

Introduction to Probability Theory*

Φώτης Σιάννης
Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικό
fsiannis@math.uoa.gr

October 22, 2010

* Από "Σημειώσεις Πιθανοτήτων-Στατιστικής" των Ο. Χρυσαφίνου, Α. Μπουρνέτα και Ε. Βαγγελάτου

Εισαγωγικά

- Η Θεωρία των Πιθανοτήτων μελετά φαινόμενα τα οποία υπόκεινται σε τυχαιότητα ή για τα οποία αδυνατούμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά τους με συγκεκριμένους νόμους
- Τέτοια φαινόμενα μπορούμε να τα αναγάγουμε σε πειράματα που ονομάζουμε πειράματα τύχης
- Παρατηρώντας ότι η επανάληψη τέτοιου είδους πειραμάτων κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες μας δίνει κάποια πληροφορία για τα αποτελέσματά τους (στατιστική κανονικότητα) προχωράμε στη μελέτη

τους προσδιορίζοντας κατάλληλους κανόνες.

[Ορισμός]: Πείραμα Τύχης είναι ένα πείραμα στο οποίο δεν ισχύει η σχέση αιτίου-αιτιατού.

Παραδείγματα:

1. Ρίψη ενός νομίσματος δύο φορές
2. Ρίψη ενός ζαριού
3. Ρίψη δύο ζαριών
4. Αριθμός ρίψεων ενός ζαριού έως ότου εμφανισθεί για πρώτη φορά η ένδειξη “6”

5. Η απόσταση τυχαίας βολής από το κέντρο ενός μοναδιαίου κύκλου
6. Ο χρόνος ζωής ενός chip σε ώρες
7. Το ύψος (σε cm) μιας φοιτήτριας της σχολής θετικών επιστημών που εκλέγεται τυχαία

[Ορισμός]: Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης καλείται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος. Συνήθως το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε με Ω .

Τα παραπάνω πειράματα τύχης έχουν τους ακόλουθους δειγματικούς χώρους αντίστοιχα:

1. $\Omega = \{KK, ΓΓ, ΚΓ, ΓΚ\}$

2. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3. $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$

$$4. \Omega = \{1, 2.3, \dots, \dots\}$$

$$5. \Omega = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$$

$$6. \Omega = \{x : 0 \leq x \leq \infty\}$$

$$7. \Omega = \{x : 150 \leq x \leq 180\}$$

Δειγματικός Χώρος:

- Ο Δειγματικός χώρος που περιέχει πεπερασμένο αριθμό στοιχείων ή το πολύ αριθμήσιμο καλείται Διακριτός.
- Ο Δειγματικός χώρος που περιέχει μη αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων καλείται Συνεχής.

Σημείωση: Οι δειγματικοί χώροι των παραδειγμάτων 1, 2, 3, 4 είναι διακριτοί. Οι τρεις πρώτοι αποτελούνται από πεπερασμένο αριθμό στοιχείων ο τέταρτος από αριθμήσιμο πλήθος. Οι δειγματικοί χώροι των παραδειγμάτων 5, 6 και 7 είναι συνεχείς.

[Ορισμοί]:

- Ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης καλείται ενδεχόμενο
- Το ενδεχόμενο που αποτελείται από όλα τα δυνατά αποτελέσματα, δηλ. το Ω καλείται βέβαιο
- Το ενδεχόμενο που δεν περιέχει κανένα από τα αποτελέσματα του δειγματικού χώρου, δηλ. το \emptyset , καλείται αδύνατο
- Αυτό που περιέχει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα καλείται στοιχειώδες.

Σημείωση: Συνήθως τα ενδεχόμενα τα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα, π.χ. Α, Β, Γ. Αναφέρουμε μερικά ενδεχόμενα που αφορούν τα παραδείγματα 1-7 χρησιμοποιώντας τα στοιχειώδη ενδεχόμενα που τα αποτελούν, καθώς και τις αντίστοιχες προτάσεις που τα περιγράφουν.

1. Έστω τα ενδεχόμενα

- $A = \{KK, K\Gamma, \Gamma K\}$,
- $B = \{K\Gamma, \Gamma K\}$,
- $\Gamma = \{\Gamma\Gamma, K\Gamma, \Gamma K\}$,
- $\Delta = \{KKK\}$ και
- $E = \Omega$.

Μπορούμε να διατυπώσουμε τα ενδεχόμενα A, B, Γ, Δ και Ε με λόγια ως εξής:

A=“εμφανίζεται τουλάχιστον μία κεφαλή”,

B=“εμφανίζεται ακριβώς μία κεφαλή”,

Γ=“εμφανίζεται το πολύ μία κεφαλή”,

Δ=“το αδύνατο ενδεχόμενο” και

Ε=“το βέβαιο γεγονός”.

2. Έστω τα ενδεχόμενα $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 6\}$, και $\Gamma = \{3, 4, 5, 6\}$.

Τα A, B, Γ, μπορούμε να τα διατυπώσουμε ως εξής:

A=“εμφανίζεται αριθμός περιττός”,

$B =$ “ εμφανίζεται αριθμός διαιρετός με το 3” και

$\Gamma =$ “ εμφανίζεται αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 3” .

3. $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\},$

$B = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6),$
 $(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\},$

$\Gamma = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$

Τα A, B, Γ διατυπώνονται ως εξής:

$A =$ “:εμφανίζεται ο ίδιος αριθμός και στις δύο ρίψεις” ,

$B =$ “ εμφανίζεται το 6 ακριβώς μία φορά” ,

$\Gamma =$ “ οι αριθμοί είναι μικρότεροι ή ίσοι με το 2” .

4. Έστω τα ενδεχόμενα:

$A =$ “απαιτούνται το πολύ 10 ρίψεις του ζαριού έως ότου εμφανισθεί το 6”,

$B =$ “απαιτούνται ακριβώς 12 ρίψεις”,

$\Gamma =$ “απαιτούνται τουλάχιστον 5 ρίψεις” και

$\Delta =$ “εμφανίζεται το 6 σε άρτιο αριθμό ρίψεων.

Τα A, B, Γ, Δ αποτελούνται από τα εξής στοιχεία του δειγματικού χώρου:

$$A = \{1, \dots, 10\},$$

$$B = \{12\},$$

$$\Gamma = \{5, 6, \dots, \dots\}, \text{ και}$$

$$\Delta = \{2, 4, 6, \dots, 2x \dots, \}.$$

5. Έστω τα ενδεχόμενα:

A=“ η βολή απέχει από το στόχο το πολύ $1/3$ ”,

B=“η βολή απέχει από το στόχο τουλάχιστον $2/3$ ” και

Γ=“ η βολή απέχει από το στόχο περισσότερο από $1/4$ και λιγώτερο από $3/4$ ”.

Στην περίπτωση αυτή τα A, B, Γ μπορούν να περιγραφούν ως εξής:

$A = \{x : 0 < x < 1/3\}$, $B = \{x : 2/3 \leq x < 1\}$, και

$\Gamma = \{x : 1/4 < x < 3/4\}$.

6. Έστω τα ενδεχόμενα:

A=“ το chip ζει τουλάχιστο χίλιες ώρες” ,

B=“ το chip ζει περισσότερο από 1500 ώρες και λιγότερο από 5000 ώρες” και

Γ=“ το chip ζει το πολύ 10000 ώρες” .

Ισοδύναμη διατύπωση είναι:

$$A = \{x : x \geq 1000\},$$

$$B = \{1500 < x < 5000\} \text{ και}$$

$$\Gamma = \{x : 0 < x \leq 10000\}.$$

7. $A = \{x : 165 \leq x\},$

$$B = \{x : 160 \leq x \leq 170\}.$$

Προφανώς τα A και B διατυπώνονται ως εξής:

A=“η φοιτήτρια έχει ύψος μεγαλύτερο ή ίσο των 165 cm ” και

B=“ το ύψος της φοιτήτριας κυμαίνεται μεταξύ των 160 cm και 170 cm” .

Στη διατύπωση ενδεχομένων πολλές φορές εμφανίζονται εκφράσεις όπως, τουλάχιστον, το πολύ, ακριβώς, από ... έως, οι οποίες είναι ισοδύναμες με συγκεκριμένες μαθηματικές φόρμες, όπως φαίνεται και από τα παραπάνω παραδείγματα.

1. Ενωση δύο ενδεχομένων, έστω A, B , είναι όλα τα στοιχεία του Ω που ανήκουν σε τουλάχιστον ένα από αυτά. Συμβολίζεται με $A \cup B$.
2. Τομή δύο ενδεχομένων, έστω A, B , είναι όλα τα στοιχεία του Ω που ανήκουν και στα δύο ενδεχόμενα. Συμβολίζεται με $A \cap B$ ή απλά ως AB .

3. Ξένα καλούνται τα ενδεχόμενα A, B αν $A \cap B = \emptyset$.
4. Συμπλήρωμα του ενδεχομένου A ως προς το Ω είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο A . Συμβολίζεται με A' ή A^c .
5. Διαφορά του συνόλου B από το A είναι όλα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B και συμβολίζεται με $A-B$. Είναι

$$A - B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A, \omega \text{ δεν } \in B\}$$

Σημείωση: Έστω τα ένδεχόμενα A , B και Γ με δειγματικό χώρο Ω . Ιχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

1. $A' = \Omega - A$

$$A - B = A \cap B'$$

2. Αντιμεταθετικότητα:

$$A \cup B = B \cup A \quad A \cap B = B \cap A$$

3. Προσεταιριστικότητα:

$$A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$$

$$A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$$

4. Επιμεριστικότητα:

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$$

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

5. Ταυτοτικότητα:

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \Omega = A$$

6. Συμπληρωματικότητα:

$$A \cup A' = \Omega, \quad A \cap A' = \emptyset, \quad \Omega' = \emptyset$$

$$\emptyset' = \Omega, \quad (A')' = A$$

7. Κανόνες De Morgan

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

Αξιοματική Θεμελίωση της Πιθανότητας

A. Κλασική Πιθανότητα:

Η πρώτη αξιοματική θεμελίωση της θεωρίας πιθανοτήτων οφείλεται στον Laplace (1812) και στηρίζεται στον ορισμό της κλασικής πιθανότητας που έγινε από τον De Moivre (1711) και έχει ως εξής:

- Έστω ένα πείραμα τύχης του οποίου ο δειγματικός χώρος Ω είναι πεπερασμένος και κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο, δηλ. κάθε στοιχείο του Ω είναι εξίσου πιθανό λόγω έλλειψης επαρκούς λόγου για το αντίθετο

- Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A συμβολίζεται με $P(A)$ και ισούται με το πηλίκο που έχει αριθμητή τον αριθμό των στοιχείων του A και παρανομαστή το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος τύχης, δηλ. τον πληθικό αριθμό του Ω

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

- Αφού ο δειγματικός χώρος Ω είναι πεπερασμένος, ο χώρος ενδεχομένων, έστω \mathcal{A} , συμπίπτει με το δυναμοσύνολο του Ω , το οποίο συμβολίζουμε με $\mathcal{D}(\Omega)$ και αποτελείται από όλα τα δυνατά υποσύνολα του Ω
- Ο Laplace καθόρισε τα παρακάτω αξιώματα, τα οποία βασίζονται στην

κοινή λογική, τα αποτελέσματα πειραμάτων και τη διαίσθηση. Η $P(A)$ είναι μία συνολοσυνάρτηση που πληρεί τα ακόλουθα αξιώματα:

– Είναι:

$$P(A) \geq 0, \quad \text{για κάθε } A \text{ στο } \mathcal{D}(\Omega)$$

– $P(\Omega) = 1$

– Είναι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

για κάθε A, B στο $\mathcal{D}(\Omega)$ που είναι ξένα μεταξύ τους ($A \cap B = \emptyset$)

B. Εμπειρική Πιθανότητα:

Οι όποιες δυσκολίες με τον προηγούμενο ορισμό αίρονται κατά κάποιον τρόπο με το ορισμό της πιθανότητας που έδωσε ο Von Mises (1928), ο οποίος διατυπώνεται ως εξής:

Ένα πείραμα τύχης επαναλαμβάνεται ν φορές κάτω από τις ίδιες ακριβώς συνθήκες και έστω ότι σε κάθε πείραμα παρακολουθούμε αν εμφανίζεται ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο A . Υποθέτοντας ότι ο αριθμός εμφανίσεων του A είναι α_ν η πιθανότητα του A ορίζεται από τη σχέση

$$P(A) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\alpha_\nu}{\nu}$$

δηλ. η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι η οριακή σχετική συχνότητα εμφάνισής του.

Σημείωση: Είναι φανερό ότι τα αξιώματα που έθεσε ο Laplace ικανοποιούνται.

Προβλήματα: Πόσες φορές μπορούμε να επαναλάβουμε ένα πείραμα τύχης κάτω από ίδιες ακριβώς συνθήκες?

Γ. Αξιοματική Θεμελίωση της Πιθανότητας:

Το 1933, ο Ρώσος μαθηματικός A. Kolmogorov παρουσίασε την αξιοματική θεμελίωση των πιθανοτήτων που αίρει όλες τις αδυναμίες των προηγούμενων σχετικών ορισμών.

Έστω ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω . Για κάθε ενδεχόμενο A ($A \subseteq \Omega$) υποθέτουμε ότι ένας αριθμός $P(A)$ ορίζεται και ικανοποιεί τα εξής τρία αξιώματα:

- $P(A) \geq 0 \quad \forall A$
- $P(\Omega) = 1$

- $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$

για όλα τα ενδεχόμενα A_i, A_j , τέτοια ώστε $A_i \cap A_j = \emptyset, i, j = 1, 2, \dots$, δηλ. ξένα μεταξύ τους.

Πρόταση: Ισχύουν οι σχέσεις

- $P(A') = 1 - P(A), \forall A \in \mathcal{A}$

- Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ισχύει η σχέση

$$P(A'B) = P(B) - P(AB)$$

- Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ισχύει η σχέση

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

- Είναι

$$P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{A}$$

- Τέλος, η πιθανότητα $P(\cdot)$ είναι αύξουσα συνολοσυνάρτηση, δηλ. αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

Παράδειγμα

Ένα αμερόληπτο νόμισμα ρίχνεται 2 φορές. Έστω τα εξής ενδεχόμενα:

A= “ ακριβώς μία φορά εμφανίζεται (Κ)” .

B= “ τουλάχιστον μία φορά εμφανίζεται κεφαλή (Κ)” .

Γ= “ δεν εμφανίζεται η ένδειξη γράμματα (Γ)” .

Δ= “ εμφανίζονται 2 κεφαλές ή το πολύ μία φορά εμφανίζεται η ένδειξη κεφαλή (Κ)” .

E= “ εμφανίζεται το B ή το Γ” .

Z= “ αν συμβαίνει το B, τότε δεν συμβαίνει το Γ” .

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες των παραπάνω ενδεχομένων. Κατ' αρχήν πρέπει να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης. Είναι $\Omega = \{KK, \Gamma\Gamma, K\Gamma, \Gamma K\}$ και τα στοιχεία του είναι ισοπίθανα αφού το νόμισμα είναι αμερόληπτο.

Ο χώρος ενδεχομένων \mathcal{A} που αποτελείται από όλα τα δυνατά υποσύνολα του Ω είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \{ \{KK\}, \{\Gamma\Gamma\}, \{K\Gamma\}, \{\Gamma K\}, \{KK, \Gamma\Gamma\}, \\ & \{KK, K\Gamma\}, \{KK, \Gamma K\}, \{\Gamma\Gamma, K\Gamma\}, \{\Gamma\Gamma, \Gamma K\}, \\ & \{K\Gamma, \Gamma K\}, \{KK, \Gamma\Gamma, K\Gamma\}, \{KK, \Gamma\Gamma, \Gamma K\}, \\ & \{\Gamma\Gamma, K\Gamma, \Gamma K\}, \{KK, K\Gamma, \Gamma K\}, \{\Omega\}, \{\emptyset\} \} \end{aligned}$$

Τα ενδεχόμενα για τα οποία ενδιαφερόμαστε αποτελούνται από τα εξής
στοιχειώδη ενδεχόμενα:

$$A = \{K\Gamma, \Gamma K\},$$

$$B = \{K\Gamma, \Gamma K, KK\},$$

$$\Gamma = \{KK\},$$

$$\Delta = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\},$$

$$E = \{B \cup \Gamma\} = \{K\Gamma, \Gamma K, KK\},$$

$$Z = \{K\Gamma, \Gamma K\}.$$

Άρα οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι

$$P(A) = P(\{K\Gamma, \Gamma K\}) = 2/4,$$

$$P(B) = P(\{K\Gamma, \Gamma K, K K\}) = 3/4,$$

$$P(\Gamma) = P(\{K K\}) = 1/4,$$

$$P(\Delta) = P(\{K K, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}) = 1.$$

Από τη σχέση (5), δηλ. το προσθετικό θεώρημα έχουμε:

$$P(E) = P(\{B \cup \Gamma\}) = P(B) + P(\Gamma) - P(B\Gamma) = 3/4 + 1/4 - 1/4 = 3/4.$$

Τέλος, η σχέση (4) μας δίνει:

$$P(Z) = P(B\Gamma') = P(B) - P(B\Gamma) = 3/4 - 1/4 = 2/4.$$

Βασικές Αρχές Απαρίθμησης

- Αρχή του Αθροίσματος:

Έστω τα στοιχεία $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ και ας υποθέσουμε ότι το α_i μπορεί να επιλεγεί κατά $k_i, i = 1, \dots, n$, έτσι ώστε κάθε επιλογή του α_i αποκλείει την ταυτόχρονη επιλογή του α_j για $i \neq j$. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε το α_1 ή το α_2 ή ... ή το α_n κατά $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$ τρόπους.

- Αρχή του Γινομένου:

Έστω τα στοιχεία $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ τα οποία μπορούν να επιλεγούν κατά $k_i, i = 1, \dots, n$, έτσι ώστε για την καθεμία από k_i επιλογές του α_i

υπάρχουν k_j τρόποι επιλογής του a_j για $i \neq j$. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε το a_1 και το a_2 και το ... και το a_n κατά $k_1 \times k_2 \times k_3 \times \dots \times k_n$ τρόπους.

Παραδείγματα

1. Σε μία εργαστηριακή άσκηση συμμετέχουν 10 φοιτητές και 5 φοιτήτριες. Μία συγκεκριμένη εργασία πρόκειται να εκτελεστεί από έναν φοιτητή ή μία φοιτήτρια. Υπάρχουν $10+5=15$ τρόποι για να εκλέξουμε το άτομο που θα διεκπεραιώσει την εργασία. Αν για τη συγκεκριμένη εργασία απαιτούνται ένας φοιτητής και μία φοιτήτρια, τότε υπάρχουν $10 \times 5 = 50$ δυνατά ζευγάρια για την διεκπεραίωση της εργασίας.

2. Για να πάμε από την Αθήνα στην Επίδαυρο έχουμε 3 δυνατούς τρόπους, ενώ για να πάμε στους Δελφούς 2 δυνατούς τρόπους. Υπάρχουν $3+2=5$ δυνατοί τρόποι για να πάμε στην Επίδαυρο ή στους Δελφούς. Αν μετά την Επίδαυρο έχουμε 2 τρόπους για να πάμε στο Ναύπλιο, τότε έχουμε $3 \times 2 = 6$ τρόπους για να πάμε από την Αθήνα στο Ναύπλιο. Αν μετά τους Δελφούς έχουμε 2 τρόπους για να πάμε στο χιονοδρομικό κέντρο του Παρνασσού, τότε υπάρχουν $2 \times 2 = 4$ τρόποι για να πάμε από την Αθήνα στον Παρνασσό.

- Μετάθεση: Έστω ότι έχουμε n διακεκριμένα στοιχεία τα οποία θέλουμε να τα διατάξουμε με έναν διαφορετικό τρόπο. Για το πρώτο στοιχείο υπάρχουν n δυνατοί τρόποι, για το δεύτερο $n-1$, για το τρίτο $n-2$ κ.λ.π. για το n -οστό 1 τρόπος. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε ότι υπάρχουν συνολικά

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

δυνατοί τρόποι.

- Διατάξεις: Έστω τώρα ότι θέλουμε να διατάξουμε τα k στοιχεία από τα n , με $k \leq n$. Τότε υπάρχουν n τρόποι για να πάρουμε το πρώτο, $n-1$ για το δεύτερο, κ.λ.π. και $n-(k-1)$ για να πάρουμε το k -οστό. Από την

πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε συνολικά

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = (n)_k$$

δυνατούς τρόπους. Οι διατάξεις αυτές καλούνται διατάξεις των n στοιχείων ανά k και συμβολίζονται με το $(n)_k$. Αν $k=n$, τότε έχουμε μετάθεση όλων των στοιχείων.

- Παραδείγμα: Η Δήμητρα, φοιτήτρια του Γεωλογικού Τμήματος, διακρίνεται για την τάξη της. Η Δήμητρα θέλει να τοποθετήσει σε ένα ράφι 10 βιβλία από τα οποία 5 είναι σχετικά με γεωλογία, 2 με χημεία, 1 με ηλεκτρονικούς υπολογιστές και 2 με μαθηματικά έτσι ώστε τα βιβλία της κάθε ειδικότητας να είναι μαζί. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι

τοποθέτησης υπάρχουν;

Τα 5 βιβλία γεωλογίας μπορούν να τοποθετηθούν κατά $5!$ τρόπους, τα 2 της χημείας κατά $2!$ και όμοια τα υπόλοιπα. Εφαρμόζοντας την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $5! \times 2! \times 1! \times 2! = 480$ τρόπους. Αλλά δεν είναι μόνο αυτοί! Με ποιά σειρά θα τοποθετηθούν οι ομάδες (ειδικότητες); Υπάρχουν $4!$ τρόποι. Άρα υπάρχουν συνολικά $480 \times 24 = 11520$ τρόποι για να τοποθετήσει η Δήμητρα τα βιβλία της με τον τρόπο που επιθυμεί.

- Διατάξεις με Επαναλήψεις: Έστω τα στοιχεία $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ τα οποία θέλουμε να τα διατάξουμε ανά k επιτρέποντας επανάληψη του ίδιου στοιχείου. Πόσοι είναι οι δυνατοί τρόποι; Για να επιλέξουμε το

πρώτο έχουμε n τρόπους, για το δεύτερο επίσης n τρόπους κ.λ.π. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε ότι υπάρχουν

$$n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^x$$

δυνατοί τρόποι.

- Παραδείγμα: Στη ρίψη ενός ζαριού 3 φορές έχουμε διατάξεις με επαναλήψεις των 6 στοιχείων (1, 2, 3, 4, 5, 6) ανά 3. Άρα υπάρχουν $6^3 = 216$ στοιχειώδη ενδεχόμενα. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγουμε τη διαδικασία καταγραφής τους που είναι αρκετά επίπονη. Ας υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A =$ “και στις 3 ρίψεις εμφανίζονται διαφορετικές ενδείξεις”. Το ενδεχόμενο A αποτελείται

από τόσα στοιχεία όσες είναι οι διατάξεις των 6 στοιχείων ανά 3 χωρίς επανάληψη, δηλ. $(6)_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Άρα $P(A) = \frac{120}{216}$, με την προϋπόθεση ότι το ζάρι είναι αμερόληπτο.

- Συνδυασμοί: Έστω ότι έχουμε τα στοιχεία $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ και θέλουμε να επιλέξουμε k χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά τους αλλά ποιά είναι τα στοιχεία που επιλέγουμε. Συμβολίζουμε τους συνδυασμούς αυτούς με $\binom{n}{k}$, που καλείται διωνυμικός συντελεστής και έχουμε τη σχέση

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

με $0! = 1$ εξ ορισμού.

- Παραδείγμα: Από 10 φοιτητές και 7 φοιτήτριες πόσες επιτροπές αποτελούμενες από 2 φοιτητές και 3 φοιτήτριες μπορούμε να δημιουργήσουμε;

Από τους 10 φοιτητές μπορούμε να επιλέξουμε τους 2 κατά $\binom{10}{2}$ δυνατούς τρόπους οι οποίοι θα συνδυαστούν σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή με τους $\binom{7}{3}$ δυνατούς τρόπους επιλογής

των 3 φοιτητριών από τις 7. Άρα έχουμε συνολικά

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{7}{3} = \frac{10!}{2!8!} \cdot \frac{7!}{3!4!} = 1575$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Έστω ένα κουτί περιέχει 6000 chips από τα οποία 2000 κατασκευάζονται από την εταιρεία X και τα υπόλοιπα από την εταιρεία Y. Είναι γνωστό ότι τα ποσοστά των ελαττωματικών chips των εταιρειών X και Y είναι 10% και 5% αντίστοιχα. Εκλέγεται στην τύχη ένα chip και διαπιστώνεται ότι είναι ελαττωματικό. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να προέρχεται από τα chips που παράγονται από την εταιρεία X.

Ας ορίσουμε τα ενδεχόμενα:

A= “το chip κατασκευάζεται από την X” ,

B= “το chip κατασκευάζεται από την Y” και

Γ= “το chip είναι ελαττωματικό” .

Εύκολα υπολογίζονται οι πιθανότητες

$$P(A) = 2000/6000 = 1/3,$$

$$P(B) = 4000/6000 = 2/3 \text{ και}$$

$$P(\Gamma) = 400/6000 = 4/60.$$

Τώρα ας εξετάσουμε το ενδεχόμενο $A\Gamma$ = “το chip είναι ελαττωματικό και προέρχεται από την παραγωγή της X”. Η πιθανότητα αυτού του ενδεχομένου είναι

$$P(A\Gamma) = 200/6000 = 2/60$$

Έστω ότι επιλέγουμε ένα chip και είναι ελαττωματικό. Θέλουμε να εξετάσουμε την πιθανότητα το chip να έχει κατασκευαστεί από την Χ. Έχουμε, ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου $A|\Gamma$ για το οποίο ενδιαφερόμαστε είναι $200/400$ αφού στα 400 ελαττωματικά τα 200 προέρχονται από την εταιρεία Χ. Παρατηρούμε ότι

$$P(A|\Gamma) = 200/400 = \frac{200/6000}{400/6000} = \frac{P(A\Gamma)}{P(\Gamma)}.$$

[Ορισμός]: Η δεσμευμένη πιθανότητα ενός ενδεχομένου A δεδομένου ενός ενδεχομένου B συμβολίζεται με $P(A|B)$ και δίνεται από τη σχέση

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

[Ο]: Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει η ακόλουθη σχέση που καλείται πολλαπλασιαστικός τύπος

$$P(AB) = \begin{cases} P(B)P(A|B) & \text{αν } P(B) > 0 \\ P(A)P(B|A) & \text{αν } P(A) > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Παρατηρήσεις:

- Η δεσμευμένη πιθανότητα πληρεί τα αξιώματα του Kolmogorov, δηλ.
 1. $P(A|B) \geq 0, \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$
 2. $P(\Omega|B) = 1, \quad \forall B \in \mathcal{A}$
 3. $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n | \Gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n | \Gamma), \quad \forall A_i, A_j : A_i A_j = \emptyset, \quad i \neq j$
- Από τα παραπάνω αξιώματα προκύπτουν οι σχέσεις
 1. $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$
 2. $P(A \cup B | \Gamma) = P(A | \Gamma) + P(B | \Gamma) - P(AB | \Gamma)$
 3. $P(A'B | \Gamma) = P(B | \Gamma) - P(AB | \Gamma)$

- Ακόμα, ισχύει η ακόλουθη ενδιαφέρουσα σχέση

$$\frac{P(A|B)}{P(B|A)} = \frac{P(AB)/P(B)}{P(AB)/P(A)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

Παράδειγμα

Ένα αμερόληπτο νόμισμα ρίχνεται 2 φορές. Έστω τα ενδεχόμενα

A: η ένδειξη κεφαλή εμφανίζεται τουλάχιστον μία φορά,

B: στην πρώτη ρίψη εμφανίζονται γράμματα

Δ: σε κάθε ρίψη εμφανίζεται διαφορετική ένδειξη.

Να υπολογισθούν οι πιθανότητες:

$$P(A|B), P(B|A), P(\Delta|A), P(\Delta|B).$$

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης είναι

$$\Omega = \{KK, \Gamma\Gamma, K\Gamma, \Gamma K\}$$

και τα ενδεχόμενα που εμφανίζονται είναι:

$$A = \{KK, K\Gamma, \Gamma K\},$$

$$B = \{\Gamma\Gamma, \Gamma K\},$$

$$\Delta = \{K\Gamma, \Gamma K\},$$

$$AB = \{\Gamma K\},$$

$$A\Delta = \{K\Gamma, \Gamma K\},$$

$$B\Delta = \{\Gamma K\}.$$

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας έχουμε

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2 < P(A) = 3/4$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3 < P(B) = 1/2$$

$$P(\Delta|A) = \frac{P(\Delta A)}{P(A)} = \frac{2/4}{3/4} = 2/3 > P(\Delta) = 1/2$$

$$P(\Delta|B) = \frac{P(\Delta B)}{P(B)} = \frac{1/4}{2/4} = 1/2 = P(\Delta) = 1/2.$$

Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

[Ορισμός]: Τα ενδεχόμενα A, B καλούνται *ανεξάρτητα* αν

$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

[O]: Τα ενδεχόμενα $\{A_1, \dots, A_\nu\}$ καλούνται *πλήρως ανεξάρτητα* αν και μόνο αν

$$P(A_{i_1} A_{i_2}, \dots, A_{i_r}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}), \dots, P(A_{i_r}),$$

$\forall \{i_1, \dots, i_r\} \in \{1, 2, \dots, \nu\}, r = 2, 3, \dots, \nu$, δηλ. για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των ν δεικτών ανά r .

Παρατήρηση: Αν τα A, B είναι ανεξάρτητα, τότε

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

κάτι αναμενόμενο, αφού η πραγματοποίηση του ενδεχομένου B δεν επηρεάζει το A .

Παράδειγμα (συνέχεια) Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι

$$P(\Delta|B) = \frac{P(\Delta B)}{P(B)} = \frac{1/4}{2/4} = 1/2 = P(\Delta) = 1/2,$$

που σημαίνει ότι τα ενδεχόμενα Δ, B είναι ανεξάρτητα. Προφανώς τα

ενδεχόμενα A, B, Δ δεν είναι πλήρως ανεξάρτητα.

[O]: Μια ακολουθία πειραμάτων τύχης, έστω $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, καλείται ανεξάρτητη ακολουθία πειραμάτων ή δοκιμών αν για οποιαδήποτε ενδεχόμενα $\{A_1, \dots, A_n\}$ τέτοια ώστε το $A_i, i = 1, \dots, n$ να συνδέεται με το πείραμα $\xi_i, i = 1, \dots, n$ ισχύει η σχέση

$$P(A_1 \cap A_2 \dots, \dots, \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n).$$

Παράδειγμα: Έστω το τυχαίο πείραμα της ρίψης 2 ζαριών και τα εξής ενδεχόμενα:

$A =$ "Η πρώτη ένδειξη είναι 1 ή 2 ή 3"

$B = \text{“Η πρώτη ένδειξη είναι 3 ή 4 ή 5”}$

$\Gamma = \text{“Το άθροισμα των δύο ενδείξεων είναι 9”}$

Είναι τα A, B, Γ ανεξάρτητα;

Ο δειγματικός χώρος είναι:

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$$

και για τα ενδεχόμενα $A, B, \Gamma, AB, A\Gamma, B\Gamma, AB\Gamma$ έχουμε

$$A = \{(1, 1), \dots, (3, 6)\}$$

$$B = \{(3, 1), \dots, (5, 6)\}$$

$$\Gamma = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$$

$$AB = \{(3, 1), \dots, (3, 6)\}$$

$$A\Gamma = \{(3, 6)\}$$

$$B\Gamma = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4)\}$$

$$AB\Gamma = \{(3, 6)\}.$$

Άρα οι πιθανότητες είναι

$$P(A) = 18/36,$$

$$P(B) = 18/36,$$

$$P(\Gamma) = 4/36,$$

$$P(AB) = 6/36,$$

$$P(A\Gamma) = 1/36,$$

$$P(B\Gamma) = 3/36,$$

$$P(AB\Gamma) = 1/36.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$P(AB) = 1/6 \neq P(A)P(B) = 1/4,$$

$$P(A\Gamma) = 1/36 \neq P(A)P(\Gamma) = 1/18,$$

και

$$P(B\Gamma) = 1/12 \neq P(B)P(\Gamma) = 1/18,$$

αλλά:

$$P(AB\Gamma) = 1/36 = P(A)P(B)P(\Gamma).$$

Άρα τα ενδεχόμενα A, B, Γ δεν είναι πλήρως ανεξάρτητα.

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας: Έστω μία διαμέριση $\{A_1, \dots, A_\nu\}$ του δειγματικού χώρου Ω και ένα ενδεχόμενο $B \in \mathcal{A}$. Ισχύει η σχέση

$$P(B) = P(A_1) \times P(B|A_1) + P(A_2) \times P(B|A_2) \\ + \dots + P(A_\nu) \times P(B|A_\nu).$$

Θεώρημα Bayes: Έστω ότι ισχύουν όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος ολικής πιθανότητας. Τότε

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{\nu} P(A_i)P(B|A_i)} \quad i = 1, \dots, \nu.$$

Παρατήρηση: Η πιθανότητα $P(A_i|B)$ καλείται εκ των υστέρων πιθανότητα (a posteriori) σε αντίθεση με την $P(B|A_i)$ που καλείται εκ των προτέρων πιθανότητα (a priori).

Παράδειγμα: Έστω ότι ένα τεστ αίματος που γίνεται για την ανίχνευση μιας σπάνιας ασθένειας είναι αποτελεσματικό με πιθανότητα 0,99 για όσους πάσχουν. Το ποσοστό των πασχόντων έχει εκτιμηθεί σε 1 άτομο στα 1000. Ένα άτομο εκλέγεται στην τύχη και υποβάλλεται στο τεστ. Ποια είναι η πιθανότητα το τεστ να είναι θετικό;

Τυχαίες Μεταβλητές

Εισαγωγικές Έννοιες

- Μέχρι τώρα έχουμε μελετήσει τα πειράματα τύχης χρησιμοποιώντας τον δειγματικό χώρο και τον χώρο ενδεχομένων
- Πολλές φορές οι δειγματικοί χώροι δεν περιγράφονται με αριθμούς που μας είναι περισσότερο εύχρηστοι από μαθηματικοί άποψη
- Για το λόγο αυτό μπορούμε να ορίσουμε πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού τον δειγματικό χώρο
- Αυτές οι συναρτήσεις είναι γνωστές ως τυχαίες μεταβλητές

Παραδείγματα

1. Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός νομίσματος τρεις φορές. Έστω η τ.μ. Y ο αριθμός των "Κ" που εμφανίζονται.
2. Ας θεωρήσουμε το τυχαίο πείραμα μιας ακολουθίας ρίψεων ενός νομίσματος έως ότου εμφανισθεί "Κ" ή να συμπληρωθούν n ρίψεις. Έστω η τ.μ. X ο αριθμός των απαιτούμενων ρίψεων.
3. Έστω το τυχαίο πείραμα της ρίψης 2 αμερόληπτων διακεκριμένων ζαριών. Ορίζουμε τη τ.μ. X ως το άθροισμα των ενδείξεων.

[Ορισμός]: Μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλ.

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$$

καλείται Τυχαία Μεταβλητή (τ.μ.)

Παρατηρήσεις:

- Οι τυχαίες μεταβλητές συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα, ενώ οι συγκεκριμένες τιμές τους με μικρά, δηλ. X, Y, Z, \dots και $X = x, Y = y, Z = z, \dots$
- Συνήθως γράφουμε \mathbb{R}_X για το πεδίο τιμών της X , που μπορεί να είναι

ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών ή όλοι οι πραγματικοί αριθμοί

- Από τον ορισμό είναι φανερό ότι σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο $\{\omega\}$ του δειγματικού χώρου Ω η τυχαία μεταβλητή αντιστοιχεί έναν αριθμό
- Παρατηρούμε ότι διαμερίζει τον δειγματικό χώρο Ω σε ξένα μεταξύ τους υποσυνόλα, τα οποία αποτελούν όλον το δειγματικό χώρο Ω
- Έτσι για μία τυχαία μεταβλητή και συγκεκριμένο $\{x\}$, ορίζουμε το ενδεχόμενο A_x , δηλ. την αντίστροφη εικόνα του $\{x\}$, ως το υποσύνολο του Ω για τα στοιχεία του οποίου η τυχαία μεταβλητή X μας δίνει την

τιμή $\{\chi\}$. Είναι

$$A_\chi = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = \chi\}$$

- Είναι φανερό ότι

$$A_\chi \cap A_y = \emptyset \text{ αν } \chi \neq y \text{ και } \bigcup_{\chi \in R} A_\chi = \Omega$$

- Το νέο χώρο ενδεχομένων τον συμβολίζουμε με \mathcal{B}

[Ορισμός]: Έστω η τυχαία μεταβλητή X , το πεδίο τιμών της R_X και το σύνολο ενδεχομένων της \mathcal{B} . Η πιθανότητα $P_X(\cdot)$ είναι μία συνολοσυνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση

$$P_X(B) = P[X^{-1}(B)], \forall B \in \mathcal{B}.$$

Η πιθανότητα αυτή καλείται κατανομή πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X .

Παρατηρήσεις:

1. Η συνολοσυνάρτηση $P_X(\cdot)$ όπως ορίστηκε παραπάνω πληρεί τα αξιώματα του Kolmogorov

2. Η τριάδα $(R_X, \mathcal{B}, P_X(\cdot))$ καλείται χώρος πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X

Συνέχεια του παραδείγματος 1: Έχουμε ότι

$$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$$

και

$$\mathcal{B} = \{\{0\}, \dots, \{3\}, \{0, 1\}, \dots, \{2, 3\}, \{0, 1, 2\}, \dots, \{1, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3\}, \{\emptyset\}\},$$

δηλ. το σύνολο ενδεχομένων \mathcal{B} αποτελείται από $2^4 = 16$ ενδεχόμενα, όσα είναι τα δυνατά υποσύνολα που μπορούμε να κατασκευάσουμε από το

σύνολο R_X . Ας υπολογίσουμε μερικές πιθανότητες με βάση το σύνολο

ενδεχομένων \mathcal{B}

$$\begin{aligned} P(\{0, 1\}) &= P(\{\Gamma\Gamma\Gamma, \text{Κ}\Gamma\Gamma, \Gamma\text{Κ}\Gamma, \Gamma\Gamma\text{Κ}\}) \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\{0, 1, 2\}) &= P(\{\Gamma\Gamma\Gamma, \Gamma\Gamma\text{Κ}, \Gamma\text{Κ}\Gamma, \text{Κ}\Gamma\Gamma, \\ &\quad \text{Κ}\text{Κ}\Gamma, \text{Κ}\Gamma\text{Κ}, \Gamma\text{Κ}\text{Κ}\}) \\ &= 7/8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\{0, 2, 3\}) &= P(\{\Gamma\Gamma\Gamma.\text{Κ}\text{Κ}\Gamma, \text{Κ}\Gamma\text{Κ}, \Gamma\text{Κ}\text{Κ}, \text{Κ}\text{Κ}\text{Κ}\}) \\ &= 5/8 \end{aligned}$$

⋮

[O]: Έστω ο χώρος πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X $(R_X, \mathcal{B}, P_X(\cdot))$.

Η συνάρτηση

$$F(\mathbf{x}) = P(X \leq \mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

καλείται αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X (cumulative distribution function).

[Θ]: Έστω ο χώρος πιθανότητας $(R_X, \mathcal{B}, P_X(\cdot))$ της τυχαίας μεταβλητής X και η αθροιστική συνάρτησή της $F(x)$. Ισχύει η σχέση

$$P(\alpha < X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

για κάθε $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha \leq \beta$.

Ιδιότητες της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ για $-\infty < x < +\infty$

2. Είναι αύξουσα συνάρτηση, δηλ.

$$F(x_1) \leq F(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \quad \text{με} \quad x_1 \leq x_2$$

3. Ισχύουν οι σχέσεις:

$$F(-\infty) \equiv \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0,$$

και

$$F(+\infty) \equiv \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

Παράδειγμα: Έστω το τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού και X η ένδειξη της ρίψης. Τότε $R_X = \{1, \dots, 6\}$. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι: $F(x) = 0, \forall x \leq 0, F(1) = 1/6,$
 $F(x) = 1/6, \forall x < 2, F(2) = 2/6,$
 $F(x) = 2/6, \forall x < 3, F(3) = 3/6,$
 $F(x) = 3/6, \forall x < 4, F(4) = 4/6,$
 $F(x) = 4/6, \forall x < 5, F(5) = 5/6,$
 $F(x) = 5/6, \forall x < 6, F(6) = 6/6 = 1,$
 $F(x) = 1, \forall x \geq 6.$

Η γραφική παράσταση της $F(x)$ είναι ένα κλιμακωτό γράφημα με σημεία ασυνέχειας στα σημεία

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

[O]: Μία τυχαία μεταβλητή, έστω X , είναι διακριτή αν το πεδίο τιμών της αποτελείται από πεπερασμένο ή το πολύ αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων. Για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με $R_X = \{x_1, x_2, \dots, \}$ η συνάρτηση

$$f(\mathbf{x}_\kappa) = P(X = \mathbf{x}_\kappa), \mathbf{x}_\kappa \in R_X$$

καλείται συνάρτηση πιθανότητας (distribution function) της τυχαίας μεταβλητής X .

Η συνάρτηση πιθανότητας $f(x_\kappa)$ ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

- $f(x_\kappa) \geq 0, \kappa = 1, 2, \dots$

- $f(x_\kappa) = 0, \forall x_\kappa \in R_X$

- $\sum_{\kappa=1}^{\infty} f(x_\kappa) = 1$

Παράδειγμα: Έστω η τυχαία μεταβλητή X με $R_X = \{1, \dots, \nu\}$.

Υποθέτουμε ότι

$$f(x) = cx, x = 1, \dots, \nu, \text{ όπου } c \text{ σταθερά}$$

Ποιά είναι σταθερά c ; Ποιά είναι η πιθανότητα

$$P(X \leq \kappa), \kappa < \nu;$$

Από τη σχέση (3) έχουμε

$$\sum_{x=1}^{\nu} cx = 1,$$

η οποία μας δίνει

$$\sum_{x=1}^{\nu} cx = c \sum_{x=1}^{\nu} x = c \frac{\nu(\nu + 1)}{2} = 1$$

ή

$$c = \frac{2}{\nu(\nu + 1)}.$$

Επομένως η συνάρτηση πιθανότητας έχει τη μορφή

$$f(x) = \frac{2}{\nu(\nu + 1)}x, \quad x = 1, \dots, \nu.$$

και

$$P(X \leq \kappa) = \sum_{x=1}^{\kappa} x \frac{2}{\nu(\nu + 1)} = \frac{2}{\nu(\nu + 1)} \frac{\kappa(\kappa + 1)}{2}.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η πλήρης μορφή της αθροιστικής συνάρτησης

κατανομής είναι

$$F(x) = 0, \forall x \leq 0$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{2}{\nu(\nu + 1)} \times \frac{[x]([x] + 1)}{2}, x < \nu$$

$$F(x) = P(X \leq x) = 1, \forall x \geq \nu.$$

όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x .

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

[O]: Μία τυχαία μεταβλητή X καλείται συνεχής αν η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$ είναι συνεχής συνάρτηση του x για όλα $-\infty < x < \infty$.

[O]: Έστω μία συνεχής τυχαία μεταβλητή. Η $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function) της τυχαίας μεταβλητής X .

Από τους παραπάνω ορισμούς έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

- $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad -\infty < x < \infty$

$$\begin{aligned}
P(\alpha < X \leq \beta) &= P(X \leq \beta) - P(X \leq \alpha) \\
&= \int_{-\infty}^{\beta} f(x)dx - \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx
\end{aligned}$$

● Η σ.π.π. έχει τις εξής ιδιότητες:

- $f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(X = x) = P(x \leq X \leq x) = \int_x^x f(t)dt = 0$

– Αυτό έχει ως συνέπεια τη σχέση

$$\begin{aligned} P(\alpha \leq X \leq \beta) &= P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha \leq X < \beta) \\ &= P(\alpha < X < \beta) \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \\ &= F(\beta) - F(\alpha). \end{aligned} \tag{1}$$

Ειδικές Κατανομές

Bernoulli

Έστω τυχαίο πείραμα με Δ.Χ. Ω , όπου ενδεχόμενο A με: $A+A'=\Omega$ (διαμέριση του Ω), όπου το ένα παριστάνει την 'επιτυχία' (ε) και το άλλο την 'αποτυχία' (α). Θα καλείται δοκιμη Bernoulli, με:

$$P(\{\varepsilon\}) = p$$

και

$$P(\{\alpha\}) = q = 1 - p = 1 - P(\{\varepsilon\}).$$

[0] Έστω X ο αριθμός των επιτυχιών σε μια δοκιμη Bernoulli. Η κατανομή της δίτιμης τ.μ. X καλείται κατανομή Bernoulli με παράμετρο p . Η

συνάρτηση πιθανότητας είναι:

$$f(x) = P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

και η συνάρτηση κατανομής

$$F(X) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0; \\ q = 1 - p, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & 1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Η μέση τιμή είναι:

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^1 xp^x(1-p)^{1-x} = p,$$

και η διασπορά:

$$\begin{aligned}\sigma^2 = V(X) &= E[(X - \mu)^2] = \\ &= \sum_{x=0}^1 (x - p)^2 p^x (1 - p)^{1-x} \\ &= p^2(1 - p) + (1 - p)^2 p \\ &= p(1 - p).\end{aligned}$$

Binomial {Bin(n, p)}

[0] X : ο αριθμός των επιτυχιών σε μια ακολουθία n ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p ,

$$P_i(\{\varepsilon\}) = p$$

$$P_i(\{\alpha\}) = q = 1 - p, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

σταθερή σε όλες τις δοκιμές. Η κατανομή της X καλείται διωνυμική με παραμέτρους n και p .

Η συνάρτηση πιθανότητας είναι

$$P(X = x) = \binom{\nu}{x} p^x (1 - p)^{\nu - x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \nu,$$

όπου (από το διώνυμο του Νεύτωνα)

$$\sum_{x=0}^{\nu} f(x) = \sum_{x=0}^{\nu} \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu - x} = (p + q)^{\nu} = 1.$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F(X) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0; \\ \sum_{\kappa=0}^{[x]} \binom{\nu}{\kappa} p^{\kappa} (1-p)^{\nu-\kappa}, & 0 \leq x < \nu; \\ 1, & \nu \leq x < \infty. \end{cases}$$

[Θ] Η μέση τιμή είναι

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= \sum_{x=0}^{\nu} x f(x) \\ &= \sum_{x=0}^{\nu} x \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu-x} \\ &= \nu \sum_{x=1}^{\nu} x \binom{\nu-1}{x-1} p^x q^{\nu-x} \\ &= \nu p \sum_{y=0}^{\nu-1} x \binom{\nu-1}{y} p^y q^{\nu-1-y} \\ &= \nu p.\end{aligned}$$

και η διασπορά είναι:

$$V(X) = E[(X)_2] + E(X) - (E(X))^2,$$

όπου:

$$\begin{aligned} E[(X)_2] &= \sum_{x=0}^{\nu} (x)_2 f(x) \\ &= \sum_{x=0}^{\nu} x(x-1) \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu-x} \\ &= \nu(\nu-1) \sum_{x=2}^{\nu} x \binom{\nu-2}{x-2} p^x q^{\nu-x} \\ &= \nu(\nu-1) p^2 \sum_{y=0}^{\nu-2} x \binom{\nu-2}{y} p^y q^{\nu-2-y} \\ &= \nu(\nu-1) p^2. \end{aligned}$$

Συμπεπώς:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[(X)_2] + E(X) - (E(X))^2 \\ &= \nu(\nu - 1)p^2 + \nu p - (\nu p)^2 \\ &= \nu p(1 - p).\end{aligned}$$

Geometric $\{G(p)\}$

[0] X : ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία, σε μια ακολουθία n ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p ,

$$P_i(\{\varepsilon\}) = p$$

$$P_i(\{\alpha\}) = q = 1 - p, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

σταθερή σε όλες τις δοκιμές. Η κατανομή της X καλείται γεωμετρική με παραμέτρο p .

Η συνάρτηση πιθανότητας είναι

$$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots,$$

όπου

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{\infty} p(1 - p)^{x-1} &= p \sum_{x=1}^{\infty} (1 - p)^{x-1} \\ &= p \frac{1}{1 - (1 - p)} = 1 \end{aligned}$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F(X) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1; \\ 1 - q^{[x]}, & 1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

Αυτό βγαίνει από

$$F(x) = P(X \leq x) = P(X \leq [x]) = 1 - P(X > [x]),$$

όπου

$$P(X > [x]) = \sum_{k=[x]+1}^{\infty} pq^{k-1} = pq^{[x]} \sum_{k=[x]+1}^{\infty} q^{k-([x]+1)}$$

$$= pq^{[x]} \sum_{i=0}^{\infty} q^i = pq^{[x]} \frac{1}{1-q} = q^{[x]}.$$

[Θ] Για τη μέση τιμή έχουμε

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} x f(x) \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} x p q^{x-1} \\ &= p \sum_{x=1}^{\infty} x q^{x-1}\end{aligned}$$

ενώ για τη διασπορά $V(X) = E[(X)_2] + E(X) - (E(X))^2$, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[(X)_2] &= \sum_{x=2}^{\infty} (x)_2 f(x) \\ &= \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) pq^{x-1} \\ &= pq \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) q^{x-2}. \end{aligned}$$

Με παραγωγές της $\sum_{x=0}^{\infty} q^x = (1 - q)^{-1}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{\infty} xq^{x-1} &= (1 - q)^{-2}, & \sum_{x=0}^{\infty} x(x - 1)q^{x-2} \\ &= 2(1 - q)^{-3}\end{aligned}$$

Οπότε, η μέση τιμή γίνεται

$$\mu = p \sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1} = \frac{p}{(1 - q)^2} = \frac{1}{p}.$$

ενώ

$$E[(X)_2] = pq \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)q^{x-2} = \frac{2pq}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2},$$

οπότε η διασπορά γίνεται

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[(X)_2] + E(X) - (E(X))^2 \\ &= \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 \\ &= \frac{q}{p^2}.\end{aligned}$$

[Θ:] 'Ελειψη μνήμης:

$$P(X > k + r | X > k) = P(X > r), \quad k, r = 0, 1, 2, \dots$$

[Απ.]

$$\begin{aligned} P(X > k + r | X > k) &= \frac{P(X > k + r, X > k)}{P(X > k)} \\ &= \frac{P(X > k + r)}{P(X > k)} \\ &= \frac{1 - F(k + r)}{1 - F(k)} \\ &= \frac{q^{k+r}}{q^k} \\ &= q^r = 1 - F(r) \\ &= P(X > r). \end{aligned}$$

◇ Με ακριβώς τον ίδιο τρόπο ορίζετε η Γεωμετρική κατανομή για τον αριθμό Y των αποτυχιών μέχρι την πρώτη επιτυχία.

$$g(y) = P(Y = y) = P(X = y + 1) = pq^y, \quad y = 0, 1, 2, \dots$$

Uniform {U(a,b)}

Η απλούστερη συνεχής κατανομή. Εκχωρεί ίσες (ομοιόμορφες) πιθανότητες στα στοιχειώδη αποτελέσματα ενός τυχαίου πειράματος. Αυτά δεν είναι σημεία, [$P(X = x) = 0$ για κάθε $x \in R$], η εκχώρηση της πιθανότητας γίνεται σε διαστήματα και είναι ανάλογη του μήκους των.

Αν X ορισμένη στον Ω , με πεδίο τιμών $[a, b]$, $a < b$, τότε

$$P(x_1 < X < x_2) = c(x_2 - x_1), \quad a < x_1 < x_2 < b,$$

όπου c σταθερά. Θέτοντας $x_1 = a$ $x_2 = b$, και

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = 1,$$

τότε

$$c = \frac{1}{b - a}.$$

Η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F(X) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & b \leq x < \infty; \end{cases}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{αλλού;} \end{cases}$$

[0] X : τ.μ. με την πιο πάνω συνάρτηση πυκνότητας. Η κατανομή της X καλείται ομοιόμορφη στο διάστημα $[a,b]$.

[Θ] Για τη μέση τιμή έχουμε

$$\begin{aligned}\mu = E(X) &= \int_a^b x f(x) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2(b-a)} \right]_a^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

ενώ για τη διασπορά $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3(b-a)} \right]_a^b \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}. \end{aligned}$$

Οπότε η διασπορά γίνεται

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

[ΠΧ:] Τραίνο φτάνει σε σταθμό κάθε 10', αρχίζοντας στις 5π.μ. 'Αν επιβάτης φθάσει σε χρόνο ομοιόμορφο στο διάστημα [7:20,7:40], τότε ποιές οι πιθανότητες να περιμένει (α)το πολυ 4' (β) τουλάχιστον 7'.

Εστω X ο χρόνος αφίξης στο διάστημα $[7:20, 7:40]$. Τότε η X έχει $U(0,20)$, με συνάρτηση κατανομής

$$F(X) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a; \\ \frac{x}{20}, & 0 \leq X < 20 \\ 1, & 20 \leq x < \infty; \end{cases}$$

και συνάρτηση πυκνότητας

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & 0 \leq x \leq 20 \\ 0, & \text{αλλού;} \end{cases}$$

(α) Ενδεχόμενο A: επιβάτης περιμένει το πολύ 4' = επιβάτης φθάνει στο

σταθμό στο διάστημα $[7:26, 7:30]$ ή στο διάστημα $[7:36, 7:40]$. Άρα

$$\begin{aligned} P(A) &= P(6 < X \leq 10) + P(16 < X \leq 20) \\ &= [F(10) - F(6)] + [F(20) - F(16)] \\ &= \left[\frac{10}{20} - \frac{6}{20} \right] - \left[\frac{20}{20} - \frac{16}{20} \right] = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

(β) Ενδεχόμενο B: επιβάτης περιμένει το τουλάχιστον 7' = επιβάτης φθάνει

στο σταθμό στο διάστημα $[7:20,7:23]$ ή στο διάστημα $[7:30,7:33]$. Άρα

$$\begin{aligned} P(B) &= P(0 < X \leq 3) + P(10 < X \leq 13) \\ &= [F(3) - F(0)] + [F(13) - F(10)] \\ &= \left[\frac{3}{20} - \frac{0}{20} \right] - \left[\frac{13}{20} - \frac{10}{20} \right] = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Normal $\{N(\mu, \sigma^2)\}$

[0] X : τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

καλείται Κανονική με παραμέτρους μ και σ , όπου $-\infty < \mu < \infty$ και $\sigma > 0$.

[Σ] Σημειώνουμε ότι αν $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ και $u = \frac{z}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp\{-u^2\} du = 1,\end{aligned}$$

αφού από το ολοκλήρωμα του Euler

$$\int_0^{\infty} \exp \{ -u^2 \} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Εφαρμογές:

- σφάλματα (γνώστη και ως κατανομή σφαλμάτων)
- πληθυσμιακά χαρακτηριστικά (βάρος, ύψος)
- πολλές άλλες κατανομές (διακριτές και συνεχείς) μπορούν να προσεγγισθούν από την κανονική

- άθροισμα και μέσος όρος μεγάλου αριθμού παρατηρήσεων ακολουθεί κατά προσέγγιση κανονική (Κ.Ο.Θ.)

[Θ] Για τη μέση τιμή, αφού $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = \mu + \sigma z$, έχουμε

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dx \\ &= \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{-z^2}{2} \right\} dz + \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z \exp \left\{ \frac{-z^2}{2} \right\} dz \\ &= \mu + \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp \left\{ \frac{-z^2}{2} \right\} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \mu. \end{aligned}$$

Για τη διασπορά έχουμε:

$$V(X) =$$

και θέτοντας $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ και ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες:

$$\begin{aligned} V(X) &= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \exp\left\{\frac{-z^2}{2}\right\} dz \\ &= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[z \exp\left\{\frac{-z^2}{2}\right\} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad + \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{-z^2}{2}\right\} dz \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Standard Normal $\{N(0, 1)\}$

[0] Εάν θέσουμε $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$, τότε

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \frac{-z^2}{2} \right\}, \quad -\infty < z < \infty$$

όπου $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Η κατανομή της τ.μ. Z καλείται τυποποιημένη κανονική $N(0, 1)$.

Η συνάρτηση κατανομής είναι

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left\{\frac{-t^2}{2}\right\} dt, \quad -\infty < z < \infty$$

η οποία είναι πινακοποιημένη.

$$[\Theta]: \Phi(z) = 1 - \Phi(-z).$$

[Απ]:

$$\Phi(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-z} \exp\left\{\frac{-t^2}{2}\right\} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} \exp\left\{\frac{-u^2}{2}\right\} du$$

εάν θέσουμε $t = -u$.

Επομένως:

$$\begin{aligned}\Phi(z) + \Phi(-z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left\{\frac{-t^2}{2}\right\} dt \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} \exp\left\{\frac{-u^2}{2}\right\} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{-t^2}{2}\right\} dt \\ &= 1\end{aligned}$$

Άρα: $\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$.

[Θ] Έστω X ακολουθεί διωνυμική με σ.π.

$$f(x) = \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \nu,$$

όπου $p = 1 - q$. Τότε, για μεγάλο ν (θεωρητικά $\nu \rightarrow \infty$) ισχύει η προσέγγιση

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{\nu pq} \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - \nu p)^2}{2(\sqrt{\nu pq})^2} \right\}.$$

◇ Οπότε:

$$P(a \leq X \leq b) \simeq \Phi\left(\frac{b - \nu p}{\sqrt{\nu p q}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \nu p}{\sqrt{\nu p q}}\right)$$

[ΠΧ] Έστω $X \simeq N(\mu, \sigma^2)$. Να υπολογισθεί η πιθανότητα η X να απέχει από το μέσο $\mu = 1, 2, 3$ τυπικές αποκλίσεις .

Έχουμε $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$, οπότε

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| \leq k\sigma) &= P(|Z| \leq k) \\ &= P(-k \leq Z \leq k) \\ &= \Phi(k) - \Phi(-k) \\ &= 2\Phi(k) - 1. \end{aligned}$$

Από πίνακες έχουμε $\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(2)=0.9772$ και $\Phi(3)=0.9987$. Οπότε:

$$P(|X - \mu| \leq \sigma) = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826$$

$$P(|X - \mu| \leq 2\sigma) = 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$$

$$P(|X - \mu| \leq 3\sigma) = 2 \cdot 0.9987 - 1 = 0.9974$$

[ΠΧ] Έστω δείγμα n -ατόμων από ένα πληθυσμό για την εκτίμηση του ποσοστού p των ατόμων που πλάσχουν από μία ασθένεια. (α) Ποιό το n έτσι ώστε το ποσοστό αυτών που πάσχουν από την ασθένεια να διαφέρει από το πραγματικό ποσοστό p κατ' απόλυτη τιμή λιγότερο από 1 % με

πιθανότητα 95 %. (β) Άν $p \leq 0.03$ (σπάνια ασθένεια) ποιό το n ?

(α) X ο αριθμός των ατόμων με την ασθένεια. $X \simeq \text{Bin}(n, p)$, και το ζητούμενο ποσοστό είναι $\frac{X}{n}$. Οπότε:

$$P \left(\left| \frac{X}{n} - p \right| \leq 0.01 \right) \geq 0.95.$$

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση από την κανονική

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{X}{\nu} - p\right| \leq 0.01\right) &= P\left(-0.01 \leq \frac{X}{\nu} - p \leq 0.01\right) \\
&= P\left(\frac{-0.01\nu}{\sqrt{\nu pq}} \leq \frac{X - \nu p}{\sqrt{\nu pq}} \leq \frac{0.01\nu}{\sqrt{\nu pq}}\right) \\
&\approx \Phi\left(\frac{0.01\nu}{\sqrt{\nu pq}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.01\nu}{\sqrt{\nu pq}}\right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{0.01\nu}{\sqrt{\nu pq}}\right) - 1
\end{aligned}$$

οπότε η συνθήκη παίρνει τη μορφή

$$2\Phi\left(\frac{0.01\sqrt{v}}{\sqrt{npq}}\right) - 1 \geq 0.95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{0.01\sqrt{v}}{\sqrt{npq}}\right) \geq 0.975.$$

Από πίνακες: $\Phi(1.96)=0.975$, οπότε

$$\frac{0.01\sqrt{v}}{\sqrt{npq}} \geq 1.96 \Rightarrow v \geq 38416npq.$$

Η συνάρτηση $npq = p(1-p) = p - p^2$ μεγιστοποιείται όταν $p = 0.5$.

Οπότε

$$v \geq 38416(0.5)(1 - 0.05) \simeq 9604.$$

(β) Αν $p \leq 0.03$, τότε $pq = 0.03(1 - 0.03) = 0.0021$, και συνεπώς

$$v \geq 38416(0.0021) \simeq 81.$$