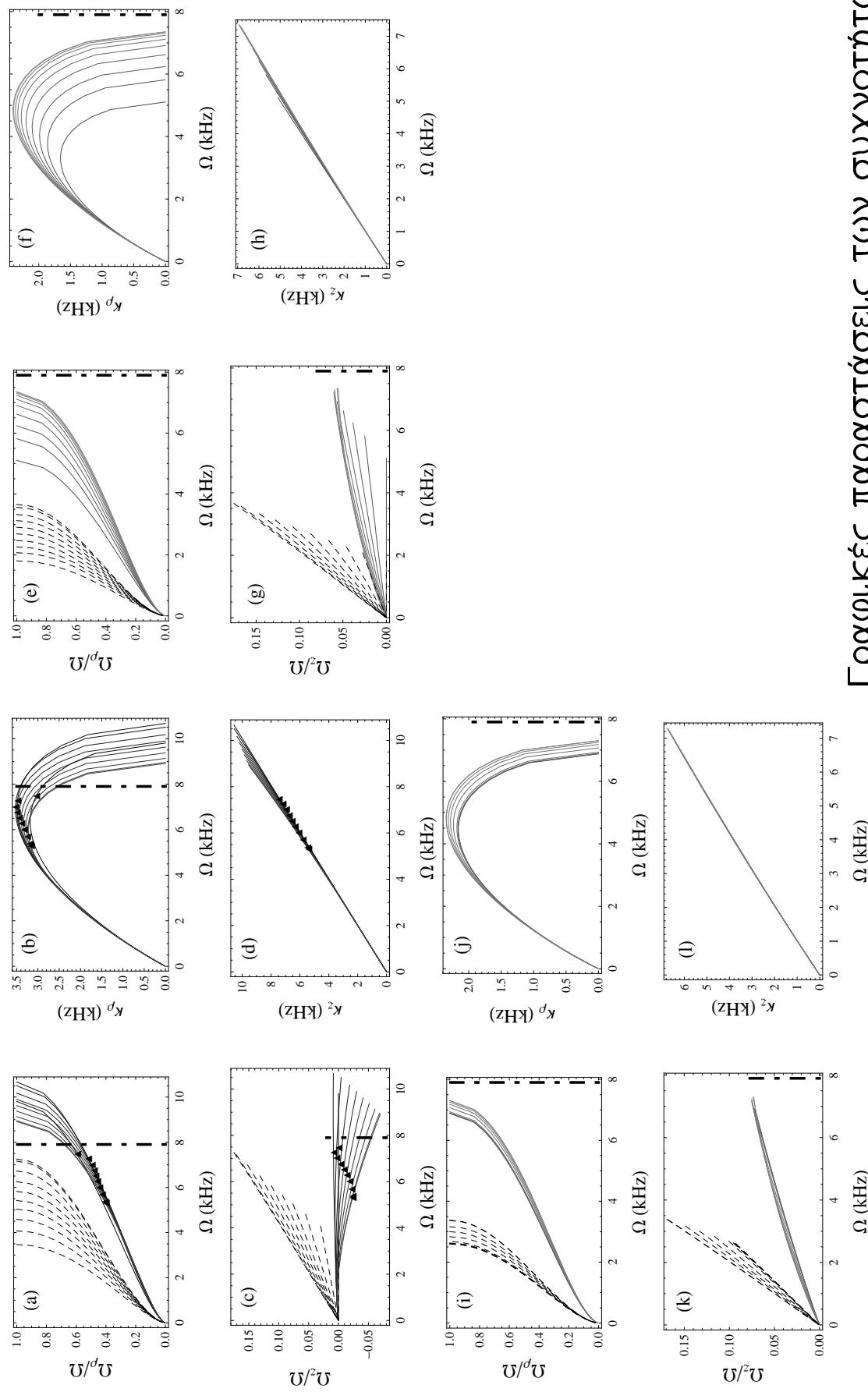
Πρόσβαση σε φαινόμενα που εξαρτώνται από τη δομή των αστέρων γετρογίων.

Ημι-περιοδικές ταλαντώσεις της ροής στις ακτίνες X (QPOs).



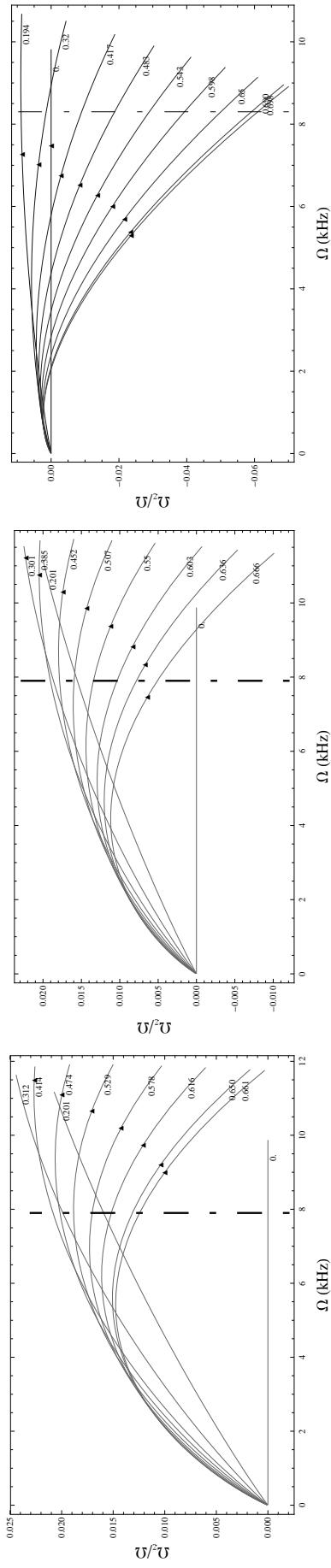
Σχηματική απεικόνιση διαφόρων πυθανών μηχανισμών που παράγουν τα QPOs. Το σχήμα προέρχεται από την εργασία, F. K. Lamb, *Models of QPOs in luminous low-mass X-ray binaries*, Advances in Space Research (ISSN 0273-1177), 8 (1988), 421–447.

Αν υποθέσουμε ότι τα QPOs σχετίζονται με τροχιακές κυρήσεις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Two-Soliton για να τα μελετήσουμε.



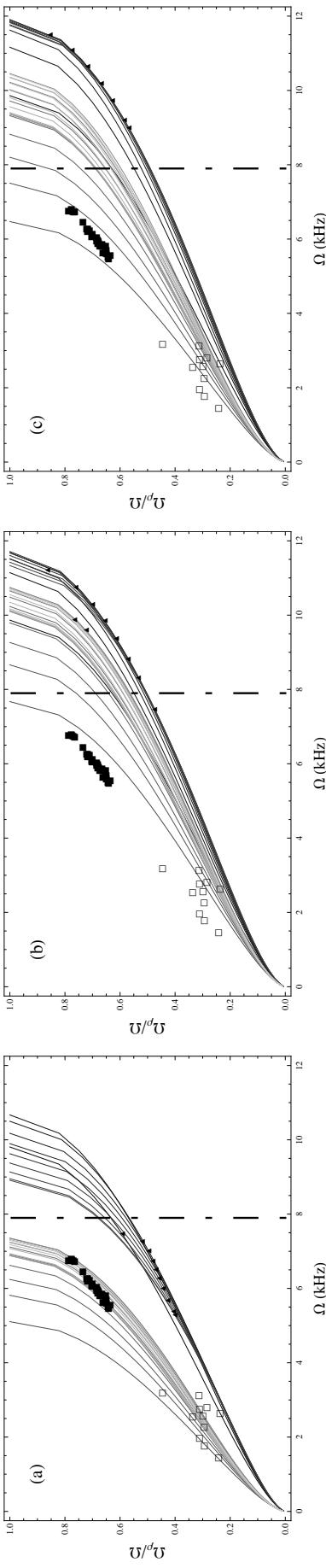
Γραφικές παραστάσεις των συχνοτήτων για τις ακολουθίες μοντέλων περιγράφοντας από την καταστατική L . Ολες οι καμπύλες τερματίζουν στο ISCO.

Χαρακτηριστική συμπεριφορά των συχνοτήτων της κίνησης γύρω από αστέρες νετρονίων που δεν μπορεύ να αποδώσει η λύση Kerr.



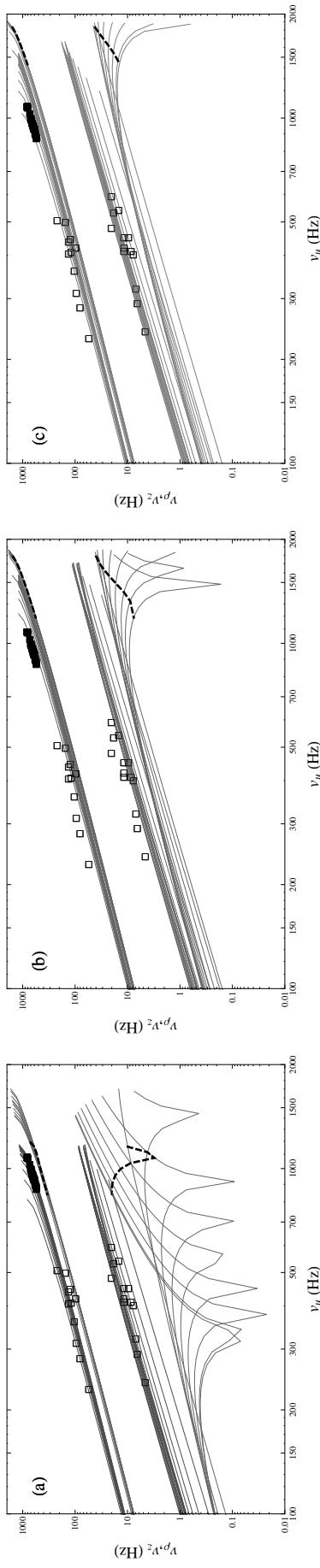
Το Ω_z/Ω ως συνάρτηση του Ω για την ακολουθία (i) για τις καταστατικές AU, FPS, L αντιστοίχωσ. Η παράλληλη περιστροφής $j = J/M^2$ αναγράφεται για κάθε μοντέλο στο διάγραμμα.

Σύγκριση των τροχιακών συχνοτήτων ως τις παρατηρήσεις. Οι παρατηρήσεις θα μπορούσαν να διαλέξουν καταστατική εξίσωση ή ακόμα και συγκεκριμένο μοντέλο.



Παρατηρήσεις των QPOs συγκρίνονται με πρότυπα συχνοτήτων για τις καταστατικές εξίσωσεις (a) L, (b) FPS, και (c) AU. Τα μαύρα τρίγωνα υποδεικνύουν την επιφάνεια του αστέρα (όπου χρειάζεται). Τα γεμάτα τετράγωνα είναι οι παρατηρήσεις της πηγής Sco X-1 και τα άδεια τετράγωνα είναι οι παρατηρήσεις της πηγής Circ X-1.

Χαρακτηριστική «υπογραφή» στις τροχιακές συχνότητες που θα μπορούσε (α) να τεκμηριώσει ότι τα QPOs σχετίζονται με τις τροχιακές συχνότητες και (β) να ξεχωρίσει διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις¹¹.



Εικονικές συχνότητες QPOs που σχετίζονται με τις μεταπτώσεις του περίαστρου και του επυπέδου της τροχιάς (ν_ρ, ν_z) ως συγχρησιμές της τροχιακής συχνότητας (ν_u) για τις καταστατικές εξισώσεις (a) L, (b) FPS, και (c) AU. Επειδή η Ω_z μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, η συχνότητα ν_z είναι απλά το $|\Omega_z|/2\pi|$.

- Διαπιστώσαμε ότι θα ήταν χρήσιμο να έχουμε μια αναλυτική μετρική για το εξωτερικό των αστέρων νετρούλων που να είναι καλύτερη προσέγγιση από την Schwarzschild και την Kerr.
- Η Two-Soliton προσφέρει μια τέτοια επιλογή (4 παράμετροι, ελεύθερη επιλογή των 4ων πρώτων πολυπόλων).
- Έλεγχος της Two-Soliton ως πιθανή καλή επιλογή με την βοήθεια αριθμητικών ιουντέλων.
- Κατάλληλος μετασχηματισμός συντεαγμένων.
- Επιλογή των πολυπόλων ως βέλτιστα κριτήρια ταύτισης των μετρικών (ακριβής προσδιορισμός των αριθμητικών πολυπόλων).
- Σύγκριση των αριθμητικών λύσεων με τις αντίστοιχες αναλυτικές (με ικανοποητικά αποτελέσματα).
- Εφαρμογή της Two-Soliton σε αστροφυσικά προβλήματα (QPOS).

Ευχαριστώ!!

- Περαιτέρω αελέτη των υδροτήτων της γεωδαισιακής κίνησης στον χώρο της Two-Soliton (ενδιαφέροντα φαινόμενα, άπως τροχιακοί συντονισμοί, κλπ. με πιθανή εφαρμογή στα QPOS).
- Συστηματική αελέτη των υδροτήτων των δισκων προσαύξησης σε έναν τέτοιο χωρόχρονο (ακτυνοβολία του δίσκου, δυναμική του δίσκου, κλπ.).
- Μελέτη άλλων φαινομένων που μπορεί να συμβαίνουν στην γειτονά των αστέρων νετρονίων ως την βοήθεια της Two-Soliton (τροχιές φωτονίων/optics, πιθανή σύγδεση με QNMs, κλπ.)
- Μελέτη ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων ως την βοήθεια αναλυτικών λύσεων electro-vacuum που είναι επεκτάσεις της Two-Soliton.
- Έλεγχος της θεωρίας της βαρύτητας με την βοήθεια αναλυτικών λύσεων τύπου Two-Soliton ή γενικεύσεών της.