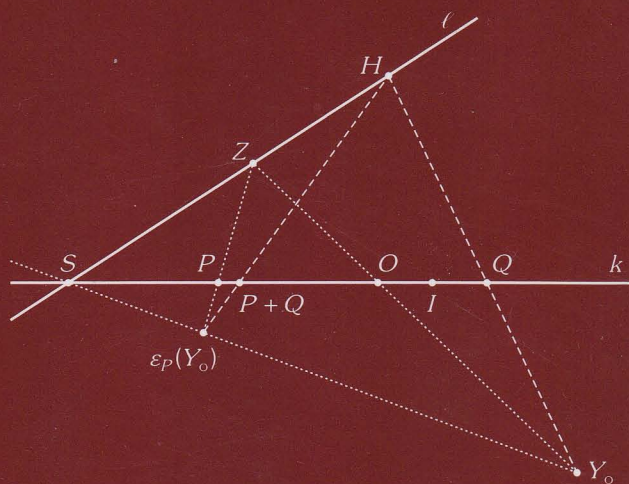


ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ Ε. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ

Αν. Καθηγητή Πανεπιστημίου Αθηνών

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΟΒΟΛΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ



ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

**ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΠΡΟΒΟΛΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ**

ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ Ε. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ

Αν. Καθηγητή Πανεπιστημίου Αθηνών

**ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΠΡΟΒΟΛΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ**

ΑΘΗΝΑ 2009

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΡΟΒΟΛΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ELEMENTS OF PROJECTIVE GEOMETRY
AMS (2000) Subject Classification:
51A05, 51A10, 51A25, 51A30

COPYRIGHT © 2009 by Efstathios E. Vassiliou
All rights reserved

**Στη μνήμη
των γονιών μου**

Πρόλογος

ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΑΥΤΟ αποτελεί μία σειρά εισαγωγικών μαθημάτων στην Προβολική Γεωμετρία, στο σύγχρονο πλαίσιο που διαμορφώθηκε κυρίως κατά την τελευταία τεσσαρακονταετία. Βασίζεται στο εξαντλημένο βιβλίο μας «Εισαγωγή στην Προβολική Γεωμετρία», που κυκλοφόρησε για πρώτη φορά (σε δακτυλογραφημένη μορφή) το 1989. Εκτός από τη νέα ηλεκτρονική στοιχειοθεσία (σε L^AT_EX format), η σχεδόν συνεχής διδασκαλία του προηγούμενου συγγράμματος μέχρι σήμερα οδήγησε σε διάφορες αλλαγές, σημαντικές προσθήκες και άλλες βελτιώσεις στο αρχικό κείμενο.

Στόχος των μαθημάτων αυτών είναι να φέρει τον αναγνώστη σε επαφή με βασικές έννοιες και μεθόδους της *συνθετικής* και της *αναλυτικής* άποψης της Προβολικής Γεωμετρίας.

Η πρώτη άποψη (συνθετική) αναφέρεται στην αξιωματική θεμελίωση της Προβολικής Γεωμετρίας και παρουσιάζεται με τέτοιον τρόπο, ώστε να φαίνονται με σαφήνεια οι θεμελιώδεις διαφορές (και ομοιότητες) της τελευταίας με την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Μέσω ενός περιορισμένου αριθμού αξιωμάτων δημιουργείται ένα άρτιο οικοδόμημα, το οποίον είναι ένα από τα πιο απλά και ωραία παραδείγματα *μη Ευκλείδειας* Γεωμετρίας.

Η δεύτερη άποψη (αναλυτική) αναφέρεται στην «αλγεβροποίηση» της Προβολικής Γεωμετρίας με τη βοήθεια βασικών εννοιών και εργαλείων της Άλγεβρας. Αποτελεί ένα άλλο παράδειγμα σύζευξης –φαινομενικά διαφορετικών– μαθηματικών κλάδων και μεθοδολογιών. Διαδικασίες αυτού του είδους υπήρξαν πολύ γόνιμες για την εξέλιξη της γεωμετρίας και πολλών άλλων κλάδων των μαθηματικών.

Τα Κεφάλαια 1 και 2 αναφέρονται στη συνθετική Προβολική Γεωμετρία, ενώ τα Κεφάλαια 3 και 6 στην αναλυτική πλευρά της. Τα Κεφάλαια 4 και 5 αναφέρονται κυρίως στη συνθετική γεωμετρία, παρά το γεγονός ότι εκκινούν (για μεθοδολογικούς) λόγους από αλγεβρική σκοπιά.

Η όλη παρουσίαση γίνεται σε *αφηρημένο πλαίσιο*, με τη βοήθεια στοιχειωδών συνολοθεωρητικών μεθόδων και αλγεβρικών εννοιών. Τα σημεία και οι ευθείες του προβολικού επιπέδου είναι στοιχεία αφηρημένων συνόλων, που αυθαιρέτως

ονομάζονται έτσι, και συνδέονται μεταξύ τους με μία, εξίσου αφηρημένη, σχέση σύμπτωσης. Δεν αναφέρονται αναγκαίως σε αντικείμενα της άμεσης εμπειρίας μας. Οι απεικονίσεις και οι μορφισμοί αποτελούν το βασικό εργαλείο για τη μελέτη θεμελιωδών εννοιών, όπως είναι οι συγγραμμικότητες, οι προοπτικότητες και προβολικότητες. Απ' το άλλο μέρος, οι ομάδες, οι διαιρετικοί δακτύλιοι, και τα σώματα είναι οι βασικές αλγεβρικές δομές που σχετίζονται αμέσως με τη δομή του προβολικού επιπέδου.

Στην επιλογή και την έκταση της ύλης που αναπτύσσεται εδώ, γίνεται προσπάθεια να συνδυαστούν οι εξής στόχοι:

α) Το κείμενο να αποτελέσει βασικό βοήθημα των φοιτητών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, στους οποίους διδάσκεται το μάθημα της Προβολικής Γεωμετρίας (στο Δ' εξάμηνο των σπουδών τους, κατά το ενδεικτικό πρόγραμμα).

β) Να παρουσιαστούν, σε σχετικά μικρή έκταση, οι κεντρικές ιδέες και τα αποτελέσματα των δύο παραπάνω απόψεων της Προβολικής Γεωμετρίας.

γ) Να χρησιμοποιηθούν οι λιγότερες προαπαιτούμενες γνώσεις (εκτός από τις εντελώς απαραίτητες στοιχειώδεις μαθηματικές έννοιες), ώστε η έκθεση να είναι κατά το δυνατόν πλήρης και αυτοτελής.

Ακριβέστερη εικόνα του περιεχομένου του βιβλίου μπορεί να σχηματίσει κανείς από τον πίνακα των περιεχομένων και τη σχετική περίληψη στην αρχή κάθε κεφαλαίου.

Εκτός από τους απαραίτητους πίνακες συμβόλων και εννοιών, το κείμενο συμπληρώνεται με ένα παράρτημα των απαιτούμενων αλγεβρικών εννοιών. Από την πολλή μεγάλη βιβλιογραφία αναφέρουμε μόνον τις πηγές που έχουμε χρησιμοποιήσει και στις οποίες παραπέμπουμε. Στο τέλος του βιβλίου, για διευκόλυνση του αναγνώστη, παραθέτουμε σύντομες υποδείξεις για τη λύση ορισμένων ασκήσεων. Οι περισσότερες ασκήσεις είναι (σχεδόν) άμεσες εφαρμογές της θεωρίας και πολλές απ' αυτές συμπληρώνουν ή διευκρινίζουν κάποια σημεία της.

Πιστεύουμε ότι, με υπόβαθρο το παρόν κείμενο, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να προχωρήσει στη μελέτη και άλλων σημαντικών ή εξειδικευμένων θεμάτων, τα οποία έχουν παραλειφθεί εδώ, σύμφωνα με τις κατευθυντήριες γραμμές και τους περιορισμούς που αναφέρονται παραπάνω.

Περιεχόμενα

Πρόλογος	vii
0 Εισαγωγή	1
0.1 Η γεωμετρία στην αρχαιότητα	2
0.2 Η γεωμετρία στους νεωτέρους χρόνους	5
0.3 Οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες	6
0.4 Η Προβολική Γεωμετρία	8
0.5 Τυπικά αξιωματικά συστήματα	13
1 Συσχετισμένα και προβολικά επίπεδα	17
1.1 Το συσχετισμένο επίπεδο	18
1.2 Το προβολικό επίπεδο	24
1.3 Η αρχή του δυϊσμού	31
1.4 Στοιχειώδεις απεικονίσεις	34
1.5 Προοπτικότητες και προβολικότητες	40
1.6 Σχέση προβολικών και συσχετισμένων επιπέδων	47
2 Οι συγγραμμικότητες ενός προβολικού επιπέδου	55
2.1 Μορφισμοί προβολικών επιπέδων	56
2.2 Συγγραμμικότητες	65
2.3 Μερικές εφαρμογές των ισομορφισμών	78
3 Το πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}_2$	87
3.1 Αλγεβρική μελέτη του $\mathbb{P}_2$	88
3.2 Γραμμικοί αυτομορφισμοί του $\mathbb{R}^3$ και συγγραμμικότητες του $\mathbb{P}_2$. .	97
3.3 Οι ομολογίες του $\mathbb{P}_2$	101
3.4 Οι επάρσεις του $\mathbb{P}_2$	116
3.5 Το $\mathbb{P}_2$ ως πλήρωση του συνήθους επιπέδου	121

4 Προβολικά επίπεδα Desargues	125
4.1 Αλγεβρική ερμηνεία του επιπέδου Desargues	126
4.2 Γεωμετρική ερμηνεία του επιπέδου Desargues	136
4.3 Προβολικότητες σε επίπεδα Desargues	146
5 Προβολικά επίπεδα του Πάππου	157
5.1 Επίπεδα του Πάππου	158
5.2 Το πλήρες Θεμελιώδες Θεώρημα της Προβολικής Γεωμετρίας . . .	169
5.3 Παρατηρήσεις επί της Γεωμετρίας Klein	172
6 Προβολικά επίπεδα και διαιρετικοί δακτύλιοι	175
6.1 Ο διαιρετικός δακτύλιος ενός επιπέδου Desargues	176
6.2 Το μονοσήμαντο του διαιρετικού δακτυλίου	189
6.3 Κατασκευή προβολικού επιπέδου από διαιρετικό δακτύλιο	193
6.4 Συσχετισμός των δακτυλίων $\mathcal{D}$ και $\mathcal{R}$	198
6.5 Συσχετισμός των επιπέδων $\mathcal{P}$ και $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$	201
7 Αρμονικές τετράδες και κωνικές	215
7.1 Αρμονικές τετράδες	216
7.2 Κωνικές σημειοσειρές και δέσμες	230
7.3 Το θεώρημα του Pascal	237
7.4 Το θεώρημα του Brianchon	241
7.5 Άλλα θέματα προς μελέτη	244
Παράρτημα	247
Βιβλιογραφία	251
Υποδείξεις λύσεων	255
Πίνακας συμβόλων	285
Πίνακας εννοιών	288

... Les expressions "être situé sur, passer par", etc., ne sont pas destinées à évoquer des images; elles sont simplement des synonymes du mot déterminer. Les mots "point, droite et plan" eux-mêmes ne doivent provoquer dans l'esprit aucune représentation sensible. Ils pourraient indifféremment désigner des objets d'une nature quelconque, pourvu qu'on pût établir entre ces objets une correspondance telle qu'à tout système de deux objets appelés points correspondît un des objets appelés droites et un seul.

... Ainsi M. Hilbert a, pour ainsi dire, cherché à mettre les axiomes sous une forme telle qu'ils puissent être appliquées par quelqu'un qui n'en comprendrait pas le sens, parce qu'il n'aurait jamais vu ni points, ni droite, ni plan.

... On pourra ainsi construire toute la géométrie, je ne dirais pas précisément sans y rien comprendre, puisqu'on saisira l'enchaînement logique des propositions, mais tout au moins sans y rien voir. On pourrait confier les axiomes à une machine à raisonner, par exemple au "piano raisonneur" de Stanley Jevons, et on en verrait sortir toute la géométrie.

H. POINCARÉ

[25, p. 161: Les fondements de la géométrie]

Παραθέτουμε την ελληνική απόδοση του χωρίου του H. Poincaré, που περιέχεται στην προηγούμενη σελίδα.

... Οι εκφράσεις "κείται επί, διέρχεται από", κλπ., δεν προ-
ορίζονται να ανακαλέσουν εικόνες· είναι απλώς συνώνυμα της
λέξης προσδιορίζω. Οι λέξεις "σημείο, ευθεία και επιπέδο" αυ-
τές καθ' εαυτές δεν πρέπει να προκαλούν στο πνεύμα καμία
αισθητή παράσταση. Θα μπορούσαν αδιαφόρως να αποδίδουν
αντικείμενα οποιασδήποτε φύσης, αρκεί να μπορούμε να ε-
γκαθιδρύσουμε μεταξύ αυτών των αντικειμένων μιάν αντιστοι-
χία, τέτοια ώστε σε κάθε σύστημα δύο αντικειμένων, που κα-
λούνται σημεία, να αντιστοιχεί ένα από τα αντικείμενα που
καλούνται ευθείες, και ένα μόνον.

... Τοιουτοτρόπως, ο Κορ Hilbert, για να το πούμε έτσι, προ-
σπάθησε να θέσει τα αξιώματα σε μία τέτοια μορφή, που να
μπορούν να εφαρμοστούν από οποιονδήποτε που δεν θα α-
ντιλαμβανόταν το νόημά τους, γιατί δεν θα είχε δει ποτέ ούτε
σημεία, ούτε ευθείες, ούτε επίπεδο.

... Θα μπορούμε έτσι να κατασκευάσουμε όλη τη γεωμετρία,
δεν θα έλεγα ακριβώς χωρίς να καταλαβαίνουμε τίποτε, αφού
θα συλλάβουμε τη λογική αλληλουχία των προτάσεων, αλλά
το λιγότερο χωρίς να βλέπουμε τίποτε σ' αυτήν. Θα μπορού-
σαμε να εμπιστευθούμε τα αξιώματα σε μία λογική μηχανή,
για παράδειγμα στο "λογικό πιάνο" του Stanley Jevons, και
θα βλέπαμε να βγαίνει απ' αυτό όλη η γεωμετρία.

Κεφάλαιο 0

Εισαγωγή

Η συμφυής με την αρμονία γεωμετρία από νωρίς θεωρήθηκε ως η πλέον αδιάσειστη έκφραση ενός θεϊκού σχεδίου που βρίσκεται στη βάση του κόσμου, ενός μεταφυσικού σχεδίου που προσδιορίζει το φυσικό.

N. PENNICK [23, σελ. 8]

ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΑΥΤΟ γίνεται μία πολύ σύντομη αναδρομή σε μερικούς σταθμούς που σηματοδότησαν την εξέλιξη της γεωμετρίας. Αρχίζουμε με την αρχαία περίοδο και αναλύουμε τη σημασία της *αξιοματικής θεμελίωσης* του Ευκλείδη για την ανάπτυξη της γεωμετρίας και των μαθηματικών γενικότερα.

Στη νεώτερη εποχή αναφερόμαστε κυρίως στην ανακάλυψη των *μη Ευκλείδειων Γεωμετριών*. Όπως είναι γνωστόν, η Γεωμετρία του Riemann, σε συνδυασμό με τις σύγχρονες απόψεις της φυσικής (βλ. Θεωρία της Σχετικότητας), άλλαξε ριζικά τις αντιλήψεις μας για τον χώρο και τον χρόνο.

Η Προβολική Γεωμετρία έχει τις ρίζες τις στο πρόβλημα της προοπτικής, με την οποία επιχειρείται η απόδοση του «βάθους» στους ζωγραφικούς πίνακες.

Έτσι, στα πρώτα της βήματα, η γεωμετρία αυτή αποτελούσε τη μαθηματοποίηση των κανόνων της προοπτικής. Στην τελευταία παράγραφο γίνεται λεπτομερέστερη αναφορά στην εξέλιξη της Προβολικής Γεωμετρίας και εξηγείται γιατί κατατάσσεται στις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

0.1 Η γεωμετρία στην αρχαιότητα

Ο άνθρωπος, στην καθημερινή του εμπειρία, αντιλαμβάνεται τις γεωμετρικές μορφές. Όμως, για να μπορέσει να τις χειριστεί και να τις μελετήσει, είναι απαραίτητη η ιδεατή αναπαράστασή τους. Για παράδειγμα, ο κύκλος (ένα από τα αρχαιότερα σύμβολα που χάραξε ο άνθρωπος) είναι η ιδεατή αποτύπωση του ηλιακού δίσκου και των περάτων του φυσικού ορίζοντα. Η (μαθηματική) σφαίρα παραπέμπει στον ουράνιο θόλο. Το επίπεδο της Στοιχειώδους Γεωμετρίας είναι η ιδεατή εικόνα της στάθμης του νερού που ηρεμεί.

Η αφαίρεση της καθημερινής εμπειρίας και η μεταφορά της στο επίπεδο της νοητικής δραστηριότητας αρχικά εξυπηρετούσε πρακτικές και τεχνικές ανάγκες (όπως, άλλωστε, συνέβη και στο ξεκίνημα κάθε επιστήμης). Έτσι, στην αρχαία Αίγυπτο η γεωμετρία χρησίμευε στην οριοθέτηση και τη *μέτρηση των γαιών* (απ' όπου και ο όρος γεωμετρία), μετά τις πλημμύρες του ποταμού Νείλου, προκειμένου να επιμετρηθούν οι φορολογικές υποχρεώσεις των υπηκόων των Φαραώ. Επίσης, πολυπλοκότεροι υπολογισμοί χρησιμοποιήθηκαν στην οικοδόμηση των πυραμίδων. Ανάλογες πρακτικές ανάγκες εκάλυπτε η γεωμετρία και σε άλλους λαούς (Βαβυλωνίους, Κινέζους), όπως μαρτυρούν σύγχρονες αρχαιολογικές ανακαλύψεις.

Αντιθέτως, η μελέτη της γεωμετρίας, και των μαθηματικών γενικότερα, πέρα από τις πρακτικές ανάγκες, ως πνευματική αναζήτηση, ως θεωρητικό πρόβλημα, είναι κατάκτηση του αρχαίου ελληνικού πνεύματος. Είναι το αποτέλεσμα του ελληνικού ορθολογισμού, που προσπαθεί να βάλει τάξη στον περιβάλλοντα κόσμο και να τον ερμηνεύσει. Εδώ πρέπει να αναφερθεί το όνομα του Θαλή, γεωμέτρη και φιλόσοφου, που θεωρείται ότι είναι ο πρώτος που συνέλαβε (και εφάρμοσε) την ιδέα της απόδειξης. Η χρήση των ομοίων τριγώνων του επέτρεψε τον ακριβή υπολογισμό του ύψους των πυραμίδων, κάτι που γινόταν μόνον εμπειρικά προηγουμένως. Η πρόβλεψη της έκλειψης του ηλίου τον κατέστησε πρόσωπο μυθικό.

Σκοπός μας εδώ δεν είναι να παρουσιάσουμε ούτε την ιστορία της γεωμετρίας στην αρχαιότητα, ούτε τους μεγάλους γεωμέτρες και το έργο τους. Θα αναφερθούμε μόνο σε μερικούς σταθμούς αυτής της ιστορικής πορείας, οι οποίοι οριοθέτησαν την εξέλιξη της γεωμετρίας.

Μετά τον Θαλή, χωρίς αμφιβολία, η Σχολή των Πυθαγορείων άσκησε τερά-

στη επίδραση στα μαθηματικά και τη φιλοσοφία. Έδωσε στην αριθμητική τη μορφή θεωρητικής επιστήμης, στην οποία στηρίχτηκε και η φιλοσοφική τους διδασκαλία. Στην ίδια Σχολή, μαζί με τη φιλοσοφία, τη μουσική και την αριθμητική, καλλιεργείται και η γεωμετρία: η απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος, η μελέτη των κανονικών σχημάτων και στερεών, είναι μερικές μόνον από τις «γεωμετρικές» ενασχολήσεις της. Βέβαια, η σύζευξη της γεωμετρίας με την αριθμητική, που τόσο γόνιμη αποδείχτηκε πολύ μεταγενέστερα με τον Καρτέσιο (Descartes) και τον P. Fermat, οδήγησε στην ανακάλυψη των ασυμμέτρων αριθμών, που ανέτρεψε τις φιλοσοφικές δοξασίες των Πυθαγορείων και οδήγησε στην παρακμή της Σχολής τους.

Θα προσθέταμε ότι οι Πυθαγόρειοι, αναζητώντας τη συμμετρία και την αρμονία του κόσμου (άλλος πυθαγορικός όρος κι αυτός), αναγνωρίζουν ουσιαστικά την ύπαρξη μιας γεωμετρικής δομής σ' αυτόν. Όμως, η δομή αυτή συνδέεται με το άρρητο σχέδιο της δημιουργίας, που γίνεται αντιληπτό –μόνον κατά προσέγγιση– με τους αριθμούς. Επομένως, οι τελευταίοι αποτελούν και τη γέφυρα ανάμεσα στον άνθρωπο και τη γεωμετρία, η οποία περιγράφει την ίδια τη φύση (: *αεί ο Θεός γεωμετρεί*).

Τη μεγαλύτερη επίδραση στην ανάπτυξη της γεωμετρίας είχε αναμφισβήτητα ο Ευκλείδης. Η ακμή του τοποθετείται περίπου στο 300 π.Χ., ενώ οι ημερομηνίες γέννησης και θανάτου του παραμένουν άγνωστες. Στο περίφημο έργο του *Στοιχεία*, αποτελούμενο από 13 Βιβλία, ο Ευκλείδης περιέλαβε το μεγαλύτερο μέρος της μέχρι τότε μαθηματικής γνώσης και οργάνωσε τη γεωμετρία κατά τρόπον αυστηρό, όπως απαιτούσε το ελληνικό πνεύμα της *λογικής* και της *ενότητας*.

Η γεωμετρία αναφέρεται στην έννοια του *χώρου*, συστατικά του οποίου είναι τα *σημεία*, οι *ευθείες* και τα *επίπεδα*. Πρόκειται για έννοιες που, ενώ τις αντιλαμβανόμαστε στην καθημερινή μας εμπειρία, δεν μπορούμε να τις ορίσουμε με ακρίβεια. Επομένως δημιουργείται το εύλογο ερώτημα: πώς είναι δυνατόν να οικοδομηθεί αυστηρά η γεωμετρία, όταν τα ίδια τα δομικά στοιχεία της παραμένουν άγνωστα;

Εδώ η συμβολή του Ευκλείδη υπήρξε καταλυτική. Παρ' όλο που προσπάθησε (ανεπιτυχώς) να ορίσει τις παραπάνω έννοιες, η προσέγγισή του έκανε φανερό ότι στα μαθηματικά δεν μας ενδιαφέρει η ουσία των αντικειμένων που μας απασχολούν, αλλά οι *σχέσεις* μεταξύ αυτών των αντικειμένων. Έτσι, αδιαφορώντας για την οντολογία των σημείων, των ευθειών και των επιπέδων, μπορούμε να ξεκινήσουμε με ένα σύστημα σχέσεων, δηλαδή με τα *αξιώματα*, των οποίων την αλήθεια δεχόμαστε εκ των προτέρων, και κατόπιν, με τη βοήθεια της λογικής (συν)επαγωγής, να προχωρήσουμε στην απόδειξη της ισχύος ή όχι κάθε άλλης γεωμετρικής σχέσης που μπορεί να διατυπωθεί.

Αυτή είναι η βασική ιδέα της *αξιοματικής θεμελίωσης* του Ευκλείδη. Τα α-

ξιώματα (ή αιτήματα, στην ορολογία του Ευκλείδη), βρίσκονται στην αφετηρία και είναι απαραίτητα για να μην περιπέσουν οι συλλογισμοί μας σε φαύλο κύκλο. Συνήθως προκύπτουν από την απλή παρατήρηση (μέσα στα στενά όρια της ανθρώπινης κλίμακας) ή από τη μελέτη ενός συγκεκριμένου παραδείγματος. Έτσι, η πρακτική διαπίστωση ότι, ανάμεσα σε δύο σημεία ενός κοινού επιπέδου, ή ενός φύλλου χαρτιού, χαράσσεται μία μόνον ευθεία, οδηγεί στη διατύπωση του 1ου αξιώματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας: *«δύο διαφορετικά σημεία ορίζουν μία και μοναδική ευθεία που τα περιέχει»*.

Το σύστημα των αξιωμάτων πρέπει να καλύπτει, προφανώς, κάποιες ουσιαστικές απαιτήσεις. Τα αξιώματα πρέπει να είναι συμβιβαστά και ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή να μην οδηγούν σε αντιφάσεις και κανένα από αυτά να μην ανάγεται στα άλλα. Επίσης, το σύστημα των αξιωμάτων πρέπει να είναι πλήρες, με την έννοια ότι, για κάθε δυνατή σχέση/πρόταση που μπορεί να διατυπωθεί, θα πρέπει να μπορούμε να αποφανθούμε για την αλήθειά της ή όχι. Θα πούμε περισσότερο για τη σύγχρονη αξιωματική μέθοδο στην Παράγραφο 0.5.

Οι προηγούμενες απαιτήσεις διαμορφώθηκαν σε πολύ νεώτερες εποχές, μετά τη συστηματική μελέτη των Στοιχείων, ως απόρροια της προσπάθειας να διορθωθούν οι ατέλειές τους, αλλά και να οριοθετηθεί η Ευκλείδεια Γεωμετρία σε σχέση με τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, οι οποίες εμφανίστηκαν μόλις τον 19ο αιώνα. Ανάμεσα σ' αυτούς, που πρότειναν διάφορα αξιωματικά συστήματα για τη θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, μπορούμε να αναφέρουμε τον David Hilbert (1862–1943), τον George David Birkhoff (1844–1944) και τον Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916). Το σύστημα του D. Hilbert, παρ' όλο που αποτελείται από ένα σημαντικά μεγαλύτερο αριθμό αξιωμάτων απ' αυτό του Ευκλείδη, είναι σχετικώς απλό, χωρίς αντιφάσεις, κατα το δυνατόν πλήρες, και πολύ κοντά στο σύστημα του Ευκλείδη.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι, παρά τις όποιες ατέλειες (που, όπως προαναφέρθηκε, επισημάνθηκαν στη σύγχρονη εποχή), το έργο του Ευκλείδη ήταν μία αληθινή κατάκτηση του ανθρωπίνου πνεύματος, που άσκησε τεράστια επίδραση στην εξέλιξη της γεωμετρίας και των μαθηματικών, και στάθηκε το πρότυπο για τη ανάπτυξη των περισσότερων επιστημών. Δεν είναι τυχαίο, άλλωστε, το γεγονός ότι τα Στοιχεία είναι το δεύτερο, μετά την Αγία Γραφή, πολυτυπωμένο βιβλίο στον κόσμο.

Ανάμεσα στους μεγάλους αρχαίους γεωμέτρους θα ξεχωρίσουμε επίσης τον Αρχιμήδη (287–212 π.Χ.), ο οποίος, προσπαθώντας να υπολογίσει τα εμβαδά διαφόρων επιφανειών και τους όγκους στερεών σωμάτων, έφτασε ουσιαστικά στις μεθόδους του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Υπολόγισε, μεταξύ των άλλων, το π , το εμβαδόν και τον όγκο διαφόρων επιφανειών εκ περιστροφής. Ο Αρχιμήδης υπήρξε η μεγαλύτερη μαθηματική και επιστημονική μορφή της αρχαιότητας.

Ο Απολλώνιος (περίπου 260–200 π.Χ.) είναι ο τελευταίος μεγάλος γεωμέτρης της ελληνιστικής περιόδου. Στο οκτάτομο έργο του *Κώνου Τομαί* μελέτησε την έλλειψη, την παραβολή και την υπερβολή, τις οποίες θεώρησε ως τομές του κώνου με ένα επίπεδο κατάλληλης κλίσης. Η ιδέα αυτή μπορεί να θεωρηθεί και ως απαρχή της Προβολικής Γεωμετρίας, αφού οι προηγούμενες καμπύλες είναι προβολές (από την κορυφή του κώνου) της κυκλικής του βάσης στα διάφορα τέμνοντα επίπεδα.

Φυσικά, δεν θα πρέπει να ξεχάσουμε και τη μεγάλη συμβολή που είχαν και οι επόμενοι σπουδαίοι μαθηματικοί της αρχαιότητας: Ο Εύδοξος (περίπου 438–355 π.Χ.), του οποίου τη θεωρία των γεωμετρικών λογών περιέλαβε ο Ευκλείδης στα Στοιχεία του· ο Μενέλαος (τέλος 1ου μ.Χ. αιώνα), που μελέτησε τη Σφαιρική Γεωμετρία, θέμα το οποίο δεν έθιξε καθόλου ο Ευκλείδης, και τέλος ο Πάππος (περίπου το 300 π.Χ.), στου οποίου το έργο *Συναγωγή* διασώθηκε πλήθος αποτελεσμάτων του ίδιου και πολλών άλλων συγγραφέων.

Στο ίδιο πλαίσιο θα πρέπει να δούμε και τη συμβολή των αρχαίων Ελλήνων αστρονόμων, αφού οι αστρονομικοί υπολογισμοί συνδέονται με τη γεωμετρία. Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε ιδιαιτέρως τον Αρίσταρχο το Σάμιο (περίπου 310–250 π.Χ.), πρόδρομο του ηλιοκεντρικού συστήματος, ο οποίος για πρώτη φορά υπολόγισε (έστω και χωρίς μεγάλη ακρίβεια) τη σχέση των αποστάσεων Ηλίου και Σελήνης από τη Γη, τη σχέση των διαμέτρων τους κλπ· τον Ερατοσθένη (περίπου 275–195 π.Χ.), που μέτρησε τη διάμετρο της Γης με ευφυή τρόπο· τον Ίππαρχο (2ος αιώνας π.Χ.), που υπολόγισε την απόσταση και το μέγεθος του Ηλίου και της Σελήνης, και έβαλε τις βάσεις της τριγωνομετρίας· τον Πτολεμαίο Κλαύδιο (138–180 μ.Χ.), που, μεταξύ των άλλων, στο έργο του *Άπλωσις Επιφανείας* εναφύρεται στη μελέτη προβολών για την κατασκευή χαρτών.

0.2 Η γεωμετρία στους νεωτέρους χρόνους

Με την παρακμή του αρχαίου ελληνικού πολιτισμού και, αργότερα, της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας, υπάρχει μία ανάλογη παρακμή και της μαθηματικής δραστηριότητας στον ελληνικό και δυτικό κόσμο. Αντιθέτως, σημειώνεται μία εξαιρετική άνθηση της αριθμητικής και, κατόπιν, της άλγεβρας στους ανατολικούς λαούς και κυρίως στους Άραβες.

Η άλγεβρα κυριάρχησε κατά τον Μεσαίωνα και την Αναγέννηση. Αυτό δεν ήταν τυχαίο, αφού αυτή όχι μόνον διευκόλυνε τρέχοντες υπολογισμούς με τους νέους –και ευέλικτους– συμβολισμούς της, αλλά οδήγησε επίσης στην επίλυση εξισώσεων και δυσκόλων προβλημάτων της μηχανικής και της αστρονομίας.

Η γεωμετρία ξαναβρίσκει τη θέση της όταν αρχίζει και πάλι η συστηματική ανάπτυξη της μηχανικής, της αστρονομίας και της ουράνιας μηχανικής. Αυτό γί-

νεται κατανοητό αν σκεφτούμε ότι η μηχανική (και η φυσική γενικότερα) μελετά φαινόμενα στο συνδυασμένο πλαίσιο του χώρου και του χρόνου.

Η εξέλιξη αυτή αναμφισβήτητη σημαδεύτηκε από τις ιδέες του Καρτεσιού (René Descartes, 1596–1650), που δημιούργησε την Αναλυτική Γεωμετρία, η οποία συνδέει την άλγεβρα με την κλασική γεωμετρία. Στην αρχική της μορφή (αρκετά διαφορετική από την Αναλυτική Γεωμετρία που διδάσκεται σήμερα) αποτελούσε μέρος του φιλοσοφικού στοχασμού του Καρτεσιού, ο οποίος αναζητούσε μια ορθολογική μέθοδο για την προσέγγιση της αλήθειας. Σήμερα, μετά από νεώτερες έρευνες, θεωρούμε ότι η ιδέα της Αναλυτικής Γεωμετρίας ανήκει και στον Pierre de Fermat (1601–1665).

Η ιδέα της σύζευξης της αριθμητικής (άλγεβρας) και της γεωμετρίας δεν ήταν νέα. Όπως είπαμε και στην προηγούμενη παράγραφο, υπάρχει στην πυθαγόρεια διδασκαλία (φυσικά, υπό άλλη άποψη και με διαφορετική μορφή απ' αυτήν της καρτεσιανής προσέγγισης) και στο έργο του Πάππου. Αλλά, η νεώτερη προσέγγιση, με τη συμβολή του Καρτεσιού, του Fermat, και του Blaise Pascal (1623–1662) ανέδειξε την Αναλυτική Γεωμετρία σε πολύ ισχυρό εργαλείο. Συνδυασμένο, αργότερα, με τη Μηχανική του Νεύτωνα (Isaac Newton, 1642–1727) και τις μεθόδους του Απειροστικού Λογισμού άνοιξε νέους ορίζοντες στη μελέτη του σύμπαντος.

Όμως, η επιτυχία της Αναλυτικής Γεωμετρίας απέκρυψε την αυθαιρεσία που υπάρχει στην ίδια τη βάση της: πρόκειται για την εκλογή της αρχής των αξόνων και του συστήματος των συντεταγμένων, δηλαδή (σε γλώσσα φυσικής) *του συστήματος αναφοράς*. Η προηγούμενη αυθαιρεσία, μαζί με τις φιλοσοφικές ιδέες [κυρίως του Immanuel Kant (1724–1804)] για τον χώρο και τον χρόνο, καθώς και οι θεωρίες του Νεύτωνα, οδήγησαν σε μίαν ατελή αντίληψη για τον φυσικό κόσμο, εδραιώνοντας την πεποίθηση ότι η γεωμετρία του Ευκλείδη είναι η φυσική γεωμετρία του κόσμου μας, επομένως ο χώρος είναι ευκλείδειος. Αυτό βέβαια δεν μειώνει της συμβολή ούτε της Αναλυτικής Γεωμετρίας ούτε της Νευτώνειας Μηχανικής, που ικανοποίησαν τις ανθρώπινες ανάγκες για περίπου 250 χρόνια μέχρι τη διατύπωση της επαναστατικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

0.3 Οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες

Όπως πιθανώς θυμάται ο αναγνώστης από τα γυμνασιακά του χρόνια, ανάμεσα στα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας υπάρχει και το 5ο αξίωμα (αίτημα), το λεγόμενο και *αξίωμα των παραλλήλων*. Σε μία μεταγενέστερη, ισοδύναμη, μορφή του [διατυπωμένη από τον John Playfair (1748–1819)], το αξίωμα δέχεται ότι «*από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται ακριβώς μία ευθεία παράλληλη προς την πρώτη*». Την αρχική διατύπωση του Ευκλείδη παραθέτουμε στην προ-

μετωπίδα του Κεφαλαίου 1 (βλ. σελ. 1).

Το αξίωμα αυτό, λόγω της πολυπλοκότητας της αρχικής του διατύπωσης, τράβηξε από πολύ νωρίς το ενδιαφέρον των μαθηματικών, και πολλοί απ' αυτούς, όπως ο νεοπλατωνικός Πρόκλος ο Λύκιος ή Διάδοχος (410–485 μ.Χ.), ο Giovanni Gerolamo Saccheri (1667–1733), ο John Wallis (1616–1703), ο Adrien-Marie Legendre (1752–1833) κ.α., προσπάθησαν να δείξουν ότι ανάγεται στα άλλα αξιώματα, επομένως δεν είναι αξίωμα, αλλά ένα θεώρημα. Η μάταιη αυτή προσπάθεια (που κράτησε περίπου 20 αιώνες) οδήγησε σε μία νέα σημαντική κατάκτηση της μαθηματικής σκέψης: αφού (όπως και για τα άλλα αξιώματα) δεν διαθέτουμε καμιά απόδειξη ότι το αξίωμα των παραλλήλων αληθεύει, αλλά *δεχόμαστε* την ισχύ του, μέσω της παρατήρησης ή του πειράματος (που σε κάθε περίπτωση γίνεται με ατελή όργανα και μέσα σε μια μικρή περιοχή, την οποίαν καταλαμβάνει μέσα στο σύμπαν ο παρατηρητής), και αφού το αξίωμα αυτό παραμένει ανεξάρτητο από τα άλλα, τίποτε δεν μας εμποδίζει λογικά να το αναιρέσουμε και να το αντικαταστήσουμε με μία άλλη πρόταση (σχέση).

Έτσι, θα μπορούσαμε να φανταστούμε ένα *χώρο* στον οποίον, από ένα σημείο εκτός ευθείας, να διέρχονται είτε περισσότερες από μία ευθείες παράλληλες προς τη δοθείσα, είτε καμία. Κατά συνέπεια, οδηγούμαστε στις λεγόμενες *μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες*, σύμφωνα με την ορολογία του Carl Friedrich Gauss (1777–1860). Ακριβέστερα, στην πρώτη περίπτωση έχουμε την *Υπερβολική Γεωμετρία*, ενώ στη δεύτερη την *Ελλειπτική Γεωμετρία*. Η πατρότητα της πρώτης ανήκει στον Ούγγρο János Bolyai (1802–1860) και (ανεξάρτητα) στον Ρώσο Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793–1856). Όπως αποκαλύφθηκε μετά το θάνατό του, και ο Gauss γνώριζε την Υπερβολική Γεωμετρία, αλλά ποτέ δεν δημοσίευσε τα αποτελέσματά του, φοβούμενος «*τις φωνές των Βοιωτών*». Τα συμπεράσματα της γεωμετρίας αυτής ήταν έξω από την εμπειρία μας και πολύ μακριά από τις φιλοσοφικές πεποιθήσεις του Kant και των άλλων διανοητών αυτής της εποχής, οι οποίοι, όπως προείπαμε, θεωρούσαν την Ευκλείδεια Γεωμετρία ως τη γεωμετρία του κόσμου μας. Προφανώς, η αποστροφή του Gauss υπονοούσε τις πιθανές αντιδράσεις των προηγούμενων.

Η Ελλειπτική Γεωμετρία οφείλεται στον Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866). Γενικώς, οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες άργησαν να γίνουν κατανοητές. Αυτό έγινε δυνατό με την ανακάλυψη των *μοντέλων*, που βοήθησαν σημαντικά τη μελέτη τους. Ένα μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας δίνεται στο Παράδειγμα 1.1.3(3) (βλ. σελ. 21). Εδώ είναι ενδιαφέρον να αναφέρουμε ότι η ανεξαρτησία του 5ου αξιώματος από τα άλλα αξιώματα αποδείχτηκε πλήρως το 1866 από τον Eugenio Beltrami (1835–1900) μέσω των εργασιών του στις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.

Τέλος, θα πρέπει να προσθέσουμε ότι οι πιο ριζοσπαστικές αντιλήψεις για τη

Γεωμετρία και την έννοια του χώρου οφείλονται στον Riemann, που φαντάστηκε ένα χώρο *καμπυλωμένο*, με αυθαίρετη διάσταση, ο οποίος μόνον τοπικά (δηλ. στην περιοχή του κάθε σημείου του) είναι ευκλείδειος. Έτσι, ο Riemann συνέλαβε την έννοια της *Πολλπλαπλότητας* (manifold), η οποία είχε τεράστια σημασία για τη σύγχρονη εξέλιξη των μαθηματικών και της φυσικής. Η Θεωρία της Σχετικότητας του Albert Einstein (1878–1955) βρήκε στη γεωμετρία του Riemann το αναγκαίο μαθηματικό υπόβαθρο για τη διατύπωση και την παραπέρα μελέτη της. Στη θεωρία αυτή, μέσω της ταύτισης της *καμπυλότητας* (που είναι ιδιότητα και μέγεθος γεωμετρικό) με τη *βαρύτητα* (που είναι εκδήλωση της ύλης και μέγεθος φυσικό), καταλήγουμε σε μία γεωμετρική ερμηνεία του μακροκόσμου.

Ο μεγάλος στόχος της σύγχρονης έρευνας είναι η ενοποίηση της Θεωρίας της Σχετικότητας (που περιγράφει τον μακρόκοσμο) με την *Κβαντική Θεωρία* (που περιγράφει τον μικρόκοσμο). Κυρίαρχο εργαλείο φαίνεται να είναι κι εδώ η γεωμετρία, όπως χρησιμοποιείται στη *Θεωρία Βαθμίδος* (gauge theory), στη *Θεωρία των Υπερχορδών* (string theory) κλπ. Φυσικά, είναι έξω από τα όρια αυτού του βιβλίου να περιγράψουμε τι ακριβώς εννοούμε σήμερα με τον όρο γεωμετρία, τα μαθηματικά εργαλεία τα οποία πλέον χρησιμοποιεί και τη σύμπλεξη της με τους άλλους κλάδους των μαθηματικών.

Αλλά είναι ώρα να πούμε και λίγα λόγια για το κύριο αντικείμενο που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια.

0.4 Η Προβολική Γεωμετρία

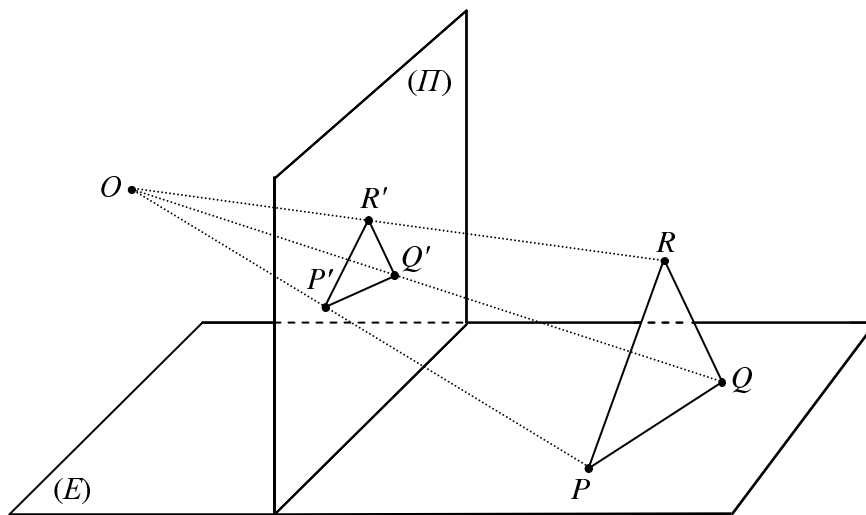
Η Προβολική Γεωμετρία είναι μία μη Ευκλείδεια Γεωμετρία, αφού σ' αυτήν δεχόμαστε ότι δεν ορίζεται η έννοια της παραλληλίας.

Όπως και η Ευκλείδεια Γεωμετρία, έτσι και η Προβολική προέκυψε από μίαν ανάγκη. Ανάγκη όχι πρακτική, αλλά *αισθητική*. Πρόκειται για την προσπάθεια να αποτυπωθούν τα αντικείμενα του τριδιάστατου χώρου στο διδιάστατο ζωγραφικό πίνακα, με τρόπο που να δημιουργείται η αίσθηση του βάθους (προοπτική).

Παρ' όλο που η επίλυση του προηγούμενου αισθητικού προβλήματος είχε απασχολήσει τους αρχαίους Έλληνες ζωγράφους, και αργότερα τους Βυζαντινούς, θα λέγαμε ότι οι κανόνες της προοπτικής συστηματοποιήθηκαν κυρίως στην περίοδο της Αναγέννησης από καλλιτέχνες όπως οι Filippo Brunelleschi (1377–1446), Paolo Uccello (1379–1475), Leone Battista Alberti (1404–1472), Pierro de la Francesca (1416–1492), Sandro Botticelli (1445–1510), Leonardo da Vinci (1452–1519), Albrecht Dürer (1471–1528), Michelangelo Buonarroti (1475–1564), Raffaello Santi Sanzio (1483–1520) κ.α. Αξίζει σχετικώς να αναφέρουμε ότι πολλοί από τους μεγάλους ζωγράφους και γλύπτες της περιόδου αυτής είχαν σοβαρές γνώσεις μαθηματικών και μηχανικής, για τούτο και οι κα-

νόες της προοπτικής είχαν μαθηματικό υπόβαθρο και απειτέλεσαν τη βάση για τη μεταγενέστερη ανάπτυξη της Προβολικής Γεωμετρίας σε αυτοτελή κλάδο των μαθηματικών.

Ας δούμε, με συντομία, τη διαδικασία αποτύπωσης των εικόνων στο ζωγραφικό πίνακα. Για ευκολία, υποθέτουμε ότι ο τελευταίος [που συμβολίζεται με (Π) στο επόμενο σχήμα] είναι διαφανής (γυάλινος) και κάθετος στο οριζόντιο επίπεδο (E) , επάνω στο οποίο στέκεται ο ζωγράφος. Η εικόνα ενός σημείου P του επιπέδου (E) είναι το σημείο P' , τομή της οπτικής ακτίνας OP (αν O συμβολίζει τον οφθαλμό του ζωγράφου) με το επίπεδο του πίνακα (Π) . Παρόμοια προσδιορίζεται στον πίνακα και η εικόνα R' οποιουδήποτε σημείου R του χώρου.



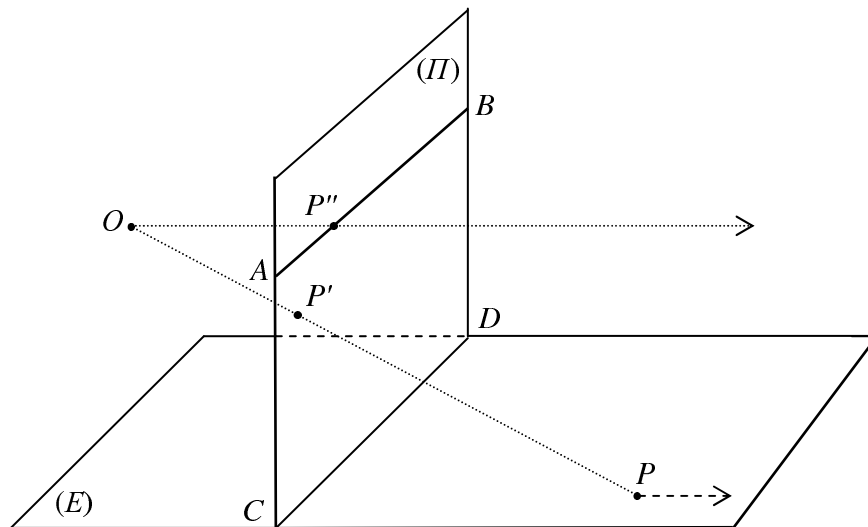
Σχήμα 0.1

Εξάλλου, από την εμπειρία μας γνωρίζουμε ότι, καθώς τα σημεία P του χώρου ή του επιπέδου (E) απομακρύνονται από το επίπεδο (Π) , οι αντίστοιχες εικόνες P' πλησιάζουν προς την ευθεία AB (βλ. Σχήμα 0.2 στην επομένη σελίδα), που είναι η τομή του (Π) με ένα νοητό επίπεδο, το οποίο διέρχεται από το O και είναι παράλληλο προς το επίπεδο (E) . Η ευθεία AB αποτυπώνει στον πίνακα του ζωγράφου τον οπτικό ορίζοντα, τα σημεία του οποίου φαίνονται να βρίσκονται σε «άπειρη» απόσταση από τον ζωγράφο («επ' άπειρον» σημεία).

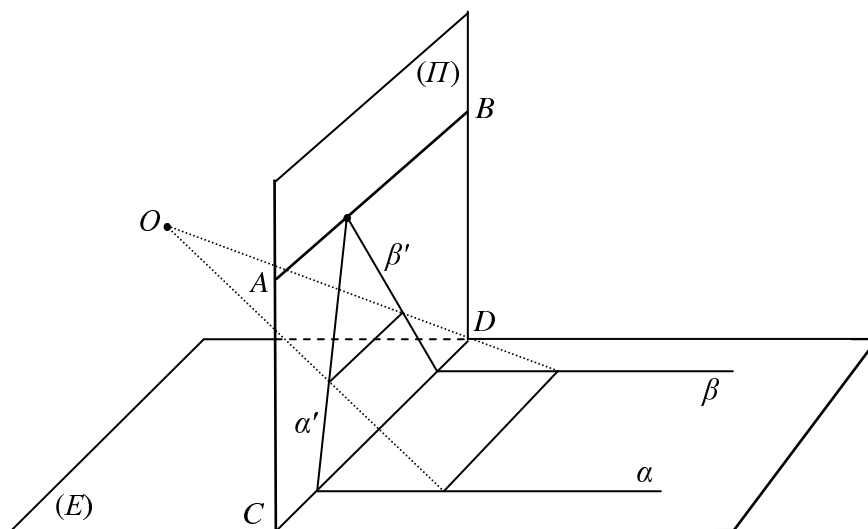
Παρόμοια, δύο ευθείες α και β [του (E) ή του χώρου], οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους, αποτυπώνονται στον πίνακα σε δύο ευθείες α' και β' τεμνόμενες σε ένα σημείο της γραμμής του ορίζοντα AB (βλ. Σχήμα 0.3).

Επομένως, στο ζωγραφικό πίνακα εμφανίζεται ένα άλλο είδος γεωμετρίας, στο οποίο δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες (εκτός από αυτές που απεικονίζουν

τις ευθείες τις παράλληλες προς την CD , άρα και την AB · αλλά κι αυτές θεωρούμε ότι τέμνονται στο άπειρο, πράγμα που φαινομενικά θα συμβεί αν κάνουμε μια μικρή στροφή του πίνακα).



Σχήμα 0.2



Σχήμα 0.3

Επίσης, όπως φαίνεται πάλι στο Σχήμα 0.3, ανατρέπονται και οι μετρικές ιδιότητες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας: η απόσταση των παραλλήλων α και β φυσικά δεν διατηρείται στις τεμνόμενες πλέον εικόνες α' και β' . Όσο προχωρούμε προς τη γραμμή του ορίζοντα, η απόσταση αυτή μικραίνει για να μηδενιστεί επί της AB .

Ο παρακάτω ζωγραφικός πίνακας του Giovanni Antonio Canal, γνωστού και ως Canaletto (1697–1768), απεικονίζει το κανάλι της Βενετίας. Είναι ένα τυπικό παράδειγμα ζωγραφικού πίνακα στον οποίον ακολουθούνται οι κανόνες της προοπτικής. Το ύψος των κτιρίων μειώνεται καθώς η ματιά κινείται προς τη γραμμή του ορίζοντα, ενώ οι πλευρές του καναλιού πλησιάζουν. Έτσι δημιουργείται η εντύπωση του βάθους και η αίσθηση ότι έχουμε να κάνουμε με ένα τριδιάστατο αντικείμενο



Στον επόμενο πίνακα του Andrea Mantegna (1431;–1506) απεικονίζεται ο νεκρός Χριστός. Εδώ ο ζωγράφος, για να προσδώσει μεγαλύτερη δραματικότητα, καταργεί (ή αντιστρέφει) την προοπτικότητα. Έτσι, αντίθετα από τον συνήθη κανόνα της προοπτικής, τα μεγέθη αυξάνουν καθώς κινούμεθα προς την κεφαλή

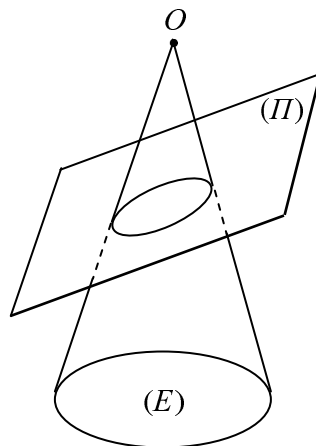
του Ιησού, όπου και εστιάζεται ο Θεϊός πόνος.



Ένα άλλο παράδειγμα κατασκευής προοπτικών σχημάτων μας παρέχουν οι κωνικές τομές: αν στην κορυφή O του κώνου βρίσκεται ο οφθαλμός του ζωγράφου, ο κύκλος της βάσης θα αποτυπώνεται στον πίνακα (II) σαν κύκλος, έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή, ανάλογα με την κλίση του (II) ως προς το επίπεδο της βάσης (E). Κι εδώ διαπιστώνεται η μη διατήρησης των αποστάσεων κατά τη διαδικασία της προβολής [δηλαδή κατά τη διαδικασία της αποτύπωσης της εικόνας των σημείων του κύκλου επί του (II)]. Στο Σχήμα 0.4 απεικονίζεται, για παράδειγμα, η περίπτωση της έλλειψης.

Στην Παράγραφο 1.6 θα δούμε με αυστηρό τρόπο πώς από το σύνηθες επίπεδο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, με την επισύναψη των «επ' άπειρον» (ή «κατ' εκδοχήν») σημείων, αναγόμεστε στο επίπεδο της Προβολικής Γεωμετρίας, δηλαδή στο επίπεδο που μαθηματικοποιεί το ζωγραφικό πίνακα.

Η πλήρης μαθηματικοποίηση των κανόνων της προοπτικής έγινε μόλις τον 17ο αιώνα. Μετά την κυριαρχία της Ανάλυσης κατά τον 18ο αιώνα, άρχισε η αναγέννηση της γεωμετρίας, μέσα στην οποίαν πρωτεύουσα θέση κατέχει η Προ



Σχήμα 0.4

βολική Γεωμετρία. Η συστηματική ανάπτυξή της είναι ένα από τα πιο σημαντικά μαθηματικά επιτεύγματα του 19ου αιώνα.

Μετά τις πρόδρομες εργασίες των Girard Desargues (1591–1661), Blaise Pascal (1623–1662), Philippe de la Hire (1640–1718) κ.α., αποφασιστική για την εξέλιξη της Προβολικής Γεωμετρίας ήταν η συμβολή των Gaspar Monge (1746–1818), Jean-Victor Poncelet (1788–1867), Charles Brianchon (1785–1864), August Ferdinand Möbius (1790–1868), Jacob Steiner (1796–1863), Julius Plücker (1801–1868) και Karl Georg Christian von Staudt (1798–1867). Στην πορεία περίπου δύο αιώνων κυριάρχησαν δύο βασικές απόψεις: η *συνθετική* και η *αναλυτική*. Η πρώτη βασίζεται σε καθαρά γεωμετρικές μεθόδους, με σημείον εκκίνησης τα αξιώματα. Η δεύτερη στηρίζεται κυρίως σε αλγεβρικές μεθόδους. Μεταξύ των εκπροσώπων των δύο μεθοδολογικών απόψεων σημειώθηκαν, πολλές φορές, σημαντικές αντιδικίες για το κατά πόσον η μία υπερτερεί της άλλης, ή κατά πόσον η γεωμετρία θα πρέπει να είναι απαλλαγμένη από την άλγεβρα.

Σε μεταγενέστερη περίοδο, θεμελιώδης υπήρξε η ιδέα να χαρακτηριστεί μία Γεωμετρία από την αντίστοιχη *ομάδα των μετασχηματισμών* που διατηρούν αναλλοίωτες της βασικές ιδιότητές της. Η συμβολή των Sophus Lie (1842–1899), Henrie Poincaré (1854–1912) και, ιδιαίτερος, του Christian Felix Klein (1849–1925) κατέχει πρωτεύουσα θέση.

0.5 Τυπικά αξιωματικά συστήματα

Όπως αναφέρθηκε στην Παράγραφο 0.1, η αξιωματική μέθοδος οφείλεται στον Ευκλείδη. Η ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών και η ανάγκη της διόρ-

θωσης των ατελειών των «Στοιχείων» του Ευκλείδη οδήγησαν στην εισαγωγή των τυπικών αξιωματικών συστημάτων, μέσω των οποίων θεμελιώνονται αντίστοιχοι γεωμετρικοί κλάδοι.

Ένα τυπικό αξιωματικό σύστημα αποτελείται από

- απροσδιόριστους όρους,
- προσδιορισμένους όρους,
- αξιώματα, και
- θεωρήματα.

Οι απροσδιόριστοι όροι είναι αρχικές έννοιες, τις οποίες περιλαμβάνουμε επειδή δεν μπορούμε να ορίσουμε κάθε δυνατό όρο χωρίς να αναχθούμε σε φαύλο κύκλο. Τέτοιοι όροι, σε ένα αξιωματικό σύστημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, είναι το *σημείο*, η *ευθεία*, το *επίπεδο* και έννοιες όπως *μεταξύ*, *κείται (βρίσκεται) επί*. Έτσι σημείο, ευθεία και επίπεδο είναι οι αυθαίρετες ονομασίες κάποιων οντοτήτων των οποίων αγνοείται η φύση (βλ. σχετικές απόψεις του H. Poincaré στη σελίδα xi) και θα μπορούσαν, κατά τον γνωστό αφορισμό του D. Hilbert, να αντικατασταθούν με τις λέξεις τραπέζια, καρέκλες και ποτήρια μπύρας (βλ. και J. Fang [12, σελ. 81]*).

Τα αξιώματα είναι επίσης αρχικές προτάσεις, την αλήθεια των οποίων αποδεχόμαστε χωρίς απόδειξη. Είναι απαραίτητα γιατί δεν είναι δυνατόν να αποδειχθούν μέσω των απροσδιόριστων και προσδιορισμένων όρων χωρίς να καταλήξουμε σε φαύλο κύκλο. Τα αξιώματα προσδιορίζουν τις σχέσεις μεταξύ των απροσδιόριστων όρων.

Τα θεωρήματα (συνοδευόμενα από λήμματα, προτάσεις και πορίσματα) είναι αποφάνσεις που προέρχονται με λογική διεργασία από την εφαρμογή των αξιωμάτων, σε συνδυασμό με τους απροσδιόριστους και προσδιορισμένους όρους. Η διαδικασία αυτή, προφανώς, απαιτεί να διαθέτουμε και

- ένα σύστημα *λογικής*.

Συνήθως χρησιμοποιείται η Αριστοτέλεια λογική.

Ένα τυπικό αξιωματικό σύστημα πρέπει να είναι *συνεπές*, δηλαδή να μην υπάρχουν αξιώματα ή θεωρήματα που να αντιφάσκουν με άλλα αξιώματα ή θεωρήματα. Επίσης τα αξιώματα πρέπει να είναι *ανεξάρτητα*, δηλαδή κάθε αξίωμα να μην ανάγεται σε (αποδεικνύεται με) άλλα αξιώματα του ίδιου συστήματος. Η απαίτηση αυτή οδηγεί στην επιλογή του μικρότερου δυνατού αριθμού αξιωμάτων, αλλά αυξάνει τη δυσκολία και τον αριθμό των προς απόδειξη θεωρημάτων. Τέλος, απαιτείται το σύστημα να είναι *πλήρες*, δηλαδή να μπορούμε να αποφανθούμε αν μία πρόταση, διατυπωμένη με όρους του συστήματος, είναι αληθής ή ψευδής. Αυτό, ισοδύναμα, σημαίνει ότι στο σύστημα δεν μπορούμε να προσθέσουμε άλλα ανεξάρτητα αξιώματα.

* Οι αριθμοί σε αγκύλες παραπέμπουν στη βιβλιογραφία.

Ο έλεγχος της συνέπειας ενός συστήματος και η ανεξαρτησία των αξιωμάτων του γίνεται με τη βοήθεια των *μοντέλων*. Τα τελευταία αποτελούν φυσική ή μαθηματική ερμηνεία των απροσδιοριστων όρων, οπότε τα αξιώματα είναι αληθείς προτάσεις. Το πρόβλημα της πληρότητας ενός αξιωματικού συστήματος είναι πιο πολύπλοκο, ιδιαιτέρως αν το σύστημα αυτό περιέχει αποτελέσματα της θεωρίας αριθμών, λόγω της απόδειξης της μη πληρότητας της Αριθμητικής από τον K. Gödel. Δεν θα επεκταθούμε περισσότερο προς αυτήν την κατεύθυνση και παραπέμπουμε για λεπτομέρειες στους D. D. Davis [9, σελ. 84–92], J. N. Cederberg [8, σελ. 1–6] και J. Fang [12, σελ. 80–88]. Στο 1ο κεφάλαιο θα γνωρίσουμε μερικά μοντέλα της Συσχετισμένης και της Προβολικής Γεωμετρίας.

Όπως είναι φυσικό, η προηγούμενη σύντομη περιήγηση στον κόσμο της γεωμετρίας και τις ιδέες της δεν μπορεί να εξαντλήσει τις πολυάριθμες λεπτομέρειες από τις συναρπαστικές κατακτήσεις, που πραγματοποιήθηκαν στη μακρά πορεία της. Συμπληρωματικά, ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί, ανάμεσα σε μια πλούσια βιβλιογραφία, και τις εξής πηγές: J. N. Cederberg [8], R. L. Faber [11], X. Στράντζαλος [29] (για την αξιωματική μέθοδο και τη θεμελίωση της Ευκλείδειας και μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας)· M. Spivak [26] (για μια μετάφραση, στα Αγγλικά, της περίφημης διάλεξης του G. F. B. Riemann "*Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*" (: Επί των υποθέσεων οι οποίες βρίσκονται στα θεμέλια της γεωμετρίας), που περιέχει τις αντιλήψεις του τελευταίου για τον χώρο και τη γεωμετρία)· H. Poincaré [25] (για ποικίλλες σκέψεις του γύρω από τη γεωμετρία, τα μαθηματικά και τη φυσική). Επίσης, για διάφορα ιστορικά στοιχεία, σχετικά με την εξέλιξη της γεωμετρίας, τη ζωή και το έργο διαφόρων μαθηματικών, παραπέμπουμε και στους E. T. Bell [6], S. Hollingdale [17], L. Mlodinov [21], M. Μπρίκα [22], J. Pierpont [24], D. J. Struik [30], και I. M. Yaglom [31].

Κεφάλαιο 1

Συσχετισμένα και προβολικά επίπεδα

Καὶ ἐάν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπέτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

5ον ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΝ ΑΙΤΗΜΑ [27, σελ. 38]

ΣΤΙΣ ΔΥΟ ΠΡΩΤΕΣ παραγράφους του κεφαλαίου παρουσιάζεται η κατά Hilbert αξιωματική θεμελίωση του *συσχετισμένου* και του *προβολικού* επιπέδου. Επισημαίνονται οι βασικές διαφορές τους και συνάγονται τα πρώτα, απαραίτητα για την συνέχεια, συμπεράσματα.

Η Παράγραφος 3 αναφέρεται στην αρχή του *δυϊσμού*. Σύμφωνα μ' αυτή, για κάθε συμπέρασμα που ισχύει στο προβολικό επίπεδο, ισχύει και το δυϊκό του, χωρίς να χρειάζεται να γίνει η απόδειξη του τελευταίου.

Οι στοιχειώδεις απεικονίσεις (Παράγραφος 4) είναι αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις μεταξύ απλών σχηματισμών (όπως σημειοσειρών, δεσμών ευθειών) και επιτρέπουν τη σύγκριση του πλήθους των στοιχείων των προηγούμενων σχηματισμών.

Στην Παράγραφο 5 εξετάζονται οι *προοπτικότητες* και *προβολικότητες*, που αποτελούνται από κατάλληλες συνθέσεις στοιχειωδών απεικονίσεων. Οι έννοιες αυτές υπήρξαν από τις πρώτες, γενεσιουργές έννοιες, της Προβολικής Γεωμετρίας.

Τέλος, στην Παράγραφο 6, συνδέονται τα συσχετισμένα με τα προβολικά επίπεδα. Από ένα συσχετισμένο επίπεδο, με την προσθήκη των *ιδεατών* (ή *κατ' εκδοχήν*) σημείων και της *ιδεατής ευθείας*, οδηγούμαστε σε ένα προβολικό επίπεδο. Αντιστρόφως, η αφαίρεση μιας ευθείας του προβολικού επιπέδου οδηγεί σε ένα συσχετισμένο επίπεδο.

1.1 Το συσχετισμένο επίπεδο

Όπως εξηγήσαμε και στην Παράγραφο 0.1, η γεωμετρία αναφέρεται στην έννοια του χώρου, συστατικά στοιχεία του οποίου είναι τα σημεία, οι ευθείες και τα επίπεδα. Παρ' όλο που αγνοούμε την «ουσία» των προηγούμενων εννοιών, μπορούμε να διατυπώσουμε ένα σύστημα αξιωμάτων, τα οποία περιγράφουν τις βασικές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του χώρου και επιτρέπουν την κατασκευή του αντιστοίχου γεωμετρικού οικοδομήματος.

Στη θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας χρησιμοποιούνται διάφορα αξιώματα, τα οποία αναφέρονται στη *σύμπτωση* των στοιχείων του χώρου, στην *ισότητά* τους, και στην έννοια της *παραλληλότητας*. Επίσης, άλλα αξιώματα επιτρέπουν να μιλήσουμε για *διάταξη* και για *μέτρηση*.

Στην παράγραφο αυτή, έχοντας ως «υπόδειγμα» τα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ορίζουμε, μέσω τριών βασικών αξιωμάτων, το λεγόμενο *συσχετισμένο επίπεδο*. Με τη συμπλήρωση των αξιωμάτων του συσχετισμένου επιπέδου, έτσι ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση, η διάταξη και η μέτρηση, οδηγούμαστε στη θεμελίωση ενός επιπέδου, του οποίου παράδειγμα είναι το (σύνθετος) επίπεδο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Όμως, δεν θα προχωρήσουμε προς την κατεύθυνση αυτή, αφού κύριος στόχος μας είναι το προβολικό επίπεδο. Η σύντομη μελέτη του συσχετισμένου επιπέδου γίνεται προκειμένου να αποσαφηνιστούν οι βασικές διαφορές ανάμεσα στην Ευκλείδεια και την Προβολική Γεωμετρία.

Στη συνέχεια ακολουθούμε την αξιωματική θεμελίωση του D. Hilbert [16], σύμφωνα με την οποία θεωρούμε:

- Ένα σύνολο $\mathcal{P} \neq \emptyset$, του οποίου τα στοιχεία καλούμε **σημεία** (points) και

τα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα

$$A, B, C, \dots, P, Q, \dots, \Gamma, \Delta, \dots, X, Y.$$

- Ένα σύνολο $\mathcal{L} \neq \emptyset$, του οποίου τα στοιχεία καλούμε **ευθείες** (lines) και τα συμβολίζουμε με μικρά γράμματα

$$a, b, c, \dots, k, \ell, \dots, \alpha, \beta, \dots, x, y.$$

- Μία σχέση I μεταξύ των $\mathcal{P}$ και $\mathcal{L}$, δηλαδή $I \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$, την οποίαν καλούμε **σχέση σύμπτωσης** ή απλώς **σύμπτωση** (incidence).

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι τα σημεία και οι ευθείες είναι έννοιες που δεν ορίζονται. Απλώς αποτελούν την *αυθαίρετη* ονομασία των στοιχείων δύο αντιστοιχών συνόλων.

Όπως στη στοιχειώδη γεωμετρία, τα σημεία και οι ευθείες διαφέρουν κατά τη φύση τους. Αυτό το εκφράζουμε αυστηρά με τη σχέση

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{L} = \emptyset.$$

Η σχέση της σύμπτωσης μας επιτρέπει, για ένα ζεύγος $(P, k) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$, να αποφανθούμε ότι $(P, k) \in I$ ή $(P, k) \notin I$.

Ο συμβολισμός

$$(P, k) \in I$$

αποδίδεται λεκτικά με τις (ισοδύναμες) εκφράσεις:

- το σημείο P ανήκει (ή περιέχεται) στην ευθεία k ,
- το P είναι σημείο της k ,
- η ευθεία k διέρχεται από το P .

Οι εκφράσεις αυτές προέρχονται από την αντίστοιχη σύμπτωση σημείου και ευθείας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και ανταποκρίνονται στη συνήθη εμπειρία. Φυσικά, οι προηγούμενες εκφράσεις θα αποδίδονταν καλλίτερα με τον συμβολισμό $P \in k$. Αυτό όμως θα σήμαινε ότι μία ευθεία είναι σύνολο σημείων (σημειοσειρά), γεγονός που δεν προκύπτει από τους πιο πάνω αφηρημένους ορισμούς της ευθείας και του σημείου. Κάτι τέτοιο επιτυγχάνεται μέσω κατάλληλης ισομορφίας, όπως θα δείξουμε πολύ αργότερα (βλ. Θεώρημα 2.1.8, για την περίπτωση του προβολικού επιπέδου, που μας ενδιαφέρει εδώ).

Θα χρειαστούμε ακόμη και την ορολογία του επόμενου ορισμού.

1.1.1 Ορισμός. Υποθέτουμε ότι $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ είναι μία τριάδα όπως προηγουμένως. Τρία ή και περισσότερα σημεία $P_i \in \mathcal{P}$ λέγονται **συγγραμμικά** (collinear), αν υπάρχει ευθεία $k \in \mathcal{L}$, τέτοια ώστε

$$(P_i, k) \in \mathcal{I}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Αναλόγως, τρεις ή περισσότερες ευθείες $k_i \in \mathcal{L}$ **διέρχονται από το** (ή **τέμνονται** ή **συγκλίνουν στο**) **ίδιο σημείο** (concurrent lines) αν υπάρχει $P \in \mathcal{P}$, τέτοιο ώστε

$$(P, k_i) \in \mathcal{I}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Τέλος, δύο ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$ λέγονται **παράλληλες** (parallel), οπότε συμβολικά γράφουμε ότι $k \parallel \ell$, αν συμβαίνει ένα από τα επόμενα:

- είτε $k = \ell$,
- είτε $k \neq \ell$ και δεν υπάρχει $P \in \mathcal{P} : (P, k) \in \mathcal{I} \ni (P, \ell)$.

1.1.2 Ορισμός. Ένα **συσχετισμένο επίπεδο** (affine plane) είναι μια τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, η οποία ικανοποιεί τα επόμενα αξιώματα:

(ΣΕ 1) Από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται ακριβώς μία ευθεία (ή δύο διαφορετικά σημεία ορίζουν μία μοναδική ευθεία). Συμβολικά, το αξίωμα διατυπώνεται και με τη μορφή:

$$[\forall (P, Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} : P \neq Q] \Rightarrow [\exists! k \in \mathcal{L} : (P, k) \in \mathcal{I} \ni (Q, k)].$$

(ΣΕ 2) (Ευκλείδειον αίτημα). Από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μία μοναδική ευθεία παράλληλη προς τη δοθείσα. Συμβολικά,

$$[\forall (P, k) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L} : (P, k) \notin \mathcal{I}] \Rightarrow [\exists! \ell \in \mathcal{L} : (P, \ell) \in \mathcal{I}, k \parallel \ell].$$

(ΣΕ 3) Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία, τα οποία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και μη συγγραμμικά.

Το αξίωμα (ΣΕ 2), γνωστό και ως αξίωμα του J. Playfair (1748–1819), αποτελεί ισοδύναμη διατύπωση του 5ου αιτήματος (αξιώματος) του Ευκλείδη. Η διατύπωση του τελευταίου σε αρχαία ελληνικά έχει τη μορφή, που αναφέρεται στην αρχή του κεφαλαίου αυτού.

1.1.3 Παραδείγματα. 1) Το επίπεδο της Στοιχειώδους (Ευκλείδειας) Γεωμετρίας είναι συσχετισμένο επίπεδο. Αποτελείται από τα σημεία και τις ευθείες, όπως ορίζονται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και αντιλαμβανόμαστε στην καθημερινή εμπειρία μας, ενώ η $\mathcal{I}$ είναι η συνήθης σύμπτωση, που εδώ εκφράζεται με τη συνολοθεωρητική σχέση “ $\in$ ” (ανήκει). Δηλαδή,

$$(P, \ell) \in \mathcal{I} \Leftrightarrow P \in \ell.$$

2) Αν θεωρήσουμε τα σύνολα

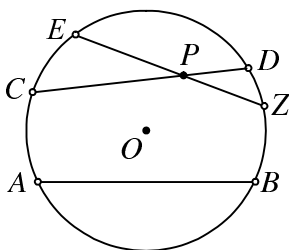
$$\mathcal{P} := \{A, B, C, D\},$$

$$\mathcal{L} := \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$$

και ως $\mathcal{I}$ τη σχέση “ ϵ ”, τότε ελέγχουμε αμέσως ότι η τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ είναι συσχετισμένο επίπεδο.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι υπάρχουν συσχετισμένα επίπεδα με πεπερασμένο πλήθος σημείων και ευθειών, σε αντίθεση με το επίπεδο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

3) (Αντιπαράδειγμα) Αν $\mathcal{P}$ είναι το σύνολο των σημείων στο εσωτερικό ενός κύκλου, $\mathcal{L}$ το σύνολο που αποτελείται από το εσωτερικό των χορδών του κύκλου και $\mathcal{I}$ η σχέση “ ϵ ”, τότε η τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ δεν είναι συσχετισμένο επίπεδο γιατί δεν ισχύει το (ΣΕ 2).



Σχήμα 1.1

Πραγματικά, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.1, από ένα σημείο P , που δεν κείται επί της χορδής AB , διέρχονται άπειρες χορδές «παράλληλες» προς την AB .

• Η προηγούμενη τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ αποτελεί ένα παράδειγμα-μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας και οφείλεται στον Γερμανό μαθηματικό F. Klein. Αντιθέτως, το δεύτερο παράδειγμα είναι ένα πεπερασμένο μοντέλο συσχετισμένου επιπέδου.

1.1.4 Ορισμός. Η μονοσήμαντα ορισμένη ευθεία k του αξιώματος (ΣΕ 1) λέγεται **ένωση** (join) των σημείων P, Q και συμβολίζεται με

$$k = P \vee Q = Q \vee P$$

Η δεύτερη ισότητα είναι προφανής συνέπεια του (ΣΕ 1).

- Στο υπόλοιπο της παραγράφου θεωρούμε ότι δίνεται ένα συσχετισμένο επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$

1.1.5 Πρόταση. Αν A, B, C είναι τρία διαφορετικά συγγραμμικά σημεία και ℓ η κοινή τους ευθεία, τότε

$$\ell = A \vee B = A \vee C = B \vee C.$$

Απόδειξη. Από τον Ορισμό 1.1.1 έχουμε τις σχέσεις

$$(A, \ell) \in \mathcal{I} \text{ και } (B, \ell) \in \mathcal{I}.$$

Επειδή $A \neq B$, από το (ΣΕ 1) ορίζεται και η ευθεία $A \vee B$ και ισχύουν οι σχέσεις

$$(A, A \vee B) \in \mathcal{I} \text{ και } (B, A \vee B).$$

Επομένως, από το μονοσήμαντο του (ΣΕ 1), προκύπτει ότι $\ell = A \vee B$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύονται και οι άλλες ισότητες. $\square$

1.1.6 Πρόταση. Δύο διαφορετικές ευθείες k, ℓ έχουν το πολύ ένα **κοινό σημείο**, δηλαδή ένα σημείο P που ικανοποιεί τις σχέσεις $(P, k) \in \mathcal{I}$ και $(P, \ell) \in \mathcal{I}$.

Απόδειξη. Αν οι ευθείες k, ℓ είναι παράλληλες ($k \parallel \ell$), τότε (αφού $k \neq \ell$) δεν υπάρχει κανένα κοινό σημείο P , άρα αληθεύει το συμπέρασμα.

Αν $k \not\parallel \ell$, τότε οπωσδήποτε υπάρχει κοινό σημείο P (γιατί αλλιώς οι ευθείες θα ήσαν παράλληλες). Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει κι ένα άλλο κοινό σημείο Q , δηλαδή $(Q, k) \in \mathcal{I} \ni (Q, \ell)$. Θα δείξουμε ότι $P = Q$. Πραγματικά, αν ήταν $P \neq Q$, τότε κατά το (ΣΕ 1) ορίζεται η ευθεία $P \vee Q$. Απ' το άλλο μέρος, επειδή τα P, Q είναι και σημεία των k και ℓ , πάλι από το (ΣΕ 1) και το μονοσήμαντό του, προκύπτει ότι

$$k = P \vee Q = \ell,$$

πράγμα που αντίκειται στην υπόθεση ότι $k \neq \ell$. Επομένως, κατ' ανάγκην, καταλήγουμε στη σχέση $P = Q$. $\square$

1.1.7 Ορισμός. Αν k και ℓ είναι δύο μη παράλληλες διαφορετικές ευθείες, τότε το μονοσήμαντα ορισμένο κοινό σημείο τους (Πρόταση 1.1.6) λέγεται **τομή** (intersection) των k, ℓ και συμβολίζεται με

$$P = k \wedge \ell = \ell \wedge k$$

1.1.8 Πρόταση. Στο συσχετισμένο επίπεδο η παραλληλιότητα ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη. Η αυτοπαθής και η συμμετρική ιδιότητα είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού. Για την απόδειξη της μεταβατικής ιδιότητας, υποθέτουμε ότι $k \parallel \ell$ και $\ell \parallel m$. Αν $k = m$, τότε έχουμε το συμπέρασμα. Αν $k \neq m$, τότε αναγκαιώς $k \parallel m$, γιατί αν υπήρχε κοινό σημείο P (δηλ. $P = k \wedge m$), θα είχαμε ότι

$$(P, k) \in I, \quad \text{όπου} \quad k \parallel \ell,$$

$$(P, m) \in I, \quad \text{όπου} \quad m \parallel \ell.$$

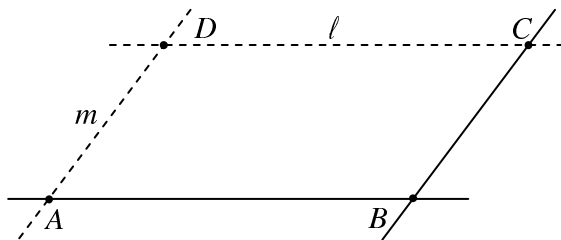
Όμως $(P, \ell) \notin I$ (επειδή $\ell \nparallel k$ και $\ell \nparallel m$). Επομένως, από το σημείο P , που δεν βρίσκεται στην ℓ , διέρχονται δύο ευθείες παράλληλες προς αυτήν (οι k και m). Το συμπέρασμα αυτό αντιβαίνει στο (ΣΕ 2), άρα $k \parallel m$. $\square$

1.1.9 Θεώρημα. Σε κάθε συσχετισμένο επίπεδο υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα διαφορετικά σημεία, τα οποία ανά τρία είναι μη συγγραμμικά.

Απόδειξη. Το (ΣΕ 3) εξασφαλίζει ότι υπάρχουν τρία διαφορετικά σημεία A, B, C , που δεν είναι συγγραμμικά, άρα ορίζονται οι ευθείες $A \vee B$ και $B \vee C$. Επειδή τα σημεία είναι μη συγγραμμικά, ισχύει ότι $(C, A \vee B) \notin I$. Επομένως, κατά το (ΣΕ 2), υπάρχει μοναδική ευθεία $\ell \in \mathcal{L}$ με $(C, \ell) \in I$ και $\ell \parallel A \vee B$. Παρόμοια βρίσκουμε και μία $m \in \mathcal{L}$, με $(A, m) \in I$ και $m \parallel B \vee C$.

Παρατηρούμε ότι $\ell \neq m$. Πραγματικά, αν ήταν $\ell = m$, τότε το A (ως σημείο της m) θα ανήκε και στην ℓ , πράγμα που είναι άτοπο, αφού έχουμε ότι $\ell \parallel A \vee B$. Επίσης, $\ell \nparallel m$. Πραγματικά, αν ήταν $\ell \parallel m$, επειδή και $\ell \parallel A \vee B$, θα είχαμε ότι $m \parallel A \vee B$, λόγω της συμμετρικής και μεταβατικής ιδιότητας της παραλληλίας. Αυτό είναι άτοπο, επειδή το A είναι κοινό σημείο των m και $A \vee B$. Συνεπώς, αφού οι ℓ και m είναι διάφορες και μη παράλληλες, ορίζεται το μοναδικό σημείο $D = \ell \wedge m$ (βλ. Πρόταση 1.1.6 και Ορισμό 1.1.7).

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται, για ευκολία, η παραπάνω διαδικασία στο (συσχετισμένο) επίπεδο της Στοιχειώδους Γεωμετρίας.



Σχήμα 1.2

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα πρέπει να δείξουμε ότι το D είναι διαφορετικό από τα A, B, C και δεν είναι συγγραμμικό με οποιαδήποτε δύο από

αυτά. Για το πρώτο συμπέρασμα αρκεί να δείξουμε ότι $D \neq A$ (παρόμοια εργαζόμαστε και για τα B, C). Αυτό αληθεύει γιατί, αν ήταν $D = A$, τότε οι παράλληλες και διαφορετικές ευθείες $A \vee B$ και ℓ θα είχαν κοινό το σημείο $A = D$ (άτοπο).

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι το D είναι συγγραμμικό με δύο άλλα σημεία, ας πούμε τα A και B . Τότε, από την Πρόταση 1.1.5, έχουμε ότι η κοινή ευθεία των A, B, D είναι ακριβώς η $A \vee B$. Άρα, το D θα ήταν κοινό σημείο των ℓ και $A \vee B$ (άτοπο, όπως προηγουμένως). Παρόμοια δείχνουμε ότι το D δεν είναι συγγραμμικό και με οποιαδήποτε άλλα δύο σημεία, οπότε η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

1.1.10 Παρατηρήσεις. 1) Από το Θεώρημα 1.1.9 προκύπτει ότι το μικρότερο πλήθος σημείων ενός συσχετισμένου επιπέδου είναι 4. Αυτό σημαίνει ότι

η ελάχιστη ισχύς του συσχετισμένου επιπέδου είναι 4

και δικαιολογεί την επιλογή των τεσσάρων σημείων στο Παράδειγμα 1.1.3(1).

2) Μία άλλη θεμελίωση του συσχετισμένου επιπέδου, με αλγεβρική γλώσσα, γίνεται στη Γραμμική (ή Συσχετισμένη) Γεωμετρία (βλ. [3]). Εκεί, ξεκινώντας από άλλα αξιώματα (αλγεβρικής υφής), αποδεικνύονται, ως συμπεράσματα πλέον, τα αξιώματα της προηγούμενης θεμελίωσης.

1.1.11 Ασκήσεις.

- 1) Να αποδειχθούν οι ισχυρισμοί των Παραδειγμάτων 1.1.3(1) και 1.1.3(2).
- 2) Κάθε ευθεία του συσχετισμένου επιπέδου διαθέτει τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία.
- 3) Από κάθε σημείο του συσχετισμένου επιπέδου διέρχονται τουλάχιστον τρεις διαφορετικές ευθείες.
- 4) Δίνονται οι διαφορετικές ευθείες k, ℓ, m ενός συσχετισμένου επιπέδου με $k \parallel \ell$. Αν η m τέμνει τη μία από τις δύο παράλληλες ευθείες, τότε θα τέμνει και την άλλη.

1.2 Το προβολικό επίπεδο

Όπως και στην περίπτωση του συσχετισμένου επιπέδου, θεωρούμε μία τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$, όπου $\mathcal{P}$ και $\mathcal{L}$ είναι σύνολα διάφορα του κενού, τέτοια ώστε $\mathcal{P} \cap \mathcal{L} = \emptyset$, και $I \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ είναι μία **σχέση σύμπτωσης**. Τα στοιχεία των $\mathcal{P}$ και $\mathcal{L}$ ονομάζουμε, όπως πριν, **σημεία** και **ευθείες** αντιστοίχως. Η έννοια της συγγραμμικότητας σημείων και της σύγκλισης ευθειών είναι όπως στον Ορισμό 1.1.1.

1.2.1 Ορισμός. Ένα **προβολικό επίπεδο** (projective plane) είναι μία τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, που ικανοποιεί τα επόμενα αξιώματα:

(ΠΕ 1) Για οποιαδήποτε σημεία $P, Q \in \mathcal{P}$, με $P \neq Q$, υπάρχει ακριβώς μία ευθεία $\ell \in \mathcal{L}$, τέτοια ώστε $(P, \ell) \in \mathcal{I} \ni (Q, \ell)$.

(ΠΕ 2) Για οποιοδήποτε ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$, με $k \neq \ell$, υπάρχει σημείο $P \in \mathcal{P}$, τέτοιο ώστε $(P, k) \in \mathcal{I} \ni (P, \ell)$.

(ΠΕ 3) Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα σημεία διαφορετικά μεταξύ τους, τα οποία είναι ανά τρία μη συγγραμμικά.

1.2.2 Παρατηρήσεις. 1) Από το (ΠΕ 1) βλέπουμε ότι υπάρχει μία μοναδική ευθεία, η οποία διέρχεται (ή περιέχει, ή ορίζεται) από δύο διαφορετικά σημεία. Επομένως, το (ΠΕ 1) συμπίπτει με το (ΣΕ 1). Αντιθέτως, από το (ΠΕ 2) προκύπτει ότι δύο οποιοδήποτε διαφορετικές ευθείες έχουν πάντοτε κοινό σημείο. Επομένως:

Στο προβολικό επίπεδο δεν υπάρχει έννοια παραλληλίας.

2) Όπως και στο συσχετισμένο επίπεδο, τη μονοσήματα ορισμένη ευθεία ℓ του (ΠΕ 1) ονομάζουμε **ένωση** των P, Q και τη συμβολίζουμε με

$$\ell = P \vee Q = Q \vee P.$$

3) Επίσης, όπως θα δείξουμε στην παρακάτω Πρόταση 1.2.4, και το κοινό σημείο P του (ΠΕ 2) είναι μονοσήματα ορισμένο. Το καλούμε **τομή** των k, ℓ και το συμβολίζουμε με

$$P = k \wedge \ell = \ell \wedge k.$$

1.2.3 Παραδείγματα. 1) Θεωρούμε τα σύνολα:

$$\mathcal{P} := \{A_i | i = 1, \dots, 7\},$$

$$\mathcal{L} := \{\ell_1 = \{A_1, A_2, A_3\}, \ell_2 = \{A_1, A_4, A_6\}, \ell_3 = \{A_1, A_5, A_7\},$$

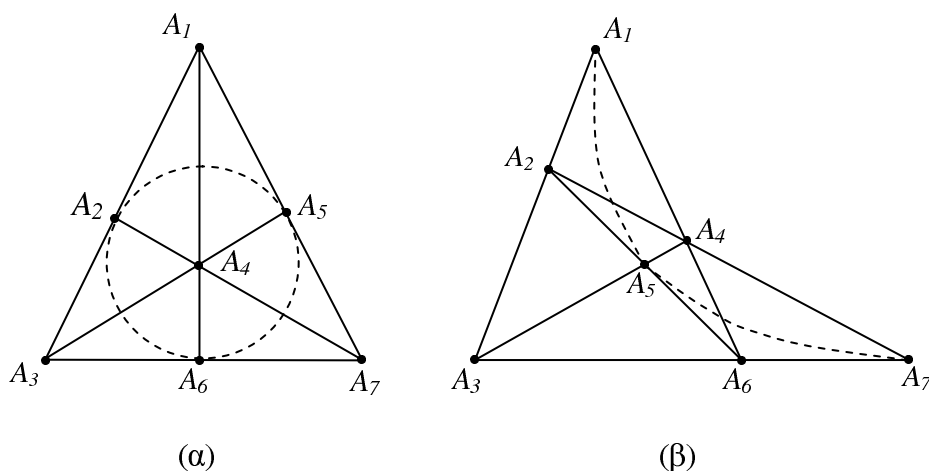
$$\ell_4 = \{A_2, A_4, A_7\}, \ell_5 = \{A_2, A_5, A_6\}, \ell_6 = \{A_3, A_4, A_5\}, \ell_7 = \{A_3, A_6, A_7\}\}$$

και τη σύμπτωση $\mathcal{I}$ που ορίζει η συνολοθεωρητική σχέση “ $\in$ ”.

Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ είναι προβολικό επίπεδο. Το επίπεδο αυτό λέγεται και **προβολικό επίπεδο των επτά σημείων** και αποτελεί παράδειγμα προβολικού επιπέδου με πεπερασμένο πλήθος σημείων (και ευθειών).

Όπως θα δείξουμε αρκετά πιο κάτω [βλ. Παρατήρηση 1.4.9(2)] η *ελάχιστη ισχύς του προβολικού επιπέδου είναι 7*. Αυτό δικαιολογεί και την επιλογή των 7 σημείων του προηγούμενου παραδείγματος.

Μερικούς τρόπους απεικόνισης (στο *ευκλείδειο* επίπεδο!) των σημείων και των ευθειών του παραδείγματος παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 1.3

Ας σημειωθεί ότι οι ευθείες των σχημάτων (συνεχείς και διακεκομμένες) δεν έχουν καμιά σχέση με τις συνήθεις ευθείες του ευκλείδειου επιπέδου, αλλά σχεδιάζονται για να υποδηλώσουν τις αντίστοιχες τριάδες σημείων, οι οποίες ορίζουν τις ευθείες του παραπάνω προβολικού επιπέδου.

Η σύμπτωση των σημείων και ευθειών του ίδιου παραδείγματος περιγράφεται και στον παρακάτω πίνακα, του οποίου η ερμηνεία είναι προφανής.

	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5	ℓ_6	ℓ_7
A_1	•	•	•				
A_2	•			•	•		
A_3	•					•	•
A_4		•		•		•	
A_5			•		•	•	
A_6		•			•		•
A_7			•	•			•

Τέτοιοι πίνακες είναι ιδιαίτερος χρήσιμοι, όταν θέλουμε να περιγράψουμε τη σχέση της σύμπτωσης προβολικών επιπέδων με σχετικά μεγάλο (αλλά πεπερασμένο) πλήθος σημείων και ευθειών.

2) Στο διανυσματικό (γραμμικό) χώρο $\mathbb{R}^3$ ορίζουμε τα σύνολα :

$$\mathcal{P} := \{P \equiv U \leq \mathbb{R}^3 : \dim U = 1\},$$

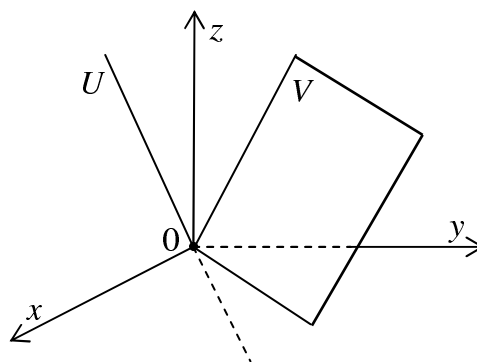
$$\mathcal{L} := \{\ell \equiv V \leq \mathbb{R}^3 : \dim V = 2\},$$

όπου $U \leq \mathbb{R}^3$ σημαίνει ότι ο U είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ (παρόμοια και για τον $V \leq \mathbb{R}^3$). Επίσης, ορίζουμε τη σχέση σύμπτωσης $\mathcal{I} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ με

$$(P, \ell) \in \mathcal{I} \Leftrightarrow U \leq V, \quad \text{αν } P = U \quad \text{και} \quad \ell = V.$$

Ελέγχουμε αμέσως ότι το $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ αποτελεί προβολικό επίπεδο, το οποίον ονομάζουμε **πραγματικό προβολικό επίπεδο διάστασης 2** και συμβολίζουμε με $\mathbb{P}_2$. Θα μελετήσουμε το $\mathbb{P}_2$ με λεπτομέρειες (κυρίως από αλγεβρική σκοπιά) στο Κεφάλαιο 3.

Είναι φανερόν ότι τα σημεία του $\mathbb{P}_2$ είναι ακριβώς οι ευθείες του $\mathbb{R}^3$, οι οποίες διέρχονται από το $0 \equiv (0, 0, 0)$, ενώ οι ευθείες του $\mathbb{P}_2$ είναι ακριβώς τα επίπεδα του $\mathbb{R}^3$, που διέρχονται επίσης από το 0.



Σχήμα 1.4

• Τα δύο προηγούμενα παραδείγματα αποτελούν *μοντέλα* προβολικών επιπέδων (το πρώτο με πεπερασμένο πλήθος σημείων και ευθειών, το δεύτερο με άπειρο πλήθος). Εδώ οι απροσδιόριστοι όροι (σημεία και ευθείες) αποκτούν συγκεκριμένη υπόσταση (δυάδες/τριάδες στοιχείων, γραμμικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ κλπ.), μέσω της οποίας επαληθεύουμε την ισχύ των αξιωμάτων (ΠΕ 1) – (ΠΕ 3). Για τη σημασία των μοντέλων ενός αξιωματικού συστήματος κάναμε ήδη λόγο στην Παράγραφο 0.5.

Ας δούμε τώρα μερικές άμεσες συνέπειες των αξιωμάτων ενός προβολικού επιπέδου $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.

1.2.4 Πρόταση. Το σημείο P του αξιώματος (ΠΕ 2) είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κι ένα άλλο σημείο, τέτοιο ώστε $Q \neq P$ με $(Q, k) \in I \ni (Q, \ell)$. Τότε, επειδή τα P, Q είναι σημεία των k και ℓ , από το (ΠΕ 1) προκύπτει ότι

$$k = P \vee Q = \ell,$$

που είναι άτοπο, επειδή έχουμε υποθέσει ότι $k \neq \ell$. □

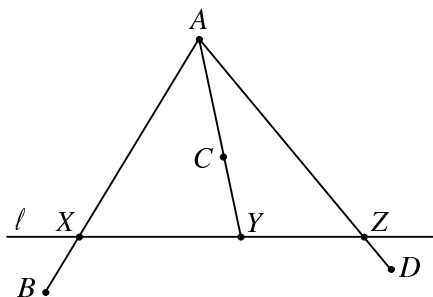
1.2.5 Πρόταση. *Αν A, B, C είναι συγγραμμικά σημεία ενός προβολικού επιπέδου, διαφορετικά μεταξύ τους, και ℓ η κοινή ευθεία που τα περιέχει, τότε*

$$\ell = A \vee B = B \vee C = A \vee C.$$

Απόδειξη. Η ίδια με την απόδειξη της Πρότασης 1.1.5. □

1.2.6 Πρόταση. *Κάθε ευθεία ενός προβολικού επιπέδου περιέχει τουλάχιστον τρία διαφορετικά σημεία.*

Απόδειξη. Έστω ℓ μία οποιαδήποτε ευθεία του προβολικού επιπέδου. Σύμφωνα με το (ΠΕ 3), υπάρχουν τέσσερα σημεία που είναι μεταξύ τους διαφορετικά και ανά τρία μη συγγραμμικά. Ας τα καλέσουμε A, B, C, D , και ας υποθέσουμε πρώτα ότι κανένα απ' αυτά δεν ανήκει στην ℓ . Ορίζουμε τις ευθείες $A \vee B, A \vee C$ και $A \vee D$, οι οποίες είναι μεταξύ τους διαφορετικές [: αν δύο απ' αυτές συνέπιπταν, θα είχαμε ότι τρία από τα παραπάνω σημεία θα ήσαν συγγραμμικά (άτοπο)]. Επίσης οι ίδιες ευθείες είναι διαφορετικές από την ℓ [: αν ήταν, π.χ., $A \vee B = \ell$, τότε $(A, \ell) \in I$ (άτοπο)].



Σχήμα 1.5

Επομένως, ορίζονται μονοσήμαντα τα σημεία (της ℓ)

$$X = \ell \wedge (A \vee B), \quad Y = \ell \wedge (A \vee C), \quad Z = \ell \wedge (A \vee D).$$

Παρατηρούμε ότι $X \neq Y \neq Z \neq X$. Πραγματικά, αν ήταν, π.χ., $X = Y$, τότε

$$A \vee B = A \vee X = A \vee Y = A \vee C,$$

(βλ. Πρόταση 1.2.5) που είναι άτοπο, αφού δείξαμε ότι $A \vee B \neq A \vee C$.

Αν υποθέσουμε ότι ένα ή δύο σημεία από τα A, B, C, D ανήκουν στην ℓ , τότε αρκεί να εξασφαλίσουμε αντιστοίχως την ύπαρξη ακόμη δύο ή ενός σημείων, ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία. $\square$

1.2.7 Πρόταση. Κάθε προβολικό επίπεδο έχει τουλάχιστον τέσσερις διαφορετικές ευθείες, οι οποίες ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα τέσσερα σημεία A, B, C, D του αξιώματος (ΠΕ 3). Ορίζουμε τις ευθείες $A \vee B, B \vee C, C \vee D$ και $D \vee A$. Βλέπουμε αμέσως ότι είναι διαφορετικές μεταξύ τους [: αλλιώς θα βρίσκαμε τριάδες συγγραμμικών σημείων από τα A, B, C, D (άτοπο)].

Οι προηγούμενες ευθείες δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο. Πραγματικά, ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι υπάρχει σημείο $O \in \mathcal{P}$ από το οποίο διέρχονται οι $A \vee B, B \vee C$ και $C \vee D$. Τότε, λόγω του μονοσήμαντου της τομής των διαφορετικών ευθειών $A \vee B$ και $B \vee C$, θα ήταν $B = O$. Αναλόγως, από τις $B \vee C$ και $C \vee D$, θα ήταν και $C = O$, οπότε θα καταλήγαμε στο άτοπο συμπέρασμα ότι $B = O = C$. $\square$

1.2.8 Πρόταση. Από κάθε σημείο O ενός προβολικού επιπέδου διέρχονται τουλάχιστον τρεις διαφορετικές ευθείες.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την προηγούμενη Πρόταση, υπάρχουν τέσσερις ευθείες k, ℓ, m, n , οι οποίες είναι διάφορες μεταξύ τους και ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι καμία απ' αυτές δεν διέρχεται από το O . Τότε ορίζονται τα σημεία $P = k \wedge \ell, Q = k \wedge m$ και $R = k \wedge n$ (βλ. Σχήμα 1.6), που είναι διαφορετικά μεταξύ τους [: αν δύο απ' αυτά συνέπιπταν, τότε τρεις από τις παραπάνω ευθείες θα διέρχονταν από το ίδιο σημείο (άτοπο)].

Επίσης, τα προηγούμενα σημεία δεν συμπίπτουν με το O [: αν, για παράδειγμα, $O = P$, τότε το O θα ανήκε στην k (άτοπο)]. Επομένως, ορίζονται μονοσήμαντα οι ευθείες

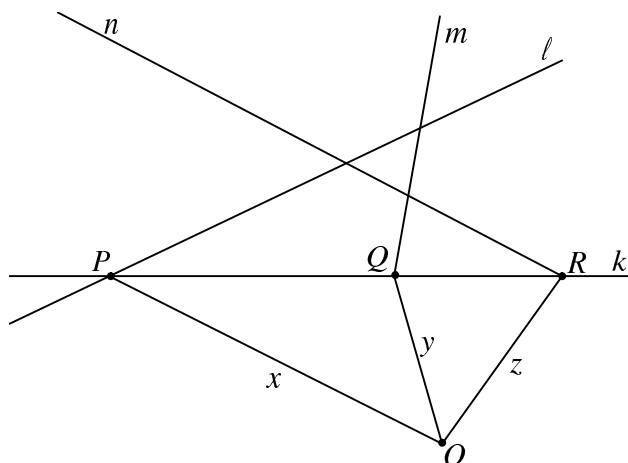
$$x = O \vee P, \quad y = O \vee Q, \quad z = O \vee R.$$

Παρατηρούμε ότι $x \neq y \neq z \neq x$: αν, π.χ., ήταν $x = y$, τότε

$$P = k \wedge x = k \wedge y = Q,$$

που είναι άτοπο, αφού δείξαμε ότι $P \neq Q$.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι από το O διέρχονται μία ή δύο από τις ευθείες k, ℓ, m, n , τότε αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι διέρχονται ακόμη δύο ή μία ευθείες αντιστοίχως, εφαρμόζοντας ακριβώς την προηγούμενη διαδικασία. $\square$



Σχήμα 1.6

1.2.9 Ασκήσεις.

- 1) Έστω ότι μία τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ικανοποιεί τα αξιώματα :
 - (ΠΕ 1') Αν $P, Q \in \mathcal{P}$ με $P \neq Q$, τότε υπάρχει ευθεία $k \in \mathcal{L}$, τέτοια ώστε $(P, k) \in \mathcal{I} \ni (Q, k)$.
 - (ΠΕ 2') Αν $k, \ell \in \mathcal{L}$ με $k \neq \ell$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $P \in \mathcal{I}$, τέτοιο ώστε $(P, k) \in \mathcal{I} \ni (Q, k)$.
 - (ΠΕ 3') = (ΠΕ 3).
 - α) Να αποδειχθεί ότι η k του (ΠΕ 1') είναι μονοσήμαντα ορισμένη.
 - β) Τι συμπέρασμα προκύπτει για την τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$;
- 2) Σε κάθε προβολικό επίπεδο υπάρχει ευθεία ℓ και σημείο P με την ιδιότητα : $(P, \ell) \notin \mathcal{I}$. Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα και σ' ένα συσχετισμένο επίπεδο ;
- 3) Δίνεται μία ευθεία ℓ ενός προβολικού επιπέδου. Τότε υπάρχει σημείο P με $(P, \ell) \notin \mathcal{I}$. Αναλόγως, αν δίνεται το P , υπάρχει ευθεία ℓ με την ίδια ιδιότητα, όπως προηγουμένως.
- 4) Αν k και ℓ είναι δύο διαφορετικές ευθείες ενός προβολικού επιπέδου, τότε υπάρχει ένα σημείο του επιπέδου, που δεν ανήκει σε καμία από τις ευθείες αυτές. Να αποδειχθεί το ανάλογο του συσχετισμένου επιπέδου.
- 5) Έστω $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ η μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^3$ με κέντρο το $0 \equiv (0, 0, 0)$. Για κάθε $a = (x, y, z) \in S^2$, συμβολίζουμε με

$-a = (-x, -y, -z)$ το αντιδιαμετρικό του σημείο. Θεωρούμε τα σύνολα

$$\mathcal{P} := \{P = (a, -a) \mid a \in S^2\},$$

$$\mathcal{L} := \{S^1 \mid S^1 \text{ μέγιστος κύκλος της } S^2\}.$$

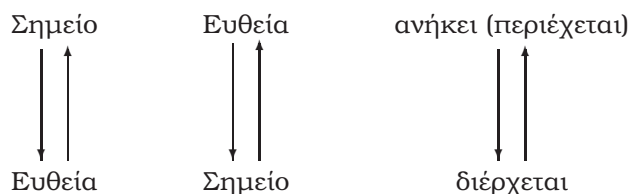
Αν $\mathcal{I}$ είναι η σχέση σύμπτωσης που ορίζεται με την ισοδυναμία

$$(P, S^1) \in \mathcal{I} \Leftrightarrow (a, -a) \in S^1, \quad \text{αν } P = (a, -a),$$

τότε η τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ αποτελεί προβολικό επίπεδο. Πώς συνδέεται το τελευταίο με το $\mathbb{P}_2$;

1.3 Η αρχή του δυϊσμού

Συγκρίνοντας τις Προτάσεις 1.2.6 και 1.2.8, βλέπουμε ότι η μία προκύπτει από την άλλη, αν εναλλάξουμε τις έννοιες σημείο, ευθεία, ανήκει (περιέχεται) αντιστοίχως με τις έννοιες ευθεία, σημείο, διέρχεται.



Σχήμα 1.7

Το ίδιο διαπιστώνουμε συγκρίνοντας και τις αποδείξεις των ιδίων προτάσεων καθώς επίσης και το αξίωμα (ΠΕ 3) με την Πρόταση 1.2.7.

Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι η Πρόταση 1.2.8 είναι **δυϊκή** (dual) της 1.2.6 και αντιστρόφως. Ομοίως και η Πρόταση 1.2.7 είναι ένα συμπέρασμα δυϊκό του αξιώματος (ΠΕ 3).

Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, στην Προβολική Γεωμετρία ισχύει η **αρχή του δυϊσμού** (principle of duality), σύμφωνα με την οποία, για κάθε συμπέρασμα που ισχύει (αληθεύει) στο προβολικό επίπεδο, ισχύει ταυτόχρονα και το δυϊκό του, δηλαδή αυτό που προκύπτει με την παραπάνω εναλλαγή (βλ. και Σχήμα 1.7).

Την πατρότητα της αρχής αυτής διεκδίκησαν οι γεωμέτρες J. V. Poncelet (1788–1867) και J. D. Gergonne (1771–1859), πράγμα που τους οδήγησε σε μία μακροχρόνια και θλιβερή διαμάχη, ίσως χειρότερη από αυτήν μεταξύ των

I. Newton (1642–1727) και G. W. Leibniz (1646–1716) για την πατρότητα του Διαφορικού Λογισμού.

Για την απόδειξη της αρχής του δυϊσμού θεωρούμε ένα προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ και την τριάδα

$$(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, I^*), \quad \text{όπου } \mathcal{P}^* = \mathcal{L}, \quad \mathcal{L}^* = \mathcal{P},$$

και η I^* ορίζεται ως εξής: για ένα $(P^*, \ell^*) \in \mathcal{P}^* \times \mathcal{L}^*$ θα είναι

$$(P^*, \ell^*) \in I^* \Leftrightarrow (Q, k) \in I,$$

αν $P^* = k$ και $\ell^* = Q$, με $(Q, k) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$.

Δηλαδή, η τριάδα $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, I^*)$ έχει προκύψει από το αρχικό προβολικό επίπεδο με την εναλλαγή που περιγράψαμε πιο πάνω.

1.3.1 Πρόταση. Η τριάδα $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, I^*)$ αποτελεί προβολικό επίπεδο, το οποίον καλείται **δυϊκό** του $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ισχύουν τα αξιώματα (ΠΕ 1) – (ΠΕ 3). Για την απόδειξη του (ΠΕ 1) θεωρούμε τα $P^*, Q^* \in \mathcal{P}^*$ με $P^* \neq Q^*$. Επομένως, θα υπάρχουν ευθείες $k, m \in \mathcal{L}$ με $k \neq m$ και τέτοιες ώστε $P^* = k$ και $Q^* = m$. Άρα, κατά το (ΠΕ 2) και την Πρόταση 1.2.4, ορίζεται μονοσήμαντα το σημείο $k \wedge m$. Θέτοντας $\ell^* := k \wedge m$, παρατηρούμε ότι

$$(k \wedge m, k) \in I \Leftrightarrow (P^*, \ell^*) \in I^*,$$

$$(k \wedge m, m) \in I \Leftrightarrow (Q^*, \ell^*) \in I^*.$$

Επομένως, η ℓ^* είναι ευθεία του $\mathcal{L}^*$ που περιέχει τα P^* και Q^* . Η ℓ^* είναι και η μοναδική με αυτήν την ιδιότητα, γιατί αν υπήρχε και μια $x^* = X \in \mathcal{L}^*$ με την ίδια ιδιότητα, τότε

$$(P^*, x^*) \in I^* \Leftrightarrow (X, k) \in I,$$

$$(Q^*, x^*) \in I^* \Leftrightarrow (X, m) \in I,$$

οπότε θα είχαμε ότι $X = k \wedge m$ (εφ' όσον $k \neq m$), δηλαδή $x^* = \ell^*$.

Για το (ΠΕ 2), αναλόγως προς τα προηγούμενα, θεωρούμε τις διαφορετικές ευθείες $k^*, \ell^* \in \mathcal{L}^*$. Μπορούμε να θέσουμε $k^* = Q$ και $\ell^* = R$ (με $Q \neq R$). Επομένως, κατά το (ΠΕ 1), ορίζεται η $Q \vee R \in \mathcal{L}$, οπότε το $P^* := Q \vee R$ είναι το (μοναδικό) κοινό σημείο των k^*, ℓ^* .

Τέλος, για το (ΠΕ 3) παρατηρούμε τα εξής. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.7, υπάρχουν ευθείες $k_i \in \mathcal{L}$ ($i = 1, \dots, 4$) οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους και ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο. Επομένως, θέτοντας $P_i^* = k_i$,

βρίσκουμε τέσσερα διαφορετικά σημεία του $\mathcal{P}^*$. Τα σημεία αυτά δεν βρίσκονται ανά τρία σε κοινή ευθεία. Πραγματικά, αν υπήρχε ευθεία $\ell^* \in \mathcal{L}^*$ που να περιείχε τρία εξ αυτών, τότε οι αντίστοιχες ευθείες k_i θα διέρχονταν από ένα κοινό σημείο του $\mathcal{P}$, αυτό που ορίζει η ℓ^* (άτοπο). Άρα ισχύει και το (ΠΕ 3). $\square$

Από την προηγούμενη απόδειξη γίνεται φανερόν ότι τα αξιώματα του προβολικού επιπέδου $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, I^*)$ είναι ουσιαστικά δυϊκές εκφράσεις των αξιωμάτων του αρχικού επιπέδου $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$.

1.3.2 Λήμμα. Υποθέτουμε ότι S είναι μία πρόταση που ισχύει σε ένα προβολικό επίπεδο. Τότε η δυϊκή πρόταση S^* ισχύει στο δυϊκό επίπεδο $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, I^*)$.

Απόδειξη. Αφού η S ισχύει στο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ σημαίνει ότι προκύπτει από τα αξιώματα (ΠΕ 1) – (ΠΕ 3). Η απόδειξη της δυϊκής πρότασης S^* γίνεται αν εφαρμόσουμε την εναλλαγή του Σχήματος 1.7 στην απόδειξη της S , άρα προκύπτει από τα δυϊκά των αξιωμάτων του $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$. Επομένως, η απόδειξη της S^* , τελικά, προκύπτει από τα αξιώματα του $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, I^*)$, άρα η S^* αληθεύει στο $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, I^*)$. $\square$

Μπορούμε τώρα να δείξουμε το επόμενο βασικό

1.3.3 Θεώρημα (Αρχή του δυϊσμού). Στην κατηγορία των προβολικών επιπέδων ισχύει η αρχή του δυϊσμού. Δηλαδή, αν S είναι μία πρόταση, η οποία αληθεύει σε κάθε προβολικό επίπεδο, τότε αληθεύει και δυϊκή της πρόταση S^* , επίσης σε κάθε προβολικό επίπεδο.

Απόδειξη. Αφού η S αληθεύει σε κάθε προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$, θα αληθεύει και σε κάθε δυϊκό επίπεδο $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, I^*)$. Επομένως, κατά το προηγούμενο Λήμμα, η S^* αληθεύει και στο δυϊκό του προηγούμενου, δηλαδή στο $((\mathcal{P}^*)^*, (\mathcal{L}^*)^*, (I^*)^*)$. Επειδή $(\mathcal{P}^*)^* = \mathcal{P}$, $(\mathcal{L}^*)^* = \mathcal{L}$, και η $(I^*)^*$ ταυτίζεται με την I , καταλήγουμε στο συμπέρασμα. $\square$

Όπως προκύπτει από τα προηγούμενα, η αρχή του δυϊσμού παρέχει μία σημαντική διευκόλυνση στη μελέτη της Προβολικής Γεωμετρίας, αφού μαζί με κάθε συμπέρασμα (που αποδεικνύουμε) ισχύει και ένα νέο, το δυϊκό του, χωρίς να χρειάζεται να το αποδείξουμε. Άλλωστε, και η διαδικασία της απόδειξης του δυϊκού συμπεράσματος είναι δυϊκή της απόδειξης του αρχικού συμπεράσματος, δηλαδή προκύπτει από την αρχική απόδειξη με τη γνωστή εναλλαγή του Σχήματος 1.7.

Επίσης, η ίδια αρχή δείχνει ότι οι (μη οριζόμενες) έννοιες της ευθείας και του σημείου έχουν ανάλογες (συμμετρικές) ιδιότητες, ενώ επιβεβαιώνεται –ακόμη μια φορά– η αυθαιρεσία της ονοματολογίας. Έτσι, κάποια στοιχεία που αποτελούν τα σημεία ενός επιπέδου μπορούν να είναι ευθείες ενός άλλου κ.ο.κ.

1.3.4 Ασκήσεις.

- 1) Ποιο είναι το δυϊκό του προβολικού επιπέδου των 7 σημείων;
- 2) Να δικαιολογηθεί γιατί δεν ισχύει η αρχή του δυϊσμού στην κατηγορία των συσχετισμένων επιπέδων.
- 3) Είναι το σύστημα των αξιωμάτων (ΠΕ 1) – (ΠΕ 3) αυτοδυϊκό; Δηλαδή, αν πάρουμε τα δυϊκά τους, τότε παραμένουμε εντός του συστήματος; Με ποια προσθήκη μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα αυτοδυϊκό σύνολο αξιωμάτων και προτάσεων;

1.4 Στοιχειώδεις απεικονίσεις

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε μερικές απλές απεικονίσεις, με τις οποίες συγκρίνουμε το πλήθος των σημείων που ανήκουν σε διάφορες ευθείες, το πλήθος των ευθειών που διέρχονται από διάφορα σημεία ενός προβολικού επιπέδου και άλλα σχετικά ερωτήματα.

- Θεωρούμε πάντοτε ένα προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.

1.4.1 Ορισμός. Αν m είναι ευθεία του προβολικού επιπέδου, καλούμε **σημειοσειρά** ή **δέσμη σημείων** (pencil of points) της m το σύνολο

$$J(m) = \{P \in \mathcal{P} : (P, m) \in \mathcal{I}\}.$$

Η ευθεία m καλείται επίσης **άξονας** (axis) της σημειοσειράς.

Αντιστοίχως, αν O είναι σημείο του προβολικού επιπέδου, καλούμε **δέσμη ευθειών** (pencil of lines) του O (ή από το O) το σύνολο

$$J(O) = \{\ell \in \mathcal{L} : (O, \ell) \in \mathcal{I}\}.$$

Το O καλείται και **κέντρο** (center) της δέσμης.

Προφανώς, οι δύο έννοιες είναι δυϊκές μεταξύ τους. Στην περίπτωση της Στοιχειώδους Γεωμετρίας, η σημειοσειρά της m αποτελείται από όλα τα σημεία της, ενώ τη δέσμη του O αποτελούν όλες οι ευθείες που διέρχονται από το O . Ο Ορισμός 1.4.1 γενικεύει την κατάσταση της Στοιχειώδους Γεωμετρίας στο δικό μας πλαίσιο, στο οποίον οι έννοιες «ανήκει», «διέρχεται» κλπ. ορίζονται μέσω της σύμπτωσης $\mathcal{I}$ και οι ευθείες δεν είναι κατ' ανάγκην σημειοσειρές.

1.4.2 Πρόταση. Αν $k, \ell \in \mathcal{L}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$[k = \ell] \Leftrightarrow [J(k) = J(\ell)].$$

Απόδειξη. Αν $k = \ell$, τότε η ισότητα των δύο σημειοσειρών είναι προφανής. Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι $J(k) = J(\ell)$. Λόγω της Πρότασης 1.2.6, η k διαθέτει τουλάχιστον τρία διαφορετικά σημεία A, B, C , οπότε $k = A \vee B$. Επίσης, από τον Ορισμό 1.4.1, προκύπτει ότι $A, B, C \in J(k) = J(\ell)$, άρα και $\ell = A \vee B$. Επομένως

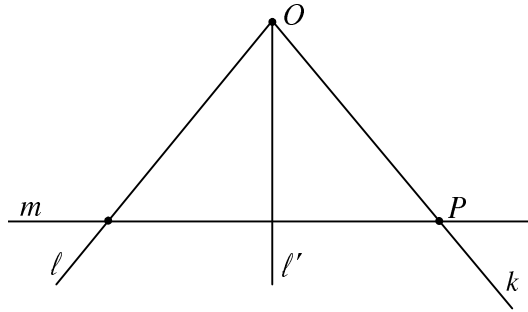
$$k = A \vee B = \ell. \quad \square$$

Για να συγκρίνουμε τις σημειοσειρές και τις δέσμες ευθειών χρειαζόμαστε και τον επόμενο ορισμό.

1.4.3 Ορισμός. Έστω $O \in \mathcal{P}$ και $m \in \mathcal{L}$ με $(O, m) \notin \mathcal{I}$ (ισοδύναμα: $O \notin J(m)$). Ονομάζουμε **στοιχειώδη απεικόνιση** (elementary correspondence), από τη δέσμη $J(O)$ στη σημειοσειρά $J(m)$, την απεικόνιση

$$\delta : J(O) \longrightarrow J(m) : \ell \mapsto \ell \wedge m.$$

Στην περίπτωση του συνήθους επιπέδου έχουμε το επόμενο σχήμα.



Σχήμα 1.8

Αν έχουμε πολλές στοιχειώδεις απεικονίσεις, γράφουμε και

$$(1.4.1) \quad \delta = \delta_{O,m},$$

προκειμένου να διευκρινίσουμε ότι η δ απεικονίζει τη δέσμη του O στη σημειοσειρά της m .

1.4.4 Πρόταση. Η απεικόνιση $\delta = \delta_{O,m}$ είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί.

Απόδειξη. Για κάθε $\ell \in J(O)$, θα είναι $\ell \neq m$, σύμφωνα με την Πρόταση 1.4.2. Άρα (βλ. Πρόταση 1.2.4) το σημείο $\ell \wedge m$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο και η δ είναι καλά ορισμένη.

Για να δείξουμε ότι η δ είναι 1 – 1, ας υποθέσουμε ότι $\delta(\ell) = \delta(\ell')$, δηλαδή $\ell \wedge m = \ell' \wedge m$. Επειδή $O \notin J(m)$, θα είναι $\ell \wedge m \neq O \neq \ell' \wedge m$, οπότε

$$\ell = O \vee (\ell \wedge m) = O \vee (\ell' \wedge m) = \ell',$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Τέλος, η δ είναι επί: πραγματικά, για τυχόν $P \in J(m)$, θα είναι $P \neq O$. Συνεπώς ορίζεται η $k = P \vee O$. Παρατηρούμε ότι $k \in J(O)$ και

$$\delta(k) = (P \vee O) \wedge m = P,$$

όπως ζητούσαμε. □

1.4.5 Συμβολισμός. Την **ισχύ** (cardinality), δηλαδή το πλήθος των στοιχείων της δέσμης $J(O)$ [αντίστ. της σημειοσειράς $J(m)$] συμβολίζουμε με $|J(O)|$ (αντίστ. $|J(m)|$). Ένας άλλος συμβολισμός για την ισχύ *πεπερασμένης* δέσμης (αντίστ. σημειοσειράς), που δεν ακολουθείται εδώ, είναι ο $\#J(O)$ [αντίστ. $\#J(m)$].

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.4.4 είναι τώρα τα επόμενα συμπεράσματα.

1.4.6 Πόρισμα. Για οποιοδήποτε ζεύγος $(O, m) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ με $(O, m) \notin \mathcal{I}$, ισχύει η σχέση

$$|J(O)| = |J(m)|.$$

1.4.7 Πόρισμα. Για οποιοδήποτε ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$ ισχύει η σχέση

$$|J(k)| = |J(\ell)|.$$

Απόδειξη. Αν $k = \ell$, η σχέση είναι προφανής. Αν $k \neq \ell$, τότε [βλ. Άσκηση 1.2.9(4)] υπάρχει $O \in \mathcal{P}$ με $(O, k) \notin \mathcal{I}$ και $(O, \ell) \notin \mathcal{I}$. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 1.4.6, έχουμε ότι

$$|J(k)| = |J(O)| = |J(\ell)|. \quad \square$$

Ένας συσχετισμός μεταξύ του πλήθους των σημείων μιας ευθείας (που είναι το ίδιο για όλες τις ευθείες, κατά το Πόρισμα 1.4.7) και του πλήθους των σημείων ενός **πεπερασμένου** προβολικού επιπέδου (δηλ. με πεπερασμένο πλήθος σημείων) δίνεται στην επόμενη

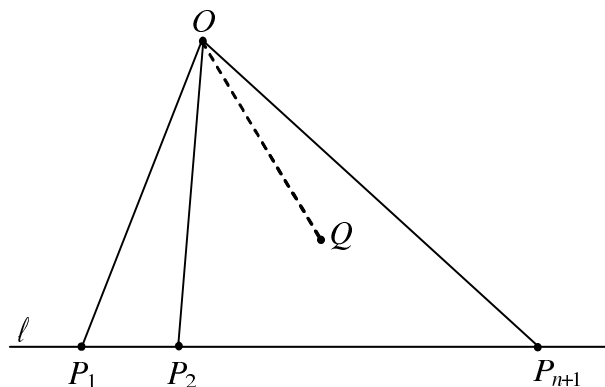
1.4.8 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι ℓ είναι μία ευθεία του προβολικού επιπέδου με $n + 1$ ($n \geq 2$) το πλήθος διαφορετικά σημεία. Τότε το προβολικό επίπεδο διαθέτει ακριβώς $n^2 + n + 1$ σημεία.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα σημείο $O \in \mathcal{P}$ με $(O, \ell) \notin \mathcal{I}$ [βλ. Άσκηση 1.2.9(3)] και καλούμε P_i ($i = 1, \dots, n+1$) τα σημεία της ℓ .

Επειδή $O \neq P_i$ [αφού $O \notin J(\ell)$], ορίζονται οι ευθείες $O \vee P_i$ ($i = 1, \dots, n+1$), που είναι όλες διαφορετικές από την ℓ , σύμφωνα με την Πρόταση 1.4.2. Επίσης, $O \vee P_i \neq O \vee P_j$ (για όλους τους δείκτες i, j με $i \neq j$), γιατί αν ήταν $O \vee P_i = O \vee P_j$ (για κάποιους δείκτες i, j), τότε θα είχαμε ότι

$$P_i = \ell \wedge (O \vee P_i) = \ell \wedge (O \vee P_j) = P_j,$$

που είναι άτοπο. Επομένως, από το O διέρχονται οι $n+1$ διαφορετικές ευθείες



Σχήμα 1.9

$O \vee P_i$ και κάθε μία απ' αυτές έχει $n+1$ το πλήθος σημεία διαφορετικά (αφού $|J(\ell)| = |J(O \vee P_i)|$, κατά το Πόρισμα 1.4.7). Άρα, η κάθε μία έχει n το πλήθος διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και διαφορετικά από το O . Κατά συνέπεια, θεωρώντας όλα τα σημεία τους εκτός του O , από τις ευθείες αυτές λαμβάνουμε $(n+1) \cdot n = n^2 + n$ σημεία. Υπολογίζοντας τώρα και το O , λαμβάνουμε τελικώς $n^2 + n + 1$ διαφορετικά σημεία του προβολικού επιπέδου.

Ισχυριζόμαστε ότι δεν υπάρχουν άλλα σημεία στο επίπεδο εκτός απ' αυτά που πήραμε με την προηγούμενη διαδικασία. Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κι ένα σημείο Q , διαφορετικό από τα προηγούμενα. Τότε θα ορίζεται και η ευθεία $O \vee Q$, η οποία θα είναι διαφορετική από όλες τις $O \vee P_i$, αφού το Q δεν ανήκει σε καμιά τους [αλλιώς η $O \vee P_i$, που θα περιείχε το Q , θα είχε $n+2$ διαφορετικά σημεία (άτοπο)]. Άρα, από το O θα διέρχονται $n+2$ διαφορετικές ευθείες (οι $O \vee P_i$ και η $O \vee Q$). Δηλαδή θα είναι $|J(O)| = n+2$, που είναι επίσης άτοπο, γιατί $|J(O)| = |J(\ell)| = n+1$ (βλ. Πόρισμα 1.4.6). Επομένως αληθεύει ο παραπάνω ισχυρισμός και αποδεικνύεται η πρόταση. $\square$

1.4.9 Παρατηρήσεις. 1) Ο περιορισμός $n \geq 2$ στην εκφώνηση της Πρότασης 1.4.8 είναι (προφανώς) συνέπεια της Πρότασης 1.2.6.

2) Για $n = 2$, το πλήθος των σημείων του προβολικού επιπέδου είναι 7, άρα κάθε προβολικό επίπεδο έχει τουλάχιστον 7 διαφορετικά σημεία [συγκρίνατε με το (ΠΕ 3)]. Επομένως,

η ελάχιστη ισχύς του προβολικού επιπέδου είναι 7

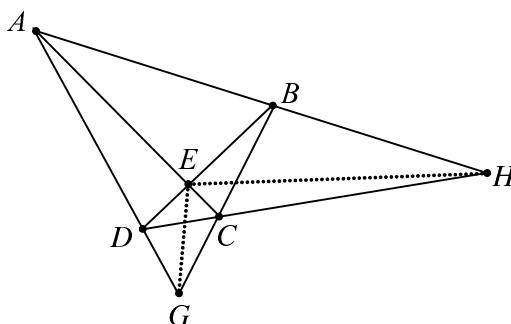
και αυτό δικαιολογεί το Παράδειγμα 1.2.3(1).

3) Μπορούμε να δείξουμε το συμπέρασμα της προηγούμενης παρατήρησης αμέσως από το (ΠΕ 3), χωρίς τη χρήση της Πρότασης 1.4.8, ως εξής: ας ξεκινήσουμε με τα τέσσερα σημεία A, B, C, D , τα οποία ορίζονται κατά το (ΠΕ 3). Σύμφωνα με το (ΠΕ 1) ορίζονται οι ευθείες

$$(1.4.2) \quad A \vee B, \quad A \vee C, \quad A \vee D, \quad B \vee C, \quad B \vee D, \quad C \vee D$$

οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους, άρα τέμνονται κατά ζεύγη. Επομένως, εκτός των A, B, C, D , ορίζονται και τα σημεία

$$E = (A \vee C) \wedge (B \vee D), \quad G = (A \vee D) \wedge (B \vee C), \quad H = (A \vee B) \wedge (C \vee D),$$



Σχήμα 1.10

δηλαδή τελικώς έχουμε 7 διαφορετικά σημεία. Για την πληρότητα ας παρατηρήσουμε ότι, εκτός από τις ευθείες (1.4.2), υπάρχει και άλλη μία: η ευθεία που περιέχει τα σημεία G, E, H και σημειώνεται στο Σχήμα 1.10 με διάστικτη μορφή.

Εδώ πρέπει να διευκρινιστεί ότι, όπως σχολιάσαμε και μετά το Παράδειγμα 1.2.3(1), οι ευθείες που προκύπτουν τελικώς είναι τριάδες της μορφής $\{A, B, H\}$, $\{A, D, G\}$, $\{G, E, H\}$ κλπ. και δεν έχουν καμία σχέση με τις συνήθεις γραμμές (που περιέχουν τα αντίστοιχα σημεία) του Σχήματος 1.10. Το τελευταίο σχήμα γίνεται στο σύνηθες επίπεδο, για διευκόλυνση, και δεν αποδίδει ακριβώς την αντίστοιχη κατάσταση στο (αφηρημένο) προβολικό επίπεδο. Αυτό φαίνεται ακόμη περισσότερο στην απεικόνιση της ευθείας $\{G, E, H\}$.

4) Αν οι ευθείες ενός (πεπερασμένου) προβολικού επιπέδου περιέχουν $n + 1$ (διαφορετικά) σημεία, λέμε ότι το επίπεδο έχει **τάξη** (order) n . Έτσι, το επίπεδο των 7 σημείων έχει τάξη 2, ενώ το επίπεδο τάξης 3 είναι αυτό των 13 σημείων κ.ο.κ.

Ένα δύσκολο πρόβλημα είναι να αποφανθούμε αν υπάρχει ή όχι προβολικό επίπεδο με δεδομένη τάξη. Είναι γνωστόν ότι υπάρχουν προβολικά επίπεδα τάξης n , για όλα τα $n = p^k$, όπου p είναι πρώτος αριθμός, αλλά αγνοούμε αν είναι και οι μόνες δυνατές τάξεις πεπερασμένων προβολικών επιπέδων. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχουν προβολικά επίπεδα τάξης 6, 10, 14, 21, 22, κ.α., ενώ παραμένει ανοιχτό το πρόβλημα για $n = 12, 15, 18$ κ.α. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. J. N. Cederberg [8, σελ. 12] και R. J. Mihalek [20, σελ. 105].

1.4.10 Ασκήσεις.

- 1) Αναλόγως προς τη $\delta_{O,m}$, ορίζεται η απεικόνιση

$$\delta' = \delta_{m,O} : J(m) \longrightarrow J(O) : P \mapsto P \vee O.$$

Να αποδειχθούν τα εξής:

- α) Η δ' είναι μία καλά ορισμένη απεικόνιση, $1 - 1$ και επί.
 - β) Η δ' είναι αντίστροφη της δ .
- 2) Να αποδειχθεί ότι, για οποιαδήποτε σημεία $P, Q \in \mathcal{P}$ με $P \neq Q$, είναι

$$|J(P)| = |J(Q)|.$$

- 3) Αν $(A, \ell) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ και $(A, \ell) \in \mathcal{I}$, να εξεταστεί αν ισχύει η σχέση

$$|J(A)| = |J(\ell)|.$$

Να συσχετιστεί το αποτέλεσμα με το Πόρισμα 1.4.6.

- 4) Γιατί ένα επίπεδο που έχει περισσότερα από 7 σημεία θα έχει αναγκαστικά τουλάχιστον 13 διαφορετικά σημεία; Τι συμβαίνει με τις ευθείες ενός τέτοιου επιπέδου;
- 5) Να οριστεί η έννοια της σημειοσειράς και της δέσμης ευθειών σε ένα *συσχετισμένο* επίπεδο και να αποδειχθεί το ανάλογο της Πρότασης 1.4.2.
- 6) Ισχύουν σε ένα *συσχετισμένο* επίπεδο η Πρόταση 1.4.4 και τα Πορίσματα 1.4.6, 1.4.7; Ποιά είναι τα ανάλογα συμπεράσματα στην περίπτωση αυτή;
- 7) Αν μια ευθεία ℓ ενός *συσχετισμένου* επιπέδου διαθέτει n ($n \geq 2$) το πλήθος διαφορετικά σημεία, τότε το επίπεδο έχει ακριβώς n^2 διαφορετικά σημεία.

- 8) Με τις υποθέσεις της προηγούμενης άσκησης, να αποδειχθεί ότι από κάθε σημείο του επιπέδου διέρχονται $n + 1$ διαφορετικές ευθείες. [Υπόδειξη: Να εξεταστούν δύο περιπτώσεις: το σημείο να βρίσκεται α) επί της ℓ , και β) εκτός αυτής.]

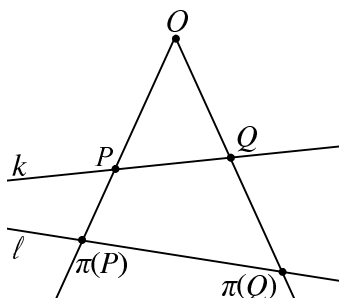
1.5 Προοπτικότητες και προβολικότητες

Οι προοπτικότητες και προβολικότητες είναι δύο από τις πρώτες βασικές έννοιες, οι οποίες έπαιζαν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της (κλασικής) Προβολικής Γεωμετρίας, και πηγάζουν κυρίως από κατασκευές στο ζωγραφικό πίνακα.

Υποθέτουμε ότι $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ είναι ένα δοσμένο προβολικό επίπεδο και k, ℓ δύο διαφορετικές ευθείες του. Επίσης, θεωρούμε και ένα σημείο O , το οποίο δεν ανήκει σε καμία από τις προηγούμενες ευθείες. Ένα τέτοιο σημείο υπάρχει πάντοτε, σύμφωνα με την Άσκηση 1.2.9(4). Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\pi : J(k) \longrightarrow J(\ell) : P \mapsto (P \vee O) \wedge \ell.$$

Προφανώς, η π είναι καλά ορισμένη, αφού $P \neq O$ και $P \vee O \neq \ell$, οπότε το σημείο $(P \vee O) \wedge \ell$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο (βλ. και το επόμενο σχήμα).



Σχήμα 1.11

1.5.1 Ορισμός. Η προηγούμενη απεικόνιση π καλείται **προοπτικότητα** (perspectivity) από την ευθεία k στην ℓ , με **κέντρο (προοπτικότητας)** το O .

Προκειμένου να δηλώσουμε όλα τα στοιχεία O, k, ℓ , που ορίζουν την προοπτικότητα π , συχνά θέτουμε $\pi = \pi(k, \ell, O)$. Σε πολλά βιβλία χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός

$$k \stackrel{O}{\wedge} \ell,$$

τον οποίον όμως θα αποφύγουμε εδώ εξαιτίας των τυπογραφικών δυσκολιών που δημιουργεί.

1.5.2 Πρόταση. Η προοπτικότητα $\pi = \pi(k, \ell, O)$ είναι σύνθεση στοιχειωδών απεικονίσεων, άρα είναι απεικόνιση 1-1 και επί.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το συμβολισμό (1.4.1), την Πρόταση 1.4.4 και την Άσκηση 1.4.10(1), διαπιστώνουμε αμέσως ότι ισχύει η σχέση

$$\pi = \delta_{O,\ell} \circ \delta_{k,O},$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. $\square$

1.5.3 Πρόταση. Για κάθε προοπτικότητα $\pi = \pi(k, \ell, O)$ ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

i) $\pi(k \wedge \ell) = k \wedge \ell$.

ii) $\pi(P) \neq P$, για κάθε $P \in J(k)$ με $P \neq k \wedge \ell$.

Επομένως, το σημείο τομής των ευθειών των k, ℓ είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της προοπτικότητας.

Απόδειξη. Το πρώτο συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της π . Αν τώρα υποθέσουμε ότι υπάρχει σημείο $P \in J(k) - \{k \wedge \ell\}$ με $\pi(P) = P$, τότε θα είναι και

$$k = P \vee (k \wedge \ell) = \pi(P) \vee (k \wedge \ell) = \ell,$$

που είναι άτοπο. Άρα ισχύει και το συμπέρασμα ii). $\square$

1.5.4 Παρατήρηση. Όπως φαίνεται αμέσως από τον ορισμό της προοπτικότητας $\pi(k, \ell, O)$, τα σημεία $O, P, \pi(P)$ είναι συγγραμμικά, για κάθε $P \in J(k)$. Άρα, οι ευθείες $P \vee \pi(P)$, για όλα τα $P \in J(k) - \{k \wedge \ell\}$, συγκλίνουν στο σημείο O . Αυτό μας επιτρέπει την επόμενη κατασκευή προοπτικότητας.

1.5.5 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι k, ℓ είναι δύο διαφορετικές ευθείες. Επίσης θεωρούμε τα σημεία A_1, A_2 της k με $A_1 \neq A_2$ και $A_1 \neq k \wedge \ell \neq A_2$, καθώς και τα σημεία B_1, B_2 της ℓ με $B_1 \neq B_2$ και $B_1 \neq k \wedge \ell \neq B_2$. Τότε υπάρχει μία μοναδική προοπτικότητα $\pi = \pi(k, \ell, O)$, τέτοια ώστε $\pi(A_i) = B_i$ ($i = 1, 2$).

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.5.4, το κέντρο της ζητούμενης προοπτικότητας θα είναι το σημείο

$$(1.5.1) \quad O = (A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2),$$

που υπάρχει λόγω των υποθέσεων για τα A_i και B_i ($i = 1, 2$). Επομένως, ορίζεται η προοπτικότητα $\pi = \pi(k, \ell, O)$, για την οποία έχουμε ότι

$$\pi(A_1) = (A_1 \vee O) \wedge \ell = (A_1 \vee B_1) \wedge \ell = B_1,$$

σύμφωνα με τον ορισμό του σημείου O και την Πρόταση 1.2.5. Αναλόγως αποδεικνύεται και η σχέση $\pi(A_2) = B_2$.

Το μονοσήμαντο της προοπτικότητας, που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες, προκύπτει από τον χαρακτηρισμό του κέντρου προοπτικότητας, όπως αναφέρεται στην Παρατήρηση 1.5.4. Ακριβέστερα, αν υπάρχει και μία άλλη προοπτικότητα $\pi' = \pi'(k, \ell, O')$, με κέντρο O' και τις ίδιες ιδιότητες, τότε η Παρατήρηση 1.5.4 και η σχέση (1.5.1) δίνουν ότι

$$\begin{aligned} O' &= (A_1 \vee \pi'(A_1)) \wedge (A_2 \vee \pi'(A_2)) \\ &= (A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2) \\ &= O, \end{aligned}$$

άρα $\pi = \pi'$, με την οποίαν ολοκληρώνεται η απόδειξη. $\square$

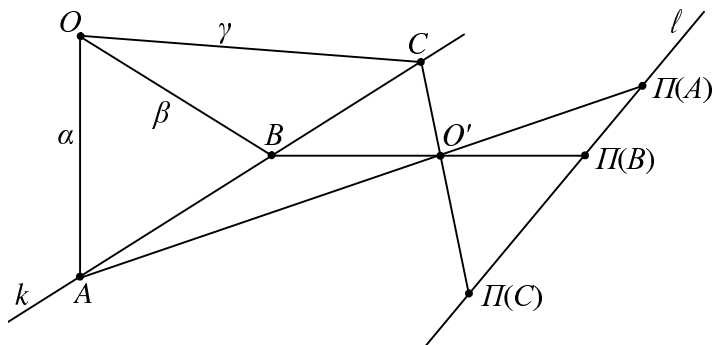
Ορίζουμε τώρα μίαν άλλη βασική έννοια.

1.5.6 Ορισμός. Μία σύνθεση πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών απεικονίσεων καλείται **προβολικότητα** (projectivity) και συμβολίζεται, γενικά, με Π .

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται, για παράδειγμα, η προβολικότητα

$$\Pi = \delta_{O', \ell} \circ \delta_{k, O'} \circ \delta_{O, k}$$

ανάμεσα στη δέσμη ευθειών $J(O)$ και τη σημειοσειρά $J(\ell)$.



Σχήμα 1.12

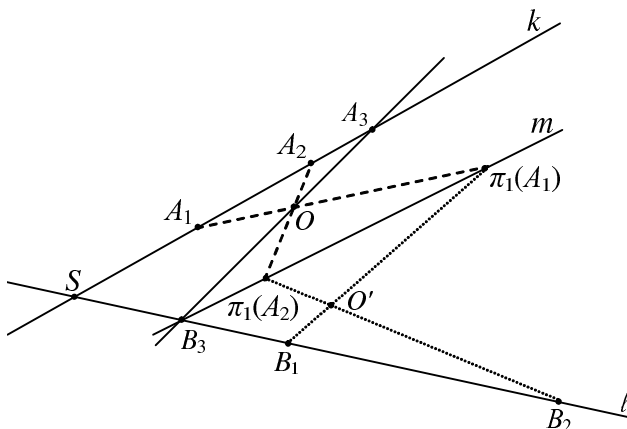
1.5.7 Πρόταση. Κάθε προβολικότητα είναι απεικόνιση 1-1 και επί. Επιπλέον, κάθε προοπτικότητα είναι μία προβολικότητα.

Απόδειξη. Προφανής συνέπεια των Προτάσεων 1.4.4 και 1.5.2. $\square$

Σχετικώς με την κατασκευή προβολικοτήτων ισχύει η επομένη

1.5.8 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι k, ℓ είναι δύο διαφορετικές ευθείες, A_i ($i = 1, 2, 3$) τρία διαφορετικά σημεία της k και B_i ($i = 1, 2, 3$) τρία διαφορετικά σημεία της ℓ . Τότε υπάρχει προβολικότητα $\Pi : J(k) \rightarrow J(\ell)$, τέτοια ώστε $\Pi(A_i) = B_i$, για κάθε $i = 1, 2, 3$.

Απόδειξη. Θέτουμε $S := k \wedge \ell$. Σύμφωνα με την υπόθεση, μόνον ένα από τα A_i και μόνον ένα από τα B_i μπορούν να συμπίπτουν με το S . Επομένως, από τα τρία δυνατά ζεύγη (A_i, B_i) , με το ίδιο $i = 1, 2, 3$ και στα δυο σημεία του ζεύγους, υπάρχει τουλάχιστον ένα, ας πούμε το (A_3, B_3) , έτσι ώστε να είναι $A_3 \neq S \neq B_3$. [Για παράδειγμα, αν ήταν $A_1 = S = B_2$, τότε από τα υπόλοιπα σημεία A_2, A_3 της k και B_1, B_3 της ℓ σχηματίζεται το ζεύγος (A_3, B_3) κλπ.] Επειδή $A_3 \neq B_3$ (αλλιώς θα ήταν $k = S \vee A_3 = S \vee B_3 = \ell$, άτοπο) ορίζεται η ευθεία $A_3 \vee B_3$, επί της οποίας θεωρούμε και ένα τρίτο σημείο O , σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.6. Θεωρούμε ακόμη και μία ευθεία $m \in J(B_3)$, τέτοια ώστε $m \neq \ell$ και $m \neq A_3 \vee B_3$ (βλ. Πρόταση 1.2.8).



Σχήμα 1.13

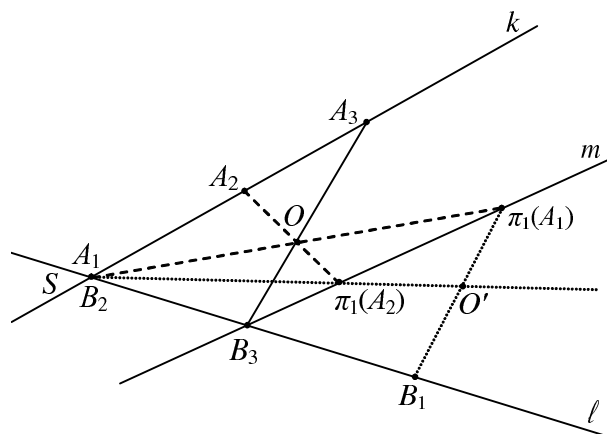
Προφανώς, $m \neq k$, αφού $(B_3, k) \notin \mathcal{I}$. Επομένως, ορίζεται η προοπτικότητα $\pi_1 = \pi_1(k, m, O)$, για την οποίαν είναι

$$(1.5.2) \quad \pi_1(A_3) = (A_3 \vee O) \wedge m = (A_3 \vee B_3) \wedge m = B_3.$$

Παρατηρούμε ότι τα σημεία $\pi_1(A_1), \pi_1(A_2)$ της m και τα σημεία B_1, B_2 της ℓ ικανοποιούν τις υποθέσεις της Πρότασης 1.5.5, άρα υπάρχει μία προοπτικότητα

$$(1.5.3) \quad \pi_2(\pi_1(A_i)) = B_i \quad (i = 1, 2).$$
$$(1.5.4) \quad \pi_2(\pi_1(A_3)) = \pi_2(B_3) = B_3.$$

1.5.9 Παρατηρήσεις. 1) Στο προηγούμενο Σχήμα 1.13 πήραμε όλα τα σημεία A_i της k και όλα τα B_i της ℓ ($i = 1, 2, 3$) να διαφέρουν από το S . Αν όμως είχαμε, π.χ., $A_1 = S = B_2$, τότε η διαδικασία της απόδειξης παραμένει ακριβώς η ίδια, χρησιμοποιώντας το παρακάτω παραλλαγμένο σχήμα.



Σχήμα 1.14

1.5.10 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι k είναι μία ευθεία και δύο τριάδες σημείων της (A_1, A_2, A_3) , (B_1, B_2, B_3) , κάθε μία των οποίων αποτελείται από διαφορετικά σημεία. Τότε υπάρχει μία προβολικότητα $\Pi' : J(k) \rightarrow J(k)$, η οποία είναι σύνθεση τριών προοπτικοτήτων και τέτοια ώστε $\Pi'(A_i) = B_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχούσα ευθεία $m \neq k$ (γιατί υπάρχει;) και σημείο O εκτός των k και m , οπότε ορίζεται η προοπτικότητα $\pi = \pi(k, m, O)$. Επειδή η π είναι απεικόνιση 1-1, επί της m ορίζονται τα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $A'_i := \pi(A_i)$, $i = 1, 2, 3$. Επομένως, για τις τριάδες (A'_1, A'_2, A'_3) και (B_1, B_2, B_3) των k και m , αντιστοίχως, ισχύουν οι προϋποθέσεις της Πρότασης 1.5.8, οπότε υπάρχει προβολικότητα $\Pi : J(m) \rightarrow J(k)$, τέτοια ώστε $\Pi(A'_i) = B_i$ ($i = 1, 2, 3$). Επειδή η Π είναι σύνθεση δύο προοπτικωτήτων (βλ. απόδειξη Πρότασης 1.5.8), η απεικόνιση $\Pi' := \Pi \circ \pi$ είναι επίσης μία προβολικότητα, σύνθεση τριών προοπτικωτήτων, που ικανοποιεί τις σχέσεις της εκφώνησης. $\square$

1.5.11 Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Προβολικής Γεωμετρίας (Α' μορφή).

Στο προβολικό επίπεδο οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- i) Αν $\Pi : J(k) \rightarrow J(k)$ είναι προβολικότητα (επί της ίδιας σημειοσειράς) με τρία διαφορετικά σημεία σταθερά, τότε $\Pi = \text{id}|_{J(k)}$.
- ii) Αν k, ℓ είναι δύο διαφορετικές ευθείες, A_i ($i = 1, 2, 3$) διαφορετικά σημεία της k και B_i ($i = 1, 2, 3$) διαφορετικά σημεία της ℓ , τότε υπάρχει μοναδική προβολικότητα $\Pi : J(k) \rightarrow J(\ell)$ με την ιδιότητα $\Pi(A_i) = B_i$, για κάθε $i = 1, 2, 3$. Επομένως, κάθε προβολικότητα $\Pi : J(k) \rightarrow J(\ell)$ ορίζεται μονοσήμαντα από τις εικόνες τριών διαφορετικών σημείων της ευθείας k .
- iii) Αν $k \neq \ell$, τότε κάθε προβολικότητα $\Pi : J(k) \rightarrow J(\ell)$, που διατηρεί σταθερό το σημείο $k \wedge \ell$, είναι προοπτικότητα.

Απόδειξη. i) $\Rightarrow$ ii): Ας υποθέσουμε ότι $\Pi_1, \Pi_2 : J(k) \rightarrow J(\ell)$ είναι δύο προβολικότητες, που απεικονίζουν τα A_i στα αντίστοιχα B_i (η ύπαρξή τους εξασφαλίζεται από την Πρόταση 1.5.8). Τότε η προβολικότητα $\Pi := \Pi_1^{-1} \circ \Pi_2 : J(k) \rightarrow J(k)$ διαθέτει τρία σταθερά σημεία, αφού

$$\Pi(A_i) = \Pi_1^{-1}(\Pi_2(A_i)) = \Pi_1^{-1}(B_i) = \Pi_1^{-1}(\Pi_1(A_i)) = A_i,$$

για κάθε $i = 1, 2, 3$. Επομένως, η i) συνεπάγεται ότι $\Pi = \text{id}|_{J(k)}$, απ' όπου προκύπτει ότι $\Pi_1 = \Pi_2$.

ii) $\Rightarrow$ iii): Καλούμε $S := k \wedge \ell$ και υποθέτουμε ότι $\Pi(S) = S$. Επί της k θεωρούμε δύο σημεία A_1, A_2 , διαφορετικά μεταξύ τους και προς το S . Προφανώς τα $\Pi(A_1), \Pi(A_2)$ είναι σημεία διαφορετικά μεταξύ τους καθώς και προς το S λόγω του 1-1 της Π . Συνεπώς, κατά την Πρόταση 1.5.5, υπάρχει μία μοναδική προοπτικότητα $\pi = \pi(k, \ell, O)$ με $\pi(A_i) = \Pi(A_i)$ ($i = 1, 2$). Επειδή (βλ. και Πρόταση 1.5.3) $\pi(S) = S = \Pi(S)$ και κάθε προοπτικότητα είναι προβολικότητα, η ii) συνεπάγεται ότι $\Pi = \pi$.

iii) $\Rightarrow$ i): Υποθέτουμε ότι k είναι μία οποιαδήποτε ευθεία του προβολικού επιπέδου και $\Pi : J(k) \rightarrow J(k)$ μία οποιαδήποτε προβολικότητα, η οποία ικανοποιεί

τις σχέσεις

$$(1.5.5) \quad \Pi(A_i) = A_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

για τρία διαφορετικά σημεία A_i της k .

Θεωρούμε μίαν ευθεία $\ell \in J(A_3)$ με $\ell \neq k$. Επιλέγοντας τώρα ένα αυθαίρετο σημείο O , που δεν ανήκει σε καμία από τις ευθείες k και ℓ , μπορούμε να κατασκευάσουμε την προοπτικότητα $\pi = \pi(k, \ell, O)$. Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $\overline{\Pi} := \pi \circ \Pi : J(k) \rightarrow J(\ell)$ είναι μία προβολικότητα, η οποία έχει την ιδιότητα

$$\overline{\Pi}(k \wedge \ell) = \overline{\Pi}(A_3) = \pi(\Pi(A_3)) = \pi(A_3) = A_3 = k \wedge \ell,$$

λόγω της (1.5.5) και της Πρότασης 1.5.3. Άρα, σύμφωνα με την υπόθεση iii), υπάρχει προοπτικότητα $\pi' : J(K) \rightarrow J(l)$ τέτοια ώστε

$$(1.5.6) \quad \pi' = \overline{\Pi} = \pi \circ \Pi.$$

Πάλι λόγω της (1.5.5), η (1.5.6) δίνει ότι $\pi'(A_2) = \pi(A_2)$ και $\pi'(A_3) = \pi(A_3)$. Συνεπώς (σύμφωνα με το μονοσήμαντο της Πρότασης 1.5.5) $\pi = \pi'$, οπότε η (1.5.6) παίρνει τη μορφή $\pi = \pi \circ \Pi$. Η τελευταία σχέση οδηγεί στην $\Pi = id|_{J(k)}$ και ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. $\square$

1.5.12 Παρατήρηση. Στο Θεώρημα 1.5.11 αποδείχτηκε η *ισοδυναμία* τριών προτάσεων. Όμως από πουθενά δεν προκύπτει ότι κάποια από αυτές (άρα και κάθε μία από τις άλλες) αληθεύει στο τυχόν προβολικό επίπεδο, δηλαδή είναι συνέπεια των αξιωμάτων (ΠΕ 1) – (ΠΕ 3). Κάτι τέτοιο, στη γενική περίπτωση, δεν συμβαίνει παρά μόνον αν συμπληρωθεί με κατάλληλο τρόπο το σύστημα των αξιωμάτων του προβολικού επιπέδου.

Ακριβέστερα, όπως θα δείξουμε στο Κεφάλαιο 5, οι προηγούμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες με τη συνθήκη (Π) (του Πάππου), επομένως είναι πάντοτε αληθείς σε ένα προβολικό επίπεδο του Πάππου. Στην περίπτωση αυτή, οδηγούμαστε στην ολοκληρωμένη μορφή του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Προβολικής Γεωμετρίας, που συμπληρώνει την προηγούμενη πρώτη μορφή του (βλ. Θεωρήματα 5.2.1 και 5.2.2).

1.5.13 Ασκήσεις.

- 1) Να εξηγηθεί το "γιατί" στην απόδειξη του Πορίσματος 1.5.10.
- 2) Να διατυπωθούν τα δυϊκά των συμπερασμάτων αυτής της παραγράφου και να αποδειχθούν αυτοτελώς (δηλαδή, χωρίς χρήση της αρχής του δυϊσμού).
- 3) Δίνεται ευθεία k και τρία διαφορετικά σημεία της X, Y, Z . Επίσης, δίνεται σημείο P εκτός της k καθώς και τρεις διαφορετικές ευθείες $x, y, z \in J(P)$. Να κατασκευαστεί μία προβολικότητα $\Pi : J(k) \rightarrow J(P)$ με

$$\Pi(X) = x, \quad \Pi(Y) = y, \quad \Pi(Z) = z.$$

1.6 Σχέση προβολικών και συσχετισμένων επιπέδων

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι, μέσω της διαδικασίας της *πλήρωσης*, από ένα συσχετισμένο επίπεδο κατασκευάζεται ένα προβολικό και αντιστρόφως, μέσω της *αποπλήρωσης*, από ένα προβολικό επίπεδο κατασκευάζεται ένα συσχετισμένο.

Θεωρούμε πρώτα δεδομένο ένα *συσχετισμένο* επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$. Υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με τους ορισμούς της Παραγράφου 4 [βλ. ιδιαιτέρως την Πρόταση 1.4.2 και την Άσκηση 1.4.10(5)], για ένα συσχετισμένο/προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ ισχύει η ισοδυναμία

$$(P, \ell) \in I \Leftrightarrow P \in J(\ell), \quad \forall (P, \ell) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}.$$

Όπως είδαμε στην Πρόταση 1.1.8, η παραλληλία ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας. Αν $\ell^* := [\ell]$ συμβολίζει την κλάση ισοδυναμίας μιας ευθείας ℓ του συσχετισμένου επιπέδου, θέτουμε

$$\mathcal{E}_\infty := \{\ell^* \mid \ell \in \mathcal{L}\},$$

δηλαδή το $\mathcal{E}_\infty$ είναι το σύνολο-πηλίκο $\mathcal{L}/\sim$ του $\mathcal{L}$ ως προς τη σχέση ισοδυναμίας που εισάγει η παραλληλία.

Ορίζουμε και το σύνολο (σημείων)

$$\mathcal{P}^+ := \mathcal{P} \cup \mathcal{E}_\infty = \mathcal{P} \cup \{\ell^* \mid \ell \in \mathcal{L}\}.$$

Αν συμβολίσουμε, γενικά, με P^+ τα σημεία του $\mathcal{P}^+$, τότε έχουμε την επόμενη ορολογία.

1.6.1 Ορισμός. Ένα σημείο $P^+ \in \mathcal{P}^+$ θα λέγεται **πραγματικό** (αντιστ. **ιδεατό** ή **κατ' εκδοχήν**) αν υπάρχει $P \in \mathcal{P}$ (αντιστ. $\ell \in \mathcal{L}$) έτσι ώστε $P^+ = P$ (αντιστ. $P^+ = \ell^*$).

Παρατηρούμε ότι στο $\mathcal{P}^+$ έχει έννοια η ένωση

$$\ell^* := J(\ell) \cup \{\ell^*\}$$

αφού $J(\ell) \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{P}^+$ και $\ell^* \in \mathcal{E}_\infty \subset \mathcal{P}^+$. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε και το σύνολο (ευθειών)

$$\mathcal{L}^+ = \{\ell^* \mid \ell \in \mathcal{L}\} \cup \{\mathcal{E}_\infty\}.$$

Συμβολίζοντας τις ευθείες του $\mathcal{L}^+$ γενικά με ℓ^+ , θα είναι είτε $\ell^+ = \ell^*$, για κάποια $\ell \in \mathcal{L}$, είτε $\ell^+ = \mathcal{E}_\infty$, οπότε έχουμε την ακόλουθη ορολογία.

1.6.2 Ορισμός. Κάθε ευθεία της μορφής ℓ^* θα λέγεται **πραγματική** ενώ η $\mathcal{E}_\infty$ λέγεται **ιδεατή** (ή **κατ' εκδοχήν**).

Συνοψίζοντας, βλέπουμε ότι το $\mathcal{P}^+$ προκύπτει αν στα σημεία του $\mathcal{P}$ επισυνάψουμε (προσθέσουμε) τα ιδεατά σημεία του επιπέδου. Επίσης, κάθε πραγματική ευθεία ℓ^* αποτελείται από τη σημειοσειρά της $\ell \in \mathcal{L}$ και το αντίστοιχο ιδεατό σημείο ℓ^* , ενώ η ιδεατή ευθεία $\mathcal{E}_\infty$ αποτελείται από τα ιδεατά σημεία και μόνον αυτά. Η τελευταία ευθεία, στον κόσμο της εμπειρίας μας ή στον ζωγραφικό πίνακα, αντιστοιχεί στη γραμμή του ορίζοντα.

Ορίζουμε ακόμη μία σχέση σύμπτωσης $I^+ \subset \mathcal{P}^+ \times \mathcal{L}^+$ με τον εξής τρόπο: για ένα ζεύγος $(P^+, \ell^+) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{L}^+$, θα είναι $(P^+, \ell^+) \in I^+$ τότε και μόνον τότε αν ισχύει μία από τις επόμενες συνθήκες:

- i) $P^+ = k^* \ (k \in \mathcal{L})$ και $\ell^+ = \mathcal{E}_\infty$ [οπότε $k^* \in \mathcal{E}_\infty$].
- ii) $P^+ = P \in \mathcal{P}$, $\ell^+ = \ell^*$ και $P \in J(\ell)$ [ισοδύναμα: $(P, \ell) \in \mathcal{I}$].
- iii) $P^+ = k^*$, $\ell^+ = \ell^*$ και $k // \ell$ [οπότε $k^* = \ell^*$].

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι:

- Κάθε ιδεατό σημείο ανήκει (με την έννοια της I^+) στην ιδεατή ευθεία.
- Ένα πραγματικό σημείο ανήκει σε μία πραγματική ευθεία ℓ^* , αν είναι σημείο της αρχικής ευθείας ℓ από την οποία προέρχεται η ℓ^* .
- Ένα ιδεατό σημείο k^* ανήκει σε μία πραγματική ευθεία ℓ^* , αν οι αντίστοιχες ευθείες k και ℓ (από τις οποίες προέρχονται το σημείο και η ευθεία) είναι παράλληλες.
- Δεν ορίζεται σύμπτωση μεταξύ πραγματικών σημείων και της ιδεατής ευθείας, δηλαδή

$$(P^+, \ell^+) \notin I^+ \text{ αν } P^+ = P \in \mathcal{P} \text{ και } \ell^+ = \mathcal{E}_\infty.$$

Με τους προηγούμενους συμβολισμούς αποδεικνύεται τώρα το

1.6.3 Θεώρημα. Η τριάδα $(\mathcal{P}^+, \mathcal{L}^+, I^+)$ αποτελεί ένα προβολικό επίπεδο, το οποίο καλείται **πλήρωση** (completion) του συσχετισμένου επιπέδου $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.

Απόδειξη. Θα επαληθεύσουμε τα αξιώματα του προβολικού επιπέδου.

(ΠΕ 1): Θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία P^+ και Q^+ . Αναλόγως με το είδος των σημείων (πραγματικά ή ιδεατά) εμφανίζονται οι επόμενες περιπτώσεις:

- α) Τα P^+ και Q^+ είναι και τα δύο πραγματικά σημεία, δηλαδή $P^+ = P$ και $Q^+ = Q$. Τότε, σύμφωνα με το (ΣΕ 1), ορίζεται η ευθεία $\ell = P \vee Q$ (του συσχετισμένου επιπέδου), οπότε η $\ell^+ := \ell^* \in \mathcal{L}^+$ είναι μια ευθεία που περιέχει τα P^+ και Q^+ .

Η ευθεία αυτή είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Πραγματικά, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και μία άλλη ευθεία m^+ , που περιέχει τα ίδια σημεία, τότε θα είναι αναγκαιώς $m^+ = m^* = J(m) \cup \{m^*\}$ (η περίπτωση $m^+ = \mathcal{E}_\infty$ αποκλείεται, αφού τα P^+, Q^+ είναι πραγματικά σημεία). Συνεπώς, επειδή $P, Q \in J(m)$, πάλι από το (ΣΕ 1) προκύπτει ότι $m = \ell$ και $m^+ = \ell^+$.

β) Τα P^+ και Q^+ είναι ιδεατά, δηλαδή $P^+ = k^*$ και $Q^+ = \ell^*$, για κάποιες ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$. Επειδή $k^*, \ell^* \in \mathcal{E}_\infty$, προφανώς η $\mathcal{E}_\infty$ είναι και η μοναδική ευθεία που περιέχει τα P^+ και Q^+ (βλ. τον ορισμό της I^+ και τα σχετικά σχόλια).

γ) Το ένα σημείο είναι πραγματικό και το άλλο ιδεατό. Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι $P^+ = P$ και $Q^+ = k^*$, τότε διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

$$\gamma_1) P \in J(k) \quad \text{και} \quad \gamma_2) P \notin J(k).$$

Στη $\gamma_1)$ παρατηρούμε ότι η ευθεία $k^+ := k^* = J(k) \cup \{k^*\}$ περιέχει τα P^+, Q^+ . Η ευθεία αυτή είναι και μοναδική. Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και μία άλλη ευθεία $m^+ \neq k^+$, που περιέχει τα ίδια σημεία. Τότε, επειδή το P^+ είναι πραγματικό σημείο, η m^+ αποκλείεται να είναι η $\mathcal{E}_\infty$, άρα θα έχει τη μορφή $m^+ = m^* = J(m) \cup \{m^*\}$. Επίσης, επειδή η m^+ περιέχει το k^* , αναγκαστικά θα είναι και $k^* = m^*$ (αφού υπάρχει μόνον ένα κατ' εκδοχήν σημείο επί της m^*), οπότε $k \parallel m$. Το τελευταίο συμπέρασμα όμως είναι άτοπο επειδή k, m έχουν το P κοινό σημείο (προφανώς $k \neq m$, διαφορετικά θα ήταν $k^+ = m^+$).

Στη $\gamma_2)$, σύμφωνα με το (ΣΕ 2), υπάρχει μία μοναδική $\ell \in \mathcal{L}$ με $\ell \parallel k$ και $(P, \ell) \in I$. Επομένως, θέτοντας $\ell^+ := \ell^* = J(\ell) \cup \{\ell^*\}$, έχουμε ότι $(P^+, \ell^+) \in I^+$. Επίσης, λόγω της προηγούμενης παραλληλίας, θα είναι $Q^+ = k^* = \ell^*$, άρα $(Q^+, \ell^+) \in I^+$ και η ζητούμενη ευθεία είναι η ℓ^+ . Για το μονοσήμαντο της ℓ^+ παρατηρούμε ότι, αν υπάρχει και μία $m^+ \neq \ell^+$ που περιέχει τα P^+ και Q^+ , τότε [εργαζόμενοι αναλόγως προς την $\gamma_1)$] έχουμε ότι $m^* = k^* = \ell^*$, άρα $m \parallel k \parallel \ell$. Όμως το P ανήκει στις m και ℓ ($m \neq \ell$). Άρα, από το P διέρχονται δύο παράλληλες προς την k (άτοπο).

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει μία μοναδική ευθεία του $\mathcal{L}^+$ που περιέχει τα P^+ και Q^+ , οπότε αποδεικνύεται το (ΠΕ 1).

(ΠΕ 2): Θεωρούμε δύο διαφορετικές ευθείες k^+, ℓ^+ και θα δείξουμε ότι διαθέτουν κοινό σημείο. Προφανώς, εμφανίζονται δύο περιπτώσεις:

α) και οι δύο ευθείες είναι πραγματικές,

β) μία απ' αυτές είναι η ιδεατή ευθεία.

Στην περίπτωση α) θα είναι $k^+ = k^*$ και $\ell^+ = \ell^*$. Παρατηρούμε ότι, αναγκαιώς, $k \neq \ell$ [αν ήταν $k = \ell$, τότε θα ήταν και $k^* = \ell^*$ (άτοπο)]. Επομένως, προκύπτουν δύο υποπεριπτώσεις:

$$\alpha_1) k \parallel \ell \quad \text{και} \quad \alpha_2) k \not\parallel \ell.$$

Στην πρώτη υποπερίπτωση, το $P^+ := k^* = \ell^*$ είναι κοινό σημείο των k^+ και ℓ^+ . Στη δεύτερη, οι k και ℓ διαθέτουν ένα (μοναδικό) κοινό σημείο $P := k \wedge \ell$. Επειδή $P \in J(k)$ και $P \in J(\ell)$, τελικώς το $P^+ := P$ είναι κοινό σημείο και των ευθειών k^+ , ℓ^+ .

Στην περίπτωση β) ας υποθέσουμε ότι $k^+ = \mathcal{E}_\infty$ και $\ell^+ = \ell^*$. Προφανώς, $\mathcal{E}_\infty \neq \ell^*$ (αφού τα πραγματικά σημεία δεν ανήκουν στην ιδεατή ευθεία). Τότε το $P^+ := \ell^*$ είναι το ζητούμενο κοινό σημείο.

(ΠΕ 3): Κατά το Θεώρημα 1.1.9, στο $\mathcal{P}$ υπάρχουν τέσσερα διαφορετικά σημεία, ας τα καλέσουμε A, B, C, D , τα οποία είναι ανά τρία μη συγγραμμικά. Τα ίδια σημεία είναι και (πραγματικά) σημεία του $\mathcal{P}^+$, άρα κανένα τους δεν ανήκει στην $\mathcal{E}_\infty$. Ας δούμε αν τρία από αυτά, π.χ. τα A, B, C , μπορούν να ανήκουν σε μία πραγματική ευθεία $\ell^* = J(\ell) \cup \{\ell^*\}$. Αν συνέβαινε κάτι τέτοιο, θα είχαμε ότι $A, B, C \in J(\ell)$, πράγμα που είναι άτοπο. Επομένως τα σημεία $A^+ := A, B^+ := B$ και $C^+ := C$ κανοποιοούν το (ΠΕ 3) στο $\mathcal{P}^+$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Η αντίστροφη διαδικασία της πλήρωσης (αποπλήρωση) συνίσταται στην αφαίρεση μιας ευθείας (ακριβέστερα σημειοσειράς) από ένα προβολικό επίπεδο, οπότε οδηγούμαστε στην κατασκευή ενός συσχετισμένου επιπέδου.

Έτσι, θεωρώντας δεδομένο ένα προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$, σταθεροποιούμε μίαν ευθείαν $\ell_0 \in \mathcal{L}$ και ορίζουμε το σύνολο (σημείων)

$$\mathcal{P}^- := \mathcal{P} - J(\ell_0) = \{P \in \mathcal{P} : (P, \ell_0) \notin I\}.$$

Δηλαδή τα σημεία του $\mathcal{P}^-$ είναι όλα τα σημεία του $\mathcal{P}$ εκτός των σημείων της σημειοσειράς $J(\ell_0)$.

Επίσης θεωρούμε και το σύνολο (ευθειών)

$$\mathcal{L}^- := \{k^- := J(k) - \{k \wedge \ell_0\} \mid k \in \mathcal{L}, k \neq \ell_0\}.$$

Επομένως, το $\mathcal{L}^-$ δεν περιέχει την $J(\ell_0)$, ενώ κάθε άλλο στοιχείο του είναι μία σημειοσειρά, που αντιστοιχεί σε ευθεία του $\mathcal{L}$, από την οποία έχει αφαιρεθεί το σημείο τομής της με την ℓ_0 . Προφανώς, κάθε k^- είναι σημειοσειρά, άρα μπορούμε να γράψουμε ότι $k^- \equiv J(k^-)$.

Τέλος, ορίζουμε και μία σχέση σύμπτωσης $I^- \subset \mathcal{P}^- \times \mathcal{L}^-$ με τον εξής τρόπο: για ένα $(P, k^-) \in \mathcal{P}^- \times \mathcal{L}^-$ θα είναι

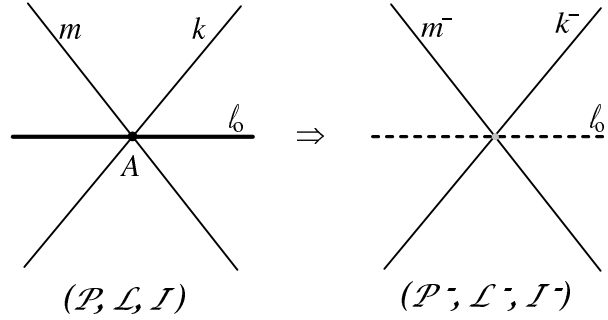
$$(P, k^-) \in I^- \Leftrightarrow P \in k^- = J(k) - \{k \wedge \ell_0\},$$

δηλ. το P είναι σημείο της k^- τότε και μόνον τότε αν $(P, k) \in I$ και $P \neq k \wedge \ell_0$.

Επειδή σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η τριάδα $(\mathcal{P}^-, \mathcal{L}^-, I^-)$ είναι συσχετισμένο επίπεδο, θα πρέπει να εξασφαλίσουμε πρώτα την ύπαρξη παραλλήλων ευθειών.

1.6.4 Λήμμα. Στο σύνολο $\mathcal{L}^-$ υπάρχουν παράλληλες ευθείες.

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν σημείο A της ευθείας ℓ_0 . Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.8, μπορούμε να βρούμε δύο ευθείες k και m του $\mathcal{L}$, τέτοιες ώστε $k, m \in J(A)$ και $k \neq \ell_0 \neq m \neq k$. Τότε οι k^- και m^- είναι παράλληλες [αν υπήρχε κοινό



Σχήμα 1.15

σημείο P , θα είχαμε ότι $k = P \vee A = m$ (άτοπο)]. Παρόμοια βρίσκουμε και άλλες παράλληλες, χρησιμοποιώντας ευθείες που διέρχονται από τα διάφορα σημεία της ℓ_0 . $\square$

1.6.5 Θεώρημα. Η τριάδα $(\mathcal{P}^-, \mathcal{L}^-, I^-)$ αποτελεί συσχετισμένο επίπεδο, το οποίον καλείται **αποπλήρωση** (deletion) του προβολικού επιπέδου $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$.

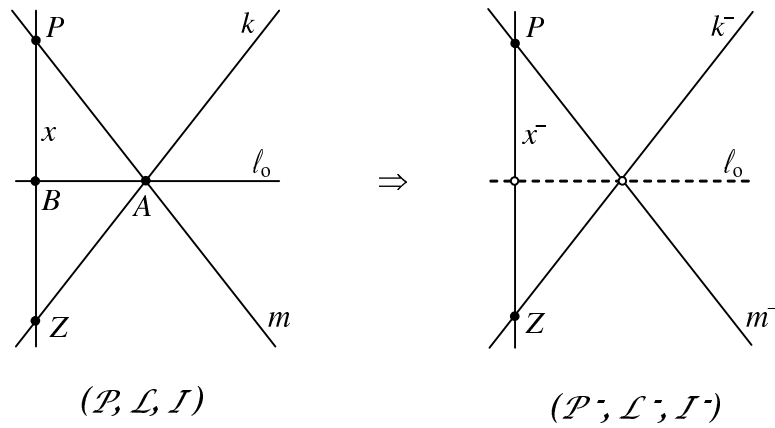
Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται τα αξιώματα του συσχετισμένου επιπέδου.

(ΣΕ 1): Θεωρούμε δύο σημεία $P, Q \in \mathcal{P}^-$ με $P \neq Q$. Τα P, Q (ως διαφορετικά σημεία και του $\mathcal{P}$) ορίζουν την ευθεία $k := P \vee Q \in \mathcal{L}$. Προφανώς $k \neq \ell_0$, αφού τα P, Q δεν ανήκουν στην ℓ_0 . Επομένως, η $k^- = J(k) - \{k \wedge \ell_0\}$ είναι ευθεία του $\mathcal{L}^-$ που περιέχει τα P, Q . Η ευθεία αυτή είναι και μοναδική. Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και μία άλλη ευθεία $m^- \in \mathcal{L}^-$, που περιέχει τα δύο προηγούμενα σημεία. Τότε, από τον ορισμό της m^- , προκύπτει ότι τα P, Q είναι και σημεία της m . Επομένως, κατά το (ΠΕ 1) $m = k$ και $m^- = k^-$, που αποδεικνύει το (ΣΕ 1).

(ΣΕ 2): Υποθέτουμε ότι $(P, k^-) \in \mathcal{P}^- \times \mathcal{L}^-$ με $P \notin J(k)$. Αν θέσουμε (για ευκολία) $A := k \wedge \ell_0 \in \mathcal{P}$, παρατηρούμε ότι $P \neq A$ [διαφορετικά θα ήταν $P \in J(\ell_0)$ (άτοπο)]. Επομένως, ορίζεται η ευθεία $m := P \vee A \in \mathcal{L}$ και η αντίστοιχη $m^- = J(m) - \{m \wedge \ell_0\} = J(m) - \{A\}$ (φυσικά $m \neq \ell_0$, αφού το P είναι σημείο της m

αλλά όχι και της ℓ_0). Αυτά δείχνουν ότι $(P, m^-) \in I^-$ και $m^- \parallel k^-$ (βλ. τη σχετική κατασκευή παραλλήλων στην απόδειξη του Λήμματος 1.6.4), δηλαδή η m^- είναι ευθεία (του $\mathcal{L}^-$) που διέρχεται από το P και είναι παράλληλη προς την k^- .

Η m^- είναι η μοναδική ευθεία με τις προηγούμενες ιδιότητες. Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και μία άλλη ευθεία $x^- = J(x) - \{x \wedge \ell_0\} \in \mathcal{L}^-$, η οποία διέρχεται από το P και είναι παράλληλη προς την k^- , με $x^- \neq m^-$. Τότε, σύμφωνα με τον ορισμό της παραλληλίας, είναι είτε $x^- = k^-$, είτε $x^- \neq k^-$ και $x^- \cap k^- = \emptyset$. Η πρώτη περίπτωση αποκλείεται επειδή το P δεν είναι σημείο της k^- . Στη δεύτερη περίπτωση, θα είναι υποχρεωτικά $x \neq k$ [διαφορετικά θα είχαμε ότι $x \wedge \ell_0 = k \wedge \ell_0$, οπότε $x^- = k^-$ (άτοπο)]. Άρα, ορίζεται το σημείο $Z := x \wedge k$ (βλ. το επόμενο σχήμα) και εμφανίζονται δύο νέες περιπτώσεις:



Σχήμα 1.16

i) Το Z είναι διαφορετικό από τα σημεία $A := k \wedge \ell_0$ και $B := x \wedge \ell_0$.

ii) Το Z συμπίπτει με ένα από τα A, B .

Στην i) έχουμε κατ' ανάγκην ότι $(Z, k^-) \in I^- \ni (Z, x^-)$, το οποίον είναι άτοπο, αφού $k^- \parallel x^-$.

Στη ii), ας πάρουμε πρώτα ότι $Z = A$. Τότε θα είναι και $Z \neq P$ [αλλιώς θα ήταν $P = Z \in J(k)$ (άτοπο)]. Επομένως,

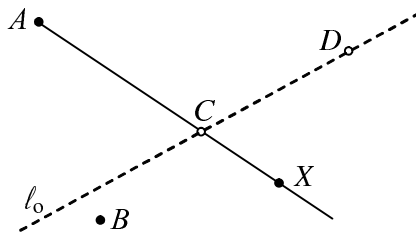
$$x = P \vee Z = P \vee A = m,$$

άρα $x^- = m^-$, που είναι άτοπο, γιατί δεχτήκαμε από την αρχή ότι $x^- \neq m^-$. Αν $Z = B$, τότε $k = A \vee Z = A \vee B = \ell_0$, που είναι επίσης άτοπο.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, η υπόθεση ότι υπάρχει και η x^- (με τις αναφερόμενες ιδιότητες) οδηγεί σε άτοπο. Άρα, τελικώς, η m^- είναι η μοναδική

παράλληλη προς την k^- που διέρχεται από το P , πράγμα που αποδεικνύει πλήρως το (ΣΕ 2).

(ΣΕ 3): Στο δεδομένο προβολικό επίπεδο υπάρχουν τέσσερα διαφορετικά σημεία, ας τα καλέσουμε A, B, C, D , που είναι ανά τρία μη συγγραμμικά. Άρα, δύο τουλάχιστον από αυτά, ας πούμε τα A και B , δεν ανήκουν στην ℓ_0 . Ας υποθέσουμε ακόμη ότι τα C, D ανήκουν και τα δύο στην ℓ_0 . Θεωρούμε την ευθεία



Σχήμα 1.17

$A \vee C$, οπότε (λόγω της Πρότασης 1.2.6) υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της X διαφορετικό από τα A, C . Προφανώς $X \notin J(\ell_0)$. Επομένως, τα A, B, X είναι τρία διαφορετικά μεταξύ τους (γιατί;) σημεία, που ανήκουν στο $\mathcal{P}^-$, επειδή κανένα τους δεν ανήκει στην ℓ_0 .

Τα A, B, X δεν είναι συγγραμμικά στο $\mathcal{P}^-$. Πραγματικά, αν ανήκαν και τα τρία σε μια ευθεία $k^- = J(k) - \{k \wedge \ell_0\} \in \mathcal{L}^-$, τότε θα ήταν $A, B, X \in J(k)$ και

$$k = A \vee B = A \vee X = A \vee C,$$

δηλαδή τα A, B, C θα ήσαν συγγραμμικά στο προβολικό επίπεδο $\mathcal{P}$, που είναι άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι $C \notin J(\ell_0)$ [με $D \in J(\ell_0)$ ή $D \notin J(\ell_0)$], εργαζόμενοι όπως στην προηγούμενη περίπτωση, δείχνουμε ότι τα σημεία A, B, C είναι διαφορετικά και μη συγγραμμικά στο $\mathcal{P}^-$.

Συνεπώς μπορούμε πάντοτε να βρούμε τρία διαφορετικά σημεία του $\mathcal{P}^-$ που ικανοποιούν το (ΣΕ 3). Με αυτό ολοκληρώνεται και η απόδειξη. $\square$

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι τώρα το εξής: αν ξεκινήσουμε από ένα προβολικό επίπεδο και εφαρμόσουμε πρώτα τη διαδικασία της αποπλήρωσης και κατόπιν αυτή της πλήρωσης, ποιά είναι η σχέση του αρχικού προβολικού επιπέδου με το τελευταίο; Η απάντηση θα δοθεί στο Θεώρημα 2.3.4, αφού οριστεί προηγουμένως, στο επόμενο κεφάλαιο, η έννοια του ισομορφισμού μεταξύ προβολικών επιπέδων.

1.6.6 Το κλασικό προβολικό επίπεδο.

Όπως αναφέραμε και στην Εισαγωγή, το προβολικό επίπεδο εμφανίζεται, ιστορικά, ως αφαίρεση (μαθηματικοποίηση) του επιπέδου του ζωγραφικού πίνακα, όπου θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες ή, ισοδύναμα, υποθέτουμε ότι όλες οι ευθείες, που είναι μεταξύ τους παράλληλες, τέμνονται στο άπειρο, επάνω στη γραμμή του ορίζοντα. Σε πιο αυστηρή γλώσσα, χρησιμοποιώντας την ορολογία αυτής της παραγράφου,

το **κλασικό προβολικό επίπεδο**, δηλαδή το επίπεδο της κλασικής Προβολικής Γεωμετρίας, είναι η πλήρωση του συνήθους (συσχετισμένου) επιπέδου $E (\cong \mathbb{R}^2)$ της Στοιχειώδους Γεωμετρίας

[βλ. και Παράδειγμα 1.1.3(1)]. Στο Κεφάλαιο 3 θα δείξουμε ότι η πλήρωση αυτή ταυτίζεται με το πραγματικό προβολικό επίπεδο διάστασης 2, δηλαδή το $\mathbb{P}_2$ (βλ. το Παράδειγμα 1.2.3(2) και το αλγεβρικό ανάλογό του στην Παράγραφο 3.1).

1.6.7 Σχόλιο. Όπως ήδη έχει αντιληφθεί ο αναγνώστης, πολύ συχνά χρησιμοποιήσαμε την *εις άτοπον απαγωγή*. Αυτή είναι μία βασική μέθοδος απόδειξης της συνθετικής γεωμετρίας. Μαζί με την *συνθετική* και την *αναλυτική* μέθοδο, χρησιμοποιήθηκε συστηματικά από τον Ευκλείδη στα «Στοιχεία» του. Σχετικά ο G. H. Hardy [13, §12] παρατηρεί ότι «*η εις άτοπον απαγωγή (reductio ad absurdum), την οποίαν ο Ευκλείδης αγαπούσε τόσο πολύ, είναι ένα από τα πιο έξοχα όπλα*» ενός μαθηματικού. Φυσικά, η ίδια μέθοδος θα χρησιμοποιηθεί και στη συνέχεια.

1.6.8 Ασκήσεις.

- 1) Αναφορικά με την απόδειξη του (ΣΕ 3) στο Θεώρημα 1.6.5, να δικαιολογηθεί το σημειούμενο "γιατί" και να ολοκληρωθεί η διερεύνηση για τα σημεία C και D (σχετικώς με τη θέση τους ως προς την ευθεία ℓ_0).

- 2) Να εξηγηθεί γιατί είναι

$$\mathcal{P}^+ \cap \mathcal{L}^+ = \emptyset \quad \text{και} \quad \mathcal{P}^- \cap \mathcal{L}^- = \emptyset.$$

- 3) Να αποδειχθεί ότι η πλήρωση του συσχετισμένου επιπέδου των τεσσάρων σημείων [Παράδειγμα 1.1.3(2)] είναι το προβολικό επίπεδο των επτά σημείων [Παράδειγμα 1.2.3(1)].
- 4) Αντιστρόφως προς την προηγούμενη άσκηση, να δειχθεί ότι η αποπλήρωση του προβολικού επιπέδου των επτά σημείων είναι το συσχετισμένο επίπεδο των τεσσάρων σημείων.

Κεφάλαιο 2

Οι συγγραμμικότητες ενός προβολικού επιπέδου

[Κατά το Πρόγραμμα Erlanger (1872) του F. Klein] *Μία γεωμετρία είναι η μελέτη των ιδιοτήτων εκείνων ενός συνόλου S , οι οποίες παραμένουν αναλλοίωτες (αμετάβλητες), όταν τα στοιχεία του S υποβάλλονται στους μετασχηματισμούς μιάς ομάδας μετασχηματισμών.*

J. N. CEDERBERG [8, σελ. 70]

Η ΠΡΩΤΗ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ του κεφαλαίου αφιερώνεται στην έννοια του *μορφισμού* μεταξύ προβολικών επιπέδων. Ένας μορφισμός αποτελείται από ένα ζεύγος απεικονίσεων, που αντανακλούν τη δομή του προβολικού επιπέδου. Μιλώντας περιγραφικά, ένας μορφισμός προβολικών επιπέδων απεικονίζει τα σημεία (αντιστ. τις ευθείες) του πρώτου επιπέδου σε σημεία (αντιστ. ευθείες) του δεύτερου, έτσι ώστε να διατηρείται η σχέση της σύμπτωσης.

Στην Παράγραφο 2 εξετάζεται η έννοια της *συγγραμμικότητας*, δηλ. ενός αυτομορφισμού του προβολικού επιπέδου. Μεταξύ των συγγραμμικότητων ιδιαίτερη σημασία, για τη δομή του προβολικού επιπέδου, έχουν οι *κεντρικές/αξονικές* συγγραμμικότητες, που διακρίνονται σε *ομολογίες* και *επάρσεις*. Οι δύο τελευταίες αποτελούν βασικό εργαλείο στη μελέτη του προβολικού επιπέδου, καθώς οι ομάδες τους παίζουν θεμελιώδη ρόλο στη διάκριση διαφόρων κατηγοριών επιπέδων, τόσο στη συνθετική όσο και στην αναλυτική προσέγγιση της Προβολικής Γεωμετρίας.

Στην τελευταία παράγραφο, ως εφαρμογή των ισομορφισμών, συγκρίνουμε ένα προβολικό επίπεδο με το επίπεδο που προκύπτει από τη διαδοχική εφαρμογή της διαδικασίας της αποπλήρωσης και της πλήρωσης.

2.1 Μορφισμοί προβολικών επιπέδων

Στη Θεωρία Συνόλων ορίζεται η έννοια της απεικόνισης $h : S \rightarrow S'$ μεταξύ δύο συνόλων S και S' . Αν υποθέσουμε, επιπλέον, ότι τα σύνολα S και S' έχουν μια ιδιαίτερη δομή (π.χ. δομή γραμμικού χώρου, ομάδας, κλπ.), το ενδιαφέρον μας εστιάζεται όχι στις οποιεσδήποτε απεικονίσεις μεταξύ των συνόλων αυτών, αλλά –κυρίως– στις απεικονίσεις εκείνες που αντανακλούν την προηγούμενη δομή. Έτσι, στους γραμμικούς χώρους ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα για τις «γραμμικές απεικονίσεις», στις ομάδες για τους «ομομορφισμούς» κ.ο.κ.

Τις απεικονίσεις που συνδέονται με την ιδιαίτερη δομή των (μαθηματικών) αντικειμένων μιας κατηγορίας (όπως, π.χ., των γραμμικών χώρων, των ομάδων, των προβολικών επιπέδων κλπ.), τις καλούμε **μορφισμούς**. (Εδώ χρησιμοποιούμε την ορολογία της Θεωρίας Κατηγοριών, για την οποία δεν μπορούμε να πούμε τίποτε περισσότερο στο πλαίσιο αυτών των μαθημάτων). Σε μερικές περιπτώσεις, οι μορφισμοί έχουν ένα συγκεκριμένο όνομα, όπως: γραμμικές απεικονίσεις, ομομορφισμοί κ.λ.π.

Για παράδειγμα, ας θυμίσουμε την περίπτωση των ομομορφισμών ομάδων. Αν $(G, \cdot)$ και $(H, *)$ είναι δύο ομάδες, τότε μία απεικόνιση $\phi : G \rightarrow H$ καλείται μορφισμός (: ομομορφισμός) ομάδων αν

$$(2.1.1) \quad \phi(g \cdot g') = \phi(g) * \phi(g'), \quad (g, g') \in G \times G.$$

Η σχέση (2.1.1) σημαίνει ότι ο μορφισμός ϕ *διατηρεί τη δομή της ομάδας*.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η απεικόνιση ϕ είναι 1-1 και επί. Τότε υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση $\phi^{-1} : H \rightarrow G$. Αποδεικνύεται εύκολα ότι και αυτή η απεικόνιση είναι επίσης μορφισμός ομάδων, δηλαδή ισχύει η

$$(2.1.2) \quad \phi^{-1}(h * h') = \phi^{-1}(h) \cdot \phi^{-1}(h'), \quad (h, h') \in H \times H.$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ϕ είναι *ισομορφισμός ομάδων*.

Γενικότερα, μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του ισομορφισμού και για οποιαδήποτε άλλη δομή. Έτσι, μία απεικόνιση $f : S \rightarrow S'$ μεταξύ δύο συνόλων, εφοδιασμένων με μία συγκεκριμένη δομή, είναι **ισομορφισμός** (ως προς την εξεταζόμενη δομή) αν η f είναι μορφισμός 1-1 και επί, και –επιπλέον– η απεικόνιση f^{-1} είναι επίσης μορφισμός.

Εδώ πρέπει να διευκρινίσουμε ότι στον προηγούμενο ορισμό *απαιτήσαμε* να είναι μορφισμός και η f^{-1} . Αυτό είναι απαραίτητο, γιατί υπάρχουν περιπτώσεις όπου μπορούμε να βρούμε μορφισμούς f , οι οποίοι είναι 1-1 και επί, χωρίς να είναι και οι f^{-1} μορφισμοί. Μια τέτοια περίπτωση αποτελούν οι τοπολογικοί χώροι. Οι μορφισμοί εδώ είναι οι συνεχείς απεικονίσεις. Όμως, υπάρχουν παραδείγματα συνεχών απεικονίσεων που είναι 1-1 και επί, με αντίστροφη όχι κατ' ανάγκην συνεχή. Άρα, στην περίπτωση αυτή, ένας μορφισμός 1-1 και επί δεν ορίζει πάντοτε έναν ισομορφισμό.

Αντιθέτως, στην περίπτωση των ομάδων, κάθε ομομορφισμός 1-1 και επί είναι ισομορφισμός. Παρόμοια στους γραμμικούς χώρους: για να είναι μια απεικόνιση ισομορφισμός γραμμικών χώρων, αρκεί να είναι γραμμική, 1-1 και επί. Γενικότερα, το ίδιο ισχύει, στις «αλγεβρικές δομές», αλλά όχι σε πολυπλοκότερες δομές, όπως οι τοπολογικοί χώροι, οι διαφορικές πολλαπλότητες κλπ.

Ποια όμως είναι η σημασία ενός ισομορφισμού; Απ' όσα είπαμε μέχρις εδώ, γίνεται φανερό πως δύο σύνολα S και S' με την ίδια δομή, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με έναν ισομορφισμό $f : S \rightarrow S'$, δεν διαφέρουν ουσιαστικά μεταξύ τους. Πραγματικά, η απεικόνιση f όχι μόνον αντιστοιχεί κατά τρόπον αμφιμονοσήμαντο τα στοιχεία των S και S' μεταξύ τους, αλλά μεταφέρει και όλες τις ιδιότητες του S σε αντίστοιχες ιδιότητες του S' και αντιστρόφως. Επομένως, κάτι που ισχύει στο S , θα ισχύει και σε κάθε άλλο S' , **ισόμορφο** (δηλ. που συνδέεται με έναν ισομορφισμό) με το S . Με άλλα λόγια, μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μια (μαθηματική) ταύτιση μεταξύ των S και S' . Συνεπώς, μέσω των ισομορφισμών, μπορούμε να διακρίνουμε αν δύο αντικείμενα είναι «ίδια» (ταυτίζονται) ή όχι, δηλαδή έχουμε ένα τρόπο σύγκρισης.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι: ανάμεσα στις απεικονίσεις μεταξύ των αντικειμένων μιας κατηγορίας (δηλ. συνόλων με μια συγκεκριμένη δομή) μας ενδιαφέρουν –κυρίως– εκείνες που διατηρούν τη δομή αυτή. Ιδιαίτερως μας ενδιαφέρουν οι ισομορφισμοί, που επιτρέπουν να συγκρίνουμε τα αντικείμενα της κατηγορίας και να τα ταξινομήσουμε.

Τη λέξη «ταξινόμηση» την παίρνουμε εδώ με την κυριολεκτική σημασία της και όχι με το ειδικό περιεχόμενο που έχει συχνά στα μαθηματικά.

Μετά τα παραπάνω διευκρινιστικά ας δούμε τα πράγματα στο πλαίσιο της Προβολικής Γεωμετρίας. Οι μορφισμοί, κι εδώ, θα πρέπει να αντανakλούν τη

δομή του προβολικού επιπέδου. Επομένως, πρέπει να απεικονίζουν τα σημεία σε σημεία και τις ευθείες σε ευθείες. Αλλά υπάρχει και μια σχέση σύμπτωσης. Θα πρέπει, όπως στις περιπτώσεις που συζητήσαμε, αυτή η σύμπτωση να διατηρείται. Όλα αυτά οδηγούν στον επόμενο φυσιολογικό ορισμό.

2.1.1 Ορισμός. Ένας **μορφισμός** (morphism) μεταξύ των προβολικών επιπέδων $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ και $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', I')$ είναι ένα ζεύγος απεικονίσεων (ϕ, ψ) , όπου

$$\phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}' \quad \text{και} \quad \psi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}',$$

έτσι ώστε να ισχύει η συνθήκη:

$$(P, \ell) \in I \quad \Rightarrow \quad (\phi(P), \psi(\ell)) \in I'.$$

Περιφραστικά, η τελευταία συνθήκη σημαίνει ότι ο μορφισμός **διατηρεί τη σύμπτωση**. Συμβολικά, επίσης, γράφουμε ότι

$$(\phi, \psi) : (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I) \longrightarrow (\mathcal{P}', \mathcal{L}', I').$$

2.1.2 Ορισμός. Ένας μορφισμός $(\phi, \psi) : (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I) \longrightarrow (\mathcal{P}', \mathcal{L}', I')$ καλείται **1-1** (αντιστ. **επί**) αν και οι δυο απεικονίσεις ϕ και ψ είναι 1-1 (αντίστ. επί). Ιδιαίτερος, ένας μορφισμός (ϕ, ψ) καλείται **ισομορφισμός** (isomorphism) αν οι απεικονίσεις ϕ και ψ είναι 1-1 και επί. Στην περίπτωση αυτή τα προβολικά επίπεδα λέγονται **ισόμορφα**.

2.1.3 Παρατήρηση. Στην εισαγωγή αυτής της παραγράφου είπαμε ότι, για να είναι ένας μορφισμός f και ισομορφισμός, θα πρέπει να υπάρχει η f^{-1} και να είναι επίσης μορφισμός. Στην περίπτωση του προβολικού επιπέδου βεβαιώνεται κανείς εύκολα ότι ένας ισομορφισμός (όπως στον Ορισμό 2.1.2) είναι ισομορφισμός με την κατηγορική έννοια, δηλαδή ότι και το ζεύγος (ϕ^{-1}, ψ^{-1}) είναι επίσης μορφισμός προβολικών επιπέδων [βλ. Άσκηση 2.1.11(3) στο τέλος αυτής της παραγράφου].

Μερικές άμεσες συνέπειες του Ορισμού 2.1.1 περιέχονται στην επομένη

2.1.4 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι $(\phi, \psi) : (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I) \rightarrow (\mathcal{P}', \mathcal{L}', I')$ είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων. Τότε ισχύουν τα εξής συμπεράσματα:

i) Αν η ϕ είναι απεικόνιση 1-1, τότε

$$\psi(P \vee Q) = \phi(P) \vee \phi(Q),$$

για οποιαδήποτε σημεία $P, Q \in \mathcal{P}$ με $P \neq Q$.

ii) Αν η ψ είναι απεικόνιση 1-1, τότε

$$\phi(k \wedge \ell) = \psi(k) \wedge \psi(\ell),$$

για οποιεσδήποτε ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$ με $k \neq \ell$.

Απόδειξη. i) Οι ευθείες $P \vee Q$ και $\psi(P \vee Q)$ ορίζονται, επειδή $P \neq Q$. Από τον Ορισμό 2.1.1 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (P, P \vee Q) \in I &\Rightarrow (\phi(P), \psi(P \vee Q)) \in I', \\ (Q, P \vee Q) \in I &\Rightarrow (\phi(Q), \psi(P \vee Q)) \in I'. \end{aligned}$$

Επειδή η ϕ είναι 1-1, θα είναι και $\phi(P) \neq \phi(Q)$, οπότε ορίζεται η $\phi(P) \vee \phi(Q)$. Το (ΠΕ 1) και οι σχέσεις της δεύτερης στήλης των παραπάνω συνεπαγωγών αποδεικνύουν ακριβώς το πρώτο συμπέρασμα.

Για το ii) προχωρούμε αναλόγως:

$$\begin{aligned} (k \wedge \ell, k) \in I &\Rightarrow (\phi(k \wedge \ell), \psi(k)) \in I', \\ (k \wedge \ell, \ell) \in I &\Rightarrow (\phi(k \wedge \ell), \psi(\ell)) \in I'. \end{aligned}$$

Το συμπέρασμα τώρα προκύπτει από τις προηγούμενες σχέσεις και το (ΠΕ 2), σε συνδυασμό με την Πρόταση 1.2.4. $\square$

Φυσικά, η απόδειξη του συμπεράσματος ii) περιπεύει επειδή είναι δυϊκό του i). Εδώ έγινε μόνον για την εξοικείωση του αναγνώστη με το μηχανισμό των μορφισμών.

Για να διαπιστώσουμε πότε ένας μορφισμός προβολικών επιπέδων είναι και ισομορφισμός (Ορισμός 2.1.2), αρκεί να ελέγξουμε τη μία από τις δύο απεικονίσεις του μορφισμού, όπως προκύπτει από το επόμενο βασικό συμπέρασμα.

2.1.5 Θεώρημα. Έστω $(\phi, \psi) : (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I) \rightarrow (\mathcal{P}', \mathcal{L}', I')$ μορφισμός προβολικών επιπέδων. Η απεικόνιση ϕ είναι 1-1 και επί, τότε και μόνον τότε αν η ψ είναι απεικόνιση 1-1 και επί.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η ϕ είναι 1-1 και επί, οπότε θα δείξουμε ότι τις ίδιες ιδιότητες έχει και η ψ .

Η ψ είναι επί: Έστω $\ell' \in \mathcal{L}'$ τυχούσα ευθεία. Αν P' και Q' είναι δυο οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία της, δηλαδή $(P', \ell') \in I' \ni (Q', \ell')$, τότε το επί της ϕ εξασφαλίζει την ύπαρξη δύο σημείων $P, Q \in \mathcal{P}$ με $\phi(P) = P'$ και $\phi(Q) = Q'$. Αναγκαίως θα είναι και $P \neq Q$ [αλλιώς, η σχέση $P = Q$ συνεπάγεται ότι $P' = \phi(P) = \phi(Q) = Q'$ (άτοπο)]. Επομένως, ορίζεται η ευθεία $\ell := P \vee Q \in \mathcal{L}$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} (P, \ell) \in I &\Rightarrow (P' = \phi(P), \psi(\ell)) \in I', \\ (Q, \ell) \in I &\Rightarrow (Q' = \phi(Q), \psi(\ell)) \in I'. \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις αυτές και το (ΠΕ 1) προκύπτει ότι

$$\psi(\ell) = P' \vee Q' = \ell',$$

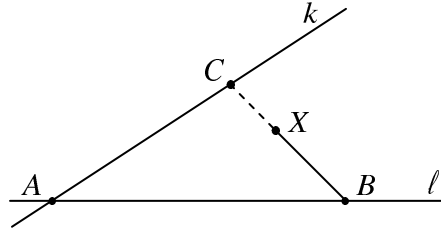
που αποδεικνύει το επί της ψ .

Η ψ είναι 1-1: Η απόδειξη της ιδιότητας αυτής δεν είναι τόσο άμεση, όπως πριν, αλλά βασίζεται σ' ένα τέχνασμα. Αν υποθέσουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα, τότε αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε (τουλάχιστον δύο) ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$ με $k \neq \ell$ και τέτοιες ώστε $\psi(k) = \psi(\ell)$. Θα δείξουμε ότι ισχύει ο εξής ισχυρισμός:

$$(*) \quad \forall P \in \mathcal{P} \Rightarrow (\phi(P), \psi(k)) \in I',$$

δηλαδή κάθε σημείο του προβολικού επιπέδου $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ απεικονίζεται, μέσω της ϕ , επί της ευθείας $\psi(k) = \psi(\ell)$.

Πρώτα παρατηρούμε, από τον ορισμό του μορφισμού, ότι όλα τα σημεία των k και ℓ απεικονίζονται στην $\psi(k) = \psi(\ell)$, οπότε πρέπει να δείξουμε ότι το ίδιο συμβαίνει και για οποιοδήποτε $X \in \mathcal{P}$ που δεν ανήκει στις k, ℓ . Πραγματικά, αν θέσουμε $A := k \wedge \ell$, στην ℓ υπάρχει κι ένα σημείο $B \neq A$. Επίσης $B \neq X$, διαφορετικά θα ήταν $(X = B, \ell) \in I$, που είναι άτοπο. Άρα ορίζεται η ευθεία



Σχήμα 2.1

$B \vee X$. Προφανώς $B \vee X \neq k$, αφού η πρώτη έχει σημεία που δεν ανήκουν στην άλλη (βλ. Πρόταση 1.4.2), άρα ορίζεται και το σημείο $C := (B \vee X) \wedge k$.

Εφαρμόζοντας τον Ορισμό 2.1.1, έχουμε διαδοχικά:

$$(2.1.3) \quad \begin{aligned} (B, \ell) \in I &\Rightarrow (\phi(B), \psi(\ell)) \in I', \\ (C, k) \in I &\Rightarrow (\phi(C), \psi(k)) \in I'. \end{aligned}$$

Επειδή η ϕ είναι 1-1 και $B \neq C$, θα είναι $\phi(B) \neq \phi(C)$, οπότε ορίζεται η $\phi(B) \vee \phi(C)$. Επομένως, από την Πρόταση 2.1.4, τις σχέσεις (2.1.3) και την υπόθεση $\psi(k) = \psi(\ell)$, προκύπτει ότι

$$(2.1.4) \quad \psi(B \vee C) = \phi(B) \vee \phi(C) = \psi(k) = \psi(\ell).$$

Απ' το άλλο μέρος, επειδή το X είναι σημείο της $B \vee C$, δηλαδή $(X, B \vee C) \in I$, θα είναι και

$$(2.1.5) \quad (\phi(X), \psi(B \vee C)) \in I'.$$

Επομένως, από τις (2.1.4) και (2.1.5), έχουμε ότι

$$(\phi(X), \psi(k)) \in I'.$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό (*).

Ας δούμε τώρα τη συνέπεια του (*). Επειδή η ϕ είναι απεικόνιση επί, για τυχόν $P' \in \mathcal{P}'$ υπάρχει $P \in \mathcal{P}$ με $\phi(P) = P'$. Άρα, λόγω του (*), θα είναι $(P', \psi(k)) \in I'$. Αυτό ισχύει για κάθε σημείο του $\mathcal{P}'$, δηλαδή βρίσκουμε ότι όλα τα σημεία του $\mathcal{P}'$ είναι συγγραμμικά, που είναι άτοπο [λόγω του (ΠΕ 3)]. Το άτοπο αίρεται αν δεχθούμε ότι η ψ είναι 1 – 1 (οπότε παύει να ισχύει και ο (*), ο οποίος είναι συνέπεια της άρνησης του 1 – 1).

Για να κλείσει η απόδειξη, πρέπει να δείξουμε ότι, αν η ψ είναι 1 – 1 και επί, τότε και η ϕ έχει τις ίδιες ιδιότητες. Αυτό όμως προκύπτει από το προηγούμενο συμπέρασμα βάσει της αρχής του δυϊσμού. $\square$

Προφανής συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος και του Ορισμού 2.1.2 είναι το επόμενο

2.1.6 Πρόρισμα. Ένας μορφισμός προβολικών επιπέδων (ϕ, ψ) είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν μία από τις απεικονίσεις ϕ, ψ είναι 1 – 1 και επί.

2.1.7 Παρατηρήσεις. 1) Όπως φάνηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.5, για την απόδειξη του επί της ψ αρκεί μόνον το επί της ϕ . Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι:

∇ η ψ είναι επί τότε και μόνον τότε αν η ϕ είναι επί.

Κάνοντας όμως χρήση και του 1 – 1 της ϕ , μπορούμε να δείξουμε το επί της ψ και ως εξής: για τα P', Q' (όπως στην αρχική απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.5), υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα (και, φυσικά, διαφορετικά μεταξύ τους) σημεία P και Q , που ορίζουν την $\ell := P \vee Q$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.1.4, βρίσκουμε ότι

$$\psi(\ell) = \psi(P \vee Q) = \phi(P) \vee \phi(Q) = P' \vee Q' = \ell',$$

που αποδεικνύει το επί της ψ .

2) Αντιθέτως, για το 1 – 1 της ψ χρησιμοποιείται και το 1 – 1 και το επί της ϕ .

Μέχρι τώρα έχουμε ορίσει το προβολικό επίπεδο (όπως και το συσχετισμένο επίπεδο) με τη βοήθεια μιας αφηρημένης σύμπτωσης I . Όμως, στη Στοιχειώδη (Ευκλείδεια) Γεωμετρία και στην κλασική Προβολική Γεωμετρία, για την οποίαν έγινε λόγος στο εδάφιο 1.6.6, η σύμπτωση αυτή είναι η συνήθης σύμπτωση της εμπειρίας, η οποία έχει την ίδια σημασία με το συνολοθεωρητικό “ε”.

Με τη χρήση των ισομορφισμών προβολικών επιπέδων θα δείξουμε ότι και η αφηρημένη σύμπτωση I , που έχουμε χρησιμοποιήσει μέχρι τώρα, μπορεί να ταυτιστεί (μέσω κατάλληλου ισομορφισμού) με τη συνήθη σύμπτωση, που ορίζει το “ ϵ ”. Αυτό επιτυγχάνεται αν ταυτίσουμε κάθε ευθεία με την αντίστοιχη σημειοσειρά της. Έτσι, και πιο κοντά στην εμπειρία βρισκόμαστε και τους συμβολισμούς μας απλοποιούμε σημαντικά.

Για την ακρίβεια, θεωρούμε ένα προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ και το δυναμο-σύνολο $\mathbf{P}(\mathcal{P})$ του $\mathcal{P}$. Επίσης ορίζουμε την απεικόνιση

$$J : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{P}),$$

η οποία σε κάθε ευθεία ℓ αντιστοιχεί τη σημειοσειρά της (βλ. Ορισμό 1.4.1)

$$(2.1.6) \quad J(\ell) = \{P \in \mathcal{P} : (P, \ell) \in I\}.$$

Η J είναι καλά ορισμένη (βλ. Πρόταση 1.4.2). Θέτουμε

$$\widetilde{\mathcal{L}} := J(\mathcal{L}),$$

οπότε σχηματίζεται η τριάδα $(\mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{L}}, \epsilon)$. Παρατηρούμε ότι $\mathcal{P} \cap \widetilde{\mathcal{L}} = \emptyset$ και το “ ϵ ” ορίζει μια σχέση σύμπτωσης στο $\mathcal{P} \times \widetilde{\mathcal{L}}$.

Αν συμβολίσουμε με $1_{\mathcal{P}}$ την ταυτοτική απεικόνιση του $\mathcal{P}$, τότε έχουμε το

2.1.8 Θεώρημα. *Με τους προηγούμενους συμβολισμούς ισχύουν τα εξής συμπεράσματα:*

- i) Η τριάδα $(\mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{L}}, \epsilon)$ είναι προβολικό επίπεδο.
- ii) Το ζεύγος $(1_{\mathcal{P}}, J)$ είναι ισομορφισμός μεταξύ των προβολικών επιπέδων $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ και $(\mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{L}}, \epsilon)$.

Απόδειξη. Για το i) επαληθεύουμε τα αξιώματα του προβολικού επιπέδου.

(ΠΕ 1): Αν P, Q είναι δύο οποιαδήποτε σημεία της δεύτερης τριάδας με $P \neq Q$, τότε, ως σημεία του πρώτου προβολικού επιπέδου, ορίζουν μονοσήμαντα την ευθεία $P \vee Q$. Συνεπώς ορίζεται και η $J(P \vee Q) \in \widetilde{\mathcal{L}}$. Επειδή $(P, P \vee Q) \in I$, θα είναι $P \in J(P \vee Q)$ και, παρόμοια, $Q \in J(P \vee Q)$. Άρα, η $J(P \vee Q)$ είναι μια ευθεία του $\widetilde{\mathcal{L}}$, που περιέχει (ή ορίζεται από) τα σημεία P, Q . Η ευθεία αυτή είναι και μοναδική. Πραγματικά, αν υπήρχε και κάποια άλλη ευθεία από το $\widetilde{\mathcal{L}}$, που να περιέχει τα P, Q , τότε αυτή θα είχε τη μορφή $J(k)$, για κάποια $k \in \mathcal{L}$. Επειδή $P, Q \in J(k)$, λόγω της (2.1.6) θα ήταν $(P, k) \in I \ni (Q, k)$. Αλλά $P \neq Q$, οπότε το (ΠΕ 1) στο προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ συνεπάγεται ότι $k = P \vee Q$, άρα και $J(k) = J(P \vee Q)$, απ’ όπου προκύπτει και το μονοσήμαντο της ευθείας (του $\widetilde{\mathcal{L}}$), η οποία περιέχει τα P και Q .

(ΠΕ 2): Αν $J(k)$ και $J(\ell)$ είναι στοιχεία του $\tilde{\mathcal{L}}$ με $J(k) \neq J(\ell)$, τότε και $k \neq \ell$ (βλ. Πρόταση 1.4.2). Συνεπώς, από το (ΠΕ 2) για το $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$, ορίζεται το σημείο $P = k \wedge \ell$. Επειδή $(P, k) \in I \ni (P, \ell)$, οι τελευταίες σχέσεις και η (2.1.6) συνεπάγονται ότι $P \in J(k) \cap J(\ell)$, δηλαδή οι $J(k)$ και $J(\ell)$ έχουν κοινό σημείο.

(ΠΕ 3): Επειδή το $\mathcal{P}$ είναι το ίδιο και στις δύο τριάδες και η πρώτη είναι προβολικό επίπεδο, μπορούμε να βρούμε τέσσερα σημεία P_i ($i = 1, \dots, 4$) διαφορετικά και ανά τρία μη συγγραμμικά (ως προς τις ευθείες του $\mathcal{L}$). Τα σημεία αυτά δεν είναι ανά τρία συγγραμμικά και ως προς τις ευθείες του $\tilde{\mathcal{L}}$. Πραγματικά, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποια ευθεία $J(k)$, που περιέχει, ας πούμε τα P_1, P_2, P_3 , τότε θα ήταν και $(P_j, k) \in I$ ($j = 1, 2, 3$), δηλαδή τα σημεία θα ήσαν συγγραμμικά στο πρώτο επίπεδο (άτοπο).

Για το συμπέρασμα ii) παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τον ορισμό της J ,

$$[\forall (P, k) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L} : (P, k) \in I] \Rightarrow [1_{\mathcal{P}}(P) = P \in J(k)].$$

Άρα, το ζεύγος $(1_{\mathcal{P}}, J)$ είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων. Επειδή η $1_{\mathcal{P}}$ είναι $1-1$ και επί, το Πόρισμα 2.1.6 ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

2.1.9 Παρατηρήσεις. Με τη βοήθεια του προηγούμενου ισομορφισμού $(1_{\mathcal{P}}, J)$, το προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ ταυτίζεται με το προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \tilde{\mathcal{L}}, \epsilon)$ του οποίου οι ευθείες είναι σημειοσύνολα, δηλαδή υποσύνολα του $\mathcal{P}$. Έτσι, ταυτίζοντας (μέσω της J) μια ευθεία $k \in \mathcal{L}$ με τη σημειοσειρά της $J(k)$, κάθε σημείο P της k [με την έννοια: $(P, k) \in I$] μπορεί να θεωρηθεί και σημείο της ευθείας (σημειοσειράς) $J(k) \in \tilde{\mathcal{L}}$ [με τη συνήθη συνολοθεωρητική έννοια, δηλ. $P \in J(k)$].

Όπως εξηγήσαμε και στη συζήτηση πριν το Θεώρημα 2.1.8, τα προηγούμενα βρίσκονται σε συμφωνία με τη Στοιχειώδη Γεωμετρία (όπου οι ευθείες είναι σύνολα σημείων) και δικαιολογεί τις εκφράσεις: «ένα σημείο ανήκει σε μία ευθεία», «δύο ευθείες τέμνονται σ' ένα σημείο» κλπ., τις οποίες έχουμε χρησιμοποιήσει ήδη από τους πρώτους ορισμούς.

2.1.10 Σύμβαση. Στη συνέχεια θα κάνουμε διαρκώς χρήση της παραπάνω ταύτισης $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I) \equiv (\mathcal{P}, \tilde{\mathcal{L}}, \epsilon)$ και θα θεωρούμε ως σχέση σύμπτωσης, του *οποιοιδήποτε* προβολικού επιπέδου, τη συνολοθεωρητική σχέση “ ϵ ”.

Επίσης, για ευκολία, θα λέμε και θα γράφουμε «το προβολικό επίπεδο $\mathcal{P}$ » αντί του $(\mathcal{P}, \tilde{\mathcal{L}}, \epsilon)$, εφ' όσον δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.

2.1.11 Ασκήσεις.

- 1) Αν $(\phi, \psi) : (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon) \rightarrow (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \epsilon)$ είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων $1-1$, τότε ισχύει η συνεπαγωγή:

$$[\forall (P, \ell) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L} : P \notin \ell] \Rightarrow [\phi(P) \notin \psi(\ell)].$$

Τι συμβαίνει αν παραλειφθεί η υπόθεση ότι ο μορφισμός (ϕ, ψ) είναι $1-1$;

2) Με τις υποθέσεις της προηγούμενης άσκησης, έχουμε ότι :

$$[\forall (P, \ell) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L} : \phi(P) \in \psi(\ell)] \Rightarrow [P \in \ell].$$

3) Αν (ϕ, ψ) είναι ισομορφισμός, τότε το ζεύγος (ϕ^{-1}, ψ^{-1}) είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων. (Να συνδυαστεί η άσκηση με την Παρατήρηση 2.1.3). Συμβολικά γράφουμε ότι :

$$(\phi^{-1}, \psi^{-1}) =: (\phi, \psi)^{-1}$$

4) Έστω ότι (ϕ, ψ) είναι μορφισμός 1 – 1 μεταξύ προβολικών επιπέδων. Τότε κάθε μία από τις απεικονίσεις του ζεύγους εκφράζεται μέσω της άλλης.

5) Αν (ϕ, ψ) είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων και η ϕ είναι απεικόνιση 1 – 1, τότε για οποιονδήποτε άλλο μορφισμό (ϕ, ψ') θα είναι $\psi = \psi'$.

6) Να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{P}_2$, όπως ορίστηκε στο Παράδειγμα 1.2.3(2), είναι ισόμορφο με το προβολικό επίπεδο της Άσκησης 1.2.9(5).

7) Αν (ϕ_1, ψ_1) είναι μορφισμός του προβολικού επιπέδου $(\mathcal{P}_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{I}_1)$ στο $(\mathcal{P}_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{I}_2)$ και (ϕ_2, ψ_2) μορφισμός του $(\mathcal{P}_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{I}_2)$ στο $(\mathcal{P}_3, \mathcal{L}_3, \mathcal{I}_3)$, τότε και το ζεύγος $(\phi_2 \circ \phi_1, \psi_2 \circ \psi_1)$ είναι μορφισμός του $(\mathcal{P}_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{I}_1)$ στο $(\mathcal{P}_3, \mathcal{L}_3, \mathcal{I}_3)$. Συμβολικά γράφουμε ότι :

$$(\phi_2 \circ \phi_1, \psi_2 \circ \psi_1) =: (\phi_2, \psi_2) \circ (\phi_1, \psi_1).$$

8) Δίνονται δύο προβολικά επίπεδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon), (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \epsilon)$ και υποθέτουμε ότι $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ είναι απεικόνιση 1 – 1 και επί, η οποία **διατηρεί τη συγγραμμικότητα σημείων**, δηλ. απεικονίζει συγγραμμικά σημεία του πρώτου επιπέδου σε συγγραμμικά σημεία του δευτέρου. Τότε υπάρχει μία μοναδική $\psi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$, έτσι ώστε το (ϕ, ψ) να είναι ισομορφισμός μεταξύ των δύο προβολικών επιπέδων.

9) Δίνονται τα *συσχετισμένα επίπεδα* $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}), (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$ και δύο απεικονίσεις $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ και $\psi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$, τέτοιες ώστε να **διατηρείται η σύμπτωση**, δηλ. $(P, k) \in \mathcal{I} \Rightarrow (\phi(P), \psi(k)) \in \mathcal{I}'$. Να αποδειχθούν τα επόμενα συμπεράσματα :

α) Αν οι ϕ και ψ είναι απεικονίσεις 1 – 1, τότε ισχύουν τα ανάλογα της Πρότασης 2.1.4 και των προηγούμενων Ασκήσεων 2.9.11(1), 2.9.11(2), 2.9.11(4) και 2.9.11(5).

β) Αν, επιπλέον των υποθέσεων του ερωτήματος α), η ϕ είναι και απεικόνιση επί, τότε **διατηρείται και η παραλληλία**, δηλ. $k // \ell \Rightarrow \psi(k) // \psi(\ell)$.

- 10) Αν $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ και $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', I')$ είναι δύο συσχετισμένα επίπεδα, τότε ένας **μορφισμός** του πρώτου στο δεύτερο είναι ένα ζεύγος (ϕ, ψ) , όπου $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ και $\psi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$, που διατηρεί τη σύμπτωση και την παραλληλία (βλ. την ορολογία της προηγούμενης άσκησης). Ένας **ισομορφισμός** (συσχετισμένων επιπέδων) είναι ένας μορφισμός (ϕ, ψ) , όπου οι απεικονίσεις ϕ και ψ είναι 1-1 και επί.

Με τους προηγούμενους ορισμούς ζητούνται τα εξής:

- α) Αν (ϕ, ψ) είναι μορφισμός συσχετισμένων επιπέδων, όπου η ϕ είναι απεικόνιση 1-1 και επί, τότε να αποδειχθεί ότι και η ψ έχει τις ίδιες ιδιότητες.
- β) Να αποδειχθεί το ανάλογο του Θεωρήματος 2.1.8.
- γ) Αν (ϕ, ψ) είναι ισομορφισμός συσχετισμένων επιπέδων, τότε το ζεύγος (ϕ^{-1}, ψ^{-1}) είναι μορφισμός συσχετισμένων επιπέδων.
- δ) Να αποδειχθεί το ανάλογο της προηγούμενης Άσκησης 8 για συσχετισμένα επίπεδα.

2.2 Συγγραμμικότητες

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε τους ισομορφισμούς ενός προβολικού επιπέδου στον εαυτό του, δηλαδή τους αυτομορφισμούς του. Η μελέτη μερικών υποομάδων της ομάδας των αυτομορφισμών οδηγεί σε βασικά συμπεράσματα για τη δομή του προβολικού επιπέδου, όπως θα φανεί σε επόμενα κεφάλαια, ακριβέστερα στη μελέτη των επιπέδων του Desargues και του Πάππου.

Υπενθυμίζουμε τη Σύμβαση 2.1.10 σύμφωνα με την οποία όλα τα προβολικά επίπεδα είναι πλέον της μορφής $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon)$.

2.2.1 Ορισμός. Μία **συγγραμμικότητα** (collineation) ενός προβολικού επιπέδου $\mathcal{P}$ είναι ένας αυτομορφισμός του $\mathcal{P}$, δηλαδή ένας ισομορφισμός του $\mathcal{P}$ στον εαυτό του (βλ. Ορισμό 2.1.2). Το σύνολο των συγγραμμικοτήτων ενός προβολικού επιπέδου $\mathcal{P}$ συμβολίζεται με

$$\mathcal{A}ut(\mathcal{P}).$$

Ουσιαστικά, μία συγγραμμικότητα καθορίζεται πλήρως από μία 1-1 και επί απεικόνιση $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, η οποία διατηρεί τη συγγραμμικότητα των σημείων [βλ. Ασκήσεις 2.1.11(8) και 2.2.23(3)].

Αν υποθέσουμε ότι (ϕ_1, ψ_1) και (ϕ_2, ψ_2) είναι δύο συγγραμμικότητες, μπορούμε να θεωρήσουμε και τη σύνθεσή τους

$$(2.2.1) \quad (\phi_1, \psi_1) \circ (\phi_2, \psi_2) := (\phi_1 \circ \phi_2, \psi_1 \circ \psi_2).$$

Σύμφωνα με την Άσκηση 2.1.11(7), η σύνθεση είναι μορφισμός του $\mathcal{P}$ στον εαυτό του. Επειδή ϕ_1, ϕ_2 (και ψ_1, ψ_2) είναι απεικονίσεις $1-1$ και επί, ο μορφισμός αυτός είναι ισομορφισμός, άρα συγγραμμικότητα. Επομένως, η (2.2.1) ορίζει στο $\mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ μία πράξη (: σύνθεση)

$$\circ : \mathcal{A}ut(\mathcal{P}) \times \mathcal{A}ut(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathcal{A}ut(\mathcal{P}) :$$

$$((\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2)) \mapsto (\phi_1, \psi_1) \circ (\phi_2, \psi_2) := (\phi_1 \circ \phi_2, \psi_1 \circ \psi_2).$$

Τα προηγούμενα οδηγούν στην

2.2.2 Πρόταση. Το σύνολο $\mathcal{A}ut(\mathcal{P})$, εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης, αποτελεί ομάδα.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες, οι οποίες χαρακτηρίζουν τη δομή μιας ομάδας:

i) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, το $(1_{\mathcal{P}}, 1_{\mathcal{L}})$. Πραγματικά,

$$(\phi, \psi) \circ (1_{\mathcal{P}}, 1_{\mathcal{L}}) = (1_{\mathcal{P}}, 1_{\mathcal{L}}) \circ (\phi, \psi) = (\phi, \psi),$$

για κάθε $(\phi, \psi) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$.

ii) Οποιαδήποτε συγγραμμικότητα $(\phi, \psi) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ διαθέτει αντίστροφη, την

$$(2.2.1') \quad (\phi, \psi)^{-1} := (\phi^{-1}, \psi^{-1})$$

[βλ. και την Άσκηση 2.1.11(3)]. Προφανώς,

$$(\phi, \psi) \circ (\phi, \psi)^{-1} = (\phi, \psi)^{-1} \circ (\phi, \psi) = (1_{\mathcal{P}}, 1_{\mathcal{L}}).$$

iii) Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα

$$((\phi_1, \psi_1) \circ (\phi_2, \psi_2)) \circ (\phi_3, \psi_3) = (\phi_1, \psi_1) \circ ((\phi_2, \psi_2) \circ (\phi_3, \psi_3)),$$

ως αποτέλεσμα της αντίστοιχης ιδιότητας, που έχει η σύνθεση των συνήθων απεικονίσεων. $\square$

2.2.3 Παρατηρήσεις. 1) Αν S είναι ένα σύνολο εφοδιασμένο με μία δομή και $\mathcal{A}ut(S)$ η ομάδα των αυτομορφισμών του S , ως προς τη δομή αυτή, τότε λέμε ότι το ζεύγος $(S, \mathcal{A}ut(S))$ αποτελεί μία **Γεωμετρία Klein**. Η ορολογία αυτή χρησιμοποιείται προς τιμήν του F. Klein, ο οποίος είχε την ιδέα να μελετήσει τη γεωμετρία ενός συνόλου μέσω της αντίστοιχης ομάδας των αυτομορφισμών του (βλ. και την προμετωπίδα του κεφαλαίου αυτού). Ο Klein ανέπτυξε, το 1872, το περίφημο Erlanger Programm (Πρόγραμμα του Erlangen), που είχε πολύ μεγάλη επίδραση στην εξέλιξη της Γεωμετρίας.

2) Στην περίπτωση του προβολικού επιπέδου $\mathcal{P}$, η αντίστοιχη Γεωμετρία Klein είναι το ζεύγος $(\mathcal{P}, \mathcal{A}ut(\mathcal{P}))$. Οι χαρακτηριστικές ιδιότητες ενός προβολικού επιπέδου προκύπτουν από αντίστοιχες ιδιότητες της ομάδας $\mathcal{A}ut(\mathcal{P})$.

Επειδή ομάδα $\mathcal{Aut}(\mathcal{P})$ είναι πολύ «μεγάλη», δηλαδή περιέχει πολλά στοιχεία, για να μπορέσουμε να βγάλουμε συμπεράσματα για το προβολικό επίπεδο, θα αναζητήσουμε κατάλληλες υποομάδες της, που είναι πιο «μικρές» και πιο «εύκολες» στη μελέτη τους. Μέσω των τελευταίων, αργότερα, θα χαρακτηρίσουμε διάφορα προβολικά επίπεδα, τα οποία έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες.

2.2.4 Ορισμός. Μια συγγραμμικότητα $(\phi, \psi) \in \mathcal{Aut}(\mathcal{P})$ καλείται **κεντρική** (central) αν υπάρχει ένα σημείο $A \in \mathcal{P}$, που λέγεται **κέντρο** (center), έτσι ώστε:

$$[\forall k \in \mathcal{L} : k \in J(A)] \Rightarrow [\psi(k) = k].$$

Απ' το άλλο μέρος, η (ϕ, ψ) καλείται **αξονική** (axial) αν υπάρχει ευθεία $\ell \in \mathcal{L}$, που λέγεται **άξονας** (axis), έτσι ώστε:

$$[\forall P \in \mathcal{P} : P \in \ell \equiv J(\ell)] \Rightarrow [\phi(P) = P].$$

Περιφραστικά θα λέγαμε ότι: σε μία κεντρική συγγραμμικότητα, οι ευθείες, που διέρχονται από το κέντρο, μένουν σταθερές (αναλλοίωτες), ενώ σε μία αξονική συγγραμμικότητα, τα σημεία του άξονα μένουν σταθερά.

Θα δείξουμε ότι το κέντρο και ο άξονας μιας συγγραμμικότητας είναι σταθερά στοιχεία αυτής.

2.2.5 Πρόταση. Αν $(\phi, \psi) \in \mathcal{Aut}(\mathcal{P})$ είναι κεντρική συγγραμμικότητα με κέντρο A , τότε $\phi(A) = A$.

Απόδειξη. Λόγω της Πρότασης 1.2.8, μπορούμε να βρούμε δύο διαφορετικές ευθείες $k, m \in J(A)$. Επομένως $A = k \wedge m$ και, κατά την Πρόταση 2.1.4,

$$\phi(A) = \phi(k \wedge m) = \psi(k) \wedge \psi(m) = k \wedge m = A. \quad \square$$

2.2.6 Πρόταση. Αν $(\phi, \psi) \in \mathcal{Aut}(\mathcal{P})$ είναι αξονική συγγραμμικότητα με άξονα ℓ , τότε $\psi(\ell) = \ell$.

Απόδειξη. Η πρόταση είναι δυϊκή της προηγούμενης. $\square$

Η διάκριση των συγγραμμικοτήτων σε κεντρικές και αξονικές δεν υφίσταται στην πραγματικότητα, αφού ισχύει το επόμενο

2.2.7 Θεώρημα. Κάθε κεντρική συγγραμμικότητα είναι αξονική και αντιστρόφως.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι (ϕ, ψ) είναι μια συγγραμμικότητα με κέντρο A . Θα δείξουμε ότι έχει και άξονα.

Όπως είδαμε στην Πρόταση 2.2.6, αν ℓ είναι ο ζητούμενος άξονας, τότε $\psi(\ell) = \ell$. Απ' το άλλο μέρος, και κάθε ευθεία $k \in J(A)$ ικανοποιεί τη σχέση

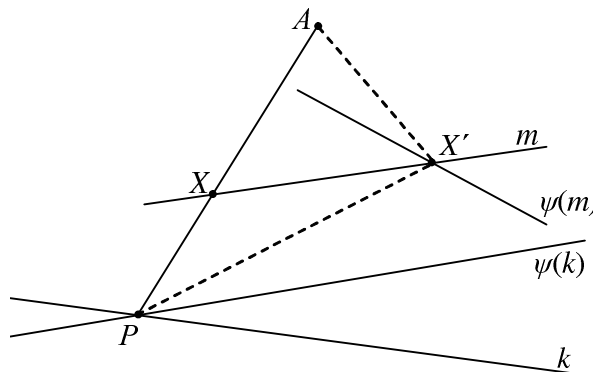
$\psi(k) = k$. Επομένως, ο άξονας θα πρέπει να αναζητηθεί ανάμεσα στις ευθείες εκείνες του προβολικού επιπέδου, οι οποίες παραμένουν σταθερές ως προς τη συγγραμμικότητα. Επειδή τέτοιες ευθείες μπορούν να διέρχονται ή όχι από το A , διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

i) Έστω ότι υπάρχει ευθεία $\ell \in \mathcal{L}$, τέτοια ώστε $A \notin \ell$ και $\psi(\ell) = \ell$. Ισχυριζόμαστε ότι η ℓ είναι άξονας. Πραγματικά, αν P είναι τυχόν σημείο της, μπορούμε να γράψουμε ότι $P = (A \vee P) \wedge \ell$ (αφού $\ell \neq A \vee P$ κατά την Πρόταση 1.4.2). Άρα, η Πρόταση 2.1.4 και ο Ορισμός 2.2.4 συνεπάγονται ότι

$$\phi(P) = \phi((A \vee P) \wedge \ell) = \psi(A \vee P) \wedge \psi(\ell) = (A \vee P) \wedge \ell = P,$$

που αποδεικνύει ότι η ℓ είναι άξονας.

ii) Έστω ότι δεν υπάρχει ευθεία με τις ιδιότητες της περίπτωσης i). Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $k \in \mathcal{L}$ με $A \notin k$, θα είναι $\psi(k) \neq k$. Στην περίπτωση αυτή είναι φανερό ότι ο άξονας θα πρέπει να αναζητηθεί στις ευθείες που διέρχονται από το A . Έτσι, θεωρούμε μια οποιαδήποτε ευθεία $k \in \mathcal{L}$ με $A \notin k$. Επειδή τώρα $\psi(k) \neq k$, ορίζεται το σημείο $P = k \wedge \psi(k)$. Επίσης, επειδή $P \neq A$, ορίζεται και η ευθεία $A \vee P$. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε ότι $P = (A \vee P) \wedge k$, οπότε



Σχήμα 2.2

$$(2.2.2) \quad \phi(P) = \phi((A \vee P) \wedge k) = (A \vee P) \wedge \psi(k) = P.$$

Οι τελευταίες σχέσεις έχουν έννοια διότι $k \neq A \vee P$ (αφού $A \notin k$), άρα (λόγω του 1-1 της ψ) και $\psi(k) \neq \psi(A \vee P) = A \vee P$.

Η ευθεία $A \vee P$ όχι μόνον είναι σταθερή ως προς τη συγγραμμικότητα [αφού $A \vee P \in J(A)$], αλλά, εκτός του κέντρου A , διαθέτει κι ένα άλλο σταθερό σημείο, το P . Αυτό μας κάνει να υποπτευθούμε ότι η $A \vee P$ ίσως είναι ο ζητούμενος

άξονας. Για να βεβαιωθούμε γι' αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι $\phi(X) = X$ και για οποιοδήποτε άλλο $X \in A \vee P$ με $A \neq X \neq P$.

Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε και μίαν ευθεία m με $X \in m$ και $A \notin m$ (άρα $m \neq A \vee P$), η ύπαρξη της οποίας εξασφαλίζεται πάντοτε από την Πρόταση 1.2.8. Σύμφωνα με την υπόθεση αυτής της περίπτωσης, $\psi(m) \neq m$, άρα ορίζεται το $X' = m \wedge \psi(m)$. Θα δείξουμε ότι

$$(2.2.3) \quad X = X'.$$

Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι $X' \neq X$. Τότε βλέπουμε ότι $X' \neq P$, γιατί διαφορετικά θα ήταν $m = X \vee X' = X \vee P = A \vee P$ (άτοπο). Επομένως ορίζεται η ευθεία $X' \vee P$. Επίσης, $X' \neq A$ (αφού $A \notin m$), οπότε ορίζεται και η $A \vee X'$. Συνεπώς,

$$(2.2.4) \quad \begin{aligned} \phi(X') &= \phi((A \vee X') \wedge m) = \psi(A \vee X') \wedge \psi(m) \\ &= (A \vee X') \wedge \psi(m) = X'. \end{aligned}$$

Οι προηγούμενες σχέσεις έχουν έννοια επειδή $m \neq A \vee X'$ και (εφαρμόζοντας την ψ) $\psi(m) \neq \psi(A \vee X') = A \vee X'$. Άρα, οι (2.2.2) και (2.2.4) οδηγούν στην

$$\psi(X' \vee P) = \phi(X') \vee \phi(P) = X' \vee P.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η $X' \vee P \notin J(A)$, διαφορετικά τα σημεία X', P, A θα ήσαν συγγραμμικά, άρα $X' \in A \vee P$. Αλλά και $X \in A \vee P$, οπότε (επειδή $X \neq X'$) θα είχαμε ότι $m = X \vee X' = A \vee P$ (άτοπο). Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ευθεία $X' \vee P$, που δεν διέρχεται από το A , είναι σταθερή. Αυτό αντίκειται στην υπόθεση της περίπτωσης ii). Στο άτοπο φτάσαμε επειδή υποθέσαμε ότι $X \neq X'$. Άρα, αναγκαστικά, ισχύει η (2.2.3).

Χρησιμοποιώντας τις (2.2.3) και (2.2.4), έχουμε ότι

$$\phi(X) = \phi(X') = X' = X,$$

πράγμα που αποδεικνύει ότι, τελικώς, η $A \vee P$ είναι άξονας.

Το αντίστροφο συμπέρασμα προκύπτει από την αρχή του δυϊσμού. $\square$

2.2.8 Παρατήρηση. Εξετάζοντας το Σχήμα 2.2 και την απόδειξη της σχέσης (2.2.3), διαπιστώνει κανείς ότι τα σχήματα, τα οποία αναφέρονται σε συλλογισμούς που αφορούν το προβολικό επίπεδο, αλλά σχεδιάζονται στο σύνηθες (συσχετισμένο) επίπεδο, μπορεί μερικές φορές να είναι παραπλανητικά και πρέπει να χρησιμοποιούνται με πολλή προσοχή. Επομένως, κάθε βήμα των αποδείξεων πρέπει να ελέγχεται αυστηρά, μέσω των αξιωμάτων και των γνωστών προτάσεων, και όχι μέσω του σχήματος.

Πριν προχωρήσουμε σε άλλες ιδιότητες των συγγραμμικοτήτων εισάγουμε μερικούς χρήσιμους όρους και συμβολισμούς.

Συμβολίζουμε με

$$\mathbb{L}(A, \ell)$$

το σύνολο των συγγραμμικοτήτων με κέντρο A και άξονα ℓ .

2.2.9 Ορισμός. Μία συγγραμμικότητα $(\phi, \psi) \in \mathbb{L}(A, \ell)$ λέγεται **ομολογία** (homology) αν $A \notin \ell$. Αντιστοίχως, η (ϕ, ψ) λέγεται **έπαρση** (elation) αν $A \in \ell$.

Το σύνολο των ομολογιών με κέντρο A και άξονα ℓ ($A \notin \ell$) και το σύνολο των επάρσεων με κέντρο A και άξονα ℓ ($A \in \ell$) συμβολίζονται, αντιστοίχως, με

$$\mathbb{H}(A, \ell) \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(A, \ell).$$

2.2.10 Πρόταση. Το σύνολο $\mathbb{L}(A, \ell)$ είναι υποομάδα της $\text{Aut}(\mathcal{P})$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι, για οποιεσδήποτε συγγραμμικότητες (ϕ, ψ) και (ϕ', ψ') του $\mathbb{L}(A, \ell)$, είναι $(\phi, \psi) \circ (\phi', \psi') \in \mathbb{L}(A, \ell)$ και $(\phi, \psi)^{-1} \in \mathbb{L}(A, \ell)$.

Πραγματικά, για τυχούσα ευθεία $k \in \mathcal{J}(A)$, βάσει της (2.2.1) είναι

$$(\psi \circ \psi')(k) = \psi(\psi'(k)) = \psi(k) = k,$$

που δείχνει ότι A είναι κέντρο της σύνθεσης. Αναλόγως, για τυχόν $P \in \ell$,

$$(\phi \circ \phi')(P) = \phi(\phi'(P)) = \phi(P) = P,$$

δηλαδή η ℓ είναι άξονας. Άρα $(\phi, \psi) \circ (\phi', \psi') \in \mathbb{L}(A, \ell)$.

Απ' το άλλο μέρος, για τη $(\phi, \psi)^{-1} = (\phi^{-1}, \psi^{-1})$ βρίσκουμε ότι (με k και P όπως προηγουμένως)

$$\psi^{-1}(k) = \psi^{-1}(\psi(k)) = k \quad \text{και} \quad \phi^{-1}(P) = \phi^{-1}(\phi(P)) = P,$$

δηλαδή $(\phi, \psi)^{-1} \in \mathbb{L}(A, \ell)$. □

Άμεση συνέπεια της προηγουμένης πρότασης είναι το

2.2.11 Πόρισμα. Τα σύνολα $\mathbb{H}(A, \ell)$, αν $A \notin \ell$, και $\mathbb{E}(A, \ell)$, αν $A \in \ell$, αποτελούν υποομάδες της $\text{Aut}(\mathcal{P})$.

Τα επόμενα συμπεράσματα είναι χρήσιμα για τον προσδιορισμό της εικόνας ενός σημείου ή μιας ευθείας μέσω συγγραμμικοτήτων.

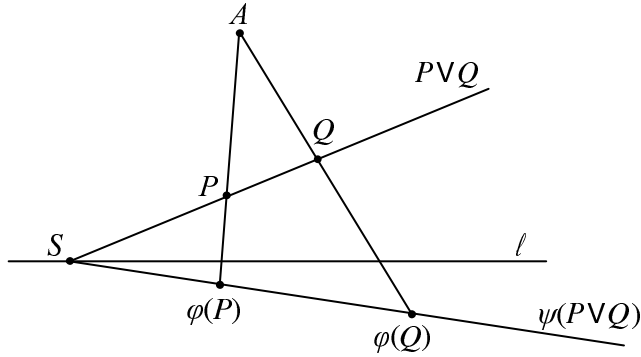
2.2.12 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι $(\phi, \psi) \in \mathbb{L}(A, \ell)$. Τότε, για κάθε $P \in \mathcal{P}$ με $P \neq A$, τα σημεία A, P και $\phi(P)$ είναι συγγραμμικά.

Απόδειξη. Αν $P \in \ell$, τότε $\phi(P) = P$ και το συμπέρασμα είναι τετριμμένο. Ας πάρουμε τώρα ένα $P \notin \ell$. Λόγω των υποθέσεων ορίζεται η ευθεία $A \vee P$ και είναι $P \in A \vee P$. Επομένως, οι Ορισμοί 2.1.1 και 2.2.4 συνεπάγονται τη σχέση

$$\phi(P) \in \psi(A \vee P) = A \vee P,$$

που αποδεικνύει την πρόταση. $\square$

2.2.13 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι $(\phi, \psi) \in \mathbb{L}(A, \ell)$ και P, Q είναι δύο διαφορετικά σημεία, τέτοια ώστε $P \neq A \neq Q$ και $P \notin \ell \neq Q$. Τότε οι ευθείες $P \vee Q$, $\psi(P \vee Q)$ και ℓ τέμνονται στο ίδιο σημείο.



Σχήμα 2.3

Απόδειξη. Επειδή $P \vee Q \neq \ell$, ορίζεται το σημείο $S = (P \vee Q) \wedge \ell$. Επομένως,

$$S = \phi(S) = \phi((P \vee Q) \wedge \ell) = \psi(P \vee Q) \wedge \ell.$$

Άρα, το S είναι κοινό σημείο των $P \vee Q$, $\psi(P \vee Q)$ και ℓ , οπότε αποδεικνύεται η πρόταση. $\square$

2.2.14 Παρατηρήσεις. 1) Μπορούμε να έχουμε ανάλογα συμπεράσματα στις περιπτώσεις που ένα από τα P, Q συμπίπτει με το A ή βρίσκεται επί της ℓ .

2) Το Σχήμα 2.3 απεικονίζει το συμπέρασμα της πρότασης στην περίπτωση μιας ομολογίας.

3) Προφανώς, $\psi(P \vee Q) = \phi(P) \vee \phi(Q)$.

2.2.15 Πόρισμα. Αν (ϕ, ψ) είναι συγγραμμικότητα όπως στην προηγούμενη πρόταση και k ευθεία με $k \neq \ell$, τότε οι k , $\psi(k)$ και ℓ τέμνονται στο ίδιο σημείο.

2.2.16 Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι δίνεται μία συγγραμμικότητα $(\phi, \psi) \in \mathbb{L}(A, \ell)$ με $(\phi, \psi) \neq (\text{id}_\mathcal{P}, \text{id}_\mathcal{L})$. Τότε η (ϕ, ψ) περιγράφεται πλήρως από τα στοιχεία A, ℓ, X_0 και $\phi(X_0)$, όπου το X_0 είναι ένα δεδομένο σημείο με $X_0 \neq A$ και $X_0 \notin \ell$.

Για να βρούμε την εικόνα ενός σημείου X ($: X \neq A, X \notin \ell$), θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, αναλόγως με τη θέση του X ως προς την $A \vee X_0$.

The diagram shows a triangle with vertices \$Z\$, \$X_0\$, and \$A\$. A horizontal line \$\ell\$ passes through \$Z\$. A line segment connects \$X_0\$ and \$A\$. Another line segment connects \$X\$ and \$\varphi(X_0)\$. The intersection of the line through \$X_0\$ and \$A\$ and the line through \$X\$ and \$\varphi(X_0)\$ is labeled \$\varphi(X)\$. The point \$X\$ lies on the segment \$ZA\$.

Επειδή είναι $X \neq X_0$, ορίζεται η ευθεία $X \vee X_0$ και το σημείο Z , στο οποίο τέμνονται οι $X \vee X_0$, $\psi(X \vee X_0) = \phi(X) \vee \phi(X_0)$ και ℓ (κατά την Πρόταση 2.2.13). Επομένως, τα σημεία $\phi(X)$, $\phi(X_0)$, Z είναι συγγραμμικά, οπότε

Προφανώς $\phi(X_0) \neq Z$ [αν ήταν $\phi(X_0) = Z$, τότε, επειδή η ℓ είναι άξονας και της (ϕ^{-1}, ψ^{-1}) (βλ. Πρόταση 2.2.10), θα είχαμε ότι $X_0 = \phi^{-1}(Z) = Z \in \ell$ (άτοπο)].

$$(2.2.6) \quad \phi(X) \in A \vee X.$$

ή, ισοδύναμα, την

$$(2.2.8') \quad \phi(X) = (A \vee X) \wedge [\phi(Y_0) \vee ((X \vee Y_0) \wedge \ell)].$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση προσδιορίζεται η εικόνα $\phi(X)$ οποιουδήποτε σημείου $X \in \mathcal{P}$. Τέλος και η ψ είναι εντελώς καθορισμένη από τις προηγούμενες εκφράσεις της ϕ , σύμφωνα με την Άσκηση 2.1.11.(4). $\square$

2.2.17 Παρατηρήσεις. 1) Στις σχέσεις (2.2.8) και (2.2.8') θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε το $\phi(Y_0)$ με την τιμή του που προκύπτει από τις (2.2.7) και (2.2.7'). Θα είχαμε όμως μια σειρά από αλλεπάλληλες παρενθέσεις, που κάθε άλλο παρά θα απλοποιούσαν τα πράγματα.

2) Στην προηγούμενη απόδειξη προσδιορίσαμε την εικόνα $\phi(X)$ ενός σημείου X με $X \neq A$ και $X \notin \ell$, αφού για $X = A$ ή $X \in \ell$ έχουμε πάντοτε ότι $\phi(X) = X$.

Θα δούμε τώρα τη συνέπεια της ύπαρξης σταθερών σημείων (εκτός του κέντρου και των σημείων του άξονα) σε μια συγγραμμικότητα. Ακριβέστερα ισχύει το επομένο

2.2.18 Πρόρισμα. Υποθέτουμε ότι $(\phi, \psi) \in \mathbb{L}(A, \ell)$ και $X_0 \in \mathcal{P}$ είναι σημείο τέτοιο ώστε $X_0 \neq A$, $X_0 \notin \ell$ και $\phi(X_0) = X_0$. Τότε η συγγραμμικότητα είναι ο ταυτοτικός αυτομορφισμός του προβολικού επιπέδου, δηλαδή $(\phi, \psi) = (id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την προηγούμενη Παρατήρηση 2.2.17(2), αρκεί να δείξουμε ότι είναι $\phi(X) = X$ και για οποιοδήποτε $X \in \mathcal{P}$ με $X \neq A$ και $X \notin \ell$. Εφ' όσον γνωρίζουμε την εικόνα του X_0 [δηλ., $\phi(X_0) = X_0$], μπορούμε να βρούμε και την εικόνα $\phi(X)$, σύμφωνα με το βασικό Θεώρημα 2.2.16. Επομένως, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) $X \notin A \vee X_0$. Λόγω της υπόθεσης, η (2.2.7) δίνει ότι

$$\phi(X) = (A \vee X) \wedge (\phi(X_0) \vee Z) = (A \vee X) \wedge (X_0 \vee Z).$$

Επειδή $Z := (X \vee X_0) \wedge \ell$, έχουμε ότι τα X , X_0 και Z είναι συγγραμμικά, άρα

$$(2.2.9) \quad X_0 \vee Z = X \vee X_0.$$

Συνεπώς, η (2.2.9) μετατρέπει την παραπάνω έκφραση του $\phi(X)$ στη

$$\phi(X) = (A \vee X) \wedge (X \vee X_0) = X,$$

η οποία έχει έννοια επειδή $A \vee X \neq X \vee X_0$ (γιατί:).

ii) $A \vee X \in A \vee X_0$, τότε [βλ. σχέση (2.2.8)]

$$(2.2.10) \quad \phi(X) = (A \vee X) \wedge (\phi(Y_0) \vee H),$$

για ένα οποιοδήποτε $Y_0 \notin A \vee X_0$. Ακολουθώντας την αποδεικτική διαδικασία της περίπτωσης ι), και έχοντας υπ' όψιν ότι $\phi(Y_0) = Y_0$, μετασχηματίζουμε τη (2.2.10) στη σχέση

$$\phi(X) = (A \vee X) \wedge (Y_0 \vee H) = (A \vee X) \wedge (X \vee Y_0) = X,$$

αφού τα X , Y_0 και H είναι συγγραμμικά. Επομένως, σε κάθε περίπτωση είναι $\phi(X) = X$, για οποιοδήποτε $X \in \mathcal{P}$, δηλαδή $\phi = id_{\mathcal{P}}$.

Μένει να δείξουμε ότι $\psi = id_{\mathcal{L}}$. Αν k είναι τυχούσα ευθεία, τότε $k = P \vee Q$, για δύο οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία της. Επομένως,

$$\psi(k) = \psi(P \vee Q) = \phi(P) \vee \phi(Q) = P \vee Q = k,$$

με την οποίαν ολοκληρώνεται η απόδειξη. $\square$

2.2.19 Πορίσμα. Υποθέτουμε ότι (ϕ, ψ) και $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ είναι δύο συγγραμμικότητες της ομάδας $\mathbb{L}(A, \ell)$ και $X_0 \in \mathcal{P}$ σημείο τέτοιο ώστε $X_0 \neq A$, $X_0 \notin \ell$ και $\phi(X_0) = \bar{\phi}(X_0)$. Τότε $(\phi, \psi) = (\bar{\phi}, \bar{\psi})$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.2.10 προκύπτει ότι

$$(\phi^{-1} \circ \bar{\phi}, \psi^{-1} \circ \bar{\psi}) = (\phi^{-1}, \psi^{-1}) \circ (\bar{\phi}, \bar{\psi}) = (\phi, \psi)^{-1} \circ (\bar{\phi}, \bar{\psi}) \in \mathbb{L}(A, \ell).$$

Επομένως, επειδή η $\phi(X_0) = \bar{\phi}(X_0)$ συνεπάγεται ότι $(\phi^{-1} \circ \bar{\phi})(X_0) = X_0$, το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του Πορίσματος 2.2.18. $\square$

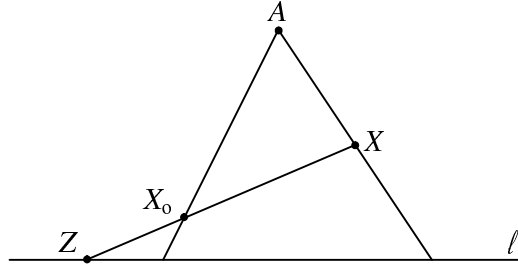
2.2.20 Παρατήρηση. Μπορούμε να δώσουμε μια άλλη απόδειξη του Πορίσματος 2.2.18, η οποία δεν χρησιμοποιεί εξ αρχής τις εκφράσεις (2.2.7) και (2.2.8).

Για τυχόν $X \in \mathcal{P}$, με $X \notin A \vee X_0$ και $X \notin \ell$ (βλ. και το επόμενο Σχήμα 2.6) θα είναι

$$X = (A \vee X) \wedge (X \vee X_0) = (A \vee X) \wedge (X_0 \vee Z),$$

όπου $Z = \ell \wedge (X \vee X_0)$ (εύκολα ελέγχεται ότι όλες οι προηγούμενες εκφράσεις έχουν έννοια). Επομένως,

$$\begin{aligned} \phi(X) &= \phi((A \vee X) \wedge (X_0 \vee Z)) = \psi(A \vee X) \wedge \psi(X_0 \vee Z) \\ &= (A \vee X) \wedge (\phi(X_0) \vee \phi(Z)) = (A \vee X) \wedge (X_0 \vee Z) \\ &= X. \end{aligned}$$

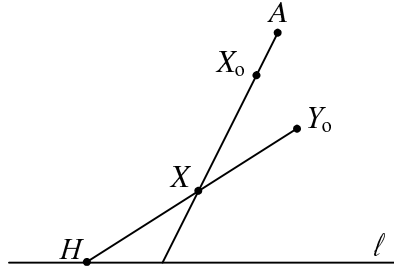


Σχήμα 2.6

Επίσης, αν $X \in A \vee X_0$, εκλέγουμε ένα βοηθητικό σημείο $Y_0 \notin A \vee X_0$, οπότε

$$X = (A \vee X_0) \wedge (X \vee Y_0) = (A \vee X_0) \wedge (Y_0 \vee H),$$

όπου $H = \ell \wedge (X \vee Y_0)$.



Σχήμα 2.7

Όπως προηγουμένως, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi(X) &= \psi(A \vee X_0) \wedge \psi(Y_0 \vee Z) = (A \vee X_0) \wedge (\phi(Y_0) \vee \phi(Z)) \\ &= (A \vee X_0) \wedge (Y_0 \vee Z) = X. \end{aligned}$$

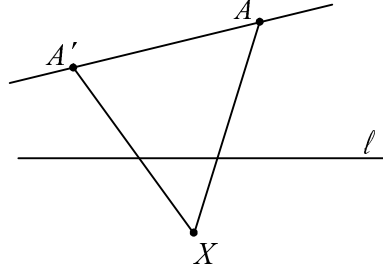
Άρα, τελικώς $\phi = id_{\mathcal{P}}$. Η $\psi = id_{\mathcal{L}}$ δείχνεται όπως στην αρχική απόδειξη.

Τα Σχήματα 2.6 και 2.7 απεικονίζουν τους προηγούμενους συλλογισμούς στην περίπτωση μιας ομολογίας.

Μπορούν να βρεθούν παραδείγματα συγγραμμικοτήτων που δεν έχουν κέντρο –άρα ούτε άξονα (βλ. F. W. Stevenson [28, σελ. 97]). Όμως, όταν αυτά τα στοιχεία υπάρχουν, είναι μονοσήμαντα ορισμένα σύμφωνα με την επομένη

2.2.21 Πρόταση. Κάθε κεντρική/αξονική συγγραμμικότητα, διάφορη της ταυτοτικής, έχει ακριβώς ένα κέντρο κι έναν άξονα.

Απόδειξη. Έστω μία συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) με κέντρο A και άξονα ℓ , κι ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και ένα δεύτερο κέντρο $A' \neq A$.



Σχήμα 2.8

Θεωρούμε τυχόν $X \in \mathcal{P}$, με $X \notin \ell$ και $X \notin A \vee A'$ (οπότε $X \neq A$ και $X \neq A'$). Παρατηρούμε ότι $A \vee X \neq A' \vee X$, γιατί στην αντίθετη περίπτωση τα A, A', X θα ήσαν συγγραμμικά (άτοπο, σύμφωνα με την επιλογή του X). Επομένως, $X = (A \vee X) \wedge (A' \vee X)$, οπότε

$$\begin{aligned}\phi(X) &= \phi((A \vee X) \wedge (A' \vee X)) = \psi(A \vee X) \wedge \psi(A' \vee X) \\ &= (A \vee X) \wedge (A' \vee X) = X.\end{aligned}$$

Όμως, το Πόρισμα 2.2.18 συνεπάγεται ότι η (ϕ, ψ) είναι η ταυτοτική συγγραμμικότητα, πράγμα το οποίον αντιβαίνει στην αρχική υπόθεση για την (ϕ, ψ) . Επομένως, δεν υπάρχει άλλο κέντρο εκτός από το A .

Το μονοσήμαντο του άξονα προκύπτει ως δυϊκό του προηγουμένου συμπεράσματος. $\square$

2.2.22 Παρατήρηση. Το Σχήμα 2.8 απεικονίζει την περίπτωση όπου και τα δύο κέντρα A, A' δεν είναι σημεία της ℓ . Οι ίδιοι συλλογισμοί ισχύουν αν το ένα ή και τα δύο κέντρα βρίσκονται επί της ℓ .

2.2.23 Ασκήσεις.

- 1) Να αποδειχθούν με λεπτομέρειες η Πρόταση 2.2.6 (χωρίς την αρχή του δυϊσμού) και η Πρόταση 2.2.10.
- 2) Να σχεδιαστούν τα ανάλογα των Σχημάτων 2.4 και 2.5 για επάρσεις.

- 3) Να διατυπωθούν και να αποδειχθούν χωρίς τη χρήση της αρχής του δυϊσμού τα δυϊκά του Θεωρήματος 2.2.16 και των Πορισμάτων 2.2.18, 2.2.19.
- 4) Έστω $(\phi, \psi) \in \mathbb{L}(A, \ell)$. Αν $(\phi, \psi) \neq (id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$, τότε τα μόνα σταθερά σημεία [δηλαδή τα X με $\phi(X) = X$] είναι το κέντρο και τα σημεία του άξονα, ενώ οι μόνες σταθερές ευθείες [δηλαδή οι k με $\psi(k) = k$] είναι ο άξονας και οι ευθείες που περνούν από το κέντρο.
- 5) Έστω $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ απεικόνιση 1-1 και επί, η οποία διατηρεί τη συγγραμμικότητα των σημείων, δηλαδή απεικονίζει συγγραμμικά σημεία σε συγγραμμικά. Τότε υπάρχει μία καλά ορισμένη και μοναδική απεικόνιση $\psi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, έτσι ώστε $(\phi, \psi) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$. Μπορεί το συμπέρασμα αυτό να χρησιμοποιηθεί για τη διατύπωση ενός άλλου (ισοδύναμου) ορισμού της συγγραμμικότητας;
- 6) Έστω ένα σημείο X_0 , όπως στο Θεώρημα 2.2.16 ($X_0 \neq A$ και $X_0 \notin \ell$). Αν η συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) είναι ομολογία, τότε οι **επιτρεπτές θέσεις** του $\phi(X_0)$ είναι όλα τα σημεία της ευθείας $A \vee X_0$ εκτός από τα A και $Z = (A \vee X_0) \wedge \ell$, δηλ. $\phi(X_0) \in J(A \vee X_0) - \{A, Z\}$. Ποιές είναι οι επιτρεπτές θέσεις του $\phi(X_0)$, αν η (ϕ, ψ) είναι έπαρση;
- 7) Αν οι ευθείες ενός προβολικού επιπέδου έχουν μόνον τρία (διαφορετικά) σημεία, τότε κάθε ομάδα $\mathbb{H}(A, \ell)$, $A \notin \ell$, είναι τετριμμένη. Τι συμπεραίνεται για την ομάδα $\mathbb{H}(A, \ell)$ του επιπέδου των 7 σημείων; [Σημείωση: Τα προηγούμενα δεν ισχύουν για την ομάδα $\mathbb{E}(A, \ell)$, $A \in \ell$.]

2.3 Μερικές εφαρμογές των ισομορφισμών

α) Συσχετισμοί ομάδων συγγραμμικότητας

Η πρώτη εφαρμογή αναφέρεται στη σύγκριση διαφόρων ομάδων κεντρικών/αξονικών συγγραμμικότητας, όταν αυτές συνδέονται με μία κατάλληλη συγγραμμικότητα.

2.3.1 Πρόταση. Δίνεται μία συγγραμμικότητα $(\sigma, \tau) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$. Τότε ισχύουν τα επόμενα:

i) Αν $(\phi, \psi) \in \mathbb{L}(A, \ell)$ και $(\bar{\phi}, \bar{\psi}) := (\sigma, \tau) \circ (\phi, \psi) \circ (\sigma, \tau)^{-1}$, τότε

$$(\bar{\phi}, \bar{\psi}) \in \mathbb{L}(\sigma(A), \tau(\ell)).$$

ii) Η αντιστοιχία

$$\mathbb{L}(A, \ell) \ni (\phi, \psi) \mapsto (\bar{\phi}, \bar{\psi}) \in \mathbb{L}(\sigma(A), \tau(\ell))$$

είναι ισομορφισμός ομάδων.

Απόδειξη. Η $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ είναι προφανώς συγγραμμικότητα ως σύνθεση συγγραμμικοτήτων (βλ. Πρόταση 2.2.2).

Έστω τυχούσα $k \in J(\sigma(A))$. Τότε

$$(2.3.1) \quad \bar{\psi}(k) = (\tau \circ \psi \circ \tau^{-1})(k) = (\tau \circ \psi)(\tau^{-1}(k)).$$

Όμως $k \in J(\sigma(A))$ συνεπάγεται ότι $\sigma(A) \in k$ και $\sigma^{-1}(\sigma(A)) = A \in \tau^{-1}(k)$, άρα η ευθεία $\tau^{-1}(k)$ διέρχεται από το κέντρο A της (ϕ, ψ) , οπότε $\psi(\tau^{-1}(k)) = \tau^{-1}(k)$. Επομένως, η (2.3.1) ανάγεται στην

$$\bar{\psi}(k) = \tau(\psi(\tau^{-1}(k))) = \tau(\tau^{-1}(k)) = k,$$

που δείχνει ότι το $\sigma(A)$ είναι κέντρο της $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$.

Αναλόγως, για οποιοδήποτε $P \in \tau(\ell)$, είναι $\bar{\phi}(P) = \sigma(\phi(\sigma^{-1}(P)))$. Αλλά $P \in \tau(\ell)$ συνεπάγεται ότι $\sigma^{-1}(P) \in \tau^{-1}(\tau(\ell)) = \ell$, δηλαδή το $\sigma^{-1}(P)$ είναι σημείο του άξονα της (ϕ, ψ) . Επομένως, $\phi(\sigma^{-1}(P)) = \sigma^{-1}(P)$ και

$$\bar{\phi}(P) = \sigma(\phi(\sigma^{-1}(P))) = \sigma(\sigma^{-1}(P)) = P,$$

που αποδεικνύει ότι η $\tau(\ell)$ είναι άξονας της $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$. Επομένως ισχύει ο πρώτος ισχυρισμός της πρότασης.

Η απόδειξη του ισχυρισμού ii) είναι άμεση. $\square$

2.3.2 Πόρισμα. Θεωρούμε δύο ομάδες συγγραμμικοτήτων $\mathbb{L}(A, \ell)$ και $\mathbb{L}(B, m)$ του ιδίου προβολικού επιπέδου $\mathcal{P}$. Αν υπάρχει συγγραμμικότητα $(\sigma, \tau) \in \text{Aut}(\mathcal{P})$, τέτοια ώστε $\sigma(A) = B$ και $\tau(\ell) = m$, τότε οι ομάδες $\mathbb{L}(A, \ell)$ και $\mathbb{L}(B, m)$ είναι ισόμορφες.

Απόδειξη. Αν $\Phi : \mathbb{L}(A, \ell) \rightarrow \mathbb{L}(B, m)$ είναι η απεικόνιση που ορίζεται με τη σχέση $\Phi((\phi, \psi)) := (\sigma, \tau) \circ (\phi, \psi) \circ (\sigma, \tau)^{-1}$, τότε το πόρισμα είναι άμεση συνέπεια του συμπεράσματος ii) της Πρότασης 2.3.1. $\square$

2.3.3 Πόρισμα. Με τις προϋποθέσεις του Πορίσματος 2.3.2, ισχύουν οι επόμενοι ισομορφισμοί ομάδων:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(A, \ell) &\cong \mathbb{H}(B, m), & \text{αν } A \notin \ell & \text{ και } B \notin m, \\ \mathbb{E}(A, \ell) &\cong \mathbb{E}(B, m), & \text{αν } A \in \ell & \text{ και } B \in m. \end{aligned}$$

β) Σύγκριση των επιπέδων $\mathcal{P}$ και $(\mathcal{P}^-)^+$

Στην επομένη εφαρμογή συγκρίνεται ένα προβολικό επίπεδο με το επίπεδο που προκύπτει από τη διαδοχική εφαρμογή της διαδικασίας της αποπλήρωσης και της πλήρωσης (βλ. Παράγραφο 1.6).

Ακριβέστερα, θεωρούμε ένα προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ (για χάρη της γενικότητας χρησιμοποιούμε την αφηρημένη σχέση σύμπτωσης I) και την αποπλήρωση $(\mathcal{P}^-, \mathcal{L}^-, I^-)$, η οποία προκύπτει με την «αφαίρεση» μιας ευθείας ℓ_0 . Κατόπιν, από το προηγούμενο συσχετισμένο επίπεδο κατασκευάζουμε την πλήρωση $((\mathcal{P}^-)^+, (\mathcal{L}^-)^+, (I^-)^+)$. Θα δείξουμε ότι το αρχικό προβολικό επίπεδο είναι ισόμορφο με το τελευταίο.

Για να κατανοήσουμε τη διαδικασία της απόδειξης αυτού του ισχυρισμού (που γίνεται στο επόμενο Θεώρημα 2.3.4), από τις αντίστοιχες κατασκευές της πλήρωσης και αποπλήρωσης, παρατηρούμε τα εξής:

Αν $P \in \mathcal{P}$ με $(P, \ell_0) \notin I$, τότε $P \in \mathcal{P}^-$ και $P \in (\mathcal{P}^-)^+$.

Αν $\mathcal{Q} \in \mathcal{P}$ με $(\mathcal{Q}, \ell_0) \in I$, τότε οι ευθείες της μορφής k^- , για $k \in J(\mathcal{Q})$, είναι όλες μεταξύ τους παράλληλες. Επομένως, μέσω της πλήρωσης, ορίζεται το (μοναδικό) ιδεατό σημείο $(k^-)^* \in \mathcal{E}_\infty$.

Επίσης, για μία ευθεία $\ell \in \mathcal{L}$ με $\ell \neq \ell_0$, ορίζεται, μέσω της αποπλήρωσης, η ℓ^- και από αυτήν η $(\ell^-)^* \in (\mathcal{L}^-)^+$.

Για διευκόλυνση, στην επομένη σελίδα, παραθέτουμε το βοηθητικό Σχήμα 2.9, όπου το α παριστάνει τη διαδικασία της αποπλήρωσης και το π τη διαδικασία της πλήρωσης.

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις αποτελούν το κίνητρο για να θεωρήσουμε το ζεύγος

$$(\phi, \psi) : (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I) \longrightarrow ((\mathcal{P}^-)^+, (\mathcal{L}^-)^+, (I^-)^+),$$

που ορίζεται με τον εξής τρόπο:

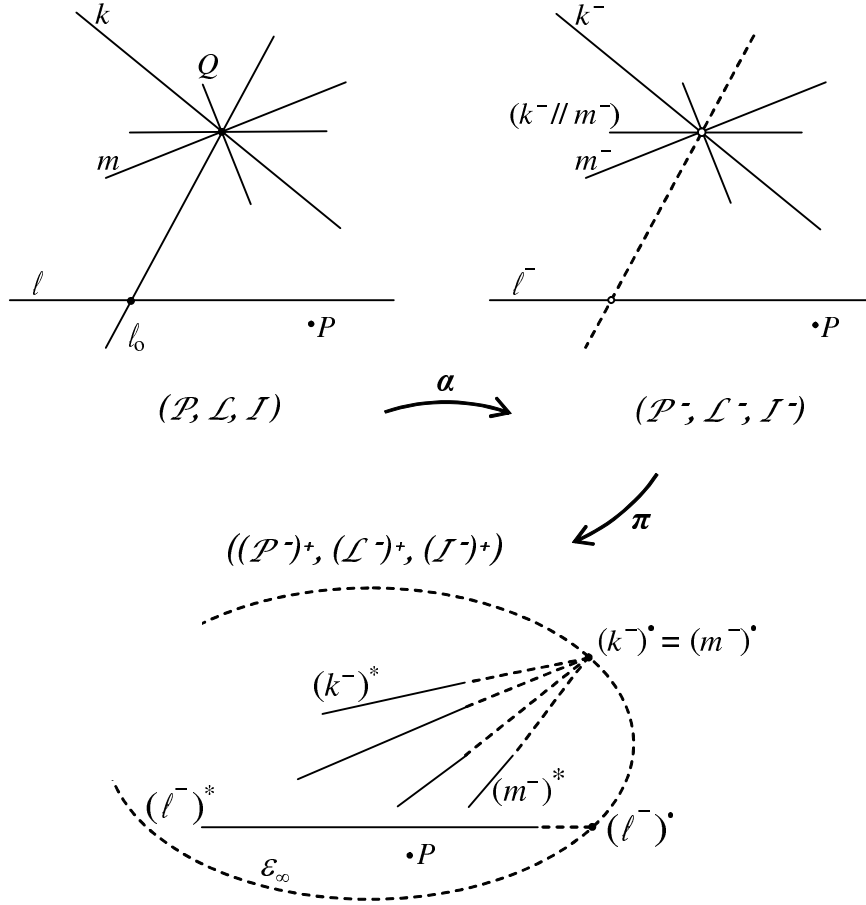
$$\begin{aligned} \phi(P) &:= P, & \text{αν } P \in \mathcal{P} \text{ με } (P, \ell_0) \notin I, \\ \phi(\mathcal{Q}) &:= (k^-)^*, & \text{αν } \mathcal{Q} \in \mathcal{P} \text{ με } (\mathcal{Q}, \ell_0) \in I, \text{ όπου } k \\ & & \text{τυχούσα ευθεία του } \mathcal{L} \text{ με } k \in J(\mathcal{Q}) \\ & & \text{και } k \neq \ell_0, \\ \psi(\ell) &:= (\ell^-)^*, & \text{αν } \ell \neq \ell_0, \\ \psi(\ell_0) &:= \mathcal{E}_\infty. \end{aligned}$$

Ελέγχουμε στοιχειωδώς ότι οι απεικονίσεις ϕ και ψ είναι καλά ορισμένες, οπότε μπορούμε να αποδείξουμε το

2.3.4 Θεώρημα. Το ζεύγος (ϕ, ψ) ορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ των προβολικών επιπέδων $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ και $((\mathcal{P}^-)^+, (\mathcal{L}^-)^+, (I^-)^+)$.

Απόδειξη. Ας δείξουμε πρώτα ότι το (ϕ, ψ) είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων. Πραγματικά αν $(P, \ell) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ με $(P, \ell) \in I$, διακρίνουμε τις επόμενες

περιπτώσεις:



Σχήμα 2.9

1) $\ell \neq \ell_0$ και $(P, \ell_0) \notin \mathcal{I}$. Τότε

$$\phi(P) = P \in J(\ell) - \{\ell \wedge \ell_0\} = \ell^- \equiv J(\ell^-).$$

Άρα, κατά τον ορισμό της σχέσης σύμπτωσης στην πλήρωση,

$$(\phi(P), \psi(\ell)) = (P, (\ell^-)^*) \in (\mathcal{I}^-)^+.$$

2) $\ell = \ell_0$. Τότε $\phi(P) = (k^-)^* \in \mathcal{E}_\infty = \psi(\ell_0)$, για τυχούσα $k \in \mathcal{L}$ με $P \in J(k)$ και $k \neq \ell_0$. Άρα $(\phi(P), \psi(\ell)) \in (\mathcal{I}^-)^+.$

3) $\ell \neq \ell_0$, $P = \ell \wedge \ell_0$. Εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση 2), διαπιστώνουμε και πάλι ότι $(\phi(P), \psi(\ell)) \in (I^-)^+$. Εδώ παρατηρούμε ότι μπορούμε να πάρουμε ως k της προηγούμενης περίπτωσης τη δοθείσα ευθεία ℓ .

Η απεικόνιση ϕ είναι 1-1: Θεωρούμε δύο οποιαδήποτε σημεία A, B του $\mathcal{P}$ και υποθέτουμε ότι $\phi(A) = \phi(B)$. Για να δείξουμε ότι $A = B$ διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Τα A, B ανήκουν στην ℓ_0 .

β) Τα A, B δεν ανήκουν στην ℓ_0 .

Στην πρώτη περίπτωση, θα είναι $\phi(A) = (k^-)^*$ και $\phi(B) = (\ell^-)^*$, για δύο ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$ διαφορετικές από την ℓ_0 και τέτοιες ώστε $k \in J(A)$, $\ell \in J(B)$. Επομένως, $A = k \wedge \ell_0$ και $B = \ell \wedge \ell_0$, οπότε $k^- = J(k) - \{A\}$ και $\ell^- = J(\ell) - \{B\}$. Η υπόθεση $\phi(A) = \phi(B)$ συνεπάγεται τώρα ότι $(k^-)^* = (\ell^-)^*$, δηλ. $k^- \parallel \ell^-$, οπότε εμφανίζονται οι επόμενες υποπεριπτώσεις:

$$\alpha_1) k^- = \ell^-, \quad \alpha_2) k^- \cap \ell^- = \emptyset.$$

Στην α_1) προκύπτει αμέσως ότι, για κάθε $Z \in k^- = \ell^-$, είναι $Z \in J(k) \cap J(\ell)$, $A \neq Z \neq B$. Επομένως, για οποιαδήποτε X, Y της k , διαφορετικά από το A , είναι $k = X \vee Y = \ell$, άρα και $A = k \wedge \ell_0 = \ell \wedge \ell_0 = B$.

Στην α_2) θα είναι, κατ' ανάγκην, $k \neq \ell$, οπότε ορίζεται το σημείο $S = k \wedge \ell$. Το S δεν μπορεί να είναι διαφορετικό από τα A, B ταυτοχρόνως, γιατί τότε θα ήταν $S \in k^- \cap \ell^-$ (άτοπο). Επομένως, αν $S = A$, τότε οι ευθείες k, ℓ, ℓ_0 διέρχονται από το $A = S$. Άρα (βλ. Πρόταση 1.2.8 και τη δυϊκή της Πρότασης 1.2.5) $A = k \wedge \ell_0 = \ell \wedge \ell_0 = B$. Παρόμοια βρίσκουμε ότι $A = B$, αν $S = B$.

Στην περίπτωση β), από τον ορισμό της ϕ προκύπτει αμέσως ότι $A = \phi(A) = \phi(B) = B$. Επομένως, αποδεικνύεται το 1-1 της ϕ .

Η απεικόνιση ϕ είναι επί: Θεωρούμε τυχόν $Y \in (\mathcal{P}^-)^+$ και θα δείξουμε ότι υπάρχει $X \in \mathcal{P}$ με $\phi(X) = Y$. Και εδώ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) Το Y είναι πραγματικό σημείο, ii) Το Y είναι ιδεατό.

Στην περίπτωση i) το Y ανήκει και στο $\mathcal{P}^-$, άρα μπορούμε να πάρουμε $X = Y$ (φυσικά, το X δεν ανήκει στην ℓ_0).

Στη ii) θα είναι $Y \in \mathcal{E}_\infty$, άρα $Y = (k^-)^*$, όπου $k^- = J(k) - \{k \wedge \ell\}$, για κάποια ευθεία $k \in \mathcal{L}$ με $k \neq \ell_0$. Επειδή $\phi(k \wedge \ell_0) = (k^-)^*$, αρκεί να πάρουμε $X = k \wedge \ell_0$.

Συνεπώς, κατά το Πόρισμα 2.1.6, ο μορφισμός (ϕ, ψ) είναι ισομορφισμός, και αποδεικνύεται πλήρως το θεώρημα. $\square$

2.3.5 Παρατήρηση. Ένα ανάλογο πρόβλημα είναι αυτό της σύγκρισης ενός συσχετισμένου επιπέδου $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ με το επίπεδο $((\mathcal{P}^+)^-, (\mathcal{L}^+)^-, (I^+)^-)$, που προκύπτει από την εφαρμογή της διαδικασίας της πλήρωσης και μετά της αποπλήρωσης. Δεν θα επεκταθούμε προς την κατεύθυνση αυτή, που αφορά ουσιαστικά τη δομή του συσχετισμένου επιπέδου και δεν αποτελεί αντικείμενο του αμέσου

ενδιαφέροντός μας εδώ. Σημειώνουμε μόνον ότι τα προηγούμενα συσχετισμένα επίπεδα δεν είναι πάντοτε μεταξύ τους ισόμορφα. Η διαπίστωση αυτή προκύπτει με τη βοήθεια (αντι)παραδειγμάτων βασισμένων σε αλγεβρικές μεθόδους που βρίσκονται έξω από τους σκοπούς του βιβλίου αυτού. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει για λεπτομέρειες στον F. W. Stevenson [28, Σχόλια σελ. 32 και Θεώρημα 2.7.9].

γ) Επεκτάσεις συσχετισμένων ισομορφισμών

Με την ορολογία της Άσκησης 2.1.11(10), θα δείξουμε ότι από έναν ισομορφισμό συσχετισμένων επιπέδων μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν ισομορφισμό μεταξύ των πληρώσεων τους σε προβολικά επίπεδα.

2.3.6 Θεώρημα. Αν $(\phi, \psi) : (\mathcal{P}_1, \mathcal{L}_1, I_1) \rightarrow (\mathcal{P}_2, \mathcal{L}_2, I_2)$ είναι ισομορφισμός συσχετισμένων επιπέδων, τότε υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των πληρώσεων τους $(\phi^+, \psi^+) : (\mathcal{P}_1^+, \mathcal{L}_1^+, I_1^+) \rightarrow (\mathcal{P}_2^+, \mathcal{L}_2^+, I_2^+)$, τέτοιος ώστε $\phi^+|_{\mathcal{P}} = \phi$.

Απόδειξη. Ορίζουμε τις απεικονίσεις $\phi^+ : \mathcal{P}_1^+ \rightarrow \mathcal{P}_2^+$ και $\psi^+ : \mathcal{L}_1^+ \rightarrow \mathcal{L}_2^+$, αντιστοίχως με τις σχέσεις

$$\phi^+(P^+) := \begin{cases} \phi(P), & \text{αν } P^+ = P \in \mathcal{P}_1, \\ (\psi(k))^*, & \text{αν } P^+ = k^* \in \mathcal{E}_\infty, \end{cases}$$

$$\psi^+(\ell^+) := \begin{cases} J(\psi(\ell)) \cup \{(\psi(\ell))^*\}, & \text{αν } \ell^+ = J(\ell) \cup \{\ell^*\}, \ell \in \mathcal{L}_1, \\ \mathcal{E}_\infty, & \text{αν } \ell^+ = \mathcal{E}_\infty. \end{cases}$$

Διαπιστώνουμε αμέσως ότι οι απεικονίσεις αυτές είναι καλά ορισμένες, αφού $k//\ell$ συνεπάγεται ότι $\psi(k)//\psi(\ell)$, άρα $(\psi(k))^* = (\psi(\ell))^*$.

Η ϕ^+ είναι 1-1: Ήδη ο περιορισμός της επί του $\mathcal{P}_1$ είναι 1-1. Αν τώρα $(\psi(k))^* = (\psi(\ell))^*$, τότε $\psi(k)//\psi(\ell)$, άρα [βλ. Άσκηση 2.1.11(10), ερώτημα γ)] $k//\ell$ και $k^* = \ell^*$, δηλαδή η ϕ^+ είναι 1-1 και επί της ιδεατής ευθείας.

Η ϕ^+ είναι επί: Έστω τυχόν $Q^+ \in \mathcal{P}_2^+$. Αν $Q^+ = Q \in \mathcal{P}_2$, τότε, για το $P = \phi^{-1}(Q) \in \mathcal{P}_1$ έχουμε ότι $\phi^+(P) = Q^+$. Αν $Q^+ = m^*$, τότε, για $k = \psi^{-1}(m)$ είναι $\phi^+(k^*) = m^*$, που ολοκληρώνει την απόδειξη του επί.

Το ζεύγος (ϕ^+, ψ^+) είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων: Θεωρούμε τυχόν $(P^+, \ell^+) \in \mathcal{P}_1^+ \times \mathcal{L}_1^+$ με $P^+ \in \ell^+$. Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

i) $P^+ = P \in \mathcal{P}_1$, $\ell^+ = J(\ell) \cup \{\ell^*\}$. Τότε $P \in J(\ell)$ και $\phi(P) \in J(\psi(\ell))$. Άρα,

$$\phi^+(P^+) = \phi(P) \in J(\psi(\ell)) \subset J(\psi(\ell)) \cup \{\ell^*\} = \psi^+(\ell^+).$$

ii) $P^+ = k^* \in \mathcal{E}_\infty$, $\ell^+ = J(\ell) \cup \{\ell^*\}$. Τότε αναγκαίως $k^* = \ell^*$, οπότε

$$\phi^+(P^+) = (\psi(\ell))^* \in J(\psi(\ell)) \cup \{\ell^*\} = \psi^+(\ell^+).$$

iii) $P^+ = k^* \in \mathcal{E}_\infty$, $\ell^+ = \mathcal{E}_\infty$. Τότε

$$\phi^+(P^+) = \phi^+(k^*) = (\psi(k))^* \in \psi^+(\mathcal{E}_\infty) = \mathcal{E}_\infty.$$

Φυσικά, η περίπτωση $P^+ = P$, $\ell^+ = \mathcal{E}_\infty$ δεν έχει έννοια.

Εφ' όσον το (ϕ^+, ψ^+) είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων 1-1 και επί, είναι και ισομορφισμός. $\square$

2.3.7 Πόρισμα. Με τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.3.6 υπάρχει ένας μοναδικός ισομορφισμός (ϕ^+, ψ^+) , τέτοιος ώστε $\phi^+|_{\mathcal{P}} = \phi$ και $\phi^+(\ell^*) = (\psi(\ell))^*$, για κάθε $\ell \in \mathcal{L}$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και ένας ισομορφισμός $(\bar{\phi}^+, \bar{\psi}^+)$ με τις ιδιότητες του (ϕ^+, ψ^+) . Τότε οι σχέσεις $\phi^+|_{\mathcal{P}} = \phi = \bar{\phi}^+|_{\mathcal{P}}$ και $\phi^+(\ell^*) = (\psi(\ell))^* = \bar{\phi}^+(\ell^*)$, για κάθε $\ell \in \mathcal{L}$, αποδεικνύουν ότι $\phi^+ = \bar{\phi}^+$. Επομένως, σύμφωνα με την Άσκηση 2.1.11(5), έχουμε το συμπέρασμα. $\square$

Κατά μία συνηθισμένη ορολογία, ο ισομορφισμός (ϕ^+, ψ^+) καλείται **επέκταση** του ισομορφισμού συσχετισμένων επιπέδων (ϕ, ψ) .

Παρακινούμενοι από την έννοια της συγγραμμικότητας προβολικού επιπέδου, θα λέμε ότι μία **συσχετισμένη συγγραμμικότητα** (affine collineation) ενός συσχετισμένου επιπέδου είναι ένας αυτομορφισμός του επιπέδου αυτού. Επομένως, μπορούμε να διατυπώσουμε και το

2.3.8 Πόρισμα. Κάθε συσχετισμένη συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) ενός συσχετισμένου επιπέδου $\mathcal{P}$ επεκτείνεται σε συγγραμμικότητα $(\phi^+, \psi^+) \in \text{Aut}(\mathcal{P}^+)$ της πλήρωσής του $\mathcal{P}^+$.

2.3.9 Ασκήσεις.

- 1) Να συμπληρωθεί η απόδειξη της Πρότασης 2.3.1.
- 2) Να αποδειχθεί ότι οι απεικονίσεις ϕ και ψ του Θεωρήματος 2.3.4 είναι καλά ορισμένες.
- 3) Να εξηγηθεί γιατί, στην απόδειξη του 1-1 της απεικόνισης ϕ του Θεωρήματος 2.3.4, δεν χρειάζεται να διακρίνουμε την περίπτωση κατά την οποία ένα εκ των A, B ανήκει στην ℓ_0 .
- 4) Δίνεται ένα συσχετισμένο επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ και οι απεικονίσεις $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ και $\psi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, οι οποίες είναι 1-1 και επί, εις τρόπον ώστε να διατηρείται η σχέση της σύμπτωσης [δηλ. $(P, \ell) \in \mathcal{I} \Rightarrow (\phi(P), \psi(\ell)) \in \mathcal{I}'$]. Να αποδειχθεί ότι το ζεύγος (ϕ, ψ) είναι συσχετισμένη συγγραμμικότητα του $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.

- 5) Δίνεται ένα συσχετισμένο επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ και μία 1 – 1 και επί απεικόνιση $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, η οποία έχει την ιδιότητα να απεικονίζει συγγραμμικά σημεία σε συγγραμμικά. Τότε υπάρχει μία μοναδική (1 – 1 και επί) απεικόνιση $\psi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$, έτσι ώστε το ζεύγος (ϕ, ψ) να είναι συσχετισμένη συγγραμμικότητα του $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$.

Κεφάλαιο 3

Το πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}_2$

Η αναλυτική γεωμετρία αρχίζει με ένα μοντέλο της γεωμετρίας που μελετάμε, σε ένα επίπεδο, μία στρέβλωση, ή σε κάποια άλλη μαθηματική κατασκευή. Τα αποτελέσματα συνάγονται με υπολογισμούς εντός της περιοχής που περιβάλλει το μοντέλο. Αυτή η προσέγγιση τονίζει τη σύνδεση της γεωμετρίας με άλλους κλάδους των μαθηματικών και του πραγματικού κόσμου. Μια τέτοια παρουσίαση καλείται «αναλυτική» επειδή συνήθως εξαρτάται από συντεταγμένες (τις ίδιες συντεταγμένες της Αναλυτικής Γεωμετρίας που διδάσκεται στο Λύκειο).

M. HENLE [15, σελ. 5]

ΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΑΥΤΟ αναφέρεται στην αλγεβρική μελέτη του πραγματικού προβολικού επιπέδου $\mathbb{P}_2$ και αποτελεί ένα πρώτο, βασικό παράδειγμα μελέτης της Προβολικής Γεωμετρίας από αυτή τη σκοπιά. Ουσιαστικά πρόκειται για την

αλγεβροποίηση του κλασικού προβολικού επιπέδου, αφού (όπως αποδεικνύεται στην Παράγραφο 5) το τελευταίο είναι ισόμορφο με το $\mathbb{P}_2$. Η περίπτωση της αλγεβροποίησης του τυχόντος προβολικού επιπέδου θα γίνει στο Κεφάλαιο 6.

Σχετικώς αναφέρουμε ότι η μελέτη του προβολικού επιπέδου με αλγεβρικές μεθόδους συνιστά τη λεγόμενη «αναλυτική» Προβολική Γεωμετρία, σε αντίθεση με τη «συνθετική» προσέγγιση που έγινε στα προηγούμενα δύο κεφάλαια.

Στις δύο πρώτες παραγράφους εκτίθεται η κατασκευή του $\mathbb{P}_2$ από τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$, μέσω καταλλήλων σχέσεων ισοδυναμίας, και αποδεικνύεται ότι οι γραμμικοί αυτομορφισμοί του $\mathbb{R}^3$ οδηγούν σε συγγραμμικότητες του $\mathbb{P}_2$.

Στην Παράγραφο 3 η αλγεβρική μελέτη επικεντρώνεται στις ομολογίες του $\mathbb{P}_2$, οι οποίες ταξινομούνται μέσω κατάλληλων (πραγματικών) πινάκων 3×3 μιας πολύ απλής μορφής. Ιδιαίτερως, αποδεικνύεται ότι όλες οι ομάδες $H(A, \ell)$, $A \notin \ell$, είναι τελικώς ισόμορφες με την πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{R}_*$.

Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε, στην Παράγραφο 4, για τις επάρσεις του $\mathbb{P}_2$. Αποδεικνύεται ότι, για $A \in \ell$, είναι $E(A, \ell) \cong \mathbb{R}$, όπου το $\mathbb{R}$ θεωρείται εφοδιασμένο με τη δομή της προσθετικής ομάδας.

3.1 Αλγεβρική μελέτη του $\mathbb{P}_2$

Στο Παράδειγμα 1.2.3(2) ορίσαμε το πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}_2$. Επειδή το επίπεδο αυτό προκύπτει από τον χώρο $\mathbb{R}^3$, στον οποίον υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί ο μηχανισμός της Γραμμικής Άλγεβρας, το $\mathbb{P}_2$ είναι ένα πρώτο (και σημαντικό) παράδειγμα συσχετισμού της Προβολικής Γεωμετρίας με την Άλγεβρα. Έτσι, η αλγεβρική μελέτη του $\mathbb{P}_2$ θα αποτελέσει κίνητρο για τη συστηματική αλγεβροποίηση του τυχόντος προβολικού επιπέδου, που θα γίνει στο Κεφάλαιο 6.

Όπως εξηγήσαμε στο Παράδειγμα 1.2.3(2), τα σημεία του $\mathbb{P}_2$ είναι ακριβώς οι ευθείες του $\mathbb{R}^3$, οι οποίες διέρχονται από το $0 \equiv (0, 0, 0)$, ενώ οι ευθείες του $\mathbb{P}_2$ είναι ακριβώς τα επίπεδα του $\mathbb{R}^3$, τα οποία επίσης διέρχονται από το 0 .

Ας θυμηθούμε από την Αναλυτική/Γραμμική Γεωμετρία ότι, αν $\mathcal{E}$ είναι μια ευθεία του $\mathbb{R}^3$, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε η $\mathcal{E}$ ορίζεται εντελώς από το 0 και τυχόν άλλο σημείο της $(a_0, b_0, c_0) \neq (0, 0, 0)$. Ακριβέστερα

$$(3.1.1) \quad \mathcal{E} = \{t(a_0, b_0, c_0) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Προφανώς, για δύο τυχόντα σημεία $(a, b, c), (a', b', c')$ της $\mathcal{E}$, που είναι διαφορετικά μεταξύ τους καθώς και προς το 0 , υπάρχει κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}_* = \mathbb{R} - \{0\}$, έτσι ώστε $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$.

Απ' το άλλο μέρος, ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$, που διέρχεται από το 0, ορίζεται από μία εξίσωση της μορφής

$$(3.1.2) \quad ax + by + cz = 0,$$

όπου οι συντελεστές a, b, c είναι στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ με $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Οι τριάδες (x, y, z) , που είναι λύσεις της (3.1.2), αποτελούν τα σημεία του επιπέδου. Επειδή ένα τέτοιο επίπεδο καθορίζεται πλήρως από την τριάδα (a, b, c) , το συμβολίζουμε με $\Pi(a, b, c)$.

Αν θεωρήσουμε δύο επίπεδα $\Pi(a, b, c)$ και $\Pi(a', b', c')$, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\Pi(a, b, c) = \Pi(a', b', c') \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_* : (a', b', c') = \lambda(a, b, c).$$

Πραγματικά, η σχέση (3.1.2) συνεπάγεται ότι

$$(a, b, c) \perp (x, y, z),$$

για κάθε $(x, y, z) \in \Pi(a, b, c)$, άρα

$$(a, b, c) \perp \Pi(a, b, c),$$

και παρόμοια

$$(a', b', c') \perp \Pi(a', b', c').$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \Pi(a, b, c) = \Pi(a', b', c') &\Leftrightarrow (a', b', c') \parallel (a, b, c) \\ &\Leftrightarrow (a', b', c') = \lambda(a, b, c). \end{aligned}$$

Οι προηγούμενες υπενθυμίσεις θα μας επιτρέψουν να κατασκευάσουμε, με αλγεβρικό τρόπο, ένα προβολικό επίπεδο ισόμορφο με το $\mathbb{P}_2$. Λόγω της ισομορφίας αυτής θα ταυτίζουμε τα δύο επίπεδα, οπότε θα έχουμε την δυνατότητα να μελετήσουμε το $\mathbb{P}_2$ με αλγεβρικές μεθόδους. Για το σκοπό αυτό, στο χώρο

$$\mathbb{R}_*^3 := \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\},$$

ορίζουμε την επομένη σχέση ισοδυναμίας:

$$(3.1.3) \quad (a, b, c) \sim (a', b', c') \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_* : (a', b', c') = \lambda(a, b, c).$$

Την κλάση ισοδυναμίας του σημείου (a, b, c) συμβολίζουμε με $[a, b, c]$ (αντί του πολυπλοκοτέρου $[(a, b, c)]$). Προφανώς,

$$[a, b, c] = \{\lambda(a, b, c) \mid \lambda \in \mathbb{R}_*\}.$$

Ο αντίστοιχος χώρος-πηλίκων $\mathbb{R}_*^3 / \sim$, δηλαδή το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας, οι οποίες προκύπτουν με τον προηγούμενο τρόπο, συμβολίζεται με $\mathcal{P}^a$. Άρα,

$$(3.1.4) \quad \mathcal{P}^a := \mathbb{R}_*^3 / \sim = \{[a, b, c] \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}_*^3\}.$$

Πιο κάτω, τις κλάσεις του $\mathcal{P}^a$ θα τις αντιστοιχίσουμε στα σημεία του $\mathbb{P}_2$ (δηλαδή τις ευθείες του $\mathbb{R}^3$, που διέρχονται από την αρχή των αξόνων).

Στη συνέχεια, για μια τριάδα $(a, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_*^3$, ορίζουμε το σύνολο

$$(3.1.5) \quad \langle a, \beta, \gamma \rangle := \{[p, q, r] \in \mathcal{P}^a : ap + \beta q + \gamma r = 0\}.$$

Είναι άμεσον ότι ο προηγούμενος ορισμός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των αντιπροσώπων των εμφανιζομένων κλάσεων.

Παρατηρούμε ότι, όπως και στην περίπτωση της ισότητας δύο επιπέδων, θα είναι

$$\langle a, \beta, \gamma \rangle = \langle a', \beta', \gamma' \rangle \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_* : (a', \beta', \gamma') = \lambda(a, \beta, \gamma).$$

Επομένως, μπορούμε κι εδώ να θεωρήσουμε την παρακάτω σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}_*^3$:

$$(3.1.6) \quad (a, \beta, \gamma) \sim (a', \beta', \gamma') \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_* : (a', \beta', \gamma') = \lambda(a, \beta, \gamma).$$

Αν συμβολίσουμε προσωρινά με $\ll a, \beta, \gamma \gg$ την κλάση ισοδυναμίας της τριάδας (a, β, γ) , διαπιστώνουμε αμέσως ότι η αντιστοιχία

$$(3.1.6') \quad \langle a, \beta, \gamma \rangle \mapsto \ll a, \beta, \gamma \gg$$

εισάγει μία καλά ορισμένη, 1-1 και επί απεικόνιση, μέσω της οποίας κάθε $\langle a, \beta, \gamma \rangle$ μπορεί να ταυτιστεί με την κλάση ισοδυναμίας $\ll a, \beta, \gamma \gg$, δηλαδή

$$\begin{aligned} \langle a, \beta, \gamma \rangle &= \{[p, q, r] \in \mathcal{P}^a : ap + \beta q + \gamma r = 0\} \\ &\equiv \{\lambda(a, \beta, \gamma) \mid \lambda \in \mathbb{R}_*\} = \ll a, \beta, \gamma \gg, \end{aligned}$$

άρα μπορούμε να χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο $\langle \rangle$ και στις δύο περιπτώσεις. Θέτουμε

$$\mathcal{L}^a = \{\langle a, \beta, \gamma \rangle \mid (a, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_*^3\}.$$

Θα δούμε πιο κάτω ότι τα στοιχεία (κλάσεις) του $\mathcal{L}^a$ αντιστοιχούν στις ευθείες του $\mathbb{P}_2$ (δηλαδή στα επίπεδα του $\mathbb{R}^3$, που διέρχονται από την αρχή των αξόνων).

Μεταξύ των $\mathcal{P}^a$ και $\mathcal{L}^a$ υπάρχει μια προφανής σχέση σύμπτωσης, που δίνεται από το σύνολοθεωρητικό $\in$, σύμφωνα με την (3.1.5). Επίσης, $\mathcal{P}^a \cap \mathcal{L}^a = \emptyset$.

Επομένως, σχηματίζεται η τριάδα $(\mathcal{P}^a, \mathcal{L}^a, \epsilon)$, όπου ο εκθέτης « a » χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει ότι η κατασκευή της έγινε με τον «αλγεβρικό» τρόπο που περιγράψαμε.

Πριν αποδείξουμε ότι η προηγούμενη τριάδα αποτελεί προβολικό επίπεδο ισόμορφο προς το $\mathbb{P}_2$, ας παρατηρήσουμε ακόμη ότι οι ισοδυναμίες (3.1.3) και (3.1.6) δεν διαφέρουν μεταξύ τους από συνολοθεωρητική άποψη. Όμως, όπως προαναφέραμε, οι κλάσεις της (3.1.3) θα αντιστοιχούν σε σημεία του $\mathbb{P}_2$, ενώ οι κλάσεις της (3.1.6), μέσω της ταύτισης (3.1.6'), θα αντιστοιχούν στις ευθείες του. Λόγω αυτής της διαφοροποίησης, χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $[]$ και $< >$ για να διακρίνουμε μεταξύ τους τις αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας. Έτσι, για παράδειγμα, αν $(x, y, z) \in \mathbb{R}_*^3$, τότε τα στοιχεία $[x, y, z]$ και $< x, y, z >$ συμβολίζουν εντελώς διαφορετικά αντικείμενα στο υπό κατασκευήν προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}^a, \mathcal{L}^a, \epsilon)$: το $[x, y, z]$ είναι ένα σημείο του, ενώ το $< x, y, z >$ είναι μια ευθεία του ιδίου επιπέδου.

3.1.1 Θεώρημα. Η τριάδα $\mathbb{P}_2^a := (\mathcal{P}^a, \mathcal{L}^a, \epsilon)$ ορίζει ένα προβολικό επίπεδο, ισόμορφο προς το $\mathbb{P}_2$.

Απόδειξη. Μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους:

Α' τρόπος (στοιχειώδης): Για την απόδειξη του (ΠΕ 1) θεωρούμε δύο σημεία $[a_1, b_1, c_1]$ και $[a_2, b_2, c_2]$ του $\mathcal{P}^a$ με $[a_1, b_1, c_1] \neq [a_2, b_2, c_2]$. Επομένως, δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}_*$, τέτοιο ώστε $(a_2, b_2, c_2) = \lambda(a_1, b_1, c_1)$. Θα δείξουμε ότι τα δύο σημεία ορίζουν μία (μοναδική) ευθεία. Αν καλέσουμε $< x, y, z >$ την ευθεία αυτή, τότε θα ικανοποιούνται οι εξισώσεις

$$(3.1.7) \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases}$$

Από τους συντελεστές της πρώτης ένας τουλάχιστον δεν μηδενίζεται. Ας υποθέσουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $a_1 \neq 0$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις για το a_2 :

i) $a_2 = 0$. Τότε

$$x = -\frac{b_1}{a_1} y - \frac{c_1}{a_1} z, \quad b_2 y + c_2 z = 0.$$

Επίσης, $(b_2, c_2) \neq (0, 0)$ [αλλιώς θα είχαμε ότι $(a_2, b_2, c_2) = (0, 0, 0)$, άτοπο]. Έτσι, αν υποθέσουμε ότι $b_2 \neq 0$, παίρνουμε

$$y = -\frac{c_2}{b_2} z, \quad x = \left(\frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{c_2}{b_2} - \frac{c_1}{a_1} \right) z.$$

Άρα, θέτοντας $z = t \in \mathbb{R}_*$, βρίσκουμε τη λύση

$$(3.1.8) \quad x = \left(\frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{c_2}{b_2} - \frac{c_1}{a_1} \right) t, \quad y = -\frac{c_2}{b_2} t, \quad z = t.$$

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι, ενώ το t της (3.1.7) μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο $\mathbb{R}_*$, η ευθεία που προκύπτει είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Πραγματικά, για οποιοδήποτε άλλο $z = t' \in \mathbb{R}_*$, θα έχουμε τις ανάλογες εκφράσεις

$$(3.1.7') \quad x' = \left(\frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{c_2}{b_2} - \frac{c_1}{a_1} \right) t', \quad y' = -\frac{c_2}{b_2} t', \quad z' = t',$$

οπότε, από τις (3.1.7) και (3.1.7') προκύπτει ότι

$$(x', y', z') = \hat{h}(x, y, z),$$

όπου έχουμε θέσει $\hat{h} = t' \cdot t^{-1}$. Επομένως, σύμφωνα με την (3.1.6), θα είναι $\langle x, y, z \rangle = \langle x', y', z' \rangle$. Δηλαδή παίρνουμε, τελικώς, μια εντελώς καθορισμένη και μοναδική ευθεία, που ορίζεται από τα δύο δοθέντα σημεία.

Φυσικά, για $z = 0$, ο προσδιορισμός της ζητούμενης ευθείας θα γίνει από την επίλυση του αρχικού συστήματος (3.1.7) με ανάλογη διαδικασία, και όχι από τις (3.1.8), οι οποίες θα οδηγούσαν στη *μη αποδεκτή* λύση $\langle 0, 0, 0 \rangle$.

Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε αν $c_2 \neq 0$.

ii) $a_2 \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή, από τις (3.1.7) έχουμε ότι

$$\frac{b_1}{a_1} y + \frac{c_1}{a_1} z = -x = \frac{b_2}{a_2} y + \frac{c_2}{a_2} z$$

οπότε

$$\left(\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} \right) y = \left(\frac{c_2}{a_2} - \frac{c_1}{a_1} \right) z.$$

Από τους δυο συντελεστές (που βρίσκονται σε παρένθεση) ο ένας τουλάχιστον δεν είναι μηδέν, γιατί στην αντίθετη περίπτωση θα είχαμε ότι

$$(a_1, b_1, c_1) = \hat{h}(a_2, b_2, c_2), \quad \text{όπου} \quad \hat{h} = \frac{a_1}{a_2},$$

δηλαδή $[a_1, b_1, c_1] = [a_2, b_2, c_2]$, που είναι άτοπο. Επομένως, αν υποθέσουμε ότι

$$\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} \neq 0,$$

τότε

$$y = \left(\frac{c_2}{a_2} - \frac{c_1}{a_1} \right) \cdot \left(\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} \right)^{-1} \cdot z$$

και, όπως στην περίπτωση i), βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} z &= t, \\ y &= \left(\frac{c_2}{a_2} - \frac{c_1}{a_1} \right) \cdot \left(\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} \right)^{-1} \cdot t, \\ x &= - \left[\frac{b_1}{a_1} \cdot \left(\frac{c_2}{a_2} - \frac{c_1}{a_1} \right) \cdot \left(\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2} \right)^{-1} + \frac{c_1}{a_1} \right] t, \end{aligned}$$

απ' όπου προσδιορίζεται (μονοσήμαντα) η $\langle x, y, z \rangle$.

Και πάλι, αν $z = 0$, ο προσδιορισμός της ζητούμενης ευθείας θα γίνει από το αρχικό σύστημα με μία ανάλογη διαδικασία, και όχι από τις (3.1.8). Επίσης, διάφορες δυνατές υποπεριπτώσεις, όπως π.χ. $c_2 = 0$, δίνουν στις (3.1.8) απλούστερη μορφή κ.ο.κ.

Για την απόδειξη του αξιώματος (ΠΕ 2) θεωρούμε δύο διαφορετικές ευθείες $\langle a_1, \beta_1, \gamma_1 \rangle$ και $\langle a_2, \beta_2, \gamma_2 \rangle$ του $\mathcal{L}^a$, οπότε αναζητούμε ένα κοινό σημείο $[x, y, z]$. Τότε θα πρέπει να επιλύσουμε το σύστημα

$$\begin{cases} a_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0 \\ a_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0 \end{cases}$$

που είναι ακριβώς του τύπου (3.1.7). Άρα, με την ίδια μέθοδο, αποδεικνύουμε την ύπαρξη ενός (μοναδικού) $[x, y, z]$ με τη ζητούμενη ιδιότητα.

Τέλος, θεωρούμε τα σημεία $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ και $[1, 1, 1]$. Διαπιστώνουμε στοιχειωδώς ότι είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Επίσης δεν είναι συγγραμμικά ανά τρία. Για παράδειγμα, αν τα $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ και $[1, 1, 1]$ ήσαν συγγραμμικά και $\langle x, y, z \rangle$ η κοινή τους ευθεία, τότε από την (3.1.5) θα είχαμε ότι $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, που δεν έχει έννοια [βλ. επίσης και την Εφαρμογή 3.1.4 (4) πιο κάτω]. Επομένως ικανοποιείται και το αξίωμα (ΠΕ 3).

Β' τρόπος: Για την απόδειξη του (ΠΕ 1) πρέπει να επιλύσουμε το ομογενές σύστημα (3.1.7). Αυτό, σύμφωνα με τη γενική θεωρία των (ομογενών) γραμμικών συστημάτων, διαθέτει μη μηδενικές λύσεις και το σύνολο όλων των λύσεων του αποτελεί γραμμικό χώρο διάστασης 1 (βλ. σχετικώς: Σ. Ανδρεαδάκη [1, σελ. 135], Δ. Βάρσο κ.α. [4, σελ. 249], Ν. V. Efimov-Ε. R. Rozendorn [10, σελ. 84]). Επομένως, αν (x, y, z) είναι μια οποιαδήποτε μη μηδενική λύση, τότε κάθε άλλη λύση, επίσης μη μηδενική, θα είναι της μορφής $(x', y', z') = \lambda(x, y, z)$ με $\lambda \in \mathbb{R}_*$. Δηλαδή όλες οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος (3.1.7) ορίζουν ακριβώς μια ευθεία $\langle x, y, z \rangle$, οπότε αποδεικνύεται το (ΠΕ 1). Ο Α' τρόπος εμπεριέχει ουσιαστικά και μια στοιχειώδη απόδειξη του αναφερομένου συμπεράσματος [για την ειδική περίπτωση του συστήματος (3.1.7)].

Ανάλογη είναι και η απόδειξη του (ΠΕ. 2). Η απόδειξη του (ΠΕ. 3) ακολουθεί τη διαδικασία του Α' τρόπου.

Δείξαμε λοιπόν ότι η τριάδα $(\mathcal{P}^a, \mathcal{L}^a, \in)$ είναι προβολικό επίπεδο. Για να το συγκρίνουμε με το (γεωμετρικό) $\mathbb{P}_2 = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \subset)$, όπως το έχουμε ορίσει μέσω ευθειών και επιπέδων του $\mathbb{R}^3$, ορίζουμε τις απεικονίσεις $\Phi_a : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^a$ και $\Psi_a : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}^a$ με

$$(3.1.9) \quad \mathcal{P} \ni \{t(a, b, c) \mid t \in \mathbb{R}\} \xrightarrow{\Phi_a} [a, b, c] \in \mathcal{P}^a,$$

$$(3.1.10) \quad \mathcal{L} \ni \Pi(a, \beta, \gamma) \xrightarrow{\Psi_a} \langle a, \beta, \gamma \rangle \in \mathcal{L}^a.$$

Οι Φ_a και Ψ_a είναι καλά ορισμένες. Θα δείξουμε ότι το ζεύγος (Φ_a, Ψ_a) είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων. Πραγματικά, αν P και ℓ είναι σημείο και ευθεία, αντιστοίχως, του $\mathbb{P}_2$ με $P \in \ell$, τότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$P = \{t(a, b, c) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{και} \quad \ell = \Pi(a, \beta, \gamma),$$

για κάποιες τριάδες (a, b, c) και (a, β, γ) του $\mathbb{R}_*^3$. Επειδή

$$P \in \ell \Leftrightarrow \{t(a, b, c) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \Pi(a, \beta, \gamma),$$

προκύπτει ότι κάθε σημείο $t(a, b, c)$ με $t \neq 0$ ικανοποιεί την (3.1.2), δηλαδή

$$a(ta) + \beta(tb) + \gamma(tc) = 0 \quad \text{ή} \quad aa + \beta b + \gamma c = 0,$$

πράγμα που σημαίνει ότι $[a, b, c] \in \langle a, \beta, \gamma \rangle$. Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό των Φ_a και Ψ_a , είναι

$$\Phi_a(P) = [a, b, c] \in \langle a, \beta, \gamma \rangle = \Psi_a(\Pi(a, \beta, \gamma)),$$

που αποδεικνύει ότι το (Φ_a, Ψ_a) είναι μορφισμός.

Τέλος διαπιστώνουμε αμέσως ότι οι απεικονίσεις Φ_a, Ψ_a είναι 1-1 και επί (αρκεί ο έλεγχος της μιας), άρα το (Φ_a, Ψ_a) ορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ των προβολικών επιπέδων $\mathbb{P}_2$ και $\mathcal{P}^a$. $\square$

3.1.2 Σύμβαση. Εξαιτίας της ισομορφίας του Θεωρήματος 3.1.1, ταυτίζουμε τα επίπεδα $\mathbb{P}_2$ και $\mathbb{P}_2^a$, οπότε χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο $\mathbb{P}_2$ και για τα δύο. Έτσι το $\mathbb{P}_2$ μπορεί να ερμηνευθεί και να μελετηθεί κατά δύο (ισοδύναμους) τρόπους: είτε όπως στο Παράδειγμα 1.2.3(2) [με ευθείες και επίπεδα του $\mathbb{R}^3$], είτε με κλάσεις ισοδυναμίας, όπως πιο πάνω. Η προτίμηση για τον έναν ή τον άλλον τρόπο υπαγορεύεται από το συγκεκριμένο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε κάθε φορά.

3.1.3 Μερικές εφαρμογές στο $\mathbb{P}_2$.

(1) Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών $\langle 0, 1, 2 \rangle$ και $\langle 1, 0, 1 \rangle$.

Πρώτα διαπιστώνουμε ότι οι δύο ευθείες είναι διαφορετικές, αφού δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}_*$, τέτοιο ώστε $(1, 0, 1) = \lambda(0, 1, 2)$. Επομένως, αν $[x, y, z]$ είναι η ζητούμενη τομή, τότε θα επαληθεύεται το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 1 \cdot y + 2 \cdot z = 0 \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 0 \end{cases}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $x = -z$ και $y = -2z$. Επομένως

$$[x, y, z] = [-z, -2z, z] = [-z(1, 2, -1)].$$

Επειδή $z \neq 0$ [αλλιώς θα ήταν $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, άτοπο], έχουμε τελικώς ότι

$$\langle 0, 1, 2 \rangle \wedge \langle 1, 0, 1 \rangle = [1, 2, -1].$$

(2) Να βρεθεί η μορφή των σημείων της ευθείας $\ell = \langle 0, 1, 2 \rangle$.

Αν συμβολίσουμε με $[x, y, z]$ το τυχόν σημείο της ℓ , τότε

$$[x, y, z] \in \ell \Leftrightarrow 0 \cdot x + 1 \cdot y + 2 \cdot z = 0 \Leftrightarrow y = -2z,$$

δηλαδή τα σημεία της ℓ έχουν τη μορφή $[x, y, z] = [x, -2z, z]$.

Επειδή $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, θα είναι είτε $x \neq 0$, είτε $z \neq 0$. Για $x \neq 0$, θα έχουμε ότι

$$[x, y, z] = [x, -2z, z] = \left[x \left(1, -2\frac{z}{x}, \frac{z}{x} \right) \right] = \left[1, -2\frac{z}{x}, \frac{z}{x} \right],$$

οπότε, θέτοντας $\lambda = \frac{z}{x}$, καταλήγουμε στην

$$(3.1.11) \quad [x, y, z] = [1, -2\lambda, \lambda], \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Στην περίπτωση που είναι $z \neq 0$, θα έχουμε ότι

$$[x, y, z] = [1, -2z, z] = \left[z \left(\frac{x}{z}, -2, 1 \right) \right] = \left[\frac{x}{z}, -2, 1 \right],$$

άρα, για $\mu = x/z$, προκύπτει ότι

$$(3.1.12) \quad [x, y, z] = [\mu, -2, 1], \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

Τις (3.1.11) και (3.1.12) μπορούμε να ενοποιήσουμε ως εξής: για $\lambda = 0$ παίρνουμε το σημείο $[1, 0, 0]$, ενώ για $\lambda \neq 0$ είναι

$$[x, y, z] = \left[\lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda}, -2, 1 \right) \right] = \left[\frac{1}{\lambda}, -2, 1 \right],$$

το οποίο (προφανώς) αποτελεί σημείο της μορφής (3.1.12).

Επομένως, τα σημεία της ευθείας $< 0, 1, 2 >$ είναι το $[1, 0, 0]$ και όλα τα σημεία της μορφής $[\mu, -2, 1]$, με $\mu \in \mathbb{R}$.

(3) Να βρεθεί η ευθεία την οποίαν ορίζουν τα σημεία $[0, 0, 1]$ και $[1, 1, 1]$.

Διαπιστώνουμε ότι $[0, 0, 1] \neq [1, 1, 1]$, άρα ορίζεται η ευθεία $[0, 0, 1] \vee [1, 1, 1]$. Αν την καλέσουμε $< x, y, z >$, τότε θα επαληθεύονται οι εξισώσεις

$$z = 0, \quad x + y + z = 0,$$

από τις οποίες προκύπτει ότι

$$< x, y, z > = < x, -x, 0 > = < 1, -1, 0 >$$

(επειδή αναγκαιώς είναι $x \neq 0$). Επομένως,

$$[0, 0, 1] \vee [1, 1, 1] = < 1, -1, 0 > .$$

(4) Να βρεθεί η συνθήκη συγγραμμικότητας τριών σημείων.

Ας υποθέσουμε ότι ζητούμε να βρούμε μία ευθεία $< x, y, z >$, η οποία να περιέχει τρία δεδομένα σημεία $[a_i, b_i, c_i]$, $i = 1, 2, 3$. Τότε θα πρέπει το ομογενές σύστημα

$$(3.1.13) \quad a_i x + b_i y + c_i z = 0; \quad i = 1, 2, 3,$$

να διαθέτει μία λύση *διάφορη της μηδενικής*. Αυτό συμβαίνει τότε και μόνον τότε αν η ορίζουσα των συντελεστών του (3.1.13) μηδενίζεται. Επομένως, η ζητούμενη συνθήκη είναι η

$$(3.1.14) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3.1.4 Ασκήσεις.

- 1) Να αποδειχθεί ότι οι σχέσεις (3.1.3), (3.1.6) είναι σχέσεις ισοδυναμίας και η (3.1.6') είναι απεικόνιση $1-1$ και επί. Επίσης η σχέση σύμπτωσης που ορίζει η (3.1.5), όπως και η $[p, q, r] \in \ll a, \beta, \gamma \gg$ δεν εξαρτώνται από την επιλογή των αντιπροσώπων των κλάσεων.

- 2) Να συμπληρωθεί η απόδειξη του (ΠΕ. 3) στο Θεώρημα 3.1.1.
- 3) Να ολοκληρωθεί η διερεύνηση των δυνατών περιπτώσεων, οι οποίες εμφανίζονται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1.
- 4) Να βρεθεί η ευθεία που ορίζουν τα σημεία
 - α) $[2, 1, 3]$ και $[1, 0, -1]$,
 - β) $[1, 0, -2]$ και $[-2, 0, 4]$.
- 5) Να βρεθεί η τομή των ευθειών
 - α) $\langle 2, -1, 0 \rangle$ και $\langle -1, \frac{1}{2}, 0 \rangle$,
 - β) $\langle 1, 0, 0 \rangle$ και $\langle 1, -2, 1 \rangle$.
- 6) Να βρεθεί η μορφή των σημείων της ευθείας $\langle 0, 0, 1 \rangle$.

3.2 Γραμμικοί αυτομορφισμοί του $\mathbb{R}^3$ και συγγραμμικότητες του $\mathbb{P}_2$

Μετά τις λίγες Εφαρμογές 3.1.4, οι οποίες δείχνουν ότι το $\mathbb{P}_2$ με την αλγεβρική του άποψη παρουσιάζει σημαντική ευκολία στη μελέτη του (αφού επιδέχεται τη χρήση της γραμμικής άλγεβρας), θα εξετάσουμε τις συγγραμμικότητές του, οι οποίες εισάγονται από γραμμικούς αυτομορφισμούς του $\mathbb{R}^3$. Αυτό θα βοηθήσει τη μελέτη των ομολογιών και επάρσεων του $\mathbb{P}_2$, που θα γίνει στις επόμενες παραγράφους.

Από το γεωμετρικό ορισμό του $\mathbb{P}_2$ [βλ. Παράδειγμα 1.2.3(2)], μπορούμε να δούμε ότι οι γραμμικοί αυτομορφισμοί του $\mathbb{R}^3$ οδηγούν σε αυτομορφισμούς του $\mathbb{P}_2$, δηλαδή σε συγγραμμικότητες. Πραγματικά, από ένα γραμμικό αυτομορφισμό $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ μπορούμε να ορίσουμε δυο απεικονίσεις

$$\underline{\phi} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \quad \text{και} \quad \underline{\psi} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$$

ως εξής: αν P είναι σημείο του $\mathbb{P}_2$, δηλαδή μια ευθεία του $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από το 0, τότε το P συμπίπτει με ένα γραμμικό υπόχωρο U του $\mathbb{R}^3$ με $\dim U = 1$, οπότε θέτουμε

$$(3.2.1) \quad \underline{\phi}(P) := f(U).$$

Παρόμοια, αν k είναι μια ευθεία του $\mathbb{P}_2$, δηλαδή ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από το 0, τότε η k συμπίπτει με ένα γραμμικό υπόχωρο V του $\mathbb{R}^3$ με $\dim V = 2$, οπότε θέτουμε

$$(3.2.2) \quad \underline{\psi}(k) := f(V).$$

Επομένως μπορούμε να αποδείξουμε την

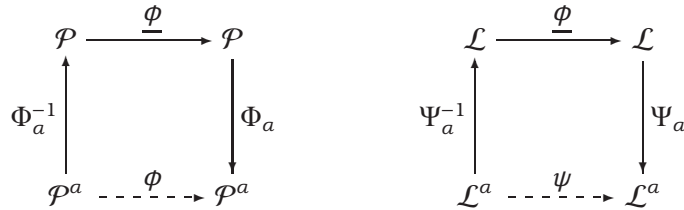
3.2.1 Πρόταση. Το ζεύγος $(\underline{\phi}, \underline{\psi})$, που ορίζεται από το γραμμικό αυτομορφισμό f του $\mathbb{R}^3$ με τις σχέσεις (3.2.1) και (3.2.2), είναι συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2$.

Απόδειξη. Επειδή $\dim(f(U)) = 1$ και $\dim(f(V)) = 2$, προφανώς το $\underline{\phi}(P)$ [αντιστ. η $\underline{\psi}(k)$] είναι σημείο [αντιστ. ευθεία] του $\mathbb{P}_2$. Επομένως το $(\underline{\phi}, \underline{\psi})$ απεικονίζει το $\mathbb{P}_2$ στον εαυτό του. Επιπλέον, αν $P \in k$, άρα $U \leq V$, τότε θα είναι $f(U) \leq f(V)$, δηλ. $\underline{\phi}(P) \in \underline{\psi}(k)$, που αποδεικνύει ότι το $(\underline{\phi}, \underline{\psi})$ είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων. Τέλος, αφού η f είναι ισομορφισμός, από την (3.2.1) προκύπτει ότι η $\underline{\phi}$ είναι απεικόνιση 1-1 και επί. Συνεπώς, σύμφωνα με το Πρόσχημα 2.1.6 και τον Ορισμό 2.2.1, το ζεύγος $(\underline{\phi}, \underline{\psi})$ είναι συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2$. $\square$

Θα προσπαθήσουμε να δούμε τώρα ποια είναι η αντίστοιχη συγγραμμικότητα που εισάγει ο γραμμικός ισομορφισμός f , όταν το $\mathbb{P}_2$ θεωρηθεί με την αλγεβρική του ερμηνεία. Στην περίπτωση αυτή, η ζητούμενη συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) ορίζεται από τις απεικονίσεις

$$\phi := \Phi_a \circ \underline{\phi} \circ \Phi_a^{-1} \quad \text{και} \quad \psi := \Psi_a \circ \underline{\psi} \circ \Psi_a^{-1},$$

όπως φαίνεται και στα επόμενα μεταθετικά διαγράμματα. Θυμίζουμε ότι Φ_a, Ψ_a είναι οι απεικονίσεις (3.1.9) και (3.1.10), που ορίζουν τον ισομορφισμό μεταξύ του γεωμετρικού και αλγεβρικού $\mathbb{P}_2$.



Διαγράμματα 3.1

Προφανώς, το ζεύγος (ϕ, ψ) είναι συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2$ επειδή

$$(\phi, \psi) = (\Phi_a, \Psi_a) \circ (\underline{\phi}, \underline{\psi}) \circ (\Phi_a, \Psi_a)^{-1}.$$

Επομένως, για κάθε $[a, b, c] = \{t(a, b, c) \mid t \in \mathbb{R}_*\} \in \mathcal{P}^a$, ο ορισμός των $\Phi_a, \underline{\phi}$ και

η γραμμικότητα της f δίνουν ότι

$$\begin{aligned}\phi([a, b, c]) &= (\Phi_a \circ \underline{\phi} \circ \Phi_a^{-1})([a, b, c]) \\ &= (\Phi_a \circ \underline{\phi})(\{t(a, b, c) \mid t \in \mathbb{R}_*\}) \\ &= \Phi_a(f(\{t(a, b, c) \mid t \in \mathbb{R}_*\})) \\ &= \Phi_a(\{tf(a, b, c) \mid t \in \mathbb{R}_*\}) \\ &= [f(a, b, c)],\end{aligned}$$

δηλαδή καταλήγουμε στη σχέση

$$(3.2.3) \quad \phi([a, b, c]) = [f(a, b, c)], \quad [a, b, c] \in \mathcal{P}^a.$$

Ακόμη, επειδή ο f προσδιορίζεται πλήρως από έναν αντίστοιχο πίνακα M (ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$), με $\det(M) \neq 0$, η (3.2.3) γράφεται και με την ισοδύναμη μορφή

$$(3.2.4) \quad \phi([a, b, c]) = [(a, b, c) \cdot M], \quad [a, b, c] \in \mathcal{P}^a.$$

Υπενθυμίζουμε εδώ τη μορφή του πίνακα M : αν υπολογίσουμε την f στα διανύσματα της κανονικής βάσης $\{e_1, e_2, e_3\}$ του $\mathbb{R}^3$, έχουμε τις σχέσεις

$$f(e_j) = f_{j1}e_1 + f_{j2}e_2 + f_{j3}e_3; \quad j = 1, 2, 3,$$

οπότε

$$(3.2.5) \quad M := \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}.$$

Ας αναζητήσουμε τώρα και την έκφραση της ψ , μέσω κλάσεων ισοδυναμίας και του πίνακα M , σε αναλογία προς τις (3.2.3) και (3.2.4).

Για κάθε $\langle a, \beta, \gamma \rangle \in \mathcal{L}^a$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\psi(\langle a, \beta, \gamma \rangle) &= (\Psi_a \circ \underline{\psi} \circ \Psi_a^{-1})(\langle a, \beta, \gamma \rangle) \\ &= (\Psi_a \circ \underline{\psi})(\Pi(a, \beta, \gamma)) \\ &= \Psi_a(\underline{\psi}(\Pi(a, \beta, \gamma))) \\ &= \Psi_a(f(\Pi(a, \beta, \gamma))).\end{aligned}$$

Όμως, γενικώς, δεν ισχύει ότι $f(\Pi(a, \beta, \gamma)) = \Pi(f(a, \beta, \gamma))$, άρα δεν μπορούμε να συνεχίσουμε τους προηγούμενους υπολογισμούς. Για να προσδιορίσουμε την

εικόνα $\psi(k)$ μιας ευθείας $k = \langle a, \beta, \gamma \rangle$ ακολουθούμε την επομένη -έμμεση- διαδικασία: η k διαθέτει οπωσδήποτε τρία διαφορετικά σημεία $P_i = [a_i, b_i, c_i]$ ($i = 1, 2, 3$). Άρα, οι σχέσεις $P_i \in k$ ($i = 1, 2, 3$) συνεπάγονται τις

$$a_i a + b_i \beta + c_i \gamma = 0; \quad i = 1, 2, 3,$$

και, ισοδύναμα, την

$$(3.2.6) \quad (a, \beta, \gamma) \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Επειδή $\phi(P_i) \in \psi(k)$, θέτοντας $\psi(k) = \langle x, y, z \rangle$, η (3.2.3) οδηγεί στις

$$(a_i f_{11} + b_i f_{21} + c_i f_{31}) \cdot x + (a_i f_{12} + b_i f_{22} + c_i f_{32}) \cdot y + (a_i f_{13} + b_i f_{23} + c_i f_{33}) \cdot z = 0$$

για $i = 1, 2, 3$. Οι τελευταίες σχέσεις συμπτύσσονται στην

$$(3.2.7) \quad (x, y, z) \cdot M^t \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = 0,$$

όπου M^t είναι ο ανάστροφος πίνακας του M . Επειδή η (3.2.6) μπορεί να γραφτεί με την ισοδύναμη μορφή

$$(3.2.8) \quad (a, \beta, \gamma) \cdot (M^t)^{-1} \cdot M^t \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = 0,$$

συγκρίνοντας τις (3.2.7) και (3.2.8) βλέπουμε ότι μπορούμε να πάρουμε

$$(x, y, z) = (a, \beta, \gamma) \cdot (M^t)^{-1},$$

οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$(3.2.9) \quad \psi(\langle a, \beta, \gamma \rangle) = \langle (a, \beta, \gamma) \cdot (M^t)^{-1} \rangle, \quad \langle a, \beta, \gamma \rangle \in \mathcal{L}^a.$$

Ταυτίζοντας το $\mathbb{P}_2$ με το αλγεβρικό του ανάλογο (βλ. Σύμβαση 3.1.2), συνοψίζουμε τα προηγούμενα στο εξής βασικό

3.2.2 Πόρισμα. Ένας γραμμικός αυτομορφισμός f του $\mathbb{R}^3$ ορίζει μια συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) του $\mathbb{P}_2$ μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} \phi([a, b, c]) &= [f(a, b, c)] = [(a, b, c) \cdot M], \quad \forall [a, b, c] \in \mathcal{P}^a, \\ \psi(\langle a, \beta, \gamma \rangle) &= \langle (a, \beta, \gamma) \cdot (M^t)^{-1} \rangle, \quad \forall \langle a, \beta, \gamma \rangle \in \mathcal{L}^a. \end{aligned}$$

3.2.3 Παρατήρηση. Σε μερικές εφαρμογές, όπου ζητούμε την εικόνα $\psi(k)$ μιας ευθείας k , της οποίας η μορφή των σημείων είναι αρκετά απλή, ή αν θέλουμε να αποφύγουμε τον υπολογισμό του $(M^t)^{-1}$, μπορούμε να παρακάμψουμε τον τύπο (3.2.9) με τον εξής τρόπο: επιλέγουμε δύο κατάλληλα (και σχετικώς απλά) διαφορετικά σημεία X, Y της k , οπότε έχουμε ότι $k = X \vee Y$, άρα

$$\psi(k) = \phi(X) \vee \phi(Y).$$

Επομένως, αρκεί να υπολογίσουμε τα $\phi(X)$ και $\phi(Y)$, μέσω της (3.2.4), και να βρούμε την ευθεία των τελευταίων, όπως στην Εφαρμογή 3.1.3(3).

3.2.4 Ασκήσεις.

- 1) Να εξηγηθεί γιατί οι σχέσεις (3.2.3) και (3.2.9) δεν εξαρτώνται από την εκλογή των αντιπροσώπων των κλάσεων.
- 2) Δίνεται η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $f(x, y, z) = (x, y, y + z)$. Να εξεταστεί αν η f ορίζει μια συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2$ και ποιά;
- 3) Να αποδειχθεί ότι οι απεικονίσεις $\phi : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$, με
 - α) $\phi([x, y, z]) = [z, y, x]$,
 - β) $\phi([x, y, z]) = [z, 2x + z, y]$,
 για κάθε $[x, y, z] \in \mathbb{P}_2$, ορίζουν συγγραμμικότητες του $\mathbb{P}_2$. Να προσδιοριστούν επίσης και οι αντίστοιχες απεικονίσεις ψ . [Υπόδειξη: Να λυθεί η άσκηση με δύο τρόπους: i) με την εύρεση δύο καταλλήλων γραμμικών αυτομορφισμών του $\mathbb{R}^3$, από τους οποίους ορίζονται οι ϕ , και ii) με χρήση της Άσκησης 2.2.23(5) και της Εφαρμογής 3.1.3(4)].
- 4) Να υπολογισθεί η ευθεία $\psi(< 0, 0, 1 >)$ μέσω της (3.2.9), όπως και με τη μέθοδο της Παρατήρησης 3.2.3, για τις συγγραμμικότητες (ϕ, ψ) της προηγούμενης Άσκησης 3.
- 5) Να εξεταστεί αν η συγγραμμικότητα α) της Άσκησης 3 είναι αξονική και να βρεθεί ο άξονας και το κέντρο της.

3.3 Οι ομολογίες του $\mathbb{P}_2$

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι οι ομολογίες του $\mathbb{P}_2$ αντιστοιχούν σε πίνακες 3×3 (με πραγματικά στοιχεία), οι οποίοι έχουν μίαν ιδιάζουσα, απλή μορφή.

- Το $\mathbb{P}_2$ θεωρείται πάντοτε με την αλγεβρική του ερμηνεία.

Στην αρχή θα μελετήσουμε την ομάδα $\mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$, δηλαδή την ομάδα των ομολογιών του $\mathbb{P}_2$ με κέντρο $[1, 0, 0]$ και άξονα $< 1, 0, 0 >$ (προφανώς $[1, 0, 0] \notin < 1, 0, 0 >$).

Θα ξεκινήσουμε με μίαν ομολογία $(\bar{\phi}, \bar{\psi}) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$, η οποία υποθέτουμε ότι εισάγεται από ένα γραμμικό αυτομορφισμό $\bar{f}$ του $\mathbb{R}^3$,

όπως στην Πρόταση 3.2.1. Επομένως, θα ισχύουν οι σχέσεις του Πορίσματος 3.2.2. Επειδή ο $\bar{f}$ ορίζει ένα στοιχείο της $\mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$, είναι φανερόν ότι ο πίνακας $\bar{M}$ του $\bar{f}$ [όπως δίνεται στη σχέση (3.2.5)] θα πρέπει να έχει μίαν ιδιαίτερη μορφή, που θα τη βρούμε υπολογίζοντας την ομολογία σε κάποια κατάλληλα σημεία.

Πρώτα εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι το $[1, 0, 0]$, ως κέντρο της $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$, είναι σταθερό σημείο (βλ. Πρόταση 2.2.5), δηλ. $\bar{\phi}([1, 0, 0]) = [1, 0, 0]$. Επομένως (κατά το Πόρισμα 3.2.2) είναι $[(1, 0, 0) \cdot \bar{M}] = [1, 0, 0]$, άρα υπάρχει $\bar{\eta} \in \mathbb{R}_*$, τέτοιο ώστε $(1, 0, 0) \cdot \bar{M} = \bar{\eta} \cdot (1, 0, 0)$, ή

$$(1, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} = (\bar{\eta}, 0, 0),$$

απ' όπου προκύπτει ότι $(f_{11}, f_{12}, f_{13}) = (\bar{\eta}, 0, 0)$. Άρα, ο πίνακας $\bar{M}$ παίρνει τη μορφή

$$(3.3.1) \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{\eta} & 0 & 0 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } \bar{\eta} \in \mathbb{R}_*.$$

Κατόπιν παρατηρούμε ότι, αφού η $< 1, 0, 0 >$ είναι άξονας της $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$, τα σημεία της είναι σταθερά ως προς τη $\bar{\phi}$. Για να χρησιμοποιήσουμε όμως αυτό το γεγονός, πρέπει να βρούμε τη μορφή των σημείων της $< 1, 0, 0 >$. Έτσι, αν $[x, y, z] \in < 1, 0, 0 >$, βλέπουμε ότι $1x + 0y + 0z = 0$, δηλ. $x = 0$. Άρα, τα σημεία του άξονα έχουν τη μορφή $[0, y, z]$, όπου (αναγκαίως) $(y, z) \neq (0, 0)$. Από τα σημεία αυτά επιλέγουμε τα $[0, 1, 0]$ και $[0, 0, 1]$, και εφαρμόζουμε τη διαδικασία που ακολουθήσαμε προηγουμένως για το $[1, 0, 0]$.

Ακριβέστερα, επειδή $\bar{\phi}([0, 1, 0]) = [0, 1, 0]$, θα είναι και $[(0, 1, 0) \cdot \bar{M}] = [0, 1, 0]$, άρα υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}_*$ με $(0, 1, 0) \cdot \bar{M} = \mu \cdot (0, 1, 0)$. Η τελευταία σχέση, μαζί με την (3.3.1), δίνει ότι

$$(0, 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} \bar{\eta} & 0 & 0 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} = (0, \mu, 0),$$

οπότε $(f_{21}, f_{22}, f_{23}) = (0, \mu, 0)$. Άρα, ο πίνακας (3.3.1) μετασχηματίζεται στον

$$(3.3.2) \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } \bar{\lambda}, \mu \in \mathbb{R}_*.$$

Παρόμοια, για το σημείο $[0, 0, 1]$ βρίσκουμε ότι υπάρχει $\nu \in \mathbb{R}_*$, τέτοιο ώστε

$$(0, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} = (0, 0, \nu),$$

άρα $(f_{31}, f_{32}, f_{33}) = (0, 0, \nu)$ και η (3.3.2) παίρνει τη μορφή

$$(3.3.3) \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } \bar{\lambda}, \mu, \nu \in \mathbb{R}_*.$$

Θα απλοποιήσουμε ακόμη περισσότερο τη μορφή του πίνακα $\bar{M}$, εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία και για το επίσης απλό σημείο $[0, 1, 1] \in <1, 0, 0>$. Όπως προηγουμένως, θα υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}_*$, έτσι ώστε $(0, 1, 1) \cdot \bar{M} = (0, \rho, \rho)$, ή, λόγω της (3.3.3),

$$(0, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} = (0, \rho, \rho),$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\mu = \nu = \rho$. Επομένως η (3.3.3) μετασχηματίζεται στην

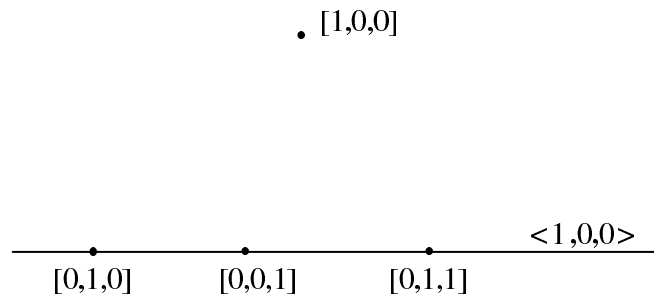
$$(3.3.4) \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } \bar{\lambda}, \rho \in \mathbb{R}_*.$$

Ανακεφαλαιώνοντας, βλέπουμε ότι τα προηγούμενα αποδεικνύουν την

3.3.1 Πρόταση. *Αν μια ομολογία $(\bar{\phi}, \bar{\psi}) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], <1, 0, 0>)$ προκύπτει από ένα γραμμικό αυτομορφισμό $\bar{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, τότε ο πίνακας $\bar{M}$ του $\bar{f}$ έχει τη μορφή (3.3.4).*

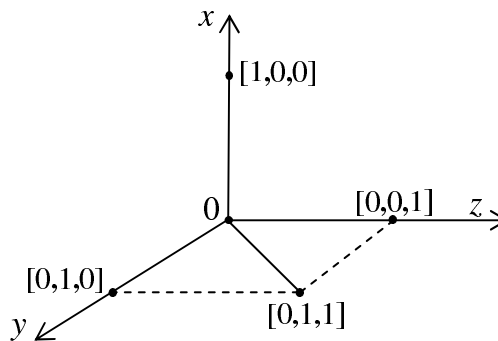
Τα σημεία που χρησιμοποιήθηκαν μέχρι τώρα, για τον προσδιορισμό του

πίνακα $\bar{M}$, εμφανίζονται στην επομένη εικόνα :



Σχήμα 3.1

Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι η τοποθέτηση των σημείων στον άξονα $<1, 0, 0>$ είναι τυχαία και δεν εκφράζει κάποια συγκεκριμένη διάταξη, αφού κάτι τέτοιο δεν έχει έννοια στην Προβολική Γεωμετρία. Επίσης, εντελώς περιγραφικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι το Σχήμα 3.1 είναι το προβολικό ανάλογο της παρακάτω εικόνας στον $\mathbb{R}^3$:



Σχήμα 3.2

Πραγματικά, η ευθεία $<1, 0, 0>$ αντιστοιχεί στο επίπεδο yOz , το κέντρο $[1, 0, 0]$ αντιστοιχεί στον άξονα των x (που δεν περιέχεται στο επίπεδο yOz), το σημείο $[0, 1, 0]$ αντιστοιχεί στον άξονα των y , που περιέχεται στο προηγούμενο επίπεδο, κ.ο.κ.

Στη συνέχεια μας χρειάζεται το

3.3.2 Λήμμα. Έστω ότι $\bar{(\bar{\phi}, \bar{\psi})} \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$ προκύπτει από ένα γραμμικό αυτομορφισμό f του $\mathbb{R}^3$. Αν (ϕ, ψ) είναι η συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2$, η οποία προκύπτει από τον αυτομορφισμό $f := \tau f \equiv \tau \cdot f$, για οποιοδήποτε $\tau \in \mathbb{R}_*$, τότε $(\bar{\phi}, \bar{\psi}) = (\phi, \psi)$. Δηλαδή, η $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ προκύπτει και από τον γραμμικό αυτομορφισμό $f = \tau f$ του $\mathbb{R}^3$.

Απόδειξη. Θυμίζουμε ότι η απεικόνιση $f = \tau f$ ορίζεται (λόγω και της γραμμικότητας της f) ως εξής:

$$f(x, y, z) = (\tau f)(x, y, z) := \tau f(x, y, z) \equiv \tau \cdot f(x, y, z) = f(\tau(x, y, z)),$$

για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \phi([x, y, z]) &= [f(x, y, z)] = [\tau f(x, y, z)] \\ &= [\bar{f}(x, y, z)] = \bar{\phi}([x, y, z]), \end{aligned}$$

για κάθε σημείο $[x, y, z]$ του $\mathbb{P}_2$, δηλ. $\bar{\phi} = \phi$. Άρα, σύμφωνα με την Άσκηση 2.1.11(5), $(\phi, \psi) = (\bar{\phi}, \bar{\psi})$. $\square$

Αναφορικά με το τελευταίο μέρος της παραπάνω απόδειξης, παρατηρούμε ότι θα μπορούσαμε να δείξουμε κατ' ευθείαν ότι $\psi = \bar{\psi}$, χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις των ψ και $\bar{\psi}$, που δίνονται από την (3.2.9), και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο πίνακας $\bar{M}$ του f δίνεται από τη σχέση

$$(3.3.5) \quad \bar{M} = \tau \cdot M.$$

Με την προηγούμενη προεργασία μπορούμε να αποδείξουμε τώρα την εξής βασική

3.3.3 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι $(\bar{\phi}, \bar{\psi}) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$ είναι ομολογία, η οποία προκύπτει από ένα γραμμικό αυτομορφισμό f του $\mathbb{R}^3$. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ προκύπτει και από έναν αυτομορφισμό f του $\mathbb{R}^3$, του οποίου ο αντίστοιχος πίνακας έχει τη μορφή:

$$(3.3.6) \quad M = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } t \in \mathbb{R}_*.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ προκύπτει από τον αυτομορφισμό $\bar{f}$ με αντίστοιχο πίνακα $\bar{M}$ της μορφής (3.3.4). Θέτοντας $\tau := \rho^{-1}$ (που έχει έννοια, επειδή $\rho \neq 0$), το Λήμμα 3.3.2 συνεπάγεται ότι η $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ προκύπτει και από τον αυτομορφισμό

$f = \rho^{-1} \cdot \bar{f}$, του οποίου τον αντίστοιχο πίνακα συμβολίζουμε με M . Επομένως, από την (3.3.5) έχουμε ότι

$$M = \rho^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\rho}/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Θέτοντας $t := \bar{\rho}/\rho \in \mathbb{R}_*$ καταλήγουμε στον πίνακα (3.3.6). □

3.3.4 Παρατηρήσεις. 1) Λόγω της Πρότασης 3.3.3, όταν μια ομολογία $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ από την ομάδα των ομολογιών $\mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$ προκύπτει από ένα γραμμικό αυτομορφισμό του $\mathbb{R}^3$, θα θεωρούμε πάντοτε ότι ο τελευταίος είναι ο αυτομορφισμός με πίνακα της μορφής (3.3.6).

2) Η συνθήκη $t \neq 0$ [στον πίνακα (3.3.6)] συμφωνεί με το ότι $\det(M) \neq 0$, επειδή ο M αντιστρέφεται και $\det(M) = t$.

Το επόμενο συμπέρασμα αποτελεί ένα είδος αντιστρόφου της Πρότασης 3.3.3. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε την

3.3.5 Πρόταση. Ένας πίνακας της μορφής (3.3.6) ορίζει πάντοτε μίαν ομολογία $(\bar{\phi}, \bar{\psi}) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$.

Απόδειξη. Έστω M ένας πίνακας της μορφής (3.3.6). Επειδή $\det(M) = t \neq 0$, ορίζεται ένας γραμμικός αυτομορφισμός f του $\mathbb{R}^3$ με $f(x, y, z) = (x, y, z) \cdot M$ και απ' αυτόν μία συγγραμμικότητα $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$, όπως στο Πόρισμα 3.2.2. Ιδιαίτερως ισχύουν οι σχέσεις:

$$(3.3.7) \quad \bar{\phi}([a, b, c]) = [(a, b, c) \cdot M] = [ta, b, c],$$

για κάθε σημείο $[a, b, c]$ του $\mathbb{P}_2$, και

$$(3.3.8) \quad \begin{aligned} \bar{\psi}(< a, \beta, \gamma >) &= < (a, \beta, \gamma) \cdot (M^t)^{-1} > = < (a, \beta, \gamma) \cdot M^{-1} > \\ &= < (a, \beta, \gamma) \cdot \begin{pmatrix} 1/t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} > = < a/t, \beta, \gamma >, \end{aligned}$$

για κάθε ευθεία $< a, \beta, \gamma >$ του $\mathbb{P}_2$.

Θα δείξουμε ότι η $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ έχει κέντρο το $[1, 0, 0]$ και άξονα την $< 1, 0, 0 >$.

Για τον πρώτο ισχυρισμό θεωρούμε μία τυχούσα ευθεία $k \in J([1, 0, 0])$. Αν θέσουμε $k = < a, \beta, \gamma >$, τότε η συνθήκη $[1, 0, 0] \in < a, \beta, \gamma >$ συνεπάγεται ότι $a = 0$ και $k = < 0, \beta, \gamma >$. Επομένως, η (3.3.8) οδηγεί στην

$$\bar{\psi}(k) = \bar{\psi}(< 0, \beta, \gamma >) = < 0, \beta, \gamma > = k,$$

άρα το $[1, 0, 0]$ είναι κέντρο.

Για το δεύτερο ισχυρισμό θεωρούμε ένα $P \in < 1, 0, 0 >$ και θέτουμε $P = [p, q, r]$. Τότε θα είναι $p = 0$, οπότε $P = [0, q, r]$. Συνεπώς, από την (3.3.7) προκύπτει ότι

$$\bar{\phi}(P) = \bar{\phi}([0, q, r]) = [0, q, r] = P,$$

που αποδεικνύει ότι η $< 1, 0, 0 >$ είναι άξονας. $\square$

Είδαμε μέχρις εδώ ότι μια ομολογία $(\bar{\phi}, \bar{\psi}) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$, που προέρχεται από ένα γραμμικό αυτομορφισμό f του $\mathbb{R}^3$, καθορίζεται πλήρως από έναν πίνακα της μορφής (3.3.6). Επειδή τέτοιες ομολογίες παρουσιάζουν σημαντική ευκολία στο χειρισμό τους, δημιουργείται το εύλογο ερώτημα, αν τα προηγούμενα αποτελέσματα ισχύουν και για οποιαδήποτε ομολογία από την ίδια ομάδα. Πραγματικά ισχύει το εξής σχετικό αποτέλεσμα:

3.3.6 Θεώρημα. Κάθε ομολογία $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$ προκύπτει από ένα γραμμικό αυτομορφισμό του $\mathbb{R}^3$, του οποίου ο αντίστοιχος πίνακας έχει τη μορφή (3.3.6). Επομένως, ικανοποιούνται και οι σχέσεις (3.3.7), (3.3.8).

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχούσα ομολογία $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$. Επειδή η (ϕ, ψ) είναι γνωστή, τότε, για οποιοδήποτε δεδομένο σημείο $P \in \mathcal{P}^a$, το $\phi(P)$ θα είναι επίσης γνωστό σημείο. Έτσι, ας θεωρήσουμε (για ευκολία) το $P = [1, 1, 0]$ και ας θέσουμε $\phi([1, 1, 0]) = [p, q, r]$. Διαπιστώνουμε αμέσως ότι $P \neq [1, 0, 0]$ και $P \notin < 1, 0, 0 >$. Επομένως, σύμφωνα με την Άσκηση 2.2.23(6), θα είναι

$$[p, q, r] \neq [1, 0, 0] \quad \text{και} \quad [p, q, r] \notin < 1, 0, 0 >,$$

οπότε $p \neq 0$. Επίσης, επειδή τα $[1, 0, 0]$, $[1, 1, 0]$, $[p, q, r]$ είναι συγγραμμικά (βλ. Πρόταση 2.2.12), έχουμε ότι

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ p & q & r \end{pmatrix} = r = 0,$$

άρα $[p, q, r] = [p, q, 0]$. Εξάλλου και $q \neq 0$ [: αν ήταν $q = 0$, τότε $[p, q, r] = [p, 0, 0] = [1, 0, 0]$ (άτοπο)]. Επομένως, τελικώς, έχουμε ότι

$$(3.3.9) \quad \phi([1, 1, 0]) = [p, q, r] = [p/q, 1, 0] = [s, 1, 0], \quad \text{με} \quad s := p/q \neq 0.$$

Σχηματίζουμε τώρα τον πίνακα

$$M = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{με} \quad s \neq 0,$$

και την ομολογία $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$, που ορίζεται (κατά την Πρόταση 3.3.5) από τον M . Παρατηρούμε ότι [βλ. και τη σχέση (3.3.7)]

$$(3.3.10) \quad \bar{\phi}([1, 1, 0]) = [(1, 1, 0) \cdot M] = [s, 1, 0].$$

Από τις (3.3.9) και (3.3.10) προκύπτει ότι $\phi([1, 1, 0]) = \bar{\phi}([1, 1, 0])$. Επομένως, κατά το Πόρισμα 2.2.19, $(\phi, \psi) = (\bar{\phi}, \bar{\psi})$. Επειδή η $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$, από την κατασκευή της, προκύπτει από έναν αυτομορφισμό όπως στην εκφώνηση, καταλήγουμε στο ζητούμενο συμπέρασμα για τη (ϕ, ψ) . $\square$

Πριν προχωρήσουμε, ας σχολιάσουμε λίγο τη μορφή του πίνακα (3.3.6). Είναι προφανές ότι, για κάθε $t \in \mathbb{R}_*$, ορίζεται και μία διαφορετική ομολογία. Πως, λοιπόν, μπορούμε να προσδιορίσουμε το t , που αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη ομολογία (ϕ, ψ) ;

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.15, η (ϕ, ψ) είναι πλήρως γνωστή από την εικόνα $\phi(X_0)$ ενός δεδομένου σημείου X_0 με $X_0 \neq [1, 0, 0]$ και $X_0 \notin \langle 1, 0, 0 \rangle$ [παρόμοιες συνθήκες ικανοποιεί και το $\phi(X_0)$]. Άρα, το ζητούμενο t θα προσδιορίζεται από ένα ζεύγος $(X_0, \phi(X_0))$. Πραγματικά, αν είναι $X_0 = [a, b, c]$ και $\phi(X_0) = \phi([a, b, c]) = [p, q, r]$, τότε θα υπάρχει $\hat{t} \in \mathbb{R}_*$, έτσι ώστε

$$(a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{t}(p, q, r),$$

οπότε

$$(3.3.11) \quad at = \hat{t}p, \quad b = \hat{t}q, \quad c = \hat{t}r.$$

Επειδή $[a, b, c] \notin \langle 1, 0, 0 \rangle$, αναγκαίως θα είναι $a \neq 0$, άρα

$$(3.3.12) \quad t = \hat{t} \frac{p}{a}.$$

Εξάλλου, επειδή $[1, 0, 0] \neq [p, q, r] \notin \langle 1, 0, 0 \rangle$, διαπιστώνουμε ότι $(q, r) \neq (0, 0)$. Επομένως, αν $q \neq 0$, τότε η (3.3.12) και η δεύτερη των (3.3.11) οδηγούν στην

$$(3.3.13) \quad t = \frac{b}{q} \cdot \frac{p}{a}.$$

Παρόμοια βρίσκουμε το t , αν $r \neq 0$.

Συμβολίζουμε με $\widetilde{\mathcal{M}}$ το σύνολο των πινάκων της μορφής (3.3.6). Το $\widetilde{\mathcal{M}}$ αποτελεί *αβεβλητή* (μεταθετική) υποομάδα της ομάδας των αντιστρεπών πινάκων $GL(3, \mathbb{R})$, αφού για δύο πίνακες $M_1, M_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}$ ισχύει ότι $M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1$.

Με τον προηγούμενο συμβολισμό αποδεικνύεται η

3.3.7 Πρόταση. Οι ομάδες $\mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$ και $\widetilde{\mathcal{M}}$ είναι ισόμορφες, άρα η ομάδα των ομοιογενών $\mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$ είναι επίσης αβελιανή.

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση $F : \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ μέσω της σχέσης $F((\phi, \psi)) := M$, όπου M είναι ο πίνακας της μορφής (3.3.6), ο οποίος αντιστοιχεί στην (ϕ, ψ) σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.6.

Η F είναι απεικόνιση 1-1: Αν υποθέσουμε ότι $F((\phi_1, \psi_1)) = F((\phi_2, \psi_2))$, όπου

$$F((\phi_1, \psi_1)) = M_1 = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad F((\phi_2, \psi_2)) = M_2 = \begin{pmatrix} t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

τότε $t_1 = t_2$. Επομένως, για κάθε $[a, b, c] \in \mathbb{P}_2$, η (3.3.7) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \phi_1([a, b, c]) &= [(a, b, c) \cdot M_1] = [at_1, b, c] = \\ &= [at_2, b, c] = [(a, b, c) \cdot M_2] = \phi_2([a, b, c]). \end{aligned}$$

Συνεπώς, κατά το Πόρισμα 2.2.19, $(\phi_1, \psi_1) = (\phi_2, \psi_2)$.

Η F είναι προφανώς απεικόνιση επί, σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.5. Επίσης, η ίδια απεικόνιση είναι και μορφισμός ομάδων: ας θεωρήσουμε δύο οποιεσδήποτε ομοιογένειες (ϕ_1, ψ_1) και (ϕ_2, ψ_2) με αντίστοιχους πίνακες $M_1 = F((\phi_1, \psi_1))$ και $M_2 = F((\phi_2, \psi_2))$ όπως πιο πάνω. Θα δείξουμε ότι

$$(3.3.14) \quad F((\phi_1, \psi_1) \circ (\phi_2, \psi_2)) = M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1 = F((\phi_2, \psi_2)) \cdot F((\phi_1, \psi_1)).$$

Πραγματικά, αν θέσουμε $(\phi, \psi) := (\phi_1, \psi_1) \circ (\phi_2, \psi_2) = (\phi_1 \circ \phi_2, \psi_1 \circ \psi_2)$, τότε για το σημείο $[1, 1, 0]$ έχουμε ότι

$$(3.3.15) \quad \phi([1, 1, 0]) = \phi_1(\phi_2([1, 1, 0])) = \phi_1([t_2, 1, 0]) = [t_1 \cdot t_2, 1, 0].$$

Απ' το άλλο μέρος, αν

$$F((\phi, \psi)) = M = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

θα έχουμε ότι

$$(3.3.16) \quad \phi([1, 1, 0]) = [(1, 1, 0) \cdot M] = [t, 1, 0].$$

Από τις (3.3.15) και (3.3.16) προκύπτει ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}_*$, τέτοιο ώστε

$$(t_1 \cdot t_2, 1, 0) = \lambda(t, 1, 0),$$

οπότε $t = t_1 \cdot t_2$, και

$$M = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \cdot t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1,$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό (3.3.14).

Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$(\phi_1, \psi_1) \circ (\phi_2, \psi_2) = F^{-1}(M_1 \cdot M_2) = F^{-1}(M_2 \cdot M_1) = (\phi_2, \psi_2) \circ (\phi_1, \psi_1),$$

που αποδεικνύει τη μεταθετικότητα της $\mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$ και ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

3.3.8 Πρόρισμα. *Ισχύει η επομένη ακολουθία ισομορφισμών αβεθλιανών ομάδων:*

$$\mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >) \xrightarrow{F} \widetilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{T} \mathbb{R}_*.$$

Απόδειξη. Ο πρώτος ισομορφισμός αποδείχτηκε στην Πρόταση 3.3.7. Ο δεύτερος ορίζεται από την αντιστοιχία

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto t,$$

η οποία είναι, προφανώς, 1-1 και επί. $\square$

3.3.9 Ορισμός. Λόγω της Πρότασης 3.3.7, ο πίνακας M της μορφής (3.3.6), ο οποίος αντιστοιχεί σε μία ομολογία $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$, καλείται **πίνακας της** (ϕ, ψ) .

Θα δείξουμε ότι η μελέτη οποιασδήποτε ομάδας ομολογιών $\mathbb{H}(A, \ell)$, $A \notin \ell$, του $\mathbb{P}_2$ ανάγεται στη μελέτη της $\mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$, σύμφωνα με το επόμενο βασικό συμπέρασμα.

3.3.10 Θεώρημα. *Οποιαδήποτε ομάδα ομολογιών $\mathbb{H}(A, \ell)$ του $\mathbb{P}_2$, με $A \notin \ell$, είναι ισόμορφη με την $\mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$. Επιπλέον, κάθε $\mathbb{H}(A, \ell)$ αποτελεί αβεθλιανή ομάδα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σημεία $[0, 1, 0]$ και $[0, 0, 1]$ του άξονα $< 1, 0, 0 >$ καθώς και το εκτός αυτού σημείο $[1, 1, 0]$. Αναλόγως, επιλέγουμε δύο σημεία B και C στον άξονα ℓ , με $B \neq C$, καθώς και ένα σημείο D του $\mathbb{P}_2$ με $D \neq A$, $D \notin \ell$, έτσι ώστε τα σημεία A, B, C, D να μην είναι συγγραμμικά ανά τρία (πώς γίνεται αυτό;). Επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 3.3.12, που αποδεικνύουμε πιο κάτω,

μπορούμε να βρούμε μία συγγραμμικότητα (σ, τ) του $\mathbb{P}_2$, η οποία να ικανοποιεί τις συνθήκες (βλ. και το Σχήμα 3.3 στην επομένη σελίδα):

$$(3.3.17) \quad \begin{aligned} \sigma(A) &= [1, 0, 0], & \sigma(B) &= [0, 1, 0], \\ \sigma(C) &= [0, 0, 1], & \sigma(D) &= [1, 1, 0]. \end{aligned}$$

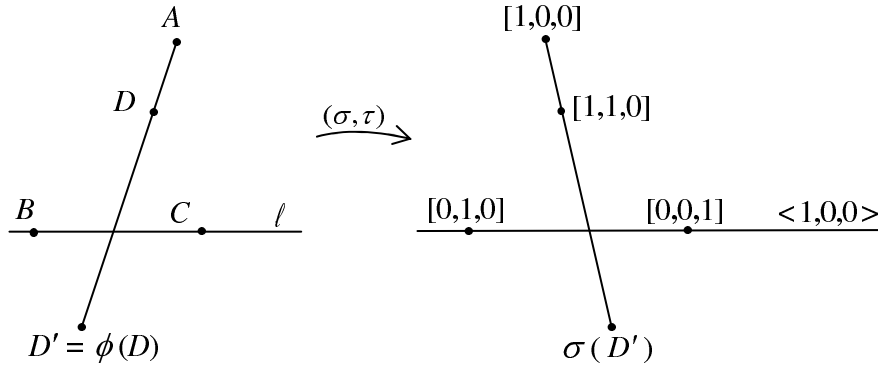
Όπως ήδη γνωρίζουμε από το Θεώρημα 2.2.16, μία ομολογία $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}(A, \ell)$ ορίζεται πλήρως από το ζεύγος (D, D') , όπου $D' = \phi(D)$. Επειδή $D' \in A \vee D$, από τις (3.3.17) έχουμε ότι

$$\sigma(D') \in \tau(A \vee D) = \sigma(A) \vee \sigma(D) = [1, 0, 0] \vee [1, 1, 0] = \langle 0, 0, 1 \rangle.$$

Άρα, μπορούμε να ορίσουμε μία (μοναδική) $(\phi_0, \psi_0) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], \langle 1, 0, 0 \rangle)$, τέτοια ώστε

$$(3.3.18) \quad \phi_0([1, 1, 0]) = \sigma(D').$$

Αυτό επιτυγχάνεται αν εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.3.5 για έναν πίνακα της μορφής (3.3.6), του οποίου το αντίστοιχο t προσδιορίζουμε όπως στα σχόλια που ακολουθούν μετά την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.6, χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (3.3.18).



Σχήμα 3.3

Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση $h : \mathbb{H}(A, \ell) \rightarrow \mathbb{H}([1, 0, 0], \langle 1, 0, 0 \rangle)$ με

$$(3.3.19) \quad h((\phi, \psi)) = (\phi_0, \psi_0).$$

Η h είναι καλά ορισμένη, αφού, για δεδομένη (ϕ, ψ) , η (ϕ_0, ψ_0) είναι μονοσήμαντα ορισμένη, βάσει των προηγούμενων συνθηκών. Επιπλέον, από τις (3.3.18)

και (3.3.19), προκύπτει ότι

$$(3.3.20) \quad \phi_0([1, 1, 0]) = \sigma(D') = \sigma(\phi(D)) = (\sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1})([1, 1, 0]).$$

Θα δώσουμε στην h μιάν άλλη μορφή, που θα διευκολύνει την απόδειξη του ισχυρισμού της εκφώνησης. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τη συγγραμμικότητα

$$(\sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}, \tau \circ \psi \circ \tau^{-1}) = (\sigma, \tau) \circ (\phi, \psi) \circ (\sigma, \tau)^{-1}$$

και διαπιστώνουμε ότι ανήκει στην ομάδα $\mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$. Ας επαληθεύσουμε ότι το $[1, 0, 0]$ είναι πράγματι το κέντρο της $(\sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}, \tau \circ \psi \circ \tau^{-1})$: για οποιαδήποτε $k \in J([1, 0, 0])$, η σχέση $[1, 0, 0] \in k$ συνεπάγεται ότι

$$A = \sigma^{-1}([1, 0, 0]) \in \tau^{-1}(k),$$

δηλαδή η $\tau^{-1}(k)$ διέρχεται από το κέντρο A της (ϕ, ψ) , οπότε $\psi(\tau^{-1}(k)) = \tau^{-1}(k)$. Επομένως,

$$(\tau \circ \psi \circ \tau^{-1})(k) = \tau(\psi(\tau^{-1}(k))) = \tau(\tau^{-1}(k)) = k,$$

που δείχνει ότι το $[1, 0, 0]$ είναι κέντρο.

Αναλόγως αποδεικνύουμε ότι η $< 1, 0, 0 >$ είναι άξονας: για κάθε σημείο $P \in < 1, 0, 0 >$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(P) \in \tau^{-1}(< 1, 0, 0 >) &= \tau^{-1}([0, 1, 0] \vee [0, 0, 1]) \\ &= \sigma^{-1}([0, 1, 0]) \vee \sigma^{-1}([0, 0, 1]) \\ &= B \vee C = \ell, \end{aligned}$$

δηλαδή το $\sigma^{-1}(P)$ ανήκει στον άξονα της (ϕ, ψ) , οπότε $\phi(\sigma^{-1}(P)) = \sigma^{-1}(P)$ και $(\sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1})(P) = P$.

Απ' το άλλο μέρος, η (3.3.20) και το Πόρισμα 2.2.19 συνεπάγονται ότι $(\phi_0, \psi_0) = (\sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}, \tau \circ \psi \circ \tau^{-1})$, οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$(3.3.21) \quad h((\phi, \psi)) = (\sigma, \tau) \circ (\phi, \psi) \circ (\sigma, \tau)^{-1}.$$

Η τελευταία αποδεικνύει αμέσως ότι η h είναι απεικόνιση $1 - 1$ και επί. Επιπλέον, για οποιοσδήποτε $(\phi, \psi), (\phi', \psi') \in \mathbb{H}(A, \ell)$, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} h((\phi, \psi) \circ (\phi', \psi')) &= (\sigma, \tau) \circ (\phi, \psi) \circ (\phi', \psi') \circ (\sigma, \tau)^{-1} \\ &= ((\sigma, \tau) \circ (\phi, \psi) \circ (\sigma, \tau)^{-1}) \circ ((\sigma, \tau) \circ (\phi', \psi') \circ (\sigma, \tau)^{-1}) \\ &= h((\phi, \psi)) \circ h((\phi', \psi')), \end{aligned}$$

άρα η h είναι (ισο)μορφισμός ομάδων. □

3.3.11 Παρατήρηση. Ο ισομορφισμός h δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένος, αλλά εξαρτάται από την επιλογή των σημείων A, B, C, D .

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.10 επικαλεστήκαμε το επόμενο βοηθητικό συμπέρασμα:

3.3.12 Λήμμα. Αν A, B, C, D είναι σημεία του $\mathbb{P}_2$, ανά τρία μη συγγραμμικά, τότε υπάρχει συγγραμμικότητα $(\sigma, \tau) \in \mathcal{A}ut(\mathbb{P}_2)$, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες (3.3.17).

Απόδειξη. Για λόγους ευκολίας (που θα φανούν στους παρακάτω υπολογισμούς), αναζητούμε πρώτα την αντίστροφη συγγραμμικότητα (σ^{-1}, τ^{-1}) , την οποία θα προσδιορίσουμε από έναν κατάλληλο γραμμικό αυτομορφισμό $\bar{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, σύμφωνα με τους τύπους του Πορίσματος 3.2.2. Ας καλέσουμε

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

τον πίνακα του $\bar{g}$ και ας θέσουμε

$$\begin{aligned} A &= [a_1, a_2, a_3], & B &= [b_1, b_2, b_3], \\ C &= [c_1, c_2, c_3], & D &= [d_1, d_2, d_3]. \end{aligned}$$

Τότε, λόγω της πρώτης των (3.3.17), έχουμε ότι $\sigma^{-1}([1, 0, 0]) = [a_1, a_2, a_3]$, άρα υπάρχει $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_*$, έτσι ώστε $(1, 0, 0) \cdot \bar{M} = \bar{\lambda}(a_1, a_2, a_3)$. Επομένως, $(g_{11}, g_{12}, g_{13}) = \bar{\lambda}(a_1, a_2, a_3)$ και

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}a_1 & \bar{\lambda}a_2 & \bar{\lambda}a_3 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Παρόμοια, η δεύτερη συνθήκη από τις (3.3.17) δίνει ότι $\sigma^{-1}([0, 1, 0]) = [b_1, b_2, b_3]$, άρα $(g_{21}, g_{22}, g_{23}) = \mu(b_1, b_2, b_3)$, για $\mu \in \mathbb{R}_*$, και

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}a_1 & \bar{\lambda}a_2 & \bar{\lambda}a_3 \\ \mu b_1 & \mu b_2 & \mu b_3 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την τρίτη των (3.3.17), βρίσκουμε ότι $\sigma^{-1}([0, 0, 1]) = [c_1, c_2, c_3]$, οπότε υπάρχει $\nu \in \mathbb{R}_*$ έτσι ώστε $(g_{31}, g_{32}, g_{33}) = \nu(c_1, c_2, c_3)$, άρα

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}a_1 & \bar{\lambda}a_2 & \bar{\lambda}a_3 \\ \mu b_1 & \mu b_2 & \mu b_3 \\ \nu c_1 & \nu c_2 & \nu c_3 \end{pmatrix}.$$

Τέλος, η τέταρτη από τις (3.3.17) δίνει ότι $(1, 1, 1) \cdot \bar{M} = \rho(d_1, d_2, d_3)$, $\rho \in \mathbb{R}_*$, από την οποία προκύπτει το σύστημα:

$$(3.3.22) \quad \begin{cases} \lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 = \rho d_1 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 = \rho d_2 \\ \lambda a_3 + \mu b_3 + \nu c_3 = \rho d_3 \end{cases}$$

Επειδή τα A, B, C δεν είναι συγγραμμικά, από την Εφαρμογή 3.1.4(4) έχουμε ότι

$$\Delta := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Επομένως, επιλύοντας το σύστημα (3.3.22) ως προς λ, μ, ν , βρίσκουμε ότι

$$\lambda = \begin{vmatrix} \rho d_1 & b_1 & c_1 \\ \rho d_2 & b_2 & c_2 \\ \rho d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \Delta^{-1} = \rho \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \Delta^{-1} = \rho s_1,$$

όπου θέσαμε

$$s_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \Delta^{-1}$$

(προφανώς $s_1 \neq 0$, επειδή τα D, B, C δεν είναι συγγραμμικά).

Αναλόγως βρίσκουμε ότι $\mu = \rho s_2$ και $\nu = \rho s_3$ ($s_2 \neq 0 \neq s_3$), οπότε ο $\bar{M}$ παίρνει τη μορφή

$$(3.3.23) \quad \bar{M} = \rho \cdot \begin{pmatrix} s_1 a_1 & s_1 a_2 & s_1 a_3 \\ s_2 b_1 & s_2 b_2 & s_2 b_3 \\ s_3 c_1 & s_3 c_2 & s_3 c_3 \end{pmatrix}.$$

Άρα, η ζητούμενη (σ^{-1}, τ^{-1}) θα προκύπτει από έναν αυτομορφισμό $\bar{g}$, με αντίστοιχο πίνακα $\bar{M}$ της μορφής (3.3.23). Όμως, ακολουθώντας μία διαδικασία ανάλογη προς αυτήν της απόδειξης του Λήμματος 3.3.2 [βλ. και Άσκηση 3.3.15(4)], καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η (σ^{-1}, τ^{-1}) προκύπτει και από τον αυτομορφισμό $g = \rho^{-1} \cdot \bar{g}$ με αντίστοιχο πίνακα $M = \rho^{-1} \cdot \bar{M}$.

Συνεπώς, ο γραμμικός αυτομορφισμός $f := g^{-1}$ (με αντίστοιχο πίνακα τον M^{-1} , που είναι πλήρως γνωστός από τις προηγούμενες εκφράσεις), προσδιορίζει τη συγγραμμικότητα (σ, τ) με τις ζητούμενες συνθήκες [βλ. επίσης και την Άσκηση 3.3.15(5)]. $\square$

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 3.3.10 με το Πόρισμα 3.3.8, καταλήγουμε στο θεμελιώδες συμπέρασμα αυτής της παραγράφου:

3.3.13 Θεώρημα. Για οποιαδήποτε ομάδα ομολογιών $\mathbb{H}(A, \ell)$, $A \notin \ell$, του $\mathbb{P}_2$ ισχύουν οι επόμενες ισομορφίες αβελιανών ομάδων

$$\mathbb{H}(A, \ell) \stackrel{h}{\cong} \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >) \stackrel{F}{\cong} \widetilde{\mathcal{M}} \stackrel{T}{\cong} \mathbb{R}_*.$$

3.3.14 Σχόλιο. Από το προηγούμενο αποτέλεσμα προκύπτει ότι η οποιαδήποτε (αβελιανή) ομάδα των ομολογιών $\mathbb{H}(A, \ell)$ του $\mathbb{P}_2$ συμπίπτει (μέσω ισομορφίας) με την ομάδα $\mathbb{R}_*$. Σύμφωνα με μια καθιερωμένη ορολογία, λέμε ότι

οι ομολογίες του $\mathbb{P}_2$ ταξινομούνται από την (αβελιανή) ομάδα $\mathbb{R}_*$.

3.3.15 Ασκήσεις.

- 1) Αναφορικά με τα σχόλια που ακολουθούν την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.6, να αποδειχθεί ότι η τιμή του t που δίνεται από την (3.3.13) (για $q \neq 0$) συμπίπτει με την τιμή που προκύπτει για $r \neq 0$, αν είναι ταυτοχρόνως $q \neq 0$ και $r \neq 0$.
- 2) Σε ποια ομολογία αντιστοιχεί ο πίνακας της μορφής (3.3.6) με $t = 1$;
- 3) Σε σχέση με την απόδειξη της Πρότασης 3.3.5, να δειχθεί ότι το $[1, 0, 0]$ είναι κέντρο με τη μέθοδο της Παρατήρησης 3.2.3, χωρίς τη χρήση του τύπου $\bar{\psi}(< a, \beta, \gamma >) = < (a, \beta, \gamma) \cdot (M^t)^{-1} >$.
[Υπόδειξη: Οποιαδήποτε $k \in J([1, 0, 0])$ έχει τη μορφή $k = < 0, \beta, \gamma >$. Επομένως, για τυχόν $[a, b, c] \in k$ με $[a, b, c] \neq [1, 0, 0]$, αρκεί να επαληθεύσουμε τη σχέση $\bar{\psi}(k) = \bar{\psi}([1, 0, 0] \vee [a, b, c]) = [1, 0, 0] \vee \bar{\phi}([a, b, c]) = k.]$
- 4) [Γενίκευση του Λήμματος 3.3.2] Αν μια συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) του $\mathbb{P}_2$ προκύπτει από ένα γραμμικό αυτομορφισμό f του $\mathbb{R}^3$ (με αντίστοιχο πίνακα M), τότε η (ϕ, ψ) προκύπτει επίσης και από τον αυτομορφισμό τf (και τον πίνακα $\tau \cdot M$), για κάθε $\tau \in \mathbb{R}_*$.
- 5) Έστω ότι (ϕ, ψ) είναι μια συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2$, η οποία προκύπτει από ένα γραμμικό αυτομορφισμό f του $\mathbb{R}^3$ (με αντίστοιχο πίνακα M) σύμφωνα με το Πόρισμα 3.2.2. Να αποδειχθεί ότι η (ϕ^{-1}, ψ^{-1}) προκύπτει από τον αυτομορφισμό f^{-1} (και τον αντίστοιχο πίνακα M^{-1}).
- 6) Υποθέτουμε ότι (A, B, C, D) και (A', B', C', D') είναι δύο τετράδες σημείων του $\mathbb{P}_2$, έτσι ώστε τα σημεία της κάθε μίας να μην είναι ανά τρία συγγραμμικά. Να δειχθεί ότι υπάρχει συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) του $\mathbb{P}_2$, τέτοια ώστε $\phi(A) = A'$, $\phi(B) = B'$, $\phi(C) = C'$ και $\phi(D) = D'$.

- 7) Αν η $(\varphi, \psi) \in \mathbb{H}([0, 0, 1], < 0, 0, 1 >)$ προκύπτει από ένα γραμμικό αυτομορφισμό του $\mathbb{R}^3$, ποια είναι η μορφή του αντιστοιχίου πίνακα; Να γενικευθεί το προηγούμενο αποτέλεσμα για κάθε ομολογία της προηγούμενης ομάδας.

3.4 Οι επάρσεις του $\mathbb{P}_2$

Εδώ θα δείξουμε ότι οι επάρσεις του $\mathbb{P}_2$ έχουν ιδιότητες ανάλογες προς τις ιδιότητες των ομολογιών του, δηλαδή αντιστοιχούν σε απλούς πίνακες ή κατάλληλα στοιχεία του $\mathbb{R}$. Επειδή θα εφαρμόσουμε μία τεχνική παρόμοια προς αυτήν της προηγούμενης παραγράφου, θα είμαστε αρκετά σύντομοι, αφήνοντας στον αναγνώστη την απόδειξη των επιμέρους λεπτομερειών.

Αρχίζουμε με τη μελέτη της ομάδας των επάρσεων $\mathbb{E}([0, 0, 1], < 1, 0, 0 >)$.

3.4.1 Θεώρημα. Κάθε έπαρση $(\varphi, \psi) \in \mathbb{E}([0, 0, 1], < 1, 0, 0 >)$ προκύπτει από ένα γραμμικό αυτομορφισμό f του $\mathbb{R}^3$, του οποίου ο αντίστοιχος πίνακας έχει τη μορφή

$$(3.4.1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Αντιστρόφως, κάθε πίνακας της προηγούμενης μορφής ορίζει μίαν έπαρση της ομάδας $\mathbb{E}([0, 0, 1], < 1, 0, 0 >)$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη του πρώτου μέρους διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Θεωρούμε πρώτα μίαν έπαρση $(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) \in \mathbb{E}([0, 0, 1], < \bar{1}, 0, 0 >)$, η οποία υποθέτουμε ότι προέρχεται από ένα γραμμικό αυτομορφισμό $\bar{f}$ του $\mathbb{R}^3$, με αντίστοιχο πίνακα $\bar{M} = (\bar{f}_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$ [βλ. και την ανάλογη σχέση (3.3.5)]. Όπως στην Πρόταση 3.3.1, εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι τα $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$, $[0, 1, 1]$, ως σημεία του άξονα, είναι σταθερά για την $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$. Έτσι, η σχέση $\bar{\varphi}([0, 1, 0]) = [0, 1, 0]$ σημαίνει ότι υπάρχει $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}_*$, τέτοιο ώστε $(0, 1, 0) \cdot \bar{M} = \bar{\lambda}(0, 1, 0)$, οπότε

$$(3.4.2) \quad \bar{f}_{22} = \bar{\lambda}, \quad \bar{f}_{21} = \bar{f}_{23} = 0.$$

Αναλόγως, η $\bar{\varphi}([0, 0, 1]) = [0, 0, 1]$, μαζί με την (3.4.2), συνεπάγεται ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}_*$, έτσι ώστε

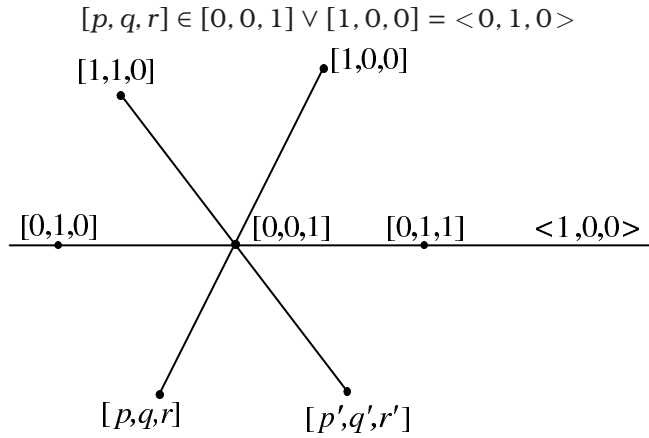
$$(3.4.3) \quad \bar{f}_{33} = \mu, \quad \bar{f}_{31} = \bar{f}_{32} = 0.$$

Τέλος, από τη $\bar{\phi}([0, 1, 1]) = [0, 1, 1]$, σε συνδυασμό με τις (3.4.2) και (3.4.3), βρίσκουμε ότι $\bar{\eta} = \mu$, οπότε ο πίνακας $\bar{M}$ παίρνει τη μορφή

$$(3.4.4) \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ 0 & \bar{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\eta} \end{pmatrix}, \quad \text{με } \bar{\eta} \in \mathbb{R}_*.$$

Παρατηρούμε ότι, οποιοδήποτε άλλο σημείο του άξονα και αν χρησιμοποιήσουμε, δεν μπορούμε να απλοποιήσουμε περισσότερο τον πίνακα (3.4.4). Επομένως, θα πρέπει να αναζητήσουμε κάποια κατάλληλα σημεία (έξω από τον άξονα), των οποίων να προσδιορίζεται η μορφή της εικόνας, ώστε να μπορέσουμε να συνεχίσουμε την προηγούμενη διαδικασία. Τέτοια σημεία είναι τα $[1, 0, 0]$ και $[1, 1, 0]$.

Για το σημείο $[1, 0, 0]$ διαπιστώνουμε τα εξής: αν θέσουμε $\bar{\phi}([1, 0, 0]) = [p, q, r]$, τότε (βλ. Πρόταση 2.2.12 και Σχήμα 3.4) η σχέση



Σχήμα 3.4

συνεπάγεται ότι $q = 0$, δηλαδή $[p, q, r] = [p, 0, r]$, με $(p, r) \neq (0, 0)$. Επίσης, $p \neq 0$ (αφού $[p, q, r] \notin <1, 0, 0>$), οπότε $[p, q, r] = [p, 0, r] = [1, 0, s]$, όπου $s = r \cdot p^{-1} \in \mathbb{R}$. Επομένως, η $\bar{\phi}([1, 0, 0]) = [p, q, r] = [1, 0, s]$ ισοδυναμεί με την $(1, 0, 0) \cdot \bar{M} = \nu(1, 0, s)$, για κάποιο $\nu \in \mathbb{R}_*$. Από την τελευταία σχέση και την (3.4.4) προκύπτει ότι

$$(3.4.5) \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} \nu & 0 & \nu s \\ 0 & \bar{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\eta} \end{pmatrix}.$$

Παρόμοια, αν θέσουμε $\bar{\phi}([1, 1, 0]) = [p', q', r']$, η σχέση

$$[p', q', r'] \in [0, 0, 1] \vee [1, 1, 0] = \langle 1, -1, 0 \rangle$$

συνεπάγεται ότι $p' = q'$, άρα $[p', q', r'] = [p', p', r'] = [1, 1, s']$, όπου θέσαμε $s' = r' \cdot p'^{-1} \in \mathbb{R}$ ($p' \neq 0$ επειδή $[p', q', r'] \notin \langle 1, 0, 0 \rangle$). Επομένως, η $\bar{\phi}([1, 1, 0]) = [1, 1, s']$ και η (3.4.5) δείχνουν ότι υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}_*$, τέτοιο ώστε $v = \rho = \bar{\lambda}$, οπότε $s = s'$ και ο M μετασχηματίζεται στον

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & \rho s \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } \rho \in \mathbb{R}_*, t \in \mathbb{R}.$$

Αποδεικνύοντας το ανάλογο του Λήμματος 3.3.2 και της Πρότασης 3.3.3 για την $\mathbb{E}([0, 0, 1], \langle 1, 0, 0 \rangle)$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ προκύπτει τελικώς και από τον αυτομορφισμό $f = \rho^{-1} \cdot \bar{f}$, με αντίστοιχο πίνακα $M = \rho^{-1} \cdot \bar{M}$. Συνεπώς, ο M έχει ακριβώς τη μορφή (3.4.1).

β) Για να δείξουμε ότι και οποιαδήποτε $(\phi, \psi) \in \mathbb{E}([0, 0, 1], \langle 1, 0, 0 \rangle)$ προκύπτει από έναν αυτομορφισμό με πίνακα της ίδιας μορφής, ακολουθούμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.6, σε συνδυασμό με την περίπτωση α). Ακριβέστερα, θεωρούμε το σημείο $P = [1, 0, 0]$ (αντί του $[1, 1, 0]$ του Θεωρήματος 3.3.6), οπότε, εργαζόμενοι όπως στην α), διαπιστώνουμε ότι $\phi([1, 0, 0]) = [1, 0, s]$, $s \in \mathbb{R}$. Κατόπιν, σχηματίζουμε τον πίνακα

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{με } s \in \mathbb{R},$$

που είναι της μορφής (3.4.1), και τον αντίστοιχο γραμμικό αυτομορφισμό f του $\mathbb{R}^3$. Ο f (και ο αντίστοιχος M) ορίζει μία συγγραμμικότητα $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$, σύμφωνα με το Πόρισμα 3.2.2. Ιδιαίτέρως, όπως δείχνουμε στη συνέχεια, $(\bar{\phi}, \bar{\psi}) \in \mathbb{E}([0, 0, 1], \langle 1, 0, 0 \rangle)$, επομένως

$$\bar{\phi}([1, 0, 0]) = [(1, 0, 0) \cdot M] = [1, 0, s] = \phi([1, 0, 0]),$$

άρα $(\phi, \psi) = (\bar{\phi}, \bar{\psi})$. Δηλαδή, τυχούσα έπαρση $(\phi, \psi) \in \mathbb{E}([0, 0, 1], \langle 1, 0, 0 \rangle)$ προκύπτει από ένα γραμμικό ισομορφισμό με πίνακα της μορφής (3.4.1).

Μένει να αποδείξουμε τον ισχυρισμό ότι κάθε συγγραμμικότητα $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$, που προκύπτει από έναν πίνακα όπως ο (3.4.1), έχει κέντρο το $[0, 0, 1]$ και άξονα την $\langle 1, 0, 0 \rangle$. Πραγματικά, οποιαδήποτε ευθεία $k \in J([0, 0, 1])$ έχει τώρα τη μορφή $k = \langle a, \beta, 0 \rangle$. Επιπλέον,

$$(M^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

οπότε $\psi(k) = \langle (a, \beta, 0) \cdot (M^t)^{-1} \rangle = \langle a, \beta, 0 \rangle = k$, δηλαδή το $[0, 0, 1]$ είναι κέντρο. Αναλόγως, αν $P \in \langle 1, 0, 0 \rangle$, παρατηρούμε ότι $P = \langle 0, q, r \rangle$, οπότε

$$\phi(P) = [(0, q, r) \cdot M] = [0, q, r] = P,$$

που αποδεικνύει ότι η $\langle 1, 0, 0 \rangle$ είναι άξονας και ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

3.4.2 Πόρισμα. Αν $\widetilde{\mathcal{M}}'$ είναι η ομάδα των πινάκων της μορφής (3.4.1) και το $\mathbb{R}$ θεωρηθεί εφοδιασμένο με τη δομή της προσθετικής ομάδας, τότε λαμβάνουμε την επομένη ακολουθία ισομορφισμών αβεθιανών ομάδων:

$$\mathbb{E}([0, 0, 1], \langle 1, 0, 0 \rangle) \xrightarrow{F'} \widetilde{\mathcal{M}}' \xrightarrow{T'} \mathbb{R},$$

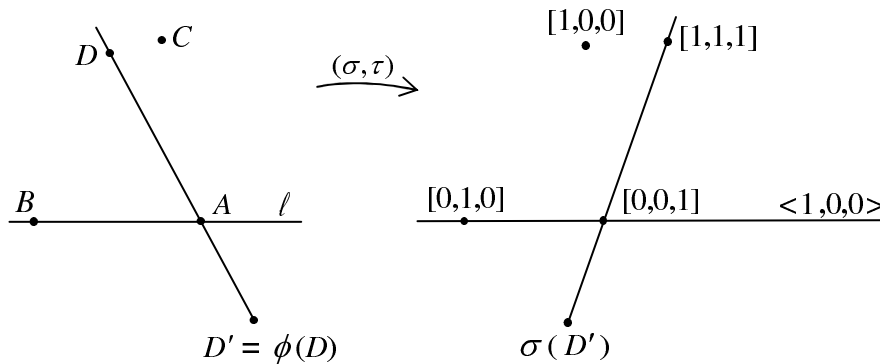
όπου οι F' και T' ορίζονται αναλόγως προς τους ισομορφισμούς F και T του Πορίσματος 3.3.8.

Λόγω του ισομορφισμού F' , ένας πίνακας της μορφής (3.4.1), που αντιστοιχεί σε μίαν έπαρση $(\phi, \psi) \in \mathbb{E}([0, 0, 1], \langle 1, 0, 0 \rangle)$, καλείται **πίνακας της** (ϕ, ψ) .

3.4.3 Θεώρημα. Οποιαδήποτε ομάδα επάρσεων $\mathbb{E}(A, \ell)$ του $\mathbb{P}_2$, με $A \in \ell$, είναι ισόμορφη με την $\mathbb{E}([0, 0, 1], \langle 0, 0, 1 \rangle)$, άρα έχουμε την ακολουθία των ισομορφισμών αβεθιανών ομάδων

$$\mathbb{E}(A, \ell) \xrightarrow{H'} \mathbb{E}([0, 0, 1], \langle 1, 0, 0 \rangle) \xrightarrow{F'} \widetilde{\mathcal{M}}' \xrightarrow{T'} \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Ο ισομορφισμός H' κατασκευάζεται ως εξής: στον άξονα ℓ επιλέγουμε ένα σημείο $B \neq A$, ενώ εκτός του ℓ επιλέγουμε δύο διαφορετικά σημεία C και D , έτσι ώστε τα A, B, C, D να είναι ανά τρία μη συγγραμμικά.



Σχήμα 3.5

Όπως στο Λήμμα 3.3.12 [σύμφωνα και με τη γενικότερη Άσκηση 3.3.15 (6)], διαπιστώνουμε ότι υπάρχει συγγραμμικότητα (σ, τ) του $\mathbb{P}_2$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= [0, 0, 1], & \sigma(B) &= [0, 1, 0], \\ \sigma(C) &= [1, 0, 0], & \sigma(D) &= [1, 1, 0],\end{aligned}$$

οπότε η H' ορίζεται μέσω της σχέσης

$$H'((\sigma, \tau)) = (\sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}, \tau \circ \psi \circ \tau^{-1}) = (\sigma, \tau) \circ (\phi, \psi) \circ (\sigma, \tau)^{-1}.$$

Η υπόλοιπη απόδειξη ακολουθεί την ανάλογη του Θεωρήματος 3.3.10. $\square$

3.4.4 Παρατηρήσεις. 1) Η μορφή του πίνακα (3.4.1) δικαιολογεί γιατί στο Πρόρισμα 3.4.2 και στο Θεώρημα 3.4.3 παίρνουμε την *προσθετική* ομάδα $\mathbb{R} \equiv (\mathbb{R}, +)$.

2) Τα Θεωρήματα 3.3.10 και 3.4.3 δείχνουν ότι στο $\mathbb{P}_2$ οι οποιοσδήποτε ομάδες $\mathbb{H}(A, \ell)$, $A \notin \ell$ (αντίστ. $\mathbb{E}(A, \ell)$, $A \in \ell$) είναι *αβεβλητές*. Όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια, η μεταθετικότητα των προηγούμενων ομάδων *δεν* ισχύει γενικώς, αλλά μόνο σε μερικές κατηγορίες προβολικών επιπέδων (Desargues, Πάππου), στις οποίες εμπίπτει βεβαίως και το $\mathbb{P}_2$.

3.4.5 Ασκήσεις.

- 1) Να συμπληρωθούν οι λεπτομέρειες όλων των συμπερασμάτων της Παραγράφου 3.4.
- 2) Να δικαιολογηθεί (χωρίς προσφυγή στη σχετική κατασκευή) γιατί στον πίνακα (3.4.1) δεν είναι κατ' ανάγκην $s \in \mathbb{R}_*$.
- 3) Έστω $(\phi, \psi) \in \mathbb{E}([0, 0, 1], < 1, 0, 0 >)$. Αν $[a, b, c]$ είναι ένα σημείο του $\mathbb{P}_2$ με $a \neq 0$ και $\phi([a, b, c]) = [a, b, c]$, να επαληθευθεί (χωρίς χρήση του Πορίσματος 2.2.19) ότι η (ϕ, ψ) είναι η ταυτοτική έπαρση.
- 4) Να προσδιοριστεί το s του πίνακα (3.4.1) μιας έπαρσης (ϕ, ψ) από μία αρχική συνθήκη $(X_0, \phi(X_0))$.
- 5) Αν η $(\phi, \psi) \in \mathbb{E}([1, 0, 0], < 0, 0, 1 >)$ προκύπτει από ένα γραμμικό αυτομορφισμό του $\mathbb{R}^3$, ποια είναι η μορφή του αντιστοίχου πίνακα; Να γενικευθεί το αποτέλεσμα για κάθε έπαρση της προηγούμενης ομάδας.

3.5 Το $\mathbb{P}_2$ ως πλήρωση του συνήθους επιπέδου

Θεωρούμε το (συσχετισμένο) επίπεδο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ [βλ. Παράδειγμα 1.1.3 (1)]. Μεσω της (αυθαίρετης) επιλογής ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων, το $\mathcal{P}$ ταυτίζεται με το $\mathbb{R}^2$, οπότε κάθε σημείο του $\mathcal{P}$ ταυτίζεται με ένα μοναδικό ζεύγος $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Όπως είδαμε στην Παράγραφο 1.6, η πλήρωση ενός συσχετισμένου επιπέδου $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ οδηγεί στο προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}^+, \mathcal{L}^+, I^+)$. Εδώ θα δείξουμε ότι η πλήρωση του Ευκλείδειου επιπέδου είναι προβολικό επίπεδο ισόμορφο με το $\mathbb{P}_2^a = (\mathcal{P}^a, \mathcal{L}^a, \epsilon) \equiv \mathbb{P}_2$ (βλ. Θεώρημα 3.1.1 και Σύμβαση 3.1.2).

Για το σκοπό αυτό ορίζουμε την απεικόνιση $\phi : \mathcal{P}^a \rightarrow \mathcal{P}^+$ με

$$(3.5.1) \quad \phi([x, y, z]) := \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right), \quad \text{αν } z \neq 0,$$

και

$$(3.5.2) \quad \phi([x, y, z]) := \ell^*, \quad \text{αν } z = 0,$$

όπου ℓ είναι μία οποιαδήποτε από τις παράλληλες ευθείες με κλίση $\bar{\ell} = y/x$.

Η ϕ είναι καλά ορισμένη: πρώτα διαπιστώνουμε αμέσως ότι η έκφραση (3.5.1) είναι ανεξάρτητη της εκλογής του αντιπροσώπου της κλάσης $[x, y, z]$. Στην έκφραση (3.5.2) βλέπουμε ακόμη ότι το κλάσμα y/x δεν μπορεί να πάρει τη μορφή $0/0$, αφού δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα τα x και y . Επίσης, η τιμή ℓ^* δεν εξαρτάται ούτε από την εκλογή του αντιπροσώπου της κλάσης $[x, y, z]$, ούτε από την εκλογή μιας συγκεκριμένης ℓ από την κλάση των παράλληλων ευθειών με κλίση $\bar{\ell}$.

Ιδιαίτερως, για $z = 0$ και $x \neq 0$ (οπότε $\bar{\ell} \in \mathbb{R}$) έχουμε ότι

$$[x, y, 0] = \left[1, \frac{y}{x}, 0 \right] = [1, \bar{\ell}, 0],$$

επομένως

$$(3.5.3) \quad \ell^* = \phi([x, y, 0]) = \phi([1, \bar{\ell}, 0]),$$

ενώ, για $z = 0$ και $x = 0$ (οπότε $y \neq 0$, $\bar{\ell} = \infty$), θα είναι $[0, y, 0] = [0, 1, 0]$ και

$$(3.5.4) \quad \ell^* = \phi([0, y, 0]) = \phi([0, 1, 0]).$$

3.5.1 Λήμμα. Η απεικόνιση ϕ είναι 1-1 και επί.

Απόδειξη. Το 1 - 1 είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της ϕ . Για το επί θεωρούμε τυχόν $P^+ \in \mathcal{P}^+$ και θα δείξουμε ότι υπάρχει $X \in \mathcal{P}^a$ με $\phi(X) = P^+$. Πραγματικά, αν $P^+ = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ (: πραγματικό σημείο), αρκεί να πάρουμε $X = [a, b, 1]$. Αν $P^+ = \ell^*$ (: ιδεατό σημείο) και η κλίση της ℓ (άρα και όλων των παραλλήλων προς αυτήν) είναι $\hat{\ell} \in \mathbb{R}$, αρκεί να πάρουμε $X = [1, \hat{\ell}, 0]$, ενώ, αν η κλίση της ℓ είναι ∞ , μπορούμε να πάρουμε $X = [0, 1, 0]$. $\square$

3.5.2 Λήμμα. *Η ϕ απεικονίζει συγγραμμικά σημεία του $\mathcal{P}^a$ σε συγγραμμικά σημεία του $\mathcal{P}^+$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τρία διαφορετικά συγγραμμικά σημεία $P_i = [a_i, b_i, c_i]$ ($i = 1, 2, 3$) και θέτουμε $\mathcal{Q}_i := \phi(P_i)$.

Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

α) Και τα τρία σημεία $\mathcal{Q}_i$ να είναι πραγματικά, δηλαδή $\mathcal{Q}_i \in \mathbb{R}^2$. Αυτό σημαίνει ότι $c_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$), οπότε

$$(3.5.5) \quad \mathcal{Q}_i = \left(\frac{a_i}{c_i}, \frac{b_i}{c_i} \right).$$

Επειδή, κατά το Λήμμα 3.5.1, τα $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ είναι διαφορετικά σημεία, ορίζεται η ευθεία $k := \mathcal{Q}_1 \vee \mathcal{Q}_2$. Η ευθεία αυτή, θεωρουμένη ως ευθεία του $\mathbb{R}^2 (\cong \mathcal{P})$, έχει εξίσωση της μορφής

$$(3.5.6) \quad \frac{x - u_1}{y - v_1} = \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1},$$

όπου $u_i = \frac{a_i}{c_i}$ και $v_i = \frac{b_i}{c_i}$ ($i = 1, 2, 3$).

Παρατηρούμε ότι την (3.5.6) ικανοποιεί και το σημείο (u_3, v_3) , λόγω της υπόθεσης της συγγραμμικότητας των σημείων P_i και της αντίστοιχης συνθήκης (3.1.14). Επομένως, τα $\mathcal{Q}_i$ ($i = 1, 2, 3$) είναι όλα σημεία της k , δηλαδή είναι συγγραμμικά στο $\mathcal{P} \cong \mathbb{R}^2$, άρα είναι συγγραμμικά και στο $\mathcal{P}^+$, επειδή ανήκουν και στην k^+ .

β) Δύο σημεία, π.χ. τα $\mathcal{Q}_1$ και $\mathcal{Q}_2$, να είναι πραγματικά και το $\mathcal{Q}_3$ ιδεατό. Αναλόγως προς την προηγούμενη περίπτωση, θα ισχύει η (3.5.5) για $i = 1, 2$, ενώ $\mathcal{Q}_3 = \ell^*$, για κάποια ευθεία ℓ του $\mathcal{P}$ με κλίση $\hat{\ell} = \frac{a_3}{c_3}$. Εμφανίζονται τώρα οι επόμενες δύο υποπεριπτώσεις:

β₁) $\hat{\ell} \in \mathbb{R}$. Τότε, λόγω της (3.5.3), $P_3 = [1, \hat{\ell}, 0]$ και η συνθήκη της συγγραμμικότητας των P_i ($i = 1, 2, 3$) συνεπάγεται ότι

$$\hat{\ell} = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 c_2 - a_2 c_1} = \frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}.$$

Το προηγούμενο $\bar{l}$ είναι ακριβώς η κλίση της ευθείας $k = Q_1 \vee Q_2$, άρα $k//\bar{l}$. Συνεπώς, η $k^+ = J(k) \cup \{k^*\} = J(k) \cup \{\bar{l}^*\}$ είναι η κοινή ευθεία των σημείων Q_i ($i = 1, 2, 3$).

β_2) $\bar{l} = \infty$. Τότε, λόγω της (3.5.4), $P_3 = [0, 1, 0]$. Όπως προηγουμένως, βρίσκουμε ότι η κλίση της $k = Q_1 \vee Q_2$ είναι επίσης ∞ , οπότε η k^+ είναι η κοινή ευθεία των Q_i ($i = 1, 2, 3$).

γ) Όλα τα σημεία Q_i ($i = 1, 2, 3$) να είναι ιδεατά. Τότε η κοινή τους ευθεία είναι η $\mathcal{E}_\infty$. Ας σημειωθεί ότι η περίπτωση να είναι ιδεατά δύο σημεία και το τρίτο πραγματικό δεν μπορεί να εμφανιστεί (γιατί;). Επομένως αποδεικνύεται πλήρως το συμπέρασμα της εκφώνησης. $\square$

Τα προηγούμενα βοηθητικά συμπεράσματα, σε συνδυασμό με την Άσκηση 2.1.11 (8) και τα σχόλια του Εδαφίου 1.6.6, αποδεικνύουν το αποτέλεσμα που περιγράψαμε στην εισαγωγή αυτής της παραγράφου. Ακριβέστερα έχουμε το

3.5.3 Θεώρημα. Το πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}_2$ είναι ισόμορφο με την πλήρωση του (συσχετισμένου) επιπέδου της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, άρα είναι ισόμορφο και με το κλασικό προβολικό επίπεδο.

3.5.4 Ασκήσεις.

- 1) Να επαληθευτεί ότι η απεικόνιση ϕ , που ορίζεται με τις (3.5.1) και (3.5.2), είναι καλά ορισμένη.
- 2) Να συμπληρωθούν οι λεπτομέρειες των αποδείξεων των Λημμάτων 3.5.1 και 3.5.2.
- 3) Να εξηγηθεί το "γιατί", που αναφέρεται στην περίπτωση γ) της απόδειξης του Λήμματος 3.5.2.

Κεφάλαιο 4

Προβολικά επίπεδα Desargues

Η αιφνιδια άνοδος της συνθετικής Προβολικής Γεωμετρίας κατά τον 17ο αιώνα εμφανίζεται τώρα σαν μία καθυστερημένη αναβίωση του ελληνικού πνεύματος ... Όμως, ήταν μόνον με το εκκεντρικό «Πρόχειρο Σχέδιο» (συντετμημένος τίτλος) του Desargues στα 1639, που η συνθετική Προβολική Γεωμετρία αναπτύχθηκε σε νέο και ανεξάρτητο κλάδο της γεωμετρίας.

E. T. BELL [6, σελ. 158]

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ DESARGUES (που οφείλεται στον Γάλλο αρχιτέκτονα, μηχανικό και μαθηματικό G. Desargues, 1593–1662) αποτελεί –ιστορικά– ένα από τα παλαιότερα και σημαντικότερα αποτελέσματα της κλασικής Προβολικής Γεωμετρίας. Στο (αφηρημένο) πλαίσιο, που αναπτύσσεται εδώ, το θεώρημα ισχύει κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, πράγμα που οδηγεί στη διάκριση της κατηγορίας των προβολικών επιπέδων του παρόντος κεφαλαίου.

Στην Παράγραφο 1 δίνεται ο *αλγεβρικός* χαρακτηρισμός ενός επιπέδου Desargues, σύμφωνα με τον οποίον δεχόμαστε (αξιωματικά) την ύπαρξη ομολογιών με δεδομένο κέντρο και άξονα, οι οποίες ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες. Σε ένα τέτοιο επίπεδο, αποδεικνύεται ότι το σύνολο όλων των επάρσεων με κοινόν άξονα αποτελεί αβελιανή ομάδα.

Ο *γεωμετρικός* χαρακτηρισμός του επιπέδου Desargues παρουσιάζεται στην Παράγραφο 2. Συνοπτικά, αυτός ισοδυναμεί με τη συνθήκη: «*δύο τρίγωνα είναι προοπτικά ως προς κέντρο τότε και μόνον τότε όταν είναι προοπτικά ως προς άξονα*».

Βεβαίως, από ιστορική άποψη, η γεωμετρική προσέγγιση προηγείται της αλγεβρικής. Εδώ ακολουθούμε την αντίστροφη πορεία, επειδή η πρόσφατη αλγεβρική μελέτη του $\mathbb{P}_2$ (που έγινε στο Κεφάλαιο 3) μας παρέχει αμέσως ένα βασικό παράδειγμα επιπέδου Desargues.

Στην Παράγραφο 3 μελετούμε τις προβολικότητες αυτής της κατηγορίας επιπέδων. Ένα σημαντικό αποτέλεσμα στην κατεύθυνση αυτή είναι το ότι οι προβολικότητες τώρα ανάγονται σε συνθέσεις 2 ή 3 προοπτικοτήτων.

4.1 Αλγεβρική ερμηνεία του επιπέδου Desargues

Ακολουθώντας τη Σύμβαση 2.1.10, δίνουμε πρώτα τον επόμενο ορισμό.

4.1.1 Ορισμός. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon)$ είναι ένα προβολικό επίπεδο. Αν A, X, X' είναι σημεία και ℓ ευθεία του $\mathcal{P}$, θα λέμε ότι τα προηγούμενα στοιχεία ορίζουν μία **προσδιοριστική τετράδα** (A, ℓ, X, X') , εάν ισχύουν τα εξής:

- i) Τα σημεία A, X, X' είναι συγγραμμικά και τέτοια ώστε

$$X \neq A \neq X'.$$
- ii) Τα σημεία X, X' δεν ανήκουν στην ℓ .

Από τον προηγούμενο ορισμό φαίνεται ότι σε μία προσδιοριστική τετράδα μπορεί να είναι $A \in \ell$ ή $A \notin \ell$, καθώς επίσης και $X = X'$ ή $X \neq X'$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι (A, ℓ, X, X') είναι μία προσδιοριστική τετράδα στο πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}_2$, με $A \notin \ell$. Η μελέτη της ομάδας των ομολογιών $\mathbb{H}(A, \ell)$, που έγινε στην Παράγραφο 3.3, δείχνει ότι υπάρχει πάντοτε μία (μοναδική) ομολογία $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}(A, \ell)$, τέτοια ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $\phi(X) = X'$.

Πραγματικά, σύμφωνα με την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.10, μία τέτοια ομολογία (ϕ, ψ) αντιστοιχεί, μέσω καταλλήλου ισομορφισμού ομάδων h , στην ομολογία $(\phi_0, \psi_0) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$, η οποία καθορίζεται από τη συνθήκη

$$(4.1.1) \quad \phi_0([1, 1, 0]) = \sigma(X')$$

(τα D και D' του Θεωρήματος 3.3.10 αντικαθίστανται τώρα από τα X και X' , αντιστοίχως). Απ' το άλλο μέρος, η (ϕ_0, ψ_0) ορίζεται πλήρως από έναν πίνακα της μορφής (3.3.6), του οποίου το αντίστοιχο t έχει μία συγκεκριμένη τιμή, που προσδιορίζεται από την (4.1.1). Θυμίζουμε ότι ο τρόπος υπολογισμού του t εξηγείται στα σχόλια που ακολουθούν την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.6.

Επομένως, για να βρούμε την ομολογία $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}(A, \ell)$ βρίσκουμε πρώτα την ομολογία $(\phi_0, \psi_0) \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$, που ικανοποιεί την (4.1.1). [Σημειώνουμε ότι το $\sigma(X')$ είναι γνωστό σημείο, αφού το X' είναι δεδομένο σημείο και η (σ, τ) είναι μία γνωστή συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2$, η οποία κατασκευάζεται όπως στο Θεώρημα 3.3.10 και το Λήμμα 3.3.12]. Η ζητούμενη (ϕ, ψ) δίνεται τώρα από τη σχέση $(\phi, \psi) = h^{-1}((\phi_0, \psi_0))$. Επιπλέον,

$$\phi(X) = (\sigma^{-1} \circ \phi_0 \circ \sigma)(X) = \sigma^{-1}(\phi_0([1, 1, 0])) = X'.$$

Προφανώς, η (ϕ, ψ) είναι μονοσήμαντα ορισμένη σύμφωνα με το Πόρισμα 2.2.19.

Με παρόμοιους συλλογισμούς αποδεικνύουμε ότι και μία προσδιοριστική τετράδα (A, ℓ, X, X') του $\mathbb{P}_2$, με $A \in \ell$, ορίζει πάντοτε μία (μοναδική) έπαρση $(\phi, \psi) \in \mathbb{E}(A, \ell)$, τέτοια ώστε $\phi(X) = X'$.

Τα προηγούμενα αποδεικνύουν την

4.1.2 Πρόταση. Για κάθε προσδιοριστική τετράδα (A, ℓ, X, X') του πραγματικού προβολικού επιπέδου $\mathbb{P}_2$, με $A \notin \ell$ (αντιστ. $A \in \ell$) υπάρχει πάντοτε μία (μοναδική) ομολογία $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}(A, \ell)$ [αντιστ. έπαρση $(\phi, \psi) \in \mathbb{E}(A, \ell)$], η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη $\phi(X) = X'$.

Το συμπέρασμα της Πρότασης 4.1.2 δεν ισχύει σε οποιαδήποτε προβολικό επίπεδο, όπως αποδεικνύουν διάφορα (αντι)παραδείγματα (βλ., π.χ., R. Hartshorne [14, σελ. 19], R. J. Mihalik [20, σελ. 65], F. W. Stevenson [28, σελ. 167], C. Weibel [32]). Επομένως, η απαίτηση να ορίζονται όλες οι ομολογίες και επάρσεις, που αντιστοιχούν σε όλες τις δυνατές προσδιοριστικές τετράδες ενός τυχόντος προβολικού επιπέδου, είναι ένας ισχυρός περιορισμός, ο οποίος οδηγεί στη διάκριση μίας ειδικότερης κατηγορίας προβολικών επιπέδων, όπως ακριβέστερα ορίζεται στη συνέχεια.

4.1.3 Ορισμός. Ένα προβολικό επίπεδο $\mathcal{P}$ καλείται **επίπεδο Desargues** (Desarguesian plane), αν ισχύει το επόμενο αξίωμα:

(ΠΕ 4) Για κάθε προσδιοριστική τετράδα (A, ℓ, X, X') του $\mathcal{P}$, με $A \notin \ell$, υπάρχει μία (μοναδική) ομολογία $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}(A, \ell)$, τέτοια ώστε $\phi(X) = X'$.

Για συντομία, επίσης, λέμε ότι

∇ σε ένα επίπεδο Desargues υπάρχουν όλες οι δυνατές ομολογίες,

εννοώντας ότι για κάθε κατάλληλη προσδιοριστική τετράδα ορίζεται η αντίστοιχη ομολογία. Θυμίζουμε ότι η μοναδικότητα της ομολογίας (ϕ, ψ) του αξιώματος (ΠΕ 4) είναι συνέπεια του Πορίσματος 2.2.19.

Από την Πρόταση 4.1 2 προκύπτει αμέσως το

4.1.4 Πόρισμα. Το $\mathbb{P}_2$ είναι επίπεδο Desargues.

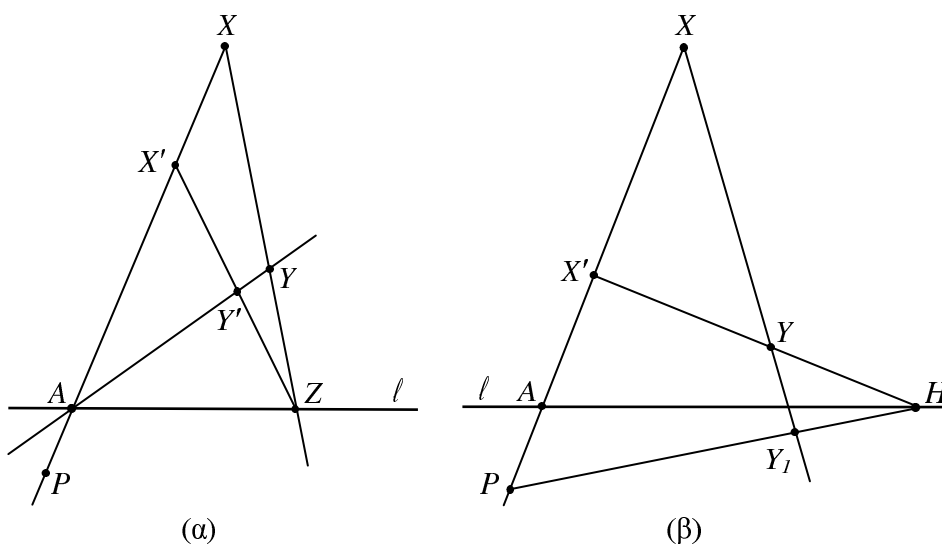
Μία βασική συνέπεια του Ορισμού 4.1.3 είναι η επομένη

4.1.5 Πρόταση. Σε ένα προβολικό επίπεδο Desargues $\mathcal{P}$ υπάρχουν και όλες οι δυνατές επάρσεις. Δηλαδή, για κάθε προσδιοριστική τετράδα (A, ℓ, X, X') του $\mathcal{P}$, με $A \in \ell$, υπάρχει μία (μοναδική) $(\phi, \psi) \in \mathbb{E}(A, \ell)$, τέτοια ώστε $\phi(X) = X'$.

Απόδειξη. Αρκεί να εκφράσουμε τη ζητούμενη (ϕ, ψ) ως σύνθεση καταλλήλων ομολογιών, η ύπαρξη των οποίων εξασφαλίζεται από την υπόθεση ότι το $\mathcal{P}$ είναι επίπεδο Desargues.

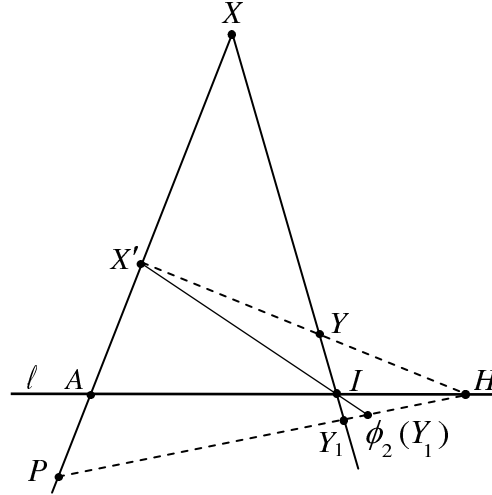
Προς τούτο αναζητούμε ένα σημείο $P \in X \vee X'$, τέτοιο ώστε, αν (ϕ_1, ψ_1) είναι η ομολογία που αντιστοιχεί στην τετράδα (X, ℓ, X', P) , και (ϕ_2, ψ_2) είναι η ομολογία που αντιστοιχεί στην (P, ℓ, X, X') , να μπορούμε να γράψουμε ότι $(\phi, \psi) = (\phi_2, \psi_2) \circ (\phi_1, \psi_1)$.

Έστω $Y \in \mathcal{P}$ τυχόν σημείο με $Y \notin X \vee X'$. Υποθέτοντας ότι υπάρχει το P , άρα και η (ϕ, ψ) , η εικόνα $Y' := \phi(Y)$ προσδιορίζεται σύμφωνα με την κατασκευή του Θεωρήματος 2.2.16, την οποίαν υπενθυμίζουμε στο βοηθητικό Σχήμα 4.1(α).



Σχήμα 4.1

Επίσης, το ίδιο Y θα έχει, μέσω της (ϕ_1, ψ_1) , μίαν εικόνα $Y_1 := \phi_1(Y)$, που βρίσκεται με ανάλογο τρόπο, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1(β). Κατόπιν, εφαρμόζοντας την (ϕ_2, ψ_2) στο Y_1 , βρίσκουμε και το σημείο $\phi_2(Y_1)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπου η κατασκευή του Y_1 του Σχήματος 4.1(β) τώρα επαναλαμβάνεται με διακεκομμένες γραμμές.



Σχήμα 4.2

Από την πρώτη διαδικασία προκύπτει ότι

$$(4.1.2) \quad Y' = \phi(Y) = (A \vee Y) \wedge (X' \vee Z),$$

όπου $Z = (X \vee Y) \wedge \ell$, ενώ από την τελευταία διαδικασία έχουμε την

$$(4.1.3) \quad \phi_2(Y_1) = (P \vee Y_1) \wedge (X' \vee I),$$

όπου $I = (X \vee Y_1) \wedge \ell$. Επομένως, η απαίτηση να είναι $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ οδηγεί στη σχέση

$$Y' = \phi(Y) = \phi_2(\phi_1(Y)) = \phi_2(Y_1),$$

και, λόγω της (4.1.3), στην

$$Y' = \phi_2(Y_1) = (P \vee Y_1) \wedge (X' \vee I),$$

από την οποία προκύπτει ότι τα σημεία Y' , P και Y_1 είναι συγγραμμικά, οπότε

$$(4.1.4) \quad P \in Y' \vee Y_1.$$

Απ' το άλλο μέρος (βλ. και το Σχήμα 4.2),

$$Y' \vee Y_1 = \phi_2(Y_1) \vee Y_1 = \phi_2(Y_1) \vee H = Y' \vee H = Y' \vee ((X' \vee Y) \wedge \ell),$$

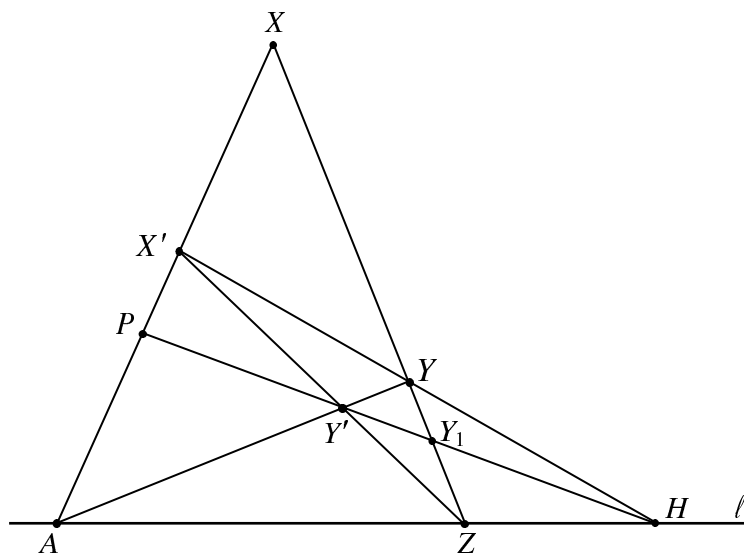
όπου $H = (X' \vee Y) \wedge \ell$. Οι τελευταίες σχέσεις, σε συνδυασμό με την (4.1.4), οδηγούν στην

$$(4.1.5) \quad P \in Y' \vee ((X' \vee Y) \wedge \ell).$$

Άρα, η $P \in X \vee X'$ και η (4.1.5) συνεπάγονται την

$$(4.1.6) \quad P = (X \vee X') \wedge [Y' \vee ((X' \vee Y) \wedge \ell)].$$

Η προηγούμενη ανάλυση μας οδηγεί τελικώς στην κατασκευή της (ϕ, ψ) με την εξής διαδικασία, που συνοψίζεται και στο Σχήμα 4.3: επιλέγουμε ένα *αυθαίρετο* σημείο Y με $Y \notin X \vee X'$ και θεωρούμε το σημείο $Y' := (A \vee Y) \wedge (X' \vee Z)$ [βλ. και τη σχέση (4.1.2)]. Κατόπιν προσδιορίζουμε το σημείο P , σύμφωνα με την (4.1.6). Τέλος, ορίζουμε τη συγγραμμικότητα $(\phi, \psi) := (\phi_2, \psi_2) \circ (\phi_1, \psi_1)$, όπου οι ομολογίες (ϕ_i, ψ_i) , $i = 1, 2$, αντιστοιχούν στις τετράδες που αναφέρονται στην αρχή της απόδειξης, με P πλέον το παραπάνω συγκεκριμένο σημείο.



Σχήμα 4.3

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη πρέπει να επαληθεύσουμε ότι η (ϕ, ψ) είναι έπαρση με τις αναφερόμενες ιδιότητες.

Πρώτα παρατηρούμε ότι, από τον ορισμό των ομολογιών (ϕ_i, ψ_i) , είναι

$$(4.1.7) \quad \phi(X) = \phi_2(\phi_1(X)) = \phi_2(X) = X',$$

δηλαδή ικανοποιείται η ζητούμενη συνθήκη.

Κατόπιν, επειδή η ℓ είναι άξονας και των δύο ομολογιών, για κάθε σημείο $Q \in \ell$ έχουμε ότι

$$\phi(Q) = \phi_2(\phi_1(Q)) = \phi_2(Q) = Q,$$

δηλαδή η ℓ είναι άξονας και της (ϕ, ψ) .

Εφόσον η (ϕ, ψ) είναι αξονική συγγραμμικότητα, θα έχει και ένα κέντρο (βλ. Θεώρημα 2.2.7). Αν το καλέσουμε A' , τότε η (4.1.7) συνεπάγεται ότι τα A', X και X' είναι συγγραμμικά, άρα $A' \in X \vee X'$. Επίσης, επειδή η (ϕ_2, ψ_2) αντιστοιχεί στην τετράδα $(P, \ell.X, X')$, έχουμε ότι $\phi_2(Y_1) = Y'$ (βλ. και Σχήμα 4.3), άρα

$$\phi(Y) = \phi_2(\phi_1(Y)) = \phi_2(Y_1) = Y',$$

οπότε τα A', Y, Y' είναι συγγραμμικά και $A' \in Y \vee Y'$. Επομένως,

$$A' = (X \vee X') \wedge (Y \vee Y') = A,$$

που αποδεικνύει ότι το $A \in \ell$ είναι (το) κέντρο της (ϕ, ψ) , οπότε $(\phi, \psi) \in \mathbb{E}(A, \ell)$ και κλείνει η απόδειξη. $\square$

Αν συμβολίσουμε με $\mathbb{E}(\ell)$ το σύνολο όλων των επάρσεων με κοινόν άξονα μία ευθεία $\ell \in \mathcal{L}$, αποδεικνύεται το επόμενο γενικό

4.1.6 Λήμμα. Σε οποιοδήποτε προβολικό επίπεδο, το σύνολο $\mathbb{E}(\ell)$ αποτελεί ομάδα (με πράξη τη σύνθεση επάρσεων).

Απόδειξη. Αν $(\phi_i, \psi_i) \in \mathbb{E}(\ell)$, $i = 1, 2$, θα δείξουμε ότι

$$(\phi, \psi) := (\phi_1, \psi_1) \circ (\phi_2, \psi_2) = (\phi_1 \circ \phi_2, \psi_1 \circ \psi_2) \in \mathbb{E}(\ell).$$

[Υποθέτουμε ότι η (ϕ, ψ) και καμία από τις (ϕ_i, ψ_i) δεν συμπίπτουν με την ταυτοτική έπαρση, διαφορετικά το συμπέρασμα είναι προφανές.]

Όπως και στην προηγούμενη απόδειξη, η ℓ είναι άξονας της (ϕ, ψ) , αφού

$$\phi(P) = \phi_1(\phi_2(P)) = \phi_1(P) = P, \quad \forall P \in \ell.$$

Αν καλέσουμε A, A_1, A_2 τα κέντρα των $(\phi, \psi), (\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2)$ αντιστοίχως, διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

i) $A_1 = A_2$. Τότε, για κάθε $k \in J(A_1) = J(A_2)$, είναι

$$\psi(k) = \psi_1(\psi_2(k)) = \psi_1(k) = k,$$

δηλαδή το $A_1 = A_2$ είναι κέντρο και της (ϕ, ψ) . Άρα, κατά την Πρόταση 2.2.21, $A = A_1 = A_2 \in \ell$, οπότε $(\phi, \psi) \in \mathbb{E}(\ell)$.

ii) $A_1 \neq A_2$. Τότε θα είναι $A_1 \neq A \neq A_2$. Πραγματικά, αν υποθέσουμε ότι $A = A_2$, τότε η $(\phi_1, \psi_1) = (\phi, \psi) \circ (\phi_2, \psi_2)^{-1}$, ως σύνθεση επάρσεων από την ομάδα $\mathbb{E}(A_2, \ell)$, θα είχε ως κέντρο και το σημείο A_2 , άρα θα έπρεπε να είναι $A_1 = A_2$ (άτοπο). Παρόμοια διαπιστώνεται ότι και $A \neq A_1$.

Μένει να δείξουμε ότι, και σ' αυτήν την περίπτωση, είναι $A \in \ell$. Αυτό ισχύει γιατί αν δεχτούμε ότι $A \notin \ell$, τότε θα ορίζονταν η ευθεία $m = A \vee A_2$, για την οποίαν έχουμε ότι

$$\psi_1(m) = \psi(\psi_2^{-1}(m)) = \psi(m) = m.$$

Επειδή η m είναι σταθερή για τη (ϕ_1, ψ_1) , θα είναι είτε $m = \ell$, είτε $m \in J(A_1)$ (αν $m \neq \ell$) [βλ. Άσκηση 2.2.23(4)]. Η περίπτωση $m = \ell$ συνεπάγεται ότι $A \in \ell$, που είναι άτοπο. Στο ίδιο άτοπο καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι $m \in J(A_1)$, επειδή $A \in m = A_1 \vee A_2 = \ell$. Επομένως, αναγκαστικά είναι $A \in \ell$ και $(\phi, \psi) \in \mathbb{E}(\ell)$, όπως ισχυριστήκαμε.

Η επαλήθευση των αξιωμάτων της ομάδας για την $\mathbb{E}(\ell)$ είναι πλέον στοιχειώδους.

4.1.7 Παρατήρηση. Το προηγούμενο λήμμα προφανώς γενικεύει το Πόρισμα 2.2.11 [για την ομάδα $\mathbb{E}(A, \ell)$]. Εδώ δείξαμε ότι το σύνολο των επάρσεων με τον ίδιον άξονα και όλα τα δυνατά κέντρα (και όχι μόνον με το ίδιο κέντρο, όπως στο προαναφερόμενο πόρισμα), αποτελούν ομάδα.

Όπως αναγράφεται στην εκφώνηση του Λήμματος 4.1.6, το συμπέρασμα ισχύει για οποιοδήποτε προβολικό επίπεδο. Αν όμως περιοριστούμε σε επίπεδα Desargues, τότε η $\mathbb{E}(\ell)$ αποκτά μια πρόσθετη ιδιότητα, όπως αποδεικνύεται στο επόμενο σημαντικό αποτέλεσμα.

4.1.8 Θεώρημα. Σε ένα προβολικό επίπεδο Desargues η ομάδα $\mathbb{E}(\ell)$ είναι αβελιανή (μεταθετική), για οποιαδήποτε $\ell \in \mathcal{L}$.

Απόδειξη. Αν $(\phi_i, \psi_i) \in \mathbb{E}(\ell)$ είναι δύο επάρσεις με αντίστοιχα κέντρα A_i ($i = 1, 2$), θα δείξουμε ότι

$$(4.1.8) \quad (\phi_2, \psi_2) \circ (\phi_1, \psi_1) = (\phi_1, \psi_1) \circ (\phi_2, \psi_2).$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: i) $A_1 \neq A_2$ και ii) $A_1 = A_2$.

Στην πρώτη περίπτωση, για την απόδειξη της (4.1.8) αρκεί να δείξουμε ότι η συγγραμμικότητα

$$\begin{aligned} (\sigma, \tau) &:= ((\phi_2, \psi_2) \circ (\phi_1, \psi_1))^{-1} \circ (\phi_1, \psi_1) \circ (\phi_2, \psi_2) \\ &= (\phi_1^{-1} \circ \phi_2^{-1} \circ \phi_1 \circ \phi_2, \psi_1^{-1} \circ \psi_2^{-1} \circ \psi_1 \circ \psi_2) \end{aligned}$$

είναι η ταυτοτική. Για τούτο θεωρούμε οποιαδήποτε ευθεία $k \in J(A_2)$ με $k \neq \ell$. Παρατηρούμε ότι $\psi_2(k) = k$, άρα

$$(4.1.9) \quad \tau(k) = \psi_1^{-1}(\psi_2^{-1}(\psi_1(k))).$$

Επειδή $A_2 = k \wedge \ell$, έχουμε ότι $A_2 = \phi_1(A_2) \in \psi_1(k)$, δηλαδή η $\psi_1(k)$ διέρχεται από το κέντρο A_2 της (ϕ_2, ψ_2) [που είναι κέντρο και της $(\phi_2^{-1}, \psi_2^{-1})$, σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.10]. Επομένως,

$$\psi_2^{-1}(\psi_1(k)) = \psi_1(k),$$

οπότε η (4.1.9) μετασχηματίζεται στην

$$\tau(k) = \psi_1^{-1}(\psi_1(k)) = k,$$

από την οποίαν προκύπτει ότι το A_2 είναι κέντρο της (σ, τ) . Με παρόμοιο τρόπο διαπιστώνεται ότι και το A_1 είναι κέντρο της (σ, τ) . Επειδή υποθέσαμε ότι $A_1 \neq A_2$, η Πρόταση 2.2.21 συνεπάγεται ότι η (σ, τ) είναι η ταυτοτική συγγραμμικότητα.

Στην περίπτωση ii) θέτουμε $A := A_1 = A_2$ και επιλέγουμε ένα τυχόν σημείο $P \in \ell$ με $P \neq A$. Επίσης θεωρούμε δύο κατάλληλα (αλλά αυθαίρετα) σημεία X και X' , έτσι ώστε η τετράδα (P, ℓ, X, X') να είναι προσδιοριστική. Εφ' όσον το επίπεδο είναι Desargues, η προηγούμενη τετράδα ορίζει μίαν αντίστοιχη έπαρση (ϕ, ψ) . Επομένως, για τις επάρσεις (ϕ, ψ) και $(\phi_1, \psi_1) \circ (\phi_2, \psi_2)$, με αντίστοιχα κέντρα P και A , ισχύει η περίπτωση i), οπότε

$$(4.1.10) \quad \begin{aligned} (\phi, \psi) \circ ((\phi_1, \psi_1) \circ (\phi_2, \psi_2)) &= ((\phi_1, \psi_1) \circ (\phi_2, \psi_2)) \circ (\phi, \psi) \\ &= (\phi_1, \psi_1) \circ ((\phi_2, \psi_2) \circ (\phi, \psi)). \end{aligned}$$

Επίσης, επειδή η (ϕ_2, ψ_2) έχει κέντρο το A και η (ϕ, ψ) το P με $P \neq A$, η $(\phi_2, \psi_2) \circ (\phi, \psi)$ θα έχει κέντρο ένα σημείο B με $A \neq B \neq P$ [βλ. απόδειξη του Λήμματος 4.1.6, περίπτωση ii)]. Επομένως, οι (ϕ_1, ψ_1) και $(\phi_2, \psi_2) \circ (\phi, \psi)$ έχουν διαφορετικά κέντρα, άρα μετατίθενται και η (4.1.10) μετασχηματίζεται στην

$$(4.1.11) \quad (\phi, \psi) \circ ((\phi_1, \psi_1) \circ (\phi_2, \psi_2)) = ((\phi_2, \psi_2) \circ (\phi, \psi)) \circ (\phi_1, \psi_1).$$

Αναλόγως έχουμε ότι $(\phi_2, \psi_2) \circ (\phi, \psi) = (\phi, \psi) \circ (\phi_2, \psi_2)$, λόγω της οποίας η (4.1.11) παίρνει τελικώς τη μορφή

$$(\phi, \psi) \circ ((\phi_1, \psi_1) \circ (\phi_2, \psi_2)) = (\phi, \psi) \circ ((\phi_2, \psi_2) \circ (\phi_1, \psi_1)).$$

Επειδή η (ϕ, ψ) είναι ισομορφισμός, η τελευταία σχέση οδηγεί στην (4.1.8), όπως ζητούσαμε. $\square$

4.1.9 Παρατήρηση. Όπως φαίνεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.8, στην περίπτωση i) δεν χρησιμοποιήθηκε καθόλου η υπόθεση ότι το επίπεδο $\mathcal{P}$ είναι Desargues. Επομένως, μπορούμε να διατυπώσουμε το συμπέρασμα:

▽ Σε οποιοδήποτε προβολικό επίπεδο, δύο επάρσεις με κοινόν άξονα και διαφορετικά κέντρα πάντοτε μετατίθενται.

Αντιθέτως, η υπόθεση ότι το $\mathcal{P}$ είναι επίπεδο Desargues είναι ουσιώδης για την απόδειξη της μεταθετικότητας δύο επάρσεων με κοινόν άξονα και κοινό κέντρο, όπως στην περίπτωση ii).

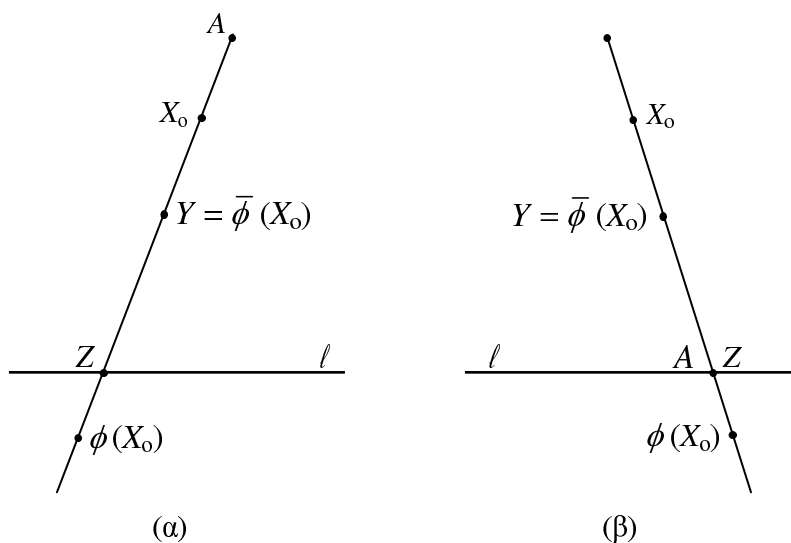
4.1.10 Πρόρισμα. Σε ένα επίπεδο Desargues, η ομάδα $\mathbb{E}(A, \ell)$ είναι αβελιανή, για κάθε $(A, \ell) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ με $A \in \ell$.

Στην ίδια κατηγορία προβολικών επιπέδων μπορούμε επίσης να απαντήσουμε και στο επόμενο

Ερώτημα: Ποιό είναι το πλήθος των στοιχείων της ομάδας $\mathbb{L}(A, \ell)$, για οποιοδήποτε ζεύγος $(A, \ell) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$;

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $A \notin \ell$.

Σταθεροποιούμε ένα (αυθαίρετο) σημείο $X_0 \in \mathcal{P}$, έτσι ώστε $X_0 \neq A$ και $X_0 \notin \ell$ (ένα τέτοιο σημείο υπάρχει πάντοτε!). Αν $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}(A, \ell)$, τότε η εικόνα $\phi(X_0)$ του X_0 είναι σημείο της $A \vee X_0$ με $\phi(X_0) \neq A$ και $\phi(X_0) \neq (A \vee X_0) \wedge \ell = Z$ [βλ. Σχήμα 4.4(α) και Άσκηση 2.2.23(6)].



Σχήμα 4.4

Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση

$$(4.1.12) \quad H : \mathbb{H}(A, \ell) \longrightarrow J(A \vee X_0) - \{A, Z\} : (\varphi, \psi) \mapsto \varphi(X_0).$$

Διαπιστώνουμε ότι η H είναι απεικόνιση 1-1: αν (φ, ψ) και (φ', ψ') είναι ομολογίες με $\varphi(X_0) = \varphi'(X_0)$, τότε θα είναι και $(\varphi, \psi) = (\varphi', \psi')$, σύμφωνα με το Πόρισμα 2.2.19.

Επίσης, η H είναι απεικόνιση επί: για οποιοδήποτε $Y \in J(A \vee X_0) - \{A, Z\}$, η τετράδα (A, ℓ, X_0, Y) είναι προσδιοριστική. Επειδή το επίπεδο είναι Desargues, υπάρχει (μοναδική) $(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) \in \mathbb{H}(A, \ell)$ με $\bar{\varphi}(X_0) = Y$.

Άρα, βάσει του Συμβολισμού 1.4.5, καταλήγουμε στη σχέση

$$(4.1.13) \quad |\mathbb{H}(A, \ell)| = |J(A \vee X_0) - \{A, Z\}|.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $A \in \ell$.

Και στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε αναλόγως. Όμως, η μόνη θέση που δεν μπορεί να πάρει τώρα το X_0 είναι το σημείο $Z = (A \vee X_0) \wedge \ell = A$ [βλ. και Σχήμα 4.4(β)]. Άρα μπορούμε να ορίσουμε την 1-1 και επί απεικόνιση

$$(4.1.14) \quad E : \mathbb{E}(A, \ell) \longrightarrow J(A \vee X_0) - \{A\} : (\varphi, \psi) \mapsto \varphi(X_0).$$

Έτσι καταλήγουμε στην

$$(4.1.15) \quad |\mathbb{E}(A, \ell)| = |J(A \vee X_0) - \{A\}|.$$

Από το Πόρισμα 1.4.7 προκύπτει ότι οι (4.1.13) και (4.1.15) δεν αζαρτώνται από την επιλογή του X_0 . Επομένως, τα προηγούμενα συνοψίζουν την απάντηση στο παραπάνω ερώτημα ως εξής:

4.1.11 Πόρισμα. Σε ένα προβολικό επίπεδο Desargues, το πλήθος των στοιχείων της ομάδας $\mathbb{L}(A, \ell)$ δίνεται από τις σχέσεις:

$$|\mathbb{L}(A, \ell)| = \begin{cases} |\mathbb{H}(A, \ell)| = |J(A \vee X_0) - \{A, (A \vee X_0) \wedge \ell\}|, & \text{αν } A \notin \ell, \\ |\mathbb{E}(A, \ell)| = |J(A \vee X_0) - \{A\}|, & \text{αν } A \in \ell, \end{cases}$$

όπου το X_0 είναι τυχόν σημείο του επιπέδου, με $X_0 \neq A$ και $X_0 \notin \ell$.

Ιδιαίτερώς, για πεπερασμένα προβολικά επίπεδα, ισχύει ότι

$$|\mathbb{L}(A, \ell)| = \begin{cases} |\mathbb{H}(A, \ell)| = |J(\ell)| - 2, & \text{αν } A \notin \ell, \\ |\mathbb{E}(A, \ell)| = |J(\ell)| - 1, & \text{αν } A \in \ell. \end{cases}$$

4.1.12 Ασκήσεις.

- 1) Αν σε μία προσδιοριστική τετράδα (A, ℓ, X, X') είναι $X = X'$, ποιά είναι τότε η αντίστοιχη συγγραμμικότητα που προσδιορίζει; Για την ύπαρξή της είναι απαραίτητο το επίπεδο να είναι Desargues;
- 2) Να συμπληρωθούν οι λεπτομέρειες της απόδειξης της Πρότασης 4.1.5, του Θεωρήματος 4.1.8 και του Πορίσματος 4.1.10.
- 3) Να συμπληρωθούν οι λεπτομέρειες της απόδειξης του Λήμματος 4.1.6 και να επαληθευθεί ότι η $\mathbb{E}(\ell)$ ικανοποιεί όλα τα αξιώματα της ομάδας.
- 4) Να δοθεί μία άλλη απόδειξη της περίπτωσης i) του Λήμματος 4.1.6, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το $\mathbb{E}(A, \ell)$, με $A \in \ell$, είναι ομάδα.
- 5) Να δικαιολογηθεί γιατί το επίπεδο της κλασικής Προβολικής Γεωμετρίας είναι επίπεδο Desargues.
- 6) Να εξηγηθεί γιατί η απεικόνιση (4.1.14) είναι $1-1$ και επί.
- 7) Αν H και E είναι οι απεικονίσεις (4.1.12) και (4.1.14) αντιστοίχως, να προσδιοριστούν οι συγγραμμικότητες $H^{-1}(X_0)$ και $E^{-1}(X_0)$, όπου το X_0 είναι το σταθεροποιημένο σημείο με $X_0 \neq A$ και $X_0 \notin \ell$, που χρησιμοποιήθηκε για τον ορισμό των H και E .

4.2 Γεωμετρική ερμηνεία του επιπέδου Desargues

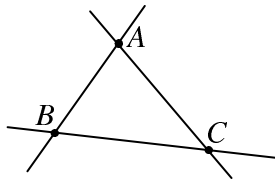
Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι ο (αλγεβρικός) Ορισμός 4.1.3 του επιπέδου Desargues ισοδυναμεί με μία «γεωμετρική» συνθήκη, η οποία στην κλασική Προβολική Γεωμετρία είναι γνωστή ως Θεώρημα του Desargues.

Θεωρούμε στη συνέχεια ένα *τυχόν* προβολικό επίπεδο $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$.

4.2.1 Ορισμός. Υποθέτουμε ότι A, B, C είναι τρία διαφορετικά και μη συγγραμμικά σημεία του $\mathcal{P}$. Ένα **(πλήρες) τρίγωνο** (triangle) με **κορυφές** (vertices) τα A, B, C είναι το σύνολο (βλ. και το Σχήμα 4.5)

$$\{A, B, C\} \cup \{A \vee B, B \vee C, C \vee A\} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}.$$

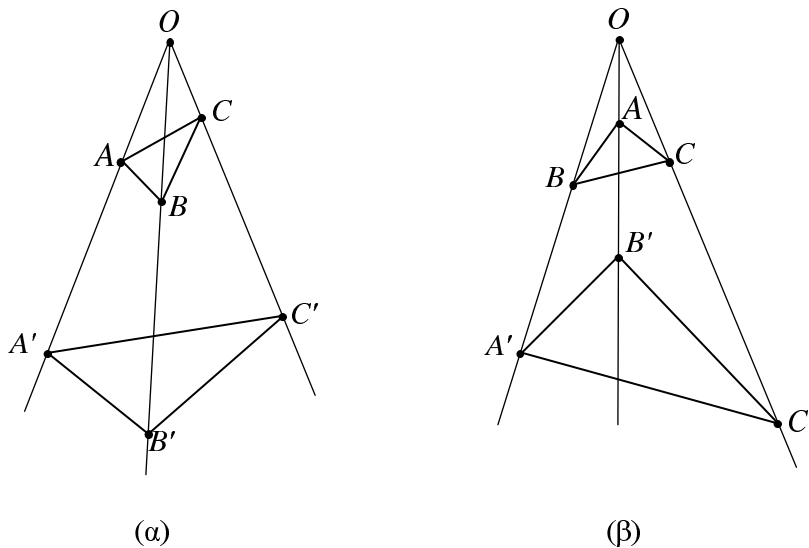
Οι ευθείες $A \vee B, B \vee C, C \vee A$ καλούνται **πλευρές** (sides) και το προηγούμενο τρίγωνο συμβολίζεται με ABC (ή με οποιαδήποτε άλλη σειρά των κορυφών του).



Σχήμα 4.5

4.2.2 Ορισμός. Δύο τρίγωνα ABC και $A'B'C'$ καλούνται **προοπτικά ως προς κέντρο** (perspective from center) αν υπάρχει ένα σημείο $O \in \mathcal{P}$ [που ονομάζεται **κέντρο προοπτικότητας** (center of perspectivity)] και μία 1-1 και επί απεικόνιση $\pi_O : \{A, B, C\} \rightarrow \{A', B', C'\}$, τέτοια ώστε οι τριάδες $\{O, X, \pi_O(X)\}$ να αποτελούνται από συγγραμμικά σημεία, για κάθε $X = A, B, C$. Οι αντίστοιχες κορυφές $X, \pi_O(X)$ καλούνται **ομόλογες** (homologous).

Περιφραστικά θα λέγαμε ότι, σε δύο τρίγωνα προοπτικά ως προς κέντρο O , οι ομόλογες κορυφές βρίσκονται σε ευθείες που συγκλίνουν στο κέντρο προοπτικότητας O .



Σχήμα 4.6

Στο Σχήμα 4.6(α) εμφανίζεται μία προοπτικότητα, ας την καλέσουμε π_O , με ομόλογες κορυφές τα ζεύγη $(A, \pi_O(A) = A')$, $(B, \pi_O(B) = B')$, $(C, \pi_O(C) = C')$, ενώ το Σχήμα 4.6(β) περιγράφει μία π'_O , με ομόλογες κορυφές $(A, \pi'_O(A) = B')$, $(B, \pi'_O(B) = A')$, $(C, \pi'_O(C) = C')$.

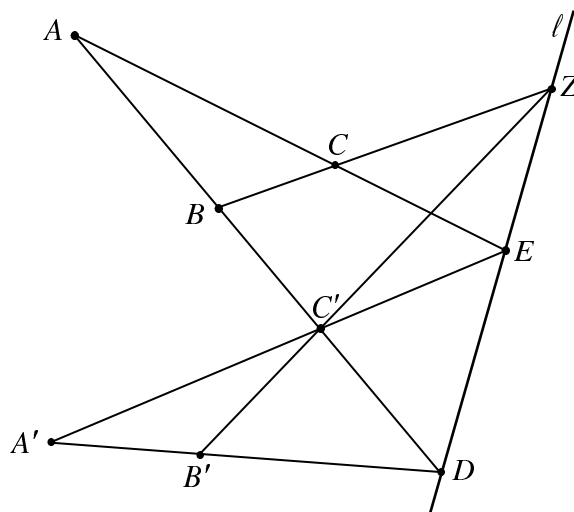
Η δυϊκή έννοια της προοπτικότητας τριγώνων ως προς άξονα δίνεται στον επόμενο ορισμό.

4.2.3 Ορισμός. Δύο τρίγωνα ABC και $A'B'C'$ καλούνται **προοπτικά ως προς άξονα** (perspective from axis) αν υπάρχει μία ευθεία $\ell \in \mathcal{L}$ [που ονομάζεται **άξονας προοπτικότητας** (axis of perspectivity)] και μία $1-1$ και επί απεικόνιση

$$\pi_\ell : \{A \vee B, B \vee C, C \vee A\} \longrightarrow \{A' \vee B', B' \vee C', C' \vee A'\},$$

τέτοια ώστε οι τριάδες ευθειών $\{\ell, x, \pi_\ell(x)\}$, όπου $x = A \vee B, B \vee C, C \vee A$, να συγκλίνουν στο ίδιο σημείο. Οι αντίστοιχες πλευρές $x, \pi_\ell(x)$ καλούνται **ομόλογες**.

Περιφραστικά, σε δύο τρίγωνα προοπτικά ως προς άξονα ℓ , οι ομόλογες πλευρές τέμνονται σε σημεία τα οποία βρίσκονται όλα επάνω στον άξονα. Το επόμενο σχήμα απεικονίζει δύο τέτοια τρίγωνα ABC και $A'B'C'$.



Σχήμα 4.7

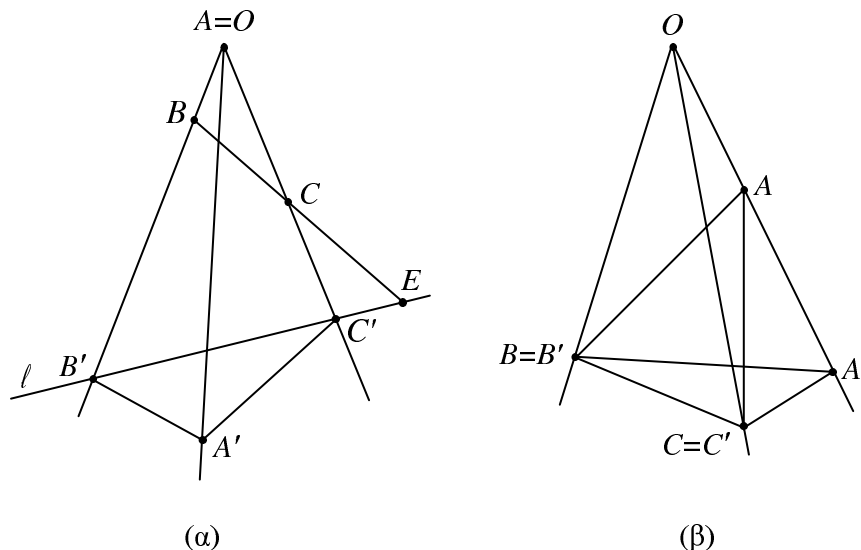
Διατυπώνουμε τώρα την επομένη συνθήκη:

(D)

Δύο τρίγωνα είναι προοπτικά ως προς κέντρο τότε και μόνον τότε αν είναι προοπτικά ως προς άξονα.

Μπορούμε να δούμε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις, όπου τα τρίγωνα έχουν μια ειδική (εκφυλισμένη) «τοποθέτηση», η συνθήκη (D) αποτελεί έναν ισχυρισμό

ο οποίος επαληθεύεται. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο τρίγωνα προοπτικά ως προς κέντρο, με ομόλογες κορυφές (A, A') , (B, B') , (C, C') και με το κέντρο προοπτικότητας O να συμπίπτει με την κορυφή A [βλ. Σχήμα 4.8(α)]. Τότε τα ίδια τρίγωνα είναι προοπτικά και ως προς άξονα, που είναι ακριβώς η ευθεία $B' \vee C'$, δηλαδή η πλευρά του τριγώνου $A'B'C'$ που δεν περιέχει την ομόλογη κορυφή της A .



Σχήμα 4.8

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο τρίγωνα ABC και $A'B'C'$, τα οποία είναι προοπτικά ως προς την ευθεία $B' \vee C'$ και με ομόλογες πλευρές $(A \vee B, A' \vee B')$, $(A \vee C, A' \vee C')$, $(B \vee C, B' \vee C')$ (ίδιο σχήμα). Τότε τα τρίγωνα είναι προοπτικά ως προς το κέντρο $O = A$. Πραγματικά, στην περίπτωση αυτή οι $A \vee B$ και $A' \vee B'$ τέμνονται στο B' , οπότε τα σημεία A, B, B' είναι συγγραμμικά και $A \in B \vee B'$. Παρόμοια και τα A, C, C' είναι συγγραμμικά, άρα $A \in C \vee C'$. Επομένως το A είναι το ζητούμενο κέντρο προοπτικότητας.

Μία άλλη εκφυλισμένη περίπτωση εμφανίζεται στο Σχήμα 4.8(β), όπου συμπίπτουν δύο ομόλογες πλευρές. Αν τα τρίγωνα είναι προοπτικά ως προς κέντρο, θα είναι προοπτικά και προς άξονα, που είναι τώρα η κοινή πλευρά τους, και αντιστρόφως.

Στη γενική περίπτωση όμως, σε τυχόν προβολικό επίπεδο, δύο τρίγωνα προοπτικά ως προς κέντρο (αντιστ. ως προς άξονα) δεν είναι απαραίτητως και προοπτικά ως προς άξονα (αντιστ. κέντρο). Αντιθέτως, ισχύει η

4.2.4 Πρόταση. Σε ένα προβολικό επίπεδο Desargues ισχύει η συνθήκη (D).

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο τρίγωνα ABC και $A'B'C'$, τα οποία είναι προοπτικά ως προς το κέντρο O , με ζεύγη ομολόγων κορυφών (χωρίς βλάβη της γενικότητας) τα (A, A') , (B, B') , (C, C') . Υποθέτουμε ότι δεν έχουμε κάποια εκφυλισμένη περίπτωση τοποθέτησης τριγώνων, οπότε το συμπέρασμα είναι άμεσο (όπως στην παραπάνω συζήτηση).

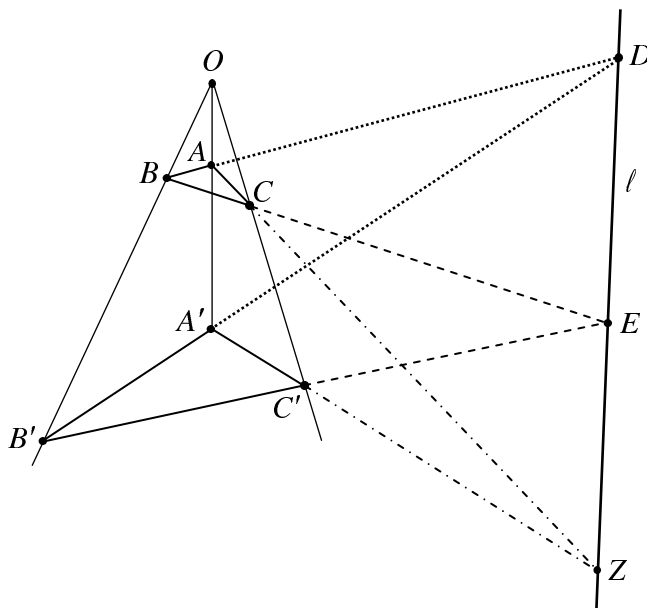
Θα δείξουμε ότι τα σημεία

$$D := (A \vee B) \wedge (A' \vee B')$$

$$E := (B \vee C) \wedge (B' \vee C')$$

$$Z := (A \vee C) \wedge (A' \vee C')$$

βρίσκονται σε μία κοινή ευθεία ℓ , η οποία θα είναι και ο αντίστοιχος άξονας (για διευκόλυνση στους συλλογισμούς παραθέτουμε το επόμενο σχήμα).



Σχήμα 4.9

Παρατηρούμε ότι $D \neq E$ (αλλιώς τα τρίγωνα θα ήσαν ευθείες), άρα ορίζεται η $\ell := D \vee E$. Ισχυριζόμαστε ότι $Z \in \ell$.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού θεωρούμε την τετράδα (O, ℓ, B, B') , για την οποίαν ισχύουν τα εξής:

- Τα O, B, B' είναι διαφορετικά μεταξύ τους (αλλιώς θα είχαμε εκφυλισμένες περιπτώσεις) και συγγραμμικά.
- Τα B, B' δεν ανήκουν στην ℓ : αν, για παράδειγμα, $B \in \ell$, τότε θα είχαμε ότι

$$D = (A \vee B) \wedge \ell = B = (B \vee C) \wedge \ell = E,$$

που είναι άτοπο. Άρα η (O, ℓ, B, B') είναι προσδιοριστική τετράδα σε επίπεδο *Desargues*, οπότε ορίζει μία συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) με κέντρο O και άξονα ℓ , η οποία θα είναι ομολογία (αν $O \notin \ell$) ή έπαρση (αν $O \in \ell$), με

$$(4.2.1) \quad \phi(B) = B'.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.13, οι ευθείες $A \vee C$, $\psi(A \vee C)$ και ℓ θα διέρχονται από το ίδιο σημείο. Επειδή $(A \vee C) \wedge \psi(A \vee C) \in \ell$ και θέλουμε $(A \vee C) \wedge \ell = Z$, ο παραπάνω ισχυρισμός μας θα έχει αποδειχθεί αν δείξουμε ότι

$$(4.2.2) \quad \psi(A \vee C) = \phi(A) \vee \phi(C) = A' \vee C'.$$

Για τον σκοπό αυτό θα υπολογίσουμε τα σημεία-εικόνες $\phi(A)$ και $\phi(C)$, εκφράζοντας τα A και C ως τομές καταλλήλων ευθειών, των οποίων η αντίστοιχη εικόνα (μέσω της ψ) προσδιορίζεται εύκολα. Έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι

$$A = (O \vee A) \wedge (A \vee B) = (O \vee A) \wedge (B \vee D),$$

οπότε, εφαρμόζοντας τη (ϕ, ψ) , έχουμε ότι

$$(4.2.3) \quad \phi(A) = \psi(O \vee A) \wedge \psi(B \vee D) = \psi(O \vee A) \wedge (\phi(B) \vee \phi(D)).$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\psi(O \vee A) = O \vee A$, $\phi(D) = D$ [αφού η (ϕ, ψ) έχει κέντρο O και άξονα ℓ], καθώς και την (4.2.1), μετασχηματίζουμε την (4.2.3) στην

$$(4.2.4) \quad \phi(A) = (O \vee A) \wedge (B' \vee D).$$

Λόγω των σχέσεων $O \vee A = O \vee A'$ και $B' \vee D = B' \vee A'$, η (4.2.4) οδηγεί τελικώς στην

$$(4.2.5) \quad \phi(A) = (O \vee A') \wedge (B' \vee A') = A'.$$

Παρόμοια έχουμε ότι

$$C = (O \vee C) \wedge (B \vee C) = (O \vee C) \wedge (B \vee E),$$

απ' όπου βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi(C) &= \psi(O \vee C) \wedge \psi(B \vee E) = (O \vee C) \wedge (\phi(B) \vee \phi(E)) \\ &= (O \vee C) \wedge (B' \vee E) = (O \vee C') \wedge (B' \vee C') = C'. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση και η (4.2.4) αποδεικνύουν την (4.2.2), όπως ζητούσαμε.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να δείξουμε και το αντίστροφο συμπέρασμα, δηλαδή ότι δύο τρίγωνα προοπτικά ως προς άξονα είναι και προοπτικά ως προς κέντρο. Αυτό όμως είναι το δυϊκό του πρώτου συμπεράσματος, επομένως κλείνει η απόδειξη. $\square$

Η αντίστροφη της Πρότασης 4.2.4 διατυπώνεται στην ακόλουθη

4.2.5 Πρόταση. *Αν σε ένα προβολικό επίπεδο $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ ισχύει η συνθήκη (D) , τότε αυτό είναι επίπεδο Desargues.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχούσα προσδιοριστική τετράδα (A, ℓ, X_0, X'_0) με $A \notin \ell$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μία (μοναδική) ομολογία $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}(A, \ell)$, η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη

$$(4.2.6) \quad \phi(X_0) = X'_0.$$

Όπως έχουμε δει στο Θεώρημα 2.2.16, αν η (ϕ, ψ) ήταν γνωστή, τότε [χρησιμοποιώντας και την (4.2.6)] θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε την εικόνα οποιουδήποτε σημείου του επιπέδου, σύμφωνα με τις σχέσεις (2.2.7') και (2.2.8'). Αυτές τις σχέσεις θα χρησιμοποιήσουμε, αντιστρόφως, για τον προσδιορισμό της ζητούμενης ομολογίας.

Ακριβέστερα, ορίζουμε πρώτα την απεικόνιση $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ με

$$(4.2.7a) \quad \phi(X_0) := X'_0; \quad \phi(A) := A,$$

ενώ, για $X \neq A, X_0$, θέτουμε

$$(4.2.7b) \quad \phi(X) := (A \vee X) \wedge [X'_0 \vee ((X \vee X_0) \wedge \ell)]; \quad X \notin X_0 \vee X'_0,$$

και, αναλόγως,

$$(4.2.7c) \quad \phi(X) := (A \vee X) \wedge [\phi(Y_0) \vee ((X \vee Y_0) \wedge \ell)]; \quad X \in X_0 \vee X'_0,$$

όπου, κατά τα γνωστά, το Y_0 είναι ένα (σταθεροποιημένο) βοηθητικό σημείο εκτός της ευθείας $X_0 \vee X'_0$. Παρατηρούμε ότι η ϕ είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί απεικόνιση, με την ιδιότητα $\phi(X) = X$, για κάθε $X \in \ell$ (να αποδειχθούν οι ισχυρισμοί).

Στη συνέχεια ορίζουμε και την απεικόνιση $\psi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ με

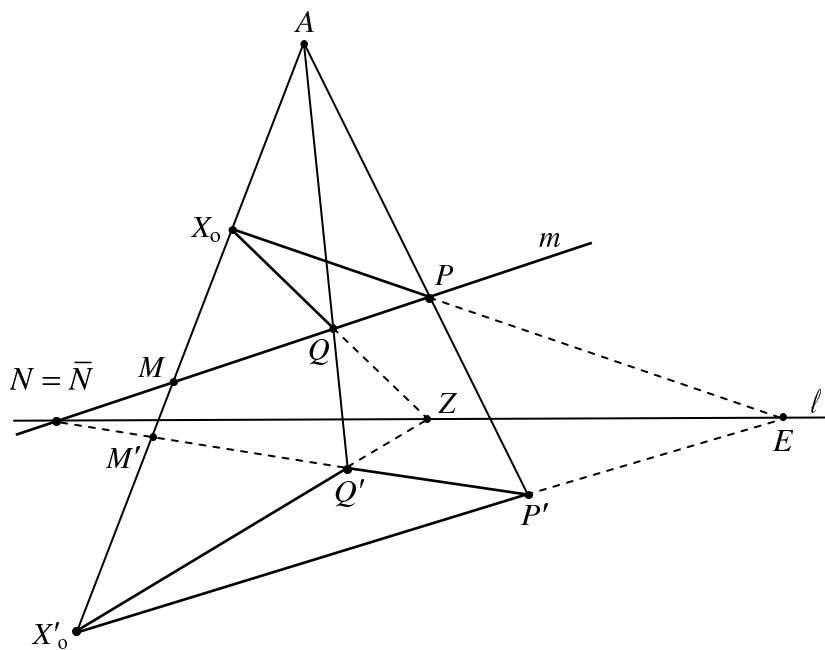
$$(4.2.8a) \quad \psi(\ell) := \ell; \quad \psi(A \vee X_0) := A \vee X_0,$$

$$(4.2.8b) \quad \psi(k) := (k \wedge \ell) \vee \phi((A \vee X_0) \wedge k); \quad k \neq \ell, A \vee X_0.$$

Η ψ είναι επίσης καλά ορισμένη απεικόνιση, με $\psi(k) = k$, για κάθε ευθεία $k \in J(A)$ (απόδειξη!).

Θα δείξουμε ότι το ζεύγος (ϕ, ψ) ορίζει μία συγγραμμικότητα του $\mathcal{P}$. Επειδή η ϕ είναι ήδη 1-1 και επί, αρκεί να δείξουμε (βλ. Ορισμό 2.2.1 και Πρόγραμμα 2.1.6) ότι το (ϕ, ψ) είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων, δηλαδή, για οποιοδήποτε $(P, m) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$, με $P \in m$, είναι και $\phi(P) \in \psi(m)$. Ο ισχυρισμός αυτός αποδεικνύεται αμέσως σε ορισμένες τετριμμένες περιπτώσεις, όπως όταν $m \in J(A)$, $m \in J(X_0)$, $m \in J(X'_0)$ ή $m = \ell$ (να συμπληρωθεί η απόδειξη τους).

Ας δούμε τη γενική περίπτωση, χρησιμοποιώντας και το βοηθητικό Σχήμα 4.10. Προηγουμένως θα κάνουμε ακόμη μία παραδοχή: το επίπεδο στο οποίον εργαζόμαστε δεν είναι το επίπεδο των 7 σημείων, ούτε οποιοδήποτε πεπερασμένο επίπεδο, δηλαδή επίπεδο με πεπερασμένο πλήθος σημείων (και ευθειών). Όπως επεξηγούμε στο Παράδειγμα 6.1.21, κάθε πεπερασμένο προβολικό επίπεδο είναι επίπεδο Desargues, επομένως σε μια τέτοια περίπτωση δεν έχουμε να αποδείξουμε τίποτε.



Σχήμα 4.10

Θεωρούμε, λοιπόν, τυχόν $(P, m) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ με $P \in m$. Εφ' όσον $m \neq \ell$, $A \vee X_0$ (για να μην αναχθούμε στις τετριμμένες περιπτώσεις σύμπτωσης που αναφέραμε

πιο πάνω), θα ορίζονται επί της m και τα σημεία

$$M := (A \vee X_0) \wedge m, \quad N := m \wedge \ell.$$

Αν πάρουμε τώρα κι ένα άλλο σημείο $Q \in m$, διαφορετικό από τα M, N, P , τότε θέτουμε

$$Q' := \phi(Q), \quad M' := \phi(M), \quad N' := \phi(N).$$

Επειδή υποθέσαμε ότι $m \notin J(X_0)$, ορίζεται το τρίγωνο X_0QP . Επίσης, και τα σημεία X'_0, Q', P' είναι διαφορετικά μεταξύ τους (επειδή τα X_0, Q, P είναι διαφορετικά και η ϕ είναι 1-1) και μη συγγραμμικά. Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι τα X'_0, Q', P' είναι συγγραμμικά. Εφαρμόζοντας την (4.2.7b) για $X = P, Q$, έχουμε ότι

$$P' = \phi(P) \in X'_0 \vee ((P \vee X_0) \wedge \ell), \quad Q' = \phi(Q) \in X'_0 \vee ((Q \vee X_0) \wedge \ell).$$

Όμως, εξαιτίας της υποτιθέμενης συγγραμμικότητας των X'_0, Q', P' , θα ήταν και

$$(P \vee X_0) \wedge \ell = (P' \vee X'_0) \wedge \ell = (Q' \vee X'_0) \wedge \ell = (Q \vee X_0) \wedge \ell,$$

δηλαδή τα X_0, Q, P θα ήσαν συγγραμμικά (άτοπο). Επομένως, ορίζεται τελικώς και το τρίγωνο $X'_0Q'P'$.

Από τον προσδιορισμό των P', Q' [μέσω της (4.2.7b)] και τη συγγραμμικότητα των A, X_0, X'_0 συνάγεται αμέσως ότι τα τρίγωνα X_0QP και $X'_0Q'P'$ είναι προοπτικά ως προς κέντρο (το A). Επομένως, λόγω της συνθήκης (D), θα είναι και προοπτικά ως προς άξονα, τον οποίον καλούμε (προσωρινά) ℓ . Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία τομής των ομολόγων πλευρών

$$E := (X_0 \vee P) \wedge (X'_0 \vee P')$$

$$Z := (X_0 \vee Q) \wedge (X'_0 \vee Q')$$

$$\bar{N} := (Q \vee P) \wedge (Q' \vee P')$$

βρίσκονται στην $\bar{\ell}$. Εδώ πρέπει να επισημάνουμε ότι ακόμη δεν έχουμε αποδείξει ότι $\bar{N} = N$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.10. Όμως, και πάλι από τον ορισμό της ϕ , έχουμε ότι τα E, Z είναι σημεία της ℓ , άρα $\ell = E \vee Z = \ell$, οπότε

$$\bar{N} = \bar{\ell} \wedge (Q \vee P) = \ell \wedge m = N.$$

Προσδιορίζουμε τώρα την εικόνα $M' = \phi(M)$. Επειδή $M \in A \vee X_0$, θα χρησιμοποιήσουμε ένα κατάλληλο βοηθητικό σημείο. Ως τέτοιο μπορούμε να πάρουμε το P . Συνεπώς, η (4.2.7c) οδηγεί στην

$$M' = (A \vee M) \wedge [P' \vee ((M \vee P) \wedge \ell)]$$

$$= (A \vee X_0) \wedge (P' \vee (m \wedge \ell))$$

$$= (A \vee X_0) \wedge (P' \vee N),$$

από την οποία προκύπτει ότι $M' \in P' \vee N$, δηλαδή τα M', P', N είναι συγγραμμικά. Επομένως, βάσει της (4.2.8b) για $k = m$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\phi(P) = P' &\in N \vee M' = N \vee \phi(M) \\ &= (m \wedge \ell) \vee \phi((A \vee X_0) \wedge m) \\ &= \psi(m),\end{aligned}$$

δηλαδή βρίσκουμε ότι $\phi(P) \in \psi(m)$, η οποία αποδεικνύει πλήρως ότι το ζεύγος (ϕ, ψ) είναι μορφισμός του $\mathcal{P}$ στον εαυτό του, όπως ζητούσαμε.

Η συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) έχει κέντρο το A και άξονα την ℓ (σύμφωνα με τις ιδιότητες των ϕ και ψ , που αφήσαμε προς απόδειξη), άρα $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}(A, \ell)$. Επειδή από τον ορισμό της ϕ ικανοποιείται η (4.2.6), καταλήγουμε στο συμπέρασμα της εκφώνησης. $\square$

Οι Προτάσεις 4.2.4 και 4.2.5 ενοποιούνται στο επόμενο βασικό

4.2.6 Θεώρημα. Ένα προβολικό επίπεδο είναι επίπεδο Desargues τότε και μόνο τότε αν ισχύει η συνθήκη (D).

Το Θεώρημα 4.2.6 οδηγεί στον ισοδύναμο «γεωμετρικό» ορισμό του επιπέδου Desargues. Ακριβέστερα :

4.2.7 Ορισμός (γεωμετρικός). Ένα προβολικό επίπεδο καλείται **επίπεδο Desargues** αν ισχύει η συνθήκη (D).

Ο χαρακτηρισμός «γεωμετρικός» οφείλεται στη γεωμετρική διατύπωση της συνθήκης (D). Σε αντιδιαστολή, ο Ορισμός 4.1.3 μπορεί να χαρακτηριστεί ως «αλγεβρικός» για προφανείς λόγους.

Για το επόμενο αποτέλεσμα παραπέμπουμε στην ορολογία του εδαφίου 1.6.6.

4.2.8 Το Κλασικό Θεώρημα του Desargues. Στο κλασικό προβολικό επίπεδο η συνθήκη (D) είναι αληθής, δηλαδή προκύπτει από τα αξιώματα (ΠΕ 1)–(ΠΕ 3).

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του Πορίσματος 4.1.4, σε συνδυασμό με τα Θεωρήματα 3.5.3 και 4.2.6. $\square$

Από το τελευταίο συμπέρασμα συνάγεται ότι στο επίπεδο της κλασικής Προβολικής Γεωμετρίας η συνθήκη (D) αποτελεί ένα *θεώρημα που αποδεικνύεται*. Δηλαδή, αποδεικνύεται ότι δύο τρίγωνα προοπτικά ως προς κέντρο είναι και προοπτικά ως προς άξονα, και αντιστρόφως. Αυτό είναι ακριβώς το πρωτότυπο θεώρημα που απέδειξε ο Desargues (απ' όπου και η ονοματολογία του Θεωρήματος 4.2.8), στα πρώτα βήματα της συνθετικής Προβολικής Γεωμετρίας. Για

μίας απόδειξη του θεωρήματος στο πλαίσιο της κλασικής Προβολικής Γεωμετρίας παραπέμπουμε στον Μ. Μπρίκα [22, σελ. 70–76, και σελ. 247–250].

Αντιθέτως, όπως ήδη σχολιάσαμε και μετά την Πρόταση 4.1.2, στη γενική περίπτωση η συνθήκη (D) δεν είναι συνέπεια των αξιωμάτων (ΠΕ 1) – (ΠΕ 3) και αληθεύει μόνον σε ένα επίπεδο Desargues.

Επεκτείνοντας την προηγούμενη ορολογία και στο αφηρημένο πλαίσιο της παρούσας έκθεσης, θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε ως Θεώρημα Desargues το Θεώρημα 4.2.6.

4.2.9 Ασκήσεις.

- 1) Αν ABC και $A'B'C'$ είναι δύο τρίγωνα προοπτικά ως προς κέντρο και $B = B'$, να αποδειχθεί ότι τα ίδια τρίγωνα είναι προοπτικά και ως προς άξονα, ο οποίος να προσδιοριστεί. Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το δυϊκό συμπέρασμα.
- 2) Να βρεθούν και μερικές άλλες εκφυλισμένες περιπτώσεις τριγώνων προοπτικών ως προς κέντρο ή άξονα, που επαληθεύουν τη συνθήκη (D).
- 3) Αναφορικά με την απόδειξη της Πρότασης 4.2.4, να εξηγηθεί πλήρως:
 - α) Γιατί $D \neq E$ β) Γιατί τα σημεία O, B και B' είναι διαφορετικά μεταξύ τους γ) Γιατί τα σημεία B και B' δεν ανήκουν στην ℓ δ) Πότε είναι $O \in \ell$.
- 4) Να αποδειχθούν οι ιδιότητες των απεικονίσεων ϕ και ψ , οι οποίες ορίζονται από τις σχέσεις (4.2.7a) – (4.2.7c) και (4.2.8a) – (4.2.8b) αντιστοίχως.
- 5) Να συμπληρωθεί το τελευταίο μέρος της απόδειξης της Πρότασης 4.2.4 δείχνοντας αυτοτελώς (δηλ. χωρίς τη χρήση της αρχής του δυϊσμού) ότι, σε ένα επίπεδο Desargues, δύο τρίγωνα προοπτικά ως προς άξονα είναι και προοπτικά ως προς κέντρο.
- 6) Υποθέτουμε ότι (ϕ, ψ) είναι μία συγγραμμικότητα με κέντρο A και άξονα ℓ , σε ένα *τυχόν* προβολικό επίπεδο (όχι αναγκαίως Desargues). Αν PQR είναι ένα τρίγωνο, να αποδειχθεί ότι είναι προοπτικό ως προς κέντρο και άξονα με το $\phi(P)\phi(Q)\phi(R)$.

4.3 Προβολικότητες σε επίπεδα Desargues

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε μερικά συμπεράσματα για τις προβολικότητες ενός επιπέδου Desargues, που θα χρησιμοποιηθούν στο επόμενο κεφάλαιο, προκειμένου να ολοκληρώσουμε το Θεμελιώδες Θεώρημα 1.5.10.

Με τους ορισμούς και συμβολισμούς της Παραγράφου 1.5, αποδεικνύουμε πρώτα την

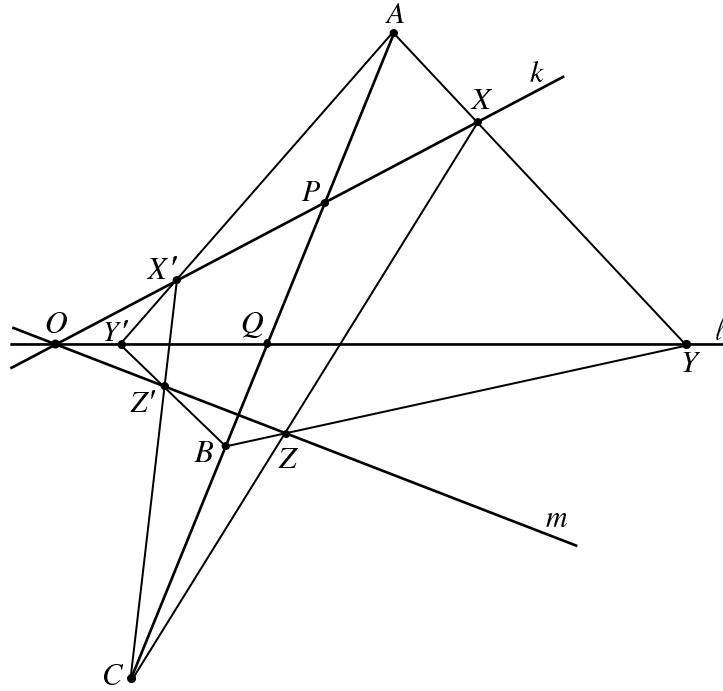
4.3.1 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι k, ℓ, m είναι τρεις διαφορετικές ευθείες ενός επιπέδου Desargues, οι οποίες διέρχονται από το ίδιο σημείο O . Επίσης, υποθέτουμε ότι A, B είναι δύο σημεία του επιπέδου, τέτοια ώστε $A \notin k, \ell$ και $B \notin \ell, m$. Αν $\pi_1 = \pi_1(k, \ell, A)$ και $\pi_2 = \pi_2(\ell, m, B)$, τότε η προβολικότητα $\Pi = \pi_2 \circ \pi_1$ είναι μία προοπτικότητα από την k στην m .

Απόδειξη. Αν $A = B$, τότε το συμπέρασμα είναι προφανές.

Υποθέτουμε τώρα ότι $A \neq B$. Αν X είναι τυχόν σημείο της k με $X \neq O$ και $X \notin A \vee B$, θέτουμε

$$Y := (A \vee X) \wedge \ell, \quad Z := (B \vee Y) \wedge m,$$

όπως και στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 4.11

Επομένως, από τον ορισμό των π_1 και π_2 , έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned} \Pi(X) &= \pi_2(\pi_1(X)) = \pi_2((A \vee X) \wedge \ell) \\ (4.3.1) \quad &= \pi_2(Y) = (B \vee Y) \wedge m = Z. \end{aligned}$$

Αναλόγως, αν πάρουμε και οποιοδήποτε άλλο σημείο X' της k , με τις ίδιες υποθέσεις όπως για το X , ορίζουμε τα σημεία

$$Y' := (A \vee X') \wedge \ell, \quad Z' := (B \vee Y') \wedge m.$$

Επειδή ισχύουν οι σχέσεις

$$X, X' \in k, \quad Y, Y' \in \ell, \quad Z, Z' \in m, \quad \text{και} \quad k, \ell, m \in J(O),$$

τα τρίγωνα XYZ και $X'Y'Z'$ είναι προοπτικά ως προς το κέντρο O , άρα, λόγω της συνθήκης (D), θα είναι και προοπτικά ως προς άξονα, που είναι ακριβώς η $A \vee B$. Από την προηγούμενη προοπτικότητα των τριγώνων, ορίζεται το σημείο

$$C = (X \vee Z) \wedge (X' \vee Z') \in A \vee B.$$

Προφανώς, τα σημεία C, X, Z είναι συγγραμμικά. Αν λοιπόν θεωρήσουμε την προοπτικότητα $\pi = \pi(k, m, C)$, τότε, για οποιοδήποτε $X \in k$, η (4.3.1) συνεπάγεται ότι

$$\pi(X) = (C \vee X) \wedge m = (X \vee Z) \wedge m = Z = \Pi(X).$$

Επομένως $\Pi = \pi$, που αποδεικνύει την πρόταση. $\square$

4.3.2 Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι Π είναι προβολικότητα μεταξύ δύο διαφορετικών ευθειών ℓ και k ενός επιπέδου Desargues, η οποία είναι σύνθεση τριών προοπτικότητας. Τότε η Π ανάγεται σε σύνθεση δύο (νέων) προοπτικότητας.

Απόδειξη. Ακολουθώντας την απόδειξη του R. J. Mihalek [20, Lemma 7.3], υποθέτουμε ότι

$$(4.3.2) \quad \Pi = \pi_3(n, k, Q) \circ \pi_2(m, n, P) \circ \pi_1(\ell, m, O)$$

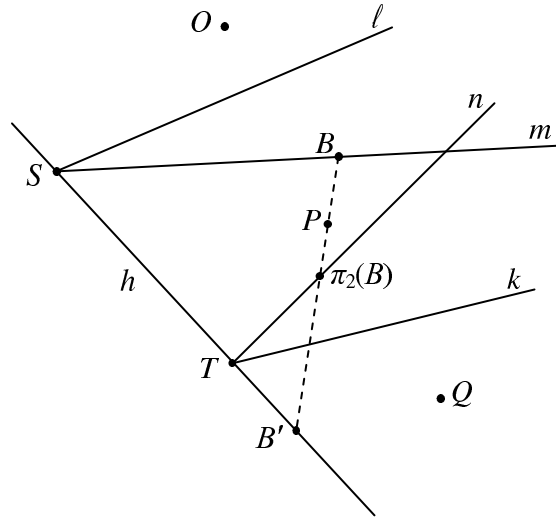
(για την καλλίτερη κατανόηση των συλλογισμών, όπου χρειάζεται, οι προοπτικότητες θα γράφονται στην πλήρη μορφή τους).

Θα διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις, αναλόγως προς τη θέση των κέντρων O, P, Q και των ευθειών ℓ, m, n, k .

i) Οι ℓ, m, n, k είναι διαφορετικές, δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο, και $P \notin h := (\ell \wedge m) \vee (n \wedge k)$, όπως στο Σχήμα 4.12.

Στην περίπτωση αυτή θέτουμε $S := \ell \wedge m$ και $T := n \wedge k$, οπότε $h = S \vee T$, και θεωρούμε τις προοπτικότητες

$$\pi = \pi(m, h, P), \quad \underline{\pi} = \underline{\pi}(h, n, P).$$



Σχήμα 4.12

Τότε, για κάθε $B \in m$, έχουμε ότι $\pi(B) = (P \vee B) \wedge h =: B'$ και $\underline{\pi}(B') = (P \vee B') \wedge n$. Όμως τα P, B, B' είναι (από τον ορισμό της προοπτικότητας) συγγραμμικά, άρα $P \vee B = P \vee B'$, οπότε

$$(\underline{\pi} \circ \pi)(B) = \underline{\pi}(B') = (P \vee B') \wedge n = (P \vee B) \wedge n = \pi_2(B'), \quad B \in m.$$

Επομένως, $\underline{\pi} \circ \pi = \pi_2$ και η (4.3.2) μετασχηματίζεται στην

$$(4.3.3) \quad \Pi = \pi_3(n, k, Q) \circ \underline{\pi}(h, n, P) \circ \pi(m, h, P) \circ \pi_1(\ell, m, O).$$

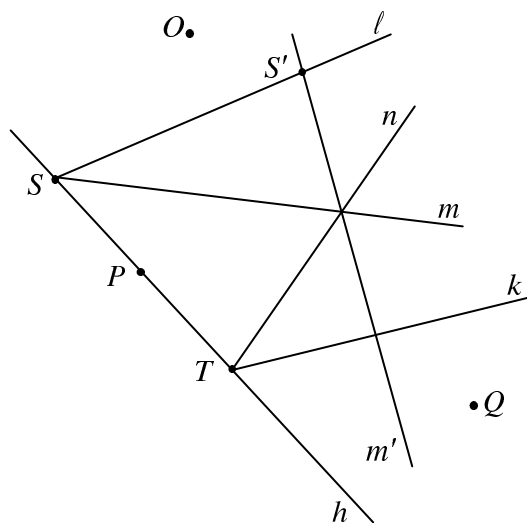
Παρατηρούμε ότι οι ευθείες ℓ, m, h διέρχονται και οι τρεις από το S , ενώ $O \notin \ell, m$ (για να ορίζεται η π_1) και $P \notin m, h$ (από την υπόθεση, και για να ορίζεται η π_2). Επειδή ισχύουν οι υποθέσεις της Πρότασης 4.3.1, η προβολικότητα $\pi \circ \pi_1$ είναι προοπτικότητα, δηλαδή $\pi \circ \pi_1 = \bar{\pi}(\ell, h, \bar{O})$, για κάποιο $\bar{O} \notin \ell, h$. Συνεπώς η (4.3.3) παίρνει τη μορφή

$$(4.3.4) \quad \Pi = \pi_3(n, k, Q) \circ \underline{\pi}(h, n, P) \circ \bar{\pi}(\ell, h, \bar{O}).$$

Αλλά οι ευθείες h, n, k διέρχονται όλες από το T , ενώ $Q \notin n, k$ και $P \notin h, n$. Άρα, εφαρμόζοντας και πάλι την Πρόταση 4.3.1, έχουμε ότι $\pi_3 \circ \underline{\pi} = \bar{\pi}'$, όπου $\bar{\pi}' = \bar{\pi}'(h, k, \bar{O}')$, για κατάλληλο $\bar{O}'$. Η (4.3.4) ανάγεται τώρα στην $\Pi = \bar{\pi}' \circ \bar{\pi}$, η οποία αποδεικνύει το θεώρημα στην περίπτωση αυτή.

ii) Οι ℓ, m, n, k είναι διαφορετικές, δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο, και $P \in h := (\ell \wedge m) \vee (n \wedge k) =: S \vee T$.

Επιλέγουμε τυχούσα ευθεία m' με $m' \in J(m \wedge n)$, $m' \notin J(O)$, $m \neq m' \neq n$, και θέτουμε $S' := \ell \vee m'$, όπως και στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 4.13

Επίσης, θεωρούμε τις προοπτικότητες

$$\pi = \pi(\ell, m', O), \quad \underline{\pi} = \underline{\pi}(m', m, O).$$

Όπως στην προηγούμενη περίπτωση, ελέγχουμε ότι $\underline{\pi} \circ \pi = \pi_1$, άρα η (4.3.2) γράφεται με τη μορφή

$$(4.3.5) \quad \Pi = \pi_3(n, k, Q) \circ \pi_2(m, n, P) \circ \underline{\pi}(m', m, O) \circ \pi(\ell, m', O)$$

Επειδή η $\pi_2(m, n, P) \circ \underline{\pi}(m', m, O)$ είναι προβολικότητα από την m' στην n και ισχύουν οι υποθέσεις της Πρότασης 4.3.2, θα είναι $\pi_2(m, n, P) \circ \underline{\pi}(m', m, O) = \bar{\pi}(m', n, \bar{P})$, για κατάλληλο κέντρο $\bar{P}$. Άρα, η (4.3.5) γίνεται

$$(4.3.6) \quad \Pi = \pi_3(n, k, Q) \circ \bar{\pi}(m', n, \bar{P}) \circ \pi(\ell, m', O).$$

Θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε την περίπτωση i) στην προβολικότητα (4.3.6). Πριν απ' αυτό παρατηρούμε ότι $S \neq S'$ [διαφορετικά θα είχαμε ότι $m = S \vee (m \wedge n) = S' \vee (m \wedge n) = m'$ (άτοπο)]. Επίσης, αν υπολογίσουμε την εικόνα $\Pi(S)$ του S , όταν η Π δίνεται με την αρχική της μορφή (4.3.2), βρίσκουμε ότι

$\Pi(S) = T$. Πραγματικά, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $S = \ell \wedge m$, $T = n \wedge k$ και $P \in S \vee T$ (άρα $P \vee S = S \vee T$), έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}\Pi(S) &= (\pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1)(S) = (\pi_3 \circ \pi_2)(S) \\ &= \pi_3((P \vee S) \wedge n) = \pi_3((S \vee T) \wedge n) \\ &= \pi_3(T) = (Q \vee T) \wedge k = T.\end{aligned}$$

Η τελευταία, μαζί με το 1-1 της Π , συνεπάγεται επίσης ότι $\Pi(S') \neq T$.

Για να εφαρμόσουμε τώρα την περίπτωση i), πρέπει πρώτα να εξασφαλίσουμε ότι $\bar{P} \notin (\ell \wedge m') \vee (n \wedge k) = S' \vee T$. Αυτό συμβαίνει γιατί αλλιώς τα σημεία $\bar{P}, S', T$ θα ήσαν συγγραμμικά, οπότε $\bar{P} \vee S' = T \vee S'$. Έτσι, υπολογίζοντας το $\Pi(S')$ με τη βοήθεια της (4.3.6), θα είχαμε ότι

$$\begin{aligned}\Pi(S') &= (\pi_3 \circ \bar{\pi} \circ \pi)(S') = (\pi_3 \circ \bar{\pi})(\pi(S')) \\ &= (\pi_3 \circ \bar{\pi})((O \vee S') \wedge m') = (\pi_3 \circ \bar{\pi})(S') \\ &= \pi_3((\bar{P} \vee S') \wedge n) = \pi_3((T \vee S') \wedge n) \\ &= \pi_3(T) = (Q \vee T) \wedge k = T,\end{aligned}$$

αποτέλεσμα πού αντιφάσκει προς την ήδη ισχύουσα σχέση $\Pi(S') \neq T$.

Η δεύτερη απαίτηση, για την εφαρμογή της i), είναι οι ευθείες ℓ, m', n, k να μην διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο. Αυτό, προφανώς, εξασφαλίζεται αν επιλέξουμε την m' έτσι ώστε, εκτός των άλλων, $m' \notin J(\ell \wedge k)$. Με αυτές τις επιλογές ισχύουν οι υποθέσεις της περίπτωσης i) για την προβολικότητα (4.3.6), άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα του θεωρήματος.

iii) Οι ℓ, m, n, k είναι διαφορετικές και τουλάχιστον τρεις από αυτές διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Διακρίνουμε τις επόμενες φυσιολογικές υποπεριπτώσεις:

iii_a) Οι προηγούμενες ευθείες διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο.

Αφού οι k, m, n διέρχονται από το ίδιο σημείο, η Πρόταση 4.3.1 συνεπάγεται ότι

$$\pi_2(m, n, P) \circ \pi_1(\ell, m, O) = \pi(\ell, n, O'),$$

για κάποιο κατάλληλο κέντρο O' . Επομένως, η (4.3.2) παίρνει τη μορφή

$$(4.3.6') \quad \Pi = \pi_3(n, k, Q) \circ \pi(\ell, n, O').$$

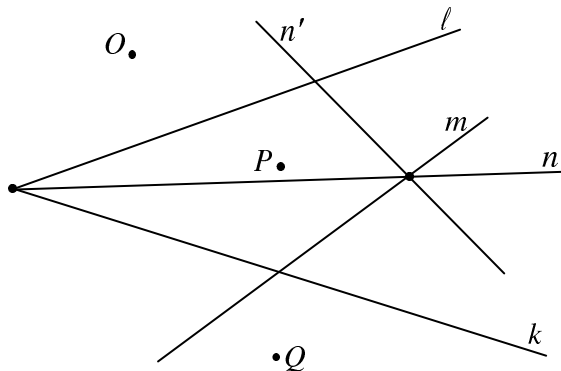
[Φυσικά, και για την τελευταία προβολικότητα ισχύει η Πρόταση 4.3.1, αφού οι ℓ, n, k διέρχονται από το ίδιο σημείο. Άρα $\Pi = \bar{\pi}(\ell, k, Q')$, δηλαδή εδώ μπορούμε να αναχθούμε τελικά και σε προοπτικότητα. Αυτό όμως δεν αναιρεί το συμπέρασμα του θεωρήματος επειδή ισχύει και η (4.3.6').]

iii_β) Τρεις διαδοχικές ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Τέτοιες είναι οι τριάδες ℓ, m, n και m, n, k . Και στις δύο περιπτώσεις, εφαρμόζοντας τη συλλογιστική της υποπερίπτωσης iii_α), καταλήγουμε επίσης στο συμπέρασμα.

iii_γ) Τρεις ευθείες, όχι όλες διαδοχικές, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Ας πάρουμε, για παράδειγμα, ότι διέρχονται από το ίδιο σημείο οι ℓ, n, k . Στην περίπτωση αυτή επιλέγουμε τυχούσα ευθεία n' , τέτοια ώστε $n' \in J(m \wedge n)$, $n' \notin J(Q)$ και $m \neq n' \neq n$.



Σχήμα 4.14

Με την ίδια διαδικασία που εφαρμόσαμε και σε προηγούμενες περιπτώσεις, θεωρούμε τις προοπτικότητες $\pi = \pi(n, n', Q)$, $\underline{\pi} = \underline{\pi}(n', k, Q)$ και διαπιστώνουμε ότι $\underline{\pi} \circ \pi = \pi_3$. Τότε η (4.3.2) ανάγεται στην

$$(4.3.7) \quad \Pi = \underline{\pi}(n', k, Q) \circ \pi(n, n', Q) \circ \pi_2(m, n, P) \circ \pi_1(\ell, m, O).$$

Όμως, από την επιλογή της n' , οι m, n, n' διέρχονται από το ίδιο σημείο και τα P, Q κανοποιούν τις υποθέσεις της Πρότασης 4.3.1, άρα $\pi(n, n', Q) \circ \pi_2(m, n, P) = \bar{\pi}(m, n', P')$, για κάποιο P' , οπότε η (4.3.7) γίνεται

$$\Pi = \underline{\pi}(n', k, Q) \circ \bar{\pi}(m, n', P') \circ \pi_1(\ell, m, O).$$

Εξετάζοντας τις προοπτικότητες της τελευταίας ισότητας διαπιστώνουμε ότι οι εμφανιζόμενες ευθείες ℓ, m, n', m δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο. Επομένως, θα έχουμε είτε την περίπτωση i), είτε την ii), οπότε πάλι καταλήγουμε στο συμπέρασμα του θεωρήματος.

iv) Τουλάχιστον δύο από τις ℓ, m, n, k συμπίπτουν.

Για να δούμε τι ακριβώς συμβαίνει εδώ, ας κάνουμε πρώτα μία παρατήρηση. Αν είναι, π.χ., $m = n$, τότε η αντίστοιχη προοπτικότητα π_2 εκφυλίζεται στην ταυτοτική απεικόνιση (για τον λόγο αυτό άλλωστε στην Παράγραφο 1.5 ασχοληθήκαμε με προοπτικότητες μεταξύ διαφορετικών ευθειών, που έχουν ενδιαφέρον). Έτσι διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

iv_α) Τρεις από τις ℓ, m, n, k συμπίπτουν.

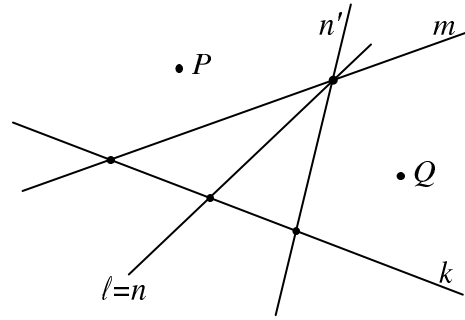
Ας πάρουμε ότι, για παράδειγμα, $\ell = m = n$ (εξαιρείται, λόγω της υπόθεσης, η περίπτωση της ισότητας $\ell = k$). Τότε $\Pi = \pi_3(n, k, Q) = \pi_3(\ell, k, Q)$. Η τελευταία προοπτικότητα μπορεί να παρασταθεί ως σύνθεση δύο προοπτικότητων, αν θεωρήσουμε τυχούσα ευθεία $\rho \in J(\ell \wedge k)$, $\rho \notin J(Q)$, $\ell \neq \rho \neq k$, και τις προοπτικότητες $\pi(\ell, \rho, Q)$, $\pi'(\rho, k, Q)$. Διαπιστώνουμε αμέσως ότι $\pi_3 = \pi' \circ \pi$ (να συμπληρωθούν οι λεπτομέρειες).

iv_β) Δύο διαδοχικές ευθείες συμπίπτουν.

Αν είναι $\ell = m$, ή $m = n$, ή $n = k$, τότε, σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση, η Π παριστάνεται ως σύνθεση δύο προοπτικότητων.

iv_γ) Δύο μη διαδοχικές ευθείες συμπίπτουν.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι $\ell = n$ όπως και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.15

Ακολουθώντας και πάλι την ίδια διαδικασία, θεωρούμε μία ευθεία n' , τέτοια ώστε $n' \in J(m \wedge n)$, $n' \notin Q$, $m \neq n' \neq n$, και τις προοπτικότητες $\pi(n, n', Q)$, $\underline{\pi}(n', k, Q)$. Επειδή $\underline{\pi}(n', k, Q) \circ \pi(n, n', Q) = \pi_3(n, k, Q)$, έχουμε ότι

$$\Pi = \underline{\pi}(n', k, Q) \circ \pi(n, n', Q) \circ \pi_2(m, n, P) \circ \pi_1(\ell, m, O).$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.3.1 για τις π, π_2 , μετασχηματίζουμε την τελευταία σχέση στην

$$(4.3.8) \quad \Pi = \underline{\pi}(n', k, Q) \circ \bar{\pi}(m, n', \bar{P}) \circ \pi_1(\ell, m, O),$$

για κατάλληλο $\bar{P}$.

Αν τώρα $n' = k$, τότε η (4.3.8) δίνει ότι

$$\begin{aligned}\Pi &= \bar{\pi}(m, n', \bar{P}) \circ \pi_1(\ell, m, O) \\ &= \bar{\pi}(m, k, \bar{P}) \circ \pi_1(\ell, m, O),\end{aligned}$$

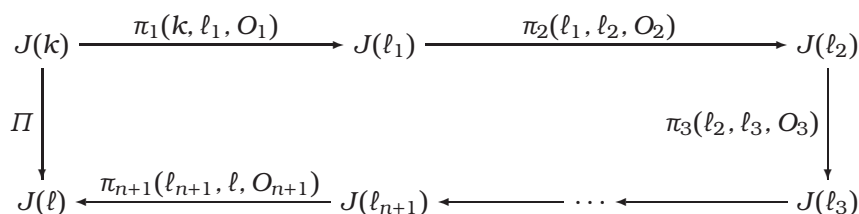
ενώ, για $n' \neq k$, η (4.3.8) ανάγεται στην περίπτωση iii). Έτσι εξαντλούνται όλες οι δυνατές περιπτώσεις και ολοκληρώνεται η απόδειξη **ΕΠΙΤΕΛΟΥΣ**. $\square$

Τα προηγούμενα συμπεράσματα οδηγούν στο εξής αξιοσημείωτο αποτέλεσμα:

4.3.3 Θεώρημα. *Αν k, ℓ είναι δύο διαφορετικές ευθείες ενός προβολικού επιπέδου Desargues, τότε κάθε προβολικότητα μεταξύ των k και ℓ μπορεί να παρασταθεί ως σύνθεση δύο ή τριών προοπτικωτήτων.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.3.1 και το Θεώρημα 4.3.2, το αποτέλεσμα ισχύει, προφανώς, για κάθε προβολικότητα που είναι απλώς προοπτικότητα ή είναι σύνθεση δύο ή τριών προοπτικωτήτων.

Για την απόδειξη του θεωρήματος στη γενική περίπτωση, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Έτσι, υποθέτοντας ότι το συμπέρασμα ισχύει για οποιαδήποτε προβολικότητα, η οποία είναι σύνθεση n προοπτικωτήτων ($n \geq 3$), θα δείξουμε ότι το ίδιο ισχύει και για οποιαδήποτε προβολικότητα, που είναι σύνθεση $n+1$ προοπτικωτήτων. Πραγματικά, ας θεωρήσουμε μία προβολικότητα Π της τελευταίας μορφής (βλ. και το παρακάτω διάγραμμα).



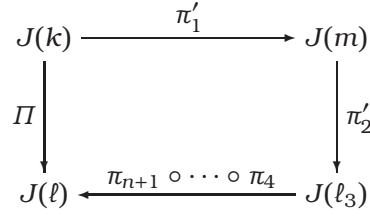
Διάγραμμα 4.1

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) $k \neq \ell_3$. Τότε (σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.2) η προβολικότητα $\pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ ανάγεται σε σύνθεση δύο προοπτικωτήτων, δηλαδή

$$\pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1 = \pi'_2 \circ \pi'_1,$$

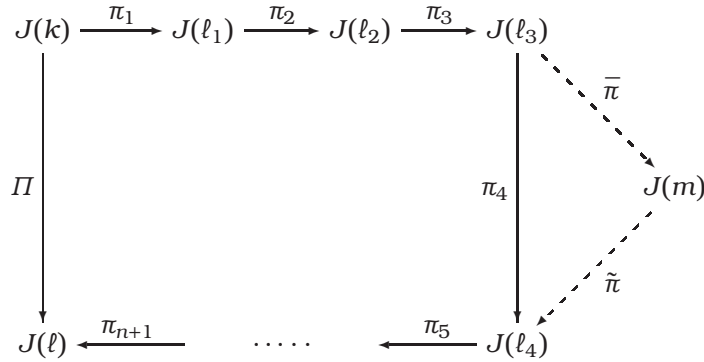
όπου $\pi'_1 = \pi'_1(k, m, \mathcal{Q}_1)$ και $\pi'_2 = \pi'_2(m, \ell_3, \mathcal{Q}_2)$, για κατάλληλα $m, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$. Επομένως το Διάγραμμα 4.1 αντικαθίσταται από το



Διάγραμμα 4.2

δηλαδή, τώρα η Π είναι σύνθεση n προοπτικοτήτων. Άρα, κατα την υπόθεση (της επαγωγής), η Π ανάγεται τελικώς σε σύνθεση δύο προοπτικοτήτων.

β) $k = \ell_3$. Στην περίπτωση αυτή, για την $\pi_4 = \pi_4(\ell_3, \ell_4, \mathcal{O}_3)$, μπορούμε να γράψουμε ότι $\pi_4 = \tilde{\pi} \circ \bar{\pi}$, όπου $\bar{\pi} = \bar{\pi}(\ell_3, m, \mathcal{O}_3)$ και $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}(m, \ell_4, \mathcal{O}_3)$. Άρα το Διάγραμμα 4.2 μπορεί να πάρει τη μορφή

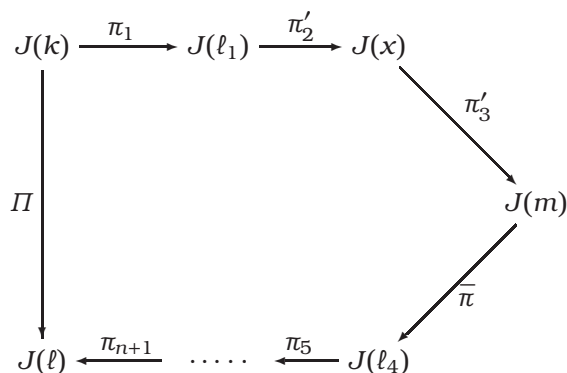


Διάγραμμα 4.3

απ' το οποίο φαίνεται ότι η Π είναι σύνθεση $n+2$ προοπτικοτήτων. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 4.3.2 για τις $\pi_2, \pi_3, \bar{\pi}$, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\bar{\pi} \circ \pi_3 \circ \pi_2 = \pi'_3 \circ \pi'_2,$$

όπου $\pi'_2 = \pi'_2(\ell_1, x, P_1)$ και $\pi'_3 = \pi'_3(x, m, P_2)$, για κατάλληλα x, P_1, P_2 . Επομένως, το Διάγραμμα 4.3 μετασχηματίζεται στο



Διάγραμμα 4.4

που δείχνει ότι η Π είναι σύνθεση $n+1$ προοπτικότητων (με $k \neq \ell$), άρα [σύμφωνα με την περίπτωση α)] τελικώς παριστάνεται ως σύνθεση δύο προοπτικότητων, όπως ζητούσαμε. $\square$

4.3.4 Πόρισμα. Σε ένα επίπεδο Desargues, κάθε προβολικότητα επί της αυτής ευθείας μπορεί να παρασταθεί ως σύνθεση το πολύ τριών προοπτικότητων.

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχούσα προβολικότητα της μορφής $\Pi : J(k) \rightarrow J(k)$. Επιλέγουμε μία οποιαδήποτε ευθεία ℓ με $\ell \neq k$, ένα σημείο O με $k \not\subset O \notin \ell$, και σχηματίζουμε την προοπτικότητα $\pi = \pi(k, \ell, O)$. Επειδή η $\pi \circ \Pi$ είναι προβολικότητα μεταξύ δύο διαφορετικών ευθειών, από το Θεώρημα 4.3.3 συνάγεται ότι $\pi \circ \Pi = \pi_2 \circ \pi_1$, για δύο κατάλληλες προοπτικότητες π_1 και π_2 . Επομένως, $\Pi = \pi^{-1} \circ \pi_2 \circ \pi_1$, που αποδεικνύει το πόρισμα. $\square$

4.3.5 Ασκήσεις.

- 1) Να συμπληρωθεί η απόδειξη της Πρότασης 4.3.1 στην περίπτωση $A = B$.
- 2) Με τους συμβολισμούς της απόδειξης της Πρότασης 4.3.1, ναδειχθεί ότι $\pi(P) = \Pi(P)$, αν $P = (A \vee B) \wedge k$.
- 3) Αναφορικά με την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.2:
 - α) Να ολοκληρωθεί η διερεύνηση όλων των δυνατοτήτων, που εμφανίζονται στην υποπερίπτωση iii_γ).
 - β) Να αποδειχθεί η σχέση $\pi = \pi' \circ \pi$, στην υποπερίπτωση iv_α).
 - γ) Να συμπληρωθούν και οι υπόλοιπες δυνατότητες της περίπτωσης iv).
- 4) Στην απόδειξη του Πορίσματος 4.3.4, να εξηγηθεί γιατί υπάρχει ευθεία ℓ και σημείο O με τις περιγραφόμενες ιδιότητες.

Κεφάλαιο 5

Προβολικά επίπεδα του Πάππου

Στο τέλος σχεδόν της δημιουργικής περιόδου [της Αλεξανδρινής σχολής], ένας γεωμέτρης που εμφανίστηκε καθυστερημένα, ο Πάππος (δεύτερο μισό του 3ου αιώνα), είτε μετέδωσε είτε ανεκάλυψε ο ίδιος τρία προφητικά θεωρήματα.

E. T. BELL [6, σελ. 59]

ΕΝΑ ΑΛΛΟ ΠΑΛΑΙΟ σημαντικό αποτέλεσμα της κλασικής Προβολικής Γεωμετρίας είναι το Θεώρημα του Πάππου. Ο σπουδαίος αυτός Αλεξανδρινός μαθηματικός, συγγραφέας της περίφημης «Συναγωγής», ο οποίος ήκμασε περί το 320 π.Χ., απέδειξε το φερώνυμο θεώρημα στο πλαίσιο της γνωστής τότε (Ευκλείδειας) Γεωμετρίας. Όμως, σε μεταγενέστερους χρόνους, έγινε κατανοητό ότι πρόκειται για θεώρημα της Προβολικής Γεωμετρίας. Στο δικό μας πλαίσιο ισχύει κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, πράγμα που οδηγεί σε μια νέα κατηγορία προβολικών επιπέδων.

Στην πρώτη παράγραφο, όπως κάναμε και στα επίπεδα Desargues, ξεκινάμε με τον αλγεβρικό ορισμό του επιπέδου του Πάππου, βασικό παράδειγμα του οποίου είναι το $\mathbb{P}_2$. Στη συνέχεια δίνεται η γεωμετρική του ερμηνεία.

Στα επίπεδα του Πάππου (όπως και στην κλασική περίπτωση) αληθεύουν οι προτάσεις του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Προβολικής Γεωμετρίας, του οποίου την πρώτη μορφή είδαμε στο Κεφάλαιο 1 (Θεώρημα 1.5.11). Η ολοκληρωμένη μορφή του θεωρήματος δίνεται στην Παράγραφο 2 του παρόντος κεφαλαίου.

Στην Παράγραφο 3 γίνεται ένα σύντομος σχολιασμός της Γεωμετρίας Klein των επιπέδων Desargues και Πάππου.

5.1 Επίπεδα του Πάππου

Στη μελέτη των επιπέδων Desargues διαπιστώσαμε ότι, για κάθε $(A, \ell) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ με $A \in \ell$, η ομάδα των επάσεων $\mathbb{B}(A, \ell)$ είναι αβελιανή (βλ. Πρόταση 4.1.10). Επομένως, δημιουργείται το εύλογο ερώτημα αν είναι αβελιανή και η ομάδα των ομολογιών $\mathbb{H}(A, \ell)$, όταν $A \notin \ell$. Διάφορα (αντι)παράδείγματα δείχνουν ότι κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει σε οποιοδήποτε προβολικό επίπεδο. Σχετικώς παραπέμπουμε στον R. J. Mihalik [20, σελ. 118] και στην Άσκηση 6.3.7(6) του επομένου κεφαλαίου.

Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο «αλγεβρικό» ορισμό μιας νέας κατηγορίας προβολικών επιπέδων.

5.1.1 Ορισμός. Ένα προβολικό επίπεδο $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ καλείται **επίπεδο του Πάππου** (Pappian plane) αν είναι επίπεδο Desargues και ισχύει το αξίωμα:

(ΠΕ 5) Για κάθε $(A, \ell) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ με $A \notin \ell$, η ομάδα (των ομολογιών) $\mathbb{H}(A, \ell)$ είναι αβελιανή (μεταθετική).

5.1.2 Παραδείγματα. 1) Το $\mathbb{P}_2$ είναι επίπεδο του Πάππου, σύμφωνα με Πρόταση 4.1.4 και το Θεώρημα 3.3.13.

2) Κάθε επίπεδο Desargues με πεπερασμένο πλήθος σημείων είναι επίπεδο του Πάππου. Αυτό δικαιολογείται στο επόμενο κεφάλαιο (βλ. Πρόταση 6.1.19).

Πριν προχωρήσουμε στη «γεωμετρική» συνέπεια του προηγούμενου ορισμού, χρειαζόμαστε μια προκαταρκτική κατασκευή. Γι' αυτήν υποθέτουμε ότι

▽ *οι ευθείες του επιπέδου έχουν τουλάχιστον τέσσερα διαφορετικά σημεία.*

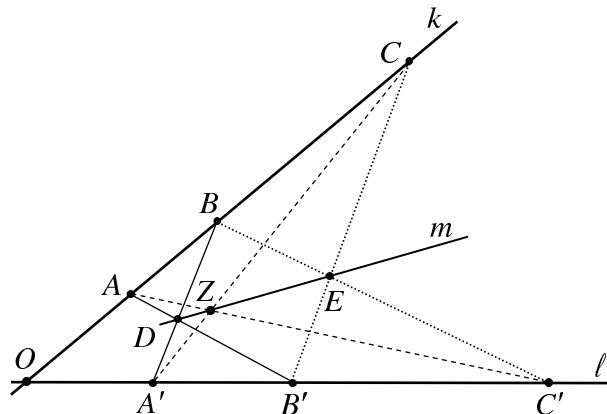
Κάτι τέτοιο εξασφαλίζεται πάντοτε αν το σύστημα των αξιωμάτων (ΠΕ 1)–(ΠΕ 3) εμπλουτιστεί με το λεγόμενο αξίωμα του Fano. Αυτό θα χρησιμοποιηθεί ιδιαιτέρως στο Κεφάλαιο 7, όπου παραπέμπουμε για τον σχετικό ορισμό και άλλες λεπτομέρειες (βλ. κυρίως τις Παρατηρήσεις 7.1.3 και την Πρόταση 7.1.4).

Θεωρούμε τώρα δύο τυχούσες ευθείες k, ℓ , με $k \neq \ell$, καθώς και δύο διατεταγμένες τριάδες διαφορετικών σημείων (A, B, C) και (A', B', C') επί των k και ℓ αντιστοίχως. Υποθέτουμε ότι τα προηγούμενα σημεία είναι διαφορετικά και από το $O := k \wedge \ell$ και θέτουμε (βλ. και το Σχήμα 5.1):

$$D := (A \vee B') \wedge (A' \vee B)$$

$$E := (B \vee C') \wedge (B' \vee C)$$

$$Z := (A \vee C') \wedge (A' \vee C)$$



Σχήμα 5.1

Διατυπώνουμε τώρα την επόμενη συνθήκη:

(Π)

Τα σημεία D, E, Z είναι συγγραμμικά.

Η κοινή ευθεία των σημείων D, E, Z καλείται **ευθεία του Πάππου**, ενώ το Σχήμα 5.1 λέγεται και **(πλήρες) σχήμα του Πάππου** (Pappus' configuration).

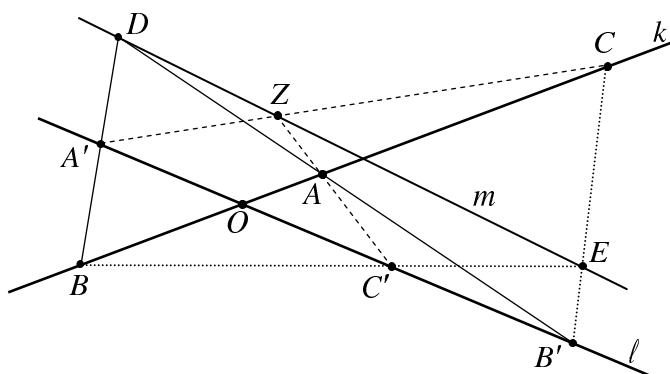
Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η (Π) ισοδυναμεί με τον Ορισμό 5.1.1. Πριν απ' αυτό ας δούμε μερικές χρήσιμες διευκρινίσεις.

5.1.3 Παρατηρήσεις. 1) Αν οι ευθείες του προβολικού επιπέδου περιέχουν μόνο τρία διαφορετικά σημεία, τότε έχουμε μία τετριμμένη περίπτωση συνθήκης (Π). Πραγματικά, στην περίπτωση αυτή κάποιο από τα A, B, C και κάποιο από τα A', B', C' συμπίπτει με το O . Επομένως, δύο από τα D, E, Z συμπίπτουν με το O , και η ευθεία του Πάππου είναι η ευθεία που ορίζεται από το O και το τρίτο από τα D, E, Z που δεν συμπίπτει με το O . Για παράδειγμα, αν $A = A' = O$, τότε $D = Z = O$ και η ευθεία του Πάππου είναι η $O \vee E$.

Την ίδια τετριμμένη περίπτωση έχουμε σε τυχόν προβολικό επιπέδο, του οποίου οι ευθείες διαθέτουν περισσότερα από 3 διαφορετικά σημεία, αλλά ένα σημείο από την κάθε τριάδα συμπίπτει, όπως προηγουμένως, με το O .

Ακριβώς για να αποφύγουμε τέτοιες περιπτώσεις, επιβάλλουμε τις αναφερόμενες συνθήκες στις ευθείες k, l και τις επ' αυτών τριάδες σημείων.

2) Στο Σχήμα 5.1, φυσικά, η τοποθέτηση των τριάδων σημείων (A, B, C) και (A', B', C') δεν σχετίζεται με τη διάταξη των σημείων στις αντίστοιχες τριάδες. Έτσι θα μπορούσαμε να έχουμε και ένα σχήμα όπως το παρακάτω:



Σχήμα 5.2

3) Για να διευκολύνουμε τη διαδικασία του εντοπισμού των σημείων της συνθήκης (Π), για δεδομένες τριάδες σημείων, ακολουθούμε τον επόμενο «σηματικό» τρόπο: αν δίνονται οι τριάδες (A, B, C) και (A', B', C') , θεωρούμε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{bmatrix}$$

οπότε τα σημεία D, E, Z της ευθείας του Πάππου είναι τα αντίστοιχα σημεία τομής των «διαγωνίων» των παρακάτω «τετραγώνων»:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} A & B \\ A' & B' \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B & C \\ B' & C' \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A & C \\ A' & C' \end{bmatrix} \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ D & E & Z \end{array}$$

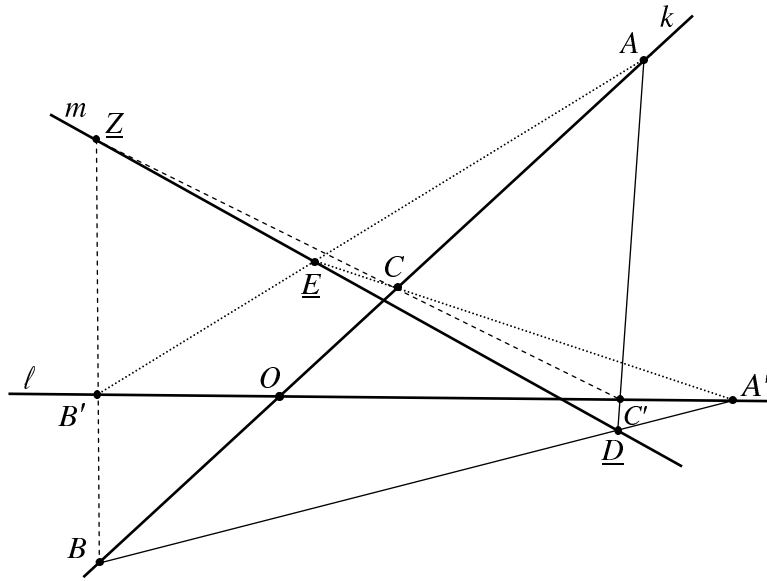
Αν δοθούν οι τριάδες (B, A, C) και (C', A', B') , τότε από τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} B & A & C \\ C' & A' & B' \end{bmatrix}$$

προκύπτουν ως σημεία της ευθείας του Πάππου τα $\underline{D}$, $\underline{E}$, $\underline{Z}$, όπως φαίνεται στα «τετράγωνα»:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} B & A \\ C' & A' \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A & C \\ A' & B' \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B & C \\ C' & B' \end{bmatrix} \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ \underline{D} & \underline{E} & \underline{Z} \end{array}$$

και στο ακόλουθο σχήμα :



Σχήμα 5.3

Αποδεικνύουμε τώρα το εξής βασικό συμπέρασμα :

5.1.4 Πρόταση. Σε ένα επίπεδο του Πάππου ισχύει η συνθήκη (Π).

Απόδειξη. Ας πάρουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) τις τριάδες (A, B, C) και (A', B', C') μαζί με τα αντίστοιχα σημεία D, E, Z , όπως στο Σχήμα 5.1. Παρατηρούμε ότι $D \neq Z$, γιατί αν ήταν $D = Z$, τότε θα είχαμε ότι

$$B' = (A \vee B') \wedge \ell = (A \vee D) \wedge \ell =$$

$$= (A \vee Z) \wedge \ell = (A \vee C') \wedge \ell = C',$$

που είναι άτοπο. Επομένως, ορίζεται η ευθεία $m = D \vee Z$, και θα πρέπει δείξουμε ότι $E \in m$.

Θεωρούμε τη συγγραμμικότητα (ϕ_1, ψ_1) , που αντιστοιχεί στην προσδιοριστική τετραδα (O, m, B, A) , και τη συγγραμμικότητα (ϕ_2, ψ_2) , που αντιστοιχεί στην (O, m, A, C) , οπότε $\phi_1(B) = A$ και $\phi_2(A) = C$. Οι συγγραμμικότητες αυτές υπάρχουν επειδή το επίπεδο είναι Desargues. Θα είναι και οι δύο είτε ομολογίες είτε επάρσεις, ανάλογα με το αν είναι $O \notin m$ ή $O \in m$. Σε κάθε περίπτωση, αν θέσουμε $(\phi, \psi) = (\phi_2, \psi_2) \circ (\phi_1, \psi_1)$, ισχύει η σχέση

$$(5.1.1) \quad (\phi, \psi) = (\phi_2, \psi_2) \circ (\phi_1, \psi_1) = (\phi_1, \psi_1) \circ (\phi_2, \psi_2).$$

Πραγματικά, αν $O \in m$, οι (ϕ_1, ψ_1) και (ϕ_2, ψ_2) ανήκουν στην $\mathbb{E}(m)$, οπότε η (5.1.1) είναι συνέπεια του Θεωρήματος 4.1.8. Αν $O \notin m$, τότε οι προηγούμενες συγγραμμικότητες ανήκουν στην $\mathbb{H}(O, m)$, άρα η (5.1.1) είναι συνέπεια του Ορισμού 5.1.1.

Ισχυριζόμαστε ότι

$$(5.1.2) \quad \psi(B \vee C') = B' \vee C.$$

Επειδή $\psi(B \vee C') = \phi(B) \vee \phi(C')$, υπολογίζουμε τα $\phi(B)$ και $\phi(C')$ λαμβάνοντας υπ' όψιν την (5.1.1). Ακριβέστερα, βρίσκουμε ότι

$$\phi(B) = \phi_2(\phi_1(B)) = \phi_2(A) = C,$$

ενώ, επειδή $D, Z \in m$ και $\ell \in J(O)$,

$$\begin{aligned} \phi(C') &= \phi_2(\phi_1(C')) = \phi_1(\phi_2(C')) = \phi_1(\phi_2((A \vee Z) \wedge \ell)) \\ &= \phi_1((\phi_2(A) \vee \phi_2(Z)) \wedge \psi_2(\ell)) = \phi_1((C \vee Z) \wedge \ell) \\ &= \phi_1(A') = \phi_1((B \vee A') \wedge \ell) = \phi_1((B \vee D) \wedge \ell) \\ &= \psi_1(B \vee D) \wedge \psi_1(\ell) = (\phi_1(B) \vee \phi_1(D)) \wedge \psi_1(\ell) \\ &= (A \vee D) \wedge \ell = (A \vee B') \wedge \ell = B', \end{aligned}$$

οπότε καταλήγουμε στην (5.1.2). Επομένως, κατά το Πόρισμα 2.2.15, οι ευθείες $B \vee C'$, $\psi(B \vee C') = B' \vee C$ και ο άξονας m της (ϕ, ψ) τέμνονται στο ίδιο σημείο, οπότε

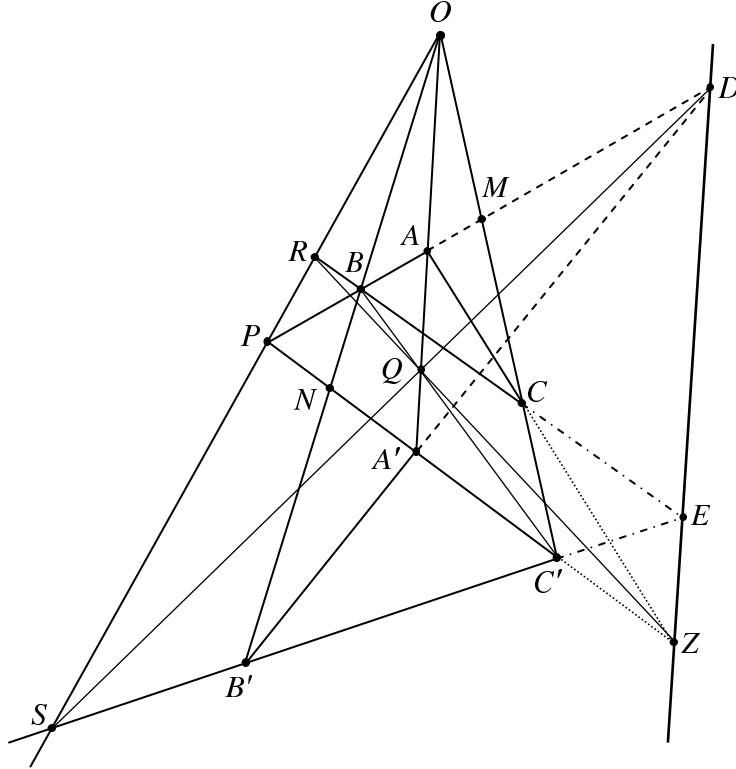
$$E = (B \vee C') \wedge (B' \vee C) \in m,$$

όπως ακριβώς ισχυριστήκαμε. $\square$

Η απόδειξη του αντιστρόφου συμπεράσματος της Πρότασης 5.1.4 πραγματοποιείται σε δύο στάδια. Συγκεκριμένα έχουμε πρώτα την

5.1.5 Πρόταση. Αν σε ένα προβολικό επίπεδο ισχύει η συνθήκη (Π), τότε αυτό είναι επίπεδο Desargues.

Απόδειξη. Κατά την Πρόταση 4.2.5, αρκεί να δείξουμε ότι δύο τυχόντα τρίγωνα ABC και $A'B'C'$, προοπτικά ως προς ένα κέντρο O , είναι επίσης προπτικά ως προς άξονα και αντιστρόφως. Επειδή το αντίστροφο αποδεικνύεται με ανάλογους (δυϊκούς) συλλογισμούς, θα αρκεσθούμε στην απόδειξη του ευθέος μέρους. Για διευκόλυνση παραθέτουμε το Σχήμα 5.4 σε συνδυασμό με το Σχήμα 4.9.



Σχήμα 5.4

Υποθέτουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι έχουμε τα ζεύγη ομολόγων κορυφών (A, A') , (B, B') , (C, C') , οπότε θα πρέπει να δείξουμε ότι τα σημεία τομής των ομολόγων πλευρών

$$D := (A \vee B) \wedge (A' \vee B')$$

$$E := (B \vee C) \wedge (B' \vee C')$$

$$Z := (A \vee C) \wedge (A' \vee C')$$

είναι συγγραμμικά (η κοινή τους ευθεία θα είναι τώρα ο άξονας της προοπτικότητας). Φυσικά, υποθέτουμε ότι δεν έχουμε κάποια εκφυλισμένη περίπτωση τοποθέτησης τριγώνων, οπότε το συμπέρασμα είναι άμεσο (όπως σχολιάσαμε πριν την Πρόταση 4.2.5).

Θα αποδείξουμε τη συγγραμμικότητα των D, E, Z εφαρμόζοντας τη συνθήκη (Π) διαδοχικά σε κατάλληλες ευθείες και τριάδες σημείων τους. Για τον λόγο αυτόν ορίζουμε πρώτα το σημείο

$$P := (A \vee B) \wedge (A' \vee C')$$

(υποθέτουμε ότι $A \vee B \neq A' \vee C'$, διαφορετικά έχουμε μια εκφυλισμένη περίπτωση). Κατόπιν θεωρούμε τις (διαφορετικές!) ευθείες $A \vee B$ και $O \vee C$ με τις αντίστοιχες διατεταγμένες τριάδες σημείων τους (A, B, P) και (C', O, C) . Τα σημεία της κάθε τριάδας είναι διαφορετικά μεταξύ τους, καθώς και προς το

$$M := (A \vee B) \wedge (O \vee C)$$

(αλλιώς θα είχαμε και πάλι μια εκφυλισμένη περίπτωση). Επομένως, λόγω της συνθήκης (Π), τα σημεία

$$\begin{aligned} (5.1.3) \quad & (A \vee O) \wedge (C' \vee B) =: Q \\ & (B \vee C) \wedge (O \vee P) =: R \\ & (A \vee C) \wedge (C' \vee P) = (A \vee C) \wedge (A' \vee C') = Z \end{aligned}$$

είναι συγγραμμικά.

Παρόμοια, θεωρούμε τις ευθείες $A' \vee C'$ και $O \vee B$, με τις αντίστοιχες τριάδες σημείων τους (A', C', P) και (B, O, B') . Πάλι βεβαιωνόμαστε ότι τα σημεία αυτά είναι διαφορετικά μεταξύ τους, καθώς και προς το

$$N := (A' \vee C') \wedge (O \vee B),$$

οπότε η (Π) εξασφαλίζει τη συγγραμμικότητα των σημείων

$$\begin{aligned} (5.1.4) \quad & (A' \vee O) \wedge (B \vee C') = (A \vee O) \wedge (C' \vee B) = Q \\ & (C' \vee B') \wedge (O \vee P) =: S \\ & (A' \vee B') \wedge (B \vee P) = (A' \vee B') \wedge (A \vee B) = D. \end{aligned}$$

Τέλος, θεωρούμε τις ευθείες $B \vee C'$ και $O \vee P$, με τις αντίστοιχες τριάδες σημείων (B, Q, C') και (S, P, R) , οπότε και τα σημεία (που δεν φαίνονται στο Σχήμα 5.4)

$$\begin{aligned} (5.1.5) \quad & (B \vee P) \wedge (S \vee Q) =: T \\ & (Q \vee R) \wedge (P \vee C') =: X \\ & (B \vee R) \wedge (S \vee C') =: Y \end{aligned}$$

είναι συγγραμμικά.

Θα δείξουμε ότι τα T, X, Y συμπίπτουν αντιστοίχως με τα D, Z, E (γι' αυτό άλλωστε δεν σημειώνονται στο προηγούμενο σχήμα). Αυτό, προφανώς, λόγω της συγγραμμικότητας των (5.1.5), θα ολοκληρώσει την απόδειξη.

Παρατηρούμε ότι, από τον ορισμό των D και P , είναι $D \in A \vee B \ni P$, άρα

$$(5.1.6) \quad B \vee P = A \vee B = A \vee D,$$

ενώ η συγγραμμικότητα των Q, S, D [βλ. σχέσεις (5.1.4)] δίνει ότι

$$(5.1.7) \quad S \vee Q = S \vee D.$$

Συνεπώς, οι (5.1.6), (5.1.7) και η πρώτη των (5.1.5) συνεπάγονται την

$$(5.1.8) \quad T = (B \vee P) \wedge (S \vee Q) = (A \vee D) \wedge (S \vee D) = D,$$

αφού, όπως διαπιστώνεται αμέσως, $A \vee D \neq S \vee D$.

Παρόμοια, από τον ορισμό των P και Z καθώς και τη συγγραμμικότητα των A', C', P, Z , είναι

$$(5.1.9) \quad P \vee C' = A' \vee C' = A' \vee Z,$$

ενώ η συγγραμμικότητα των Q, R, Z οδηγεί στην

$$(5.1.10) \quad Q \vee R = Q \vee Z.$$

Άρα, από τις (5.1.9), (5.1.10) και τη δεύτερη των (5.1.5), προκύπτει η

$$(5.1.11) \quad X = (Q \vee R) \wedge (P \vee C') = (Q \vee Z) \wedge (A' \vee Z) = Z.$$

Τέλος, από τον ορισμό των R, S και την τρίτη των (5.1.5), βρίσκουμε ότι

$$(5.1.12) \quad Y = (B \vee R) \wedge (S \vee C') = (B \vee C) \wedge (B' \vee C') = E.$$

Οι (5.1.8), (5.1.11) και (5.1.12) ολοκληρώνουν την απόδειξη, όπως εξηγήσαμε πιο πάνω. $\square$

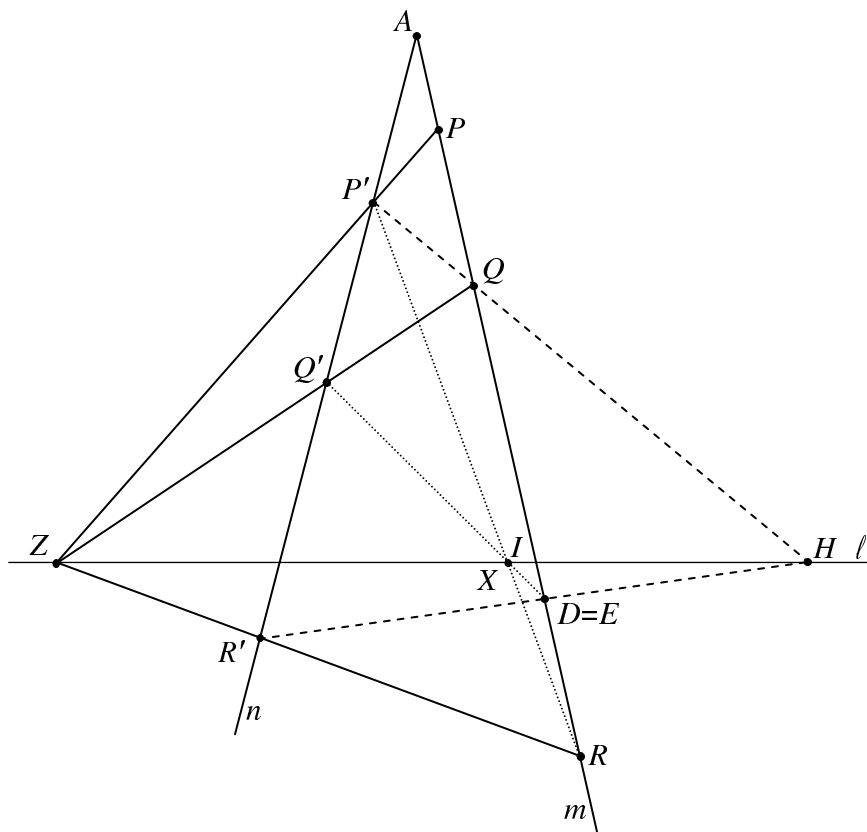
Η δεύτερη βασική συνέπεια της (Π) δίνεται στην

5.1.6 Πρόταση. *Αν σε ένα προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ ισχύει η συνθήκη (Π), τότε, για κάθε $(A, \ell) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ με $A \notin \ell$, η $\mathbb{H}(A, \ell)$ είναι αβεθιανή ομάδα.*

Απόδειξη. Θα πρέπει να δείξουμε ότι, για οποιεσδήποτε ομολογίες (σ, τ) και (ϕ, ψ) της $\mathbb{H}(A, \ell)$, είναι $(\sigma, \tau) \circ (\phi, \psi) = (\phi, \psi) \circ (\sigma, \tau)$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 2.2.19, αρκεί να δείξουμε ότι

$$(5.1.13) \quad (\sigma \circ \phi)(P) = (\phi \circ \sigma)(P),$$

για τυχόν σημείο P του επιπέδου, με $P \neq A$ και $P \notin \ell$. Για ένα τέτοιο P θέτουμε



Σχήμα 5.5

$Q := \sigma(P)$ και $R := \phi(P)$. Παρατηρούμε ότι, αν δύο από τα P, Q, R συμπίπτουν, τότε το συμπέρασμα είναι άμεσο: πραγματικά, αν $Q = R$, τότε $\sigma(P) = \phi(P)$, άρα $(\sigma, \tau) = (\phi, \psi)$, απ' όπου και το συμπέρασμα. Παρόμοια, αν $P = Q$, τότε $(\sigma, \tau) = (id_P, id_\ell)$ (βλ. Πόρισμα 2.2.18), οπότε το συμπέρασμα είναι τετριμμένο. Ανάλογα και για $P = R$, οπότε $(\phi, \psi) = (id_P, id_\ell)$.

Ας εξετάσουμε τώρα τη γενικότερη περίπτωση κατά την οποίαν τα P, Q, R είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Τότε, βάσει της Πρότασης 2.2.12, τα A, P, Q, R είναι συγγραμμικά. Καλούμε m την κοινή ευθεία των σημείων αυτών και θεωρούμε ακόμη μια τυχούσα ευθεία $n \in J(A)$ με $n \neq m$, καθώς κι ένα τυχόν σημείο $P' \in n$ με $P' \neq A$ και $P' \notin \ell$. Θέτουμε $Q' := \sigma(P')$ και $R' := \phi(P')$.

Λόγω της Πρότασης 2.2.13, οι ευθείες $P \vee P', \tau(P \vee P') = \sigma(P) \vee \sigma(P') = Q \vee Q'$ και ℓ συγκλίνουν στο ίδιο σημείο, ας το καλέσουμε Z , απ' το οποίο διέρχεται επίσης και η ευθεία $\psi(P \vee P') = \phi(P) \vee \phi(P') = R \vee R'$.

Εφ' όσον η (ϕ, ψ) είναι δεδομένη ομολογία, ακολουθώντας τη μεθοδολογία του Θεωρήματος 2.2.16, μπορούμε να προσδιορίσουμε το σημείο $D := \phi(Q) = \phi(\sigma(P))$, χρησιμοποιώντας τα γνωστά σημεία P' και $\phi(P') = R'$. Επίσης, για τη δοσμένη (σ, τ) , μπορούμε να βρούμε το $E := \sigma(R) = \sigma(\phi(P))$, μέσω των P' και $\sigma(P') = Q'$. Στο Σχήμα 5.5 η διακεκομμένη γραμμή (αντιστ. διάστικτη) απεικονίζει τον προσδιορισμό του D (αντιστ. του E). Ακριβέστερα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} D &= (A \vee Q) \wedge (R' \vee H) = m \wedge (R' \vee H), \quad \text{όπου} \quad H = (P' \vee Q) \wedge \ell, \\ E &= (A \vee R) \wedge (Q' \vee I) = m \wedge (Q' \vee I), \quad \text{όπου} \quad I = (P' \vee R) \wedge \ell. \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι $D = E$ (όπως άλλωστε φαίνεται στο ίδιο Σχήμα 5.5). Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τις ευθείες m και n με τις αντίστοιχες τριάδες σημείων τους (Q, R, D) και (R', Q', P') . Επειδή τα σημεία αυτά είναι διαφορετικά μεταξύ τους, καθώς και προς το A (γιατί;), η συνθήκη (Π) συνεπάγεται ότι τα σημεία

$$\begin{aligned} Z &:= (Q \vee Q') \wedge (R' \vee R) \\ X &:= (R \vee P') \wedge (Q' \vee D) \\ H &:= (Q \vee P') \wedge (R' \vee D) \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

είναι συγγραμμικά, άρα

$$X \in Z \vee H = \ell. \tag{5.1.15}$$

Από την (5.1.15) και τη δεύτερη των (5.1.14) έχουμε ότι

$$X = (R \vee P') \wedge \ell = I. \tag{5.1.16}$$

Επίσης, από την (5.1.16) και τη δεύτερη των (5.1.14) προκύπτει ότι τα $D, Q', X = I$ είναι συγγραμμικά, άρα $Q' \vee D = Q' \vee I$. Επειδή όμως $D, E \in m$, έχουμε ακόμη ότι

$$D = (Q' \vee D) \wedge m = (Q' \vee I) \wedge m = E,$$

όπως ισχυριστήκαμε πιο πάνω. Η τελευταία σχέση και ο ορισμός των D, E οδηγούν ακριβώς στην (5.1.13) με την οποίαν κλείνει η απόδειξη. $\square$

Οι Προτάσεις 5.1.5, 5.1.6 και 5.1.7 συνοψίζονται στο επόμενο βασικό

5.1.7 Θεώρημα. Ένα προβολικό επίπεδο είναι επίπεδο του Πάππου τότε και μόνον τότε αν ισχύει η συνθήκη (Π).

Σε αντιδιαστολή προς τον «αλγεβρικό» Ορισμό 5.1.1, το προηγούμενο συμπέρασμα οδηγεί στον ισοδύναμο «γεωμετρικό» ορισμό του επιπέδου του Πάππου. Ακριβέστερα :

5.1.8 Ορισμός (γεωμετρικός). Ένα προβολικό επίπεδο καλείται **επίπεδο του Πάππου** αν ισχύει η συνθήκη (Π).

Ιδιαίτερώς ισχύει το

5.1.9 Το Κλασικό Θεώρημα του Πάππου. Στο κλασικό προβολικό επίπεδο η συνθήκη (Π) είναι αληθής.

Απόδειξη. Το συμπέρασμα προκύπτει αν συνδυάσουμε το Θεώρημα 3.5.3 με το Παράδειγμα 5.1.2. $\square$

Το τελευταίο αποτέλεσμα δείχνει ότι, στο επίπεδο της κλασικής Προβολικής Γεωμετρίας, η συνθήκη (Π) αποτελεί ένα θεώρημα, το οποίον *αποδεικνύεται*. Αυτό είναι και το περιεχόμενο του αρχικού Θεωρήματος του Πάππου, απ' όπου και η σχετική ονοματολογία. Για μίαν άλλη απόδειξη του ίδιου θεωρήματος, στο πλαίσιο του κλασικού προβολικού επιπέδου (με χρήση στοιχειώδους Αναλυτικής Γεωμετρίας), παραπέμπουμε στον Μ. Μπρίκα [22, σελ. 250].

Γενικεύοντας τα πράγματα, στο δικό μας πλαίσιο, θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε ως Θεώρημα του Πάππου το Θεώρημα 5.1.7.

5.1.10 Ασκήσεις.

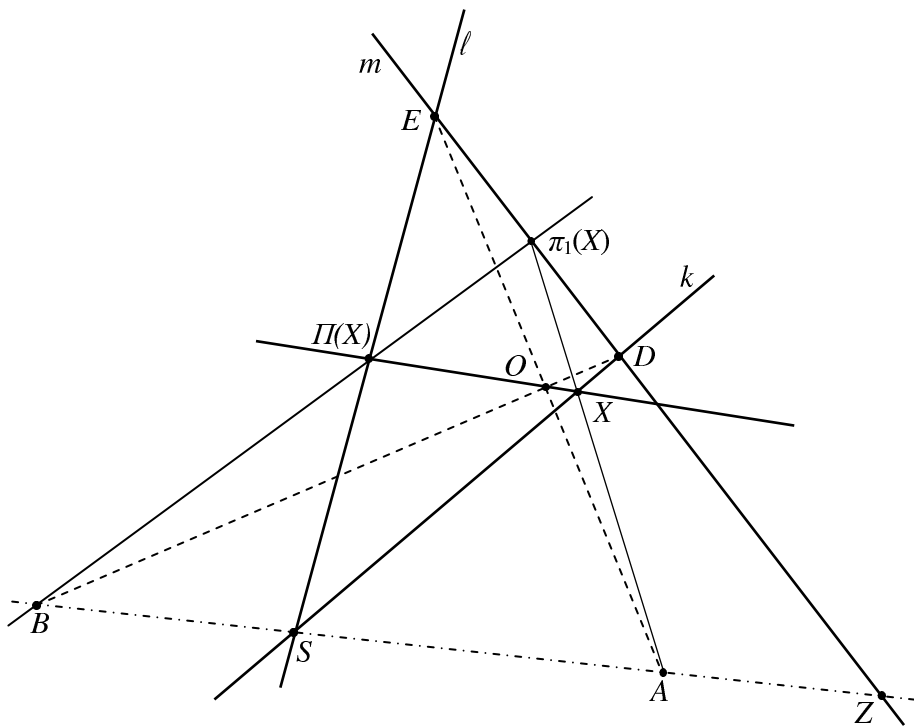
- 1) Να εξηγηθούν οι λεπτομέρειες της απόδειξης του Θεωρήματος 5.1.9.
- 2) Να διατυπωθεί η δυϊκή μορφή της συνθήκης (Π).
- 3) Να αποδειχθεί ότι όλα τα σημεία της συνθήκης (Π) είναι μεταξύ τους διαφορετικά, αν οι ευθείες του προβολικού επιπέδου έχουν τουλάχιστον τέσσερα διαφορετικά σημεία.
- 4) Στην απόδειξη της Πρότασης 5.1.6 να εξηγηθούν οι ισχυρισμοί που αναφέρονται στις τριάδες των σημείων που οδηγούν στις σχέσεις (5.1.3) – (5.1.5). Επίσης, να δικαιολογηθεί η σχέση (5.1.12).
- 5) Στην απόδειξη της Πρότασης 5.1.7 να εξηγηθεί η ύπαρξη του πλήρους σχήματος του Πάππου, για τις ευθείες m , n και τις αντίστοιχες τριάδες σημείων (Q, R, D) και (R', Q', P') .

5.2 Το πλήρες Θεμελιώδες Θεώρημα της Προβολικής Γεωμετρίας

Με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων των Παραγράφων 4.3 και 5.1, είμαστε τώρα σε θέση να συμπληρώσουμε την πρώτη μορφή του Θεμελιώδους Θεωρήματος 1.5.11 της Προβολικής Γεωμετρίας.

5.2.1 Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Προβολικής Γεωμετρίας (Πλήρης μορφή). Η συνθήκη (Π) είναι ισοδύναμη με (κάθε μία από) τις προτάσεις του Θεωρήματος 1.5.11.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η (Π) είναι ισοδύναμη με την πρόταση iii) του Θεωρήματος 1.5.11. Γ' αυτόν το σκοπό υποθέτουμε πρώτα ότι $\Pi : J(k) \rightarrow J(\ell)$ είναι μία προβολικότητα μεταξύ των διαφορετικών ευθειών k, ℓ , τέτοια ώστε $\Pi(S) = S$, όπου $S = k \wedge \ell$. Συνεπώς, πρέπει να δείξουμε ότι η Π είναι προοπτικότητα.



Σχήμα 5.6

Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.3, μπορούμε να γράψουμε ότι $\Pi = \pi_2 \circ \pi_1$, όπου $\pi_1 = \pi_1(k, m, A)$ και $\pi_2 = \pi_2(m, \ell, B)$ είναι προοπτικότητες με κατάλληλα

κέντρα A, B και $k \neq m \neq \ell$. Θέτουμε

$$D := m \wedge k, \quad E := m \wedge \ell, \quad Z := m \wedge (S \vee A),$$

όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.6.

Από τον ορισμό των π_1, π_2 και την υπόθεση για την προβολικότητα Π , διαπιστώνουμε ότι

$$S = \Pi(S) = \pi_2((\pi_1(S)) = \pi_2((A \vee S) \wedge m)) = \pi_2(Z) = (B \vee Z) \wedge \ell,$$

άρα τα σημεία S, Z, B είναι συγγραμμικά, οπότε $B \in S \vee Z = S \vee A$. Επομένως και τα A, S, B είναι (διαφορετικά) συγγραμμικά σημεία.

Στη συνέχεια θεωρούμε επί της k τυχόν σημείο X με $D \neq X \neq S$. Επειδή $\pi_1(X) \in m$, τα $D, \pi_1(X), E$ είναι επίσης (διαφορετικά) συγγραμμικά σημεία. Επομένως, εφαρμόζοντας τη συνθήκη (Π) για τις τριάδες (διαφορετικών συγγραμμικών) σημείων (A, S, B) και $(D, \pi_1(X), E)$, έχουμε ότι και τα

$$\begin{aligned} (A \vee \pi_1(X)) \wedge (D \vee S) &= (A \vee X) \wedge k = X \\ (5.2.1) \quad (A \vee E) \wedge (D \vee B) &=: O \\ (S \vee E) \wedge (\pi_1(X) \vee B) &= \ell \wedge (B \vee \pi_1(X)) = \pi_2(\pi_1(X)) = \Pi(X) \end{aligned}$$

είναι συγγραμμικά σημεία (οπότε ορίζουν την αντίστοιχη ευθεία του Πάππου).

Τέλος, θεωρούμε και την προοπτικότητα $\pi = \pi(k, \ell, O)$, για την οποία διαπιστώνουμε ότι

$$(5.2.2) \quad \pi(X) = (O \vee X) \wedge \ell = (O \vee \Pi(X)) \wedge \ell = \Pi(X),$$

για κάθε $X \in k$ με $X \neq D, S$, ως συνέπεια της συγγραμμικότητας των σημείων $X, O, \Pi(X)$ και του γεγονότος ότι $\Pi(X) \in \ell$. Επίσης

$$\begin{aligned} (5.2.3) \quad \pi(D) &= (O \vee D) \wedge \ell = (B \vee D) \wedge \ell \\ &= \pi_2(D) = \pi_2(\pi_1(D)) = \Pi(D), \end{aligned}$$

[λόγω της συγγραμμικότητας των B, O, D από τη δεύτερη των (5.2.1)], όπως και

$$(5.2.4) \quad \pi(S) = \Pi(S).$$

Οι σχέσεις (5.2.2) – (5.2.4) σημαίνουν ότι, για κάθε $P \in k$, είναι $\Pi(P) = \pi(P)$, δηλαδή $\Pi = \pi$. Άρα η Π είναι μία προοπτικότητα, όπως ζητούσαμε.

Αντίστροφως, υποθέτοντας ότι ισχύει η πρόταση iii) του Θεωρήματος 1.5.11, θα καταλήξουμε στην (Π). Έτσι, για δύο τυχούσες τριάδες διαφορετικών σημείων

(A, B, C) και (A', B', C') , επί των διαφορετικών ευθειών k και ℓ αντιστοίχως, θα δείξουμε ότι τα σημεία

$$D := (A \vee B') \wedge (A' \vee B)$$

$$E := (B \vee C') \wedge (B' \vee C)$$

$$Z := (A \vee C') \wedge (A' \vee C)$$

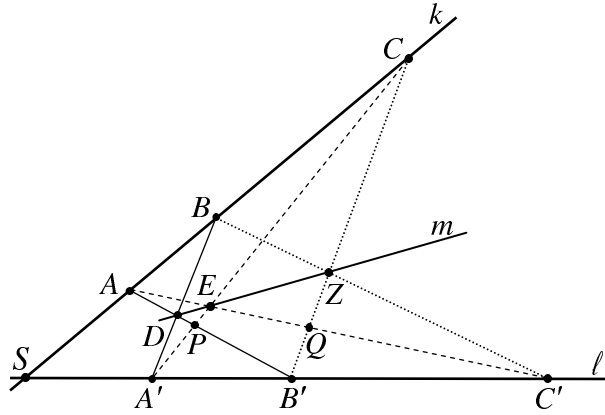
είναι συγγραμμικά. Προς τούτο θέτουμε

$$S := k \wedge \ell, \quad P := (A \vee B') \wedge (A' \vee C), \quad Q := (A \vee C') \wedge (B' \vee C)$$

και θεωρούμε τις προοπτικότητες

$$\pi_1 = \pi_1(A \vee B', k, A'), \quad \pi_2 = \pi_2(k, B' \vee C, C').$$

Για διευκόλυνση παραθέτουμε το επόμενο σχήμα, που αποτελεί τροποποίηση του Σχήματος 5.1, σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα.



Σχήμα 5.7

Παρατηρούμε ότι η συγγραμμικότητα $\Pi := \pi_2 \circ \pi_1$ είναι μία προβολικότητα μεταξύ των (διαφορετικών) ευθειών $A \vee B'$ και $B' \vee C$. Επειδή

$$\pi_1(B') = (A' \vee B') \wedge k = \ell \wedge k = S,$$

διαπιστώνεται ότι

$$\begin{aligned} \Pi(B') &= \pi_2(\pi_1(B')) = \pi_2(S) \\ &= (C' \vee S) \wedge (B' \wedge C) \\ &= \ell \wedge (B' \vee C) = B', \end{aligned}$$

άρα, λόγω της πρότασης iii) του Θεμελιώδους Θεωρήματος, η Π είναι προοπτικότητα μεταξύ των προαναφερομένων ευθειών. Ακόμη έχουμε ότι

$$\Pi(A) = \pi_2(\pi_1(A)) = \pi_2(A) = Q,$$

$$\Pi(P) = \pi_2(\pi_1(P)) = \pi_2(C) = C,$$

οπότε το κέντρο της προοπτικότητας Π είναι το σημείο (βλ. Παρατήρηση 1.5.4)

$$\begin{aligned} (A \vee \Pi(A)) \wedge (P \vee \Pi(P)) &= (A \vee Q) \wedge (P \vee C) \\ &= (A \vee C') \wedge (A' \vee C) = Z. \end{aligned}$$

Συνεπώς (επίσης βάσει της Παρατήρησης 1.5.4), το κέντρο Z και τα σημεία D και $\Pi(D) = \pi_2(\pi_1(D)) = \pi_2(B) = E$ είναι συγγραμικά. Άρα αποδείξαμε τη συνθήκη (Π), με την οποία ολοκληρώνεται η απόδειξη. $\square$

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.2.1 είναι το επόμενο συμπέρασμα, που αποτελεί, ουσιαστικά, αναδιατύπωση του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Προβολικής Γεωμετρίας και χαρακτηρίζει τα επίπεδα του Πάππου.

5.2.2 Θεώρημα. Ένα προβολικό επίπεδο είναι επίπεδο του Πάππου τότε και μόνον τότε αν ισχύει μία από τις (άρα και όλες οι) προτάσεις του Θεμελιώδους Θεωρήματος 1.5.11.

Από το προηγούμενο θεώρημα (όπως ήδη σχολιάσαμε και στην Παρατήρηση 1.5.12) συνάγεται ότι, σε ένα επίπεδο του Πάππου, οι προτάσεις του Θεωρήματος 1.5.11 όχι μόνον είναι ισοδύναμες, αλλά και αληθεύουν, δηλαδή προκύπτουν από τα αξιώματα (ΠΕ 1) – (ΠΕ 5).

5.2.3 Ασκήσεις.

- 1) Στην απόδειξη του πρώτου μέρους του Θεωρήματος 5.2.1 [(Π) $\Rightarrow$ Θεώρημα 1.5.11(iii)], να δικαιολογηθεί γιατί οι τριάδες (A, S, B) και $(D, \pi_1(X), E)$ αποτελούνται από διαφορετικά σημεία.
- 2) Στην απόδειξη του δευτέρου μέρους του ιδίου Θεωρήματος [Θεώρημα 1.5.11(iii) $\Rightarrow$ (Π)], να δικαιολογηθεί γιατί ορίζονται τα σημεία P, Q και οι προοπτικότητες π_1, π_2 .

5.3 Παρατηρήσεις επί της Γεωμετρίας Klein

Στα Σχόλια 2.2.3 μιλήσαμε σύντομα για τη Γεωμετρία Klein $(\mathcal{P}, \text{Aut}(\mathcal{P}))$ ενός προβολικού επιπέδου και είπαμε ότι η μελέτη ορισμένων υποομάδων της $\text{Aut}(\mathcal{P})$ οδηγεί στη διάκριση διαφόρων κατηγοριών προβολικών επιπέδων.

Αυτό φάνηκε με σαφήνεια στα επίπεδα του Πάππου, τα οποία χαρακτηρίζονται από τη μεταθετικότητα της $\mathbb{H}(A, \ell) \leq \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$, για οποιαδήποτε $(A, \ell) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ με $A \neq \ell$ (βλ. Ορισμό 5.1.1).

Αναλόγως, η ύπαρξη ομολογιών από την ομάδα $\mathbb{H}(A, \ell)$, που ικανοποιούν δεδομένες συνθήκες, χαρακτηρίζει τα επίπεδα Desargues (βλ. Ορισμό 4.1.3). Για την ίδια κατηγορία επιπέδων, μίαν έμμεση πληροφορία παρέχουν οι ομάδες $\mathbb{E}(\ell)$. Αν υπάρχει κάποια $\ell \in \mathcal{L}$, τέτοια ώστε η αντίστοιχη $\mathbb{E}(\ell)$ να μην είναι μεταθετική, τότε το προβολικό επίπεδο δεν είναι επίπεδο Desargues σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.8. Φυσικά, η μεταθετικότητα των ομάδων αυτής της μορφής δεν εξασφαλίζει από μόνη της ότι το προβολικό επίπεδο είναι επίπεδο Desargues.

Για τη μελέτη άλλων υποομάδων της $\mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στον F. W. Stevenson [28].

Κεφάλαιο 6

Προβολικά επίπεδα και διαιρετικοί δακτύλιοι

Ο Steiner και ο Chasles γίνονται οι εύγλωτοι πρόμαχοι της συνθετικής σχολής της γεωμετρίας, ενώ ο Plücker και αργότερα ο Hesse και ο Cayley είναι οι ηγέτες του αναλυτικού κινήματος. Η εκπληκτική γονιμότητα και η ομορφιά των συνθετικών μεθόδων απήλθησε για λίγο καιρό να οδηγήσει την αναλυτική σχολή στην ανυπαρξία.

J. PIERPONT [24, σελ. 59]

ΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΑΥΤΟ στοχεύει στη θεμελίωση της αναλυτικής Προβολικής Γεωμετρίας, μέσω μιας συστηματικής περιγραφής της αλγεβροποίησης του τυχόντος προβολικού επιπέδου. Η διαδικασία αυτή γενικεύει την αλγεβρική μελέτη του $\mathbb{P}_2$, που έγινε στο Κεφάλαιο 3.

Στις δύο πρώτες παραγράφους του κεφαλαίου κατασκευάζεται ο διαιρετικός δακτύλιος $\mathcal{R}$ ενός επιπέδου Desargues και αποδεικνύεται ότι, μέσω ισομορφίας, είναι μονοσήμαντα ορισμένος.

Στην Παράγραφο 3, ξεκινώντας από τυχόντα διαιρετικό δακτύλιο $\mathcal{D}$, κατασκευάζουμε ένα προβολικό επίπεδο Desargues $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$. Η κατασκευή είναι ανάλογη προς αυτήν του $\mathbb{P}_2$, μέσω καταλλήλων κλάσεων ισοδυναμίας. Ιδιαίτερως, αν το $\mathcal{D}$ είναι σώμα, τότε οδηγούμαστε σε ένα επίπεδο του Πάππου και αντιστρόφως.

Τον ενδιαφέροντα συσχετισμό των αλγεβρικών και γεωμετρικών μεθόδων διαφωτίζουν περισσότερο οι Παράγραφοι 4 και 5. Ακριβέστερα, στην Παράγραφο 4 αποδεικνύεται ότι ένας δεδομένος διαιρετικός δακτύλιος $\mathcal{D}$ είναι ισόμορφος με τον διαιρετικό δακτύλιο του επιπέδου $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$. Στην Παράγραφο 5 αποδεικνύεται η ισομορφία μεταξύ του τυχόντος προβολικού επιπέδου $\mathcal{P}$ και του επιπέδου $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, που προκύπτει από τον διαιρετικό δακτύλιο $\mathcal{R}$ του $\mathcal{P}$.

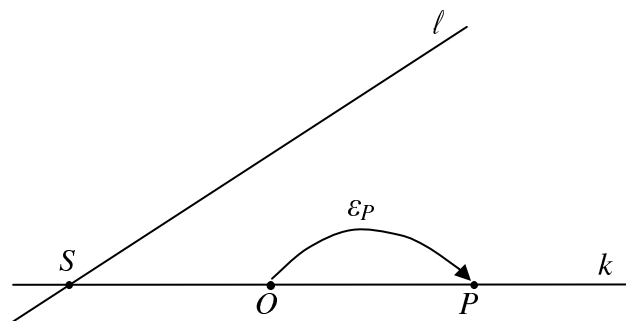
Η προηγούμενη αλγεβρική προσέγγιση επιτρέπει, μεταξύ των άλλων, και την εισαγωγή των ομογενών συντεταγμένων στα προβολικά επίπεδα Desargues, όπως εξηγείται στο τέλος του κεφαλαίου.

6.1 Ο διαιρετικός δακτύλιος ενός επιπέδου Desargues

- Σε ολόκληρη την παράγραφο αυτή θεωρούμε ότι δίνεται ένα προβολικό επίπεδο Desargues $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$. Ισχύει πάντοτε η Σύμβαση 2.1.10

Στο $\mathcal{P}$ σταθεροποιούμε μίαν ευθεία k και δύο διαφορετικά σημεία της S και O . Ακόμη σταθεροποιούμε μίαν ευθεία $\ell \in J(S)$ με $\ell \neq k$, και ορίζουμε το σύνολο

$$\mathcal{R} := J(k) - \{S\} = \{P \in k : P \neq S\}.$$



Σχήμα 6.1

Θεωρώντας την ομάδα των επάρσεων $\mathbb{E}(S, \ell)$, για κάθε $P \in \mathcal{R}$ θα συμβολίζουμε με $\varepsilon_P \in \mathbb{E}(S, \ell)$ την έπαρση που ικανοποιεί τη συνθήκη $\varepsilon_P(O) = P$.

Εδώ, για λόγους ευκολίας, έχουμε ακολουθήσει την επόμενη σύμβαση, την οποία θα εφαρμόσουμε συστηματικά στη συνέχεια:

6.1.1 Σύμβαση. Για κάθε μορφοισμό προβολικών επιπέδων (ϕ, ψ) , θα χρησιμοποιούμε το ίδιο γράμμα ϕ και για την απεικόνιση μεταξύ σημείων και για την απεικόνιση μεταξύ ευθειών, δηλαδή γράφουμε $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ και $\phi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ (αντί της ψ).

Από τα συμφραζόμενα θα φαίνεται πότε η ϕ αναφέρεται στην απεικόνιση σημείων ή στην απεικόνιση ευθειών. Για παράδειγμα, στη σχέση $\mathcal{E}_P(O) = P$ η $\mathcal{E}_P$ αντιστοιχεί στην απεικόνιση σημείων, ενώ στην $\mathcal{E}_P(\ell) = \ell$ η $\mathcal{E}_P$ εκφράζει την απεικόνιση μεταξύ ευθειών.

Ως προς την επάρση $\mathcal{E}_P$ ας παρατηρήσουμε ότι αυτή υπάρχει πάντοτε, για κάθε $P \in \mathcal{R}$, επειδή αντιστοιχεί στην προσδιοριστική τετράδα (S, ℓ, O, P) και το $\mathcal{P}$ είναι επίπεδο Desargues.

Με τους προηγούμενους συμβολισμούς ορίζουμε την απεικόνιση

$$(6.1.1) \quad \mathcal{E} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{E}(S, \ell) : P \mapsto \mathcal{E}(P) := \mathcal{E}_P.$$

6.1.2 Λήμμα. Η $\mathcal{E}$ είναι καλά ορισμένη απεικόνιση 1-1 και επί.

Απόδειξη. Η $\mathcal{E}$ είναι καλά ορισμένη επειδή, για κάθε $P \in \mathcal{R}$, η $\mathcal{E}_P$ είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

Αν, για τυχόντα $P, Q \in \mathcal{R}$, είναι $\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}(Q)$, τότε $\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_Q$ και

$$P = \mathcal{E}_P(O) = \mathcal{E}_Q(O) = Q,$$

που αποδεικνύει ότι η $\mathcal{E}$ είναι απεικόνιση 1-1.

Για την απόδειξη του επί της $\mathcal{E}$ εργαζόμαστε ως εξής: αν δίνεται τυχούσα έπαρση $\phi \in \mathbb{E}(S, \ell)$ (θυμίζουμε ότι ακολουθούμε τη Σύμβαση 6.1.1), αναζητούμε ένα σημείο $X \in \mathcal{R}$, τέτοιο ώστε $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}_X = \phi$. Αρα, από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι το ζητούμενο σημείο είναι το $X = \mathcal{E}_X(O) = \phi(O)$.

Πρέπει όμως να επαληθεύσουμε ότι πράγματι είναι $X \in \mathcal{R}$ και $\mathcal{E}(X) = \phi$. Για τον πρώτο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι, αφού $\phi \in \mathbb{E}(S, \ell)$, τα σημεία $S, O, \phi(O) = X$ είναι συγραμμικά, οπότε $X \in S \vee O = k$. Επίσης, αφού το S είναι κέντρο και $O \neq S$, τότε $X = \phi(O) \neq S$, άρα $X \in \mathcal{R}$. Τέλος, επειδή, $\mathcal{E}_X(O) = X = \phi(O)$, το Πρόρισμα 2.2.19 συνεπάγεται ότι $\mathcal{E}_X = \phi$, συνεπώς $\mathcal{E}(X) = \phi$, όπως ζητούσαμε. $\square$

Από την απόδειξη του «επί» του λήμματος, απομονώνουμε το επόμενο χρήσιμο αποτέλεσμα:

6.1.3 Πρόρισμα. Ισχύει η σχέση $\mathcal{E}^{-1}(\phi) = \phi(O)$, για κάθε $\phi \in \mathbb{E}(S, \ell)$.

Εφ' όσον η $\mathbb{E}(S, \ell)$ έχει δομή αβελιανής ομάδας [με πράξη τη σύνθεση επάρσεων (βλ. Πορίσματα 2.2.11 και 4.1.10)], μπορούμε να μεταφέρουμε τη δομή αυτή και επί του $\mathcal{R}$, μέσω της απεικόνισης $\mathcal{E}$. Ακριβέστερα, μεταξύ των στοιχείων του $\mathcal{R}$ εισάγουμε μία **πράξη πρόσθεσης**

$$+ : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R} : (P, Q) \longmapsto P + Q,$$

η οποία ορίζεται με τη σχέση

$$(6.1.2) \quad P + Q := \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}(P) \circ \mathcal{E}(Q)) = \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}_P \circ \mathcal{E}_Q).$$

Αυτή είναι μία συνήθης διαδικασία μεταφοράς μιας αλγεβρικής δομής, ορισμένης επί ενός συνόλου, σε ένα άλλο σύνολο, υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει μεταξύ των αναφερομένων συνόλων μία απεικόνιση 1-1 και επί.

6.1.4 Λήμμα. Για κάθε $P, Q \in \mathcal{R}$, ισχύουν οι σχέσεις

$$(6.1.3) \quad \mathcal{E}_P \circ \mathcal{E}_Q = \mathcal{E}_{P+Q},$$

$$(6.1.4) \quad P + Q = \mathcal{E}_P(Q).$$

Απόδειξη. Από την (6.1.2) έχουμε αμέσως ότι $\mathcal{E}_P \circ \mathcal{E}_Q = \mathcal{E}(P + Q) = \mathcal{E}_{P+Q}$. Απ' το άλλο μέρος, η (6.1.3) συνεπάγεται ότι

$$P + Q = \mathcal{E}_{P+Q}(O) = (\mathcal{E}_P \circ \mathcal{E}_Q)(O) = \mathcal{E}_P(\mathcal{E}_Q(O)) = \mathcal{E}_P(Q). \quad \square$$

6.1.5 Πρόταση. Το ζεύγος $(\mathcal{R}, +)$ αποτελεί αβελιανή ομάδα και η $\mathcal{E}$ είναι ισομορφισμός (αβελιανών) ομάδων.

Απόδειξη. Παρά το γεγονός ότι το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια της μεταφοράς της αλγεβρικής δομής της $\mathbb{E}(S, \ell)$ επί του $\mathcal{R}$, θα δώσουμε μία λεπτομερή απόδειξη, μέσω της οποίας θα προσδιορίσουμε το ουδέτερο στοιχείο και τη μορφή των αντιστρόφων στοιχείων.

Πρώτα δείχνουμε ότι το $\mathcal{R}$ διαθέτει ουδέτερο στοιχείο. Πραγματικά, αν το καλέσουμε προσωρινά X , τότε πρέπει $X + P = P = P + X$, για κάθε $P \in \mathcal{R}$. Από την $X + P = P$ και την (6.1.2), έχουμε ότι $P = \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}_X \circ \mathcal{E}_P)$, απ' όπου

$$\mathcal{E}_X \circ \mathcal{E}_P = \mathcal{E}(P) = \mathcal{E}_P.$$

Αναλόγως, από την $P + X = P$, έχουμε ότι

$$\mathcal{E}_P \circ \mathcal{E}_X = \mathcal{E}_P.$$

Επομένως, $\mathcal{E}_X = id_{\mathcal{P}}$, οπότε $X = \mathcal{E}_X(O) = id_{\mathcal{P}}(O) = O$, δηλαδή

- το ουδέτερο στοιχείο της $(\mathcal{R}, +)$ είναι ακριβώς το σημείο $O \in \mathcal{R}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι, για κάθε $\mathcal{R} \ni P \neq O$ υπάρχει το αντίθετό του στο $\mathcal{R}$. Για ένα τέτοιο P ας καλέσουμε Y το αντίθετό του. Τότε πρέπει $Y + P = O = P + Y$. Όπως πριν, βρίσκουμε ότι $\mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}_Y \circ \mathcal{E}_P) = O$, ή

$$\mathcal{E}_Y \circ \mathcal{E}_P = \mathcal{E}(O) = \mathcal{E}_O = id_P$$

(βλ. Πρόταση 2.2.18). Αναλόγως έχουμε και τη σχέση

$$\mathcal{E}_P \circ \mathcal{E}_Y = id_P,$$

άρα $\mathcal{E}_Y = (\mathcal{E}_P)^{-1} \equiv \mathcal{E}_P^{-1}$ και $Y = \mathcal{E}_Y(O) = \mathcal{E}_P^{-1}(O)$. Επομένως,

- το αντίθετο του $P \in \mathcal{R}$ είναι το $-P = \mathcal{E}_P^{-1}(O)$.

Για κάθε $P, Q, R \in \mathcal{R}$ βρίσκουμε διαδοχικά [μέσω των (6.1.2) και (6.1.3)]:

$$\begin{aligned} (P + Q) + R &= \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}_{P+Q} \circ \mathcal{E}_R) = \mathcal{E}^{-1}((\mathcal{E}_P \circ \mathcal{E}_Q) \circ \mathcal{E}_R) \\ &= \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}_P \circ (\mathcal{E}_Q \circ \mathcal{E}_R)) = \mathcal{E}^{-1}(\mathcal{E}_P \circ \mathcal{E}_{Q+R}) \\ &= P + (Q + R), \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η προσεταιριστικότητα της πράξης.

Τέλος, για οποιαδήποτε $P, Q \in \mathcal{R}$, η (6.1.2) δίνει ότι

$$\mathcal{E}(P + Q) = \mathcal{E}_P \circ \mathcal{E}_Q = \mathcal{E}(P) \circ \mathcal{E}(Q),$$

δηλαδή η $\mathcal{E}$ είναι μορφισμός ομάδων, άρα (ως απεικόνιση $1-1$ και επί) είναι ισομορφισμός. $\square$

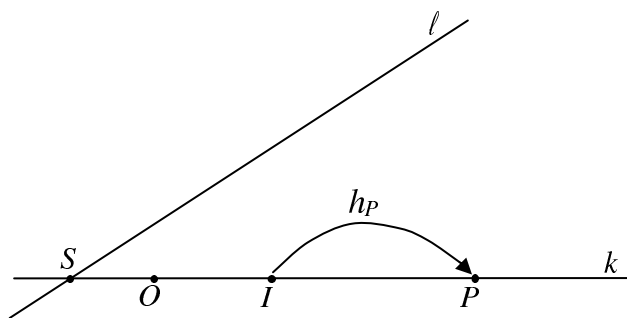
Αν αφαιρέσουμε το ουδέτερο στοιχείο από το $\mathcal{R}$, θα ορίσουμε στο νέο σύνολο και μία πράξη πολλαπλασιασμού, με την οποία θα αποκτήσει δομή (πολλαπλασιαστικής) ομάδας. Ακριβέστερα, ορίζουμε το σύνολο (βλ. και Σχήμα 6.2)

$$\mathcal{R}_* := \mathcal{R} - \{O\} = J(k) - \{S, O\},$$

και επί της k σταθεροποιούμε ακόμη ένα σημείο I με $S \neq I \neq O$.

Θεωρώντας την ομάδα των ομολογιών $\mathbb{H}(O, \ell)$ και ακολουθώντας τη Σύμβαση 6.1.1, για κάθε $P \in \mathcal{R}_*$ θα συμβολίζουμε με $h_P \in \mathbb{H}(O, \ell)$ την ομολογία που ικανοποιεί τη συνθήκη $h_P(I) = P$. Επιπλέον, ορίζουμε την απεικόνιση

$$(6.1.5) \quad h : \mathcal{R}_* \longrightarrow \mathbb{H}(O, \ell) : P \mapsto h(P) := h_P.$$



Σχήμα 6.2

6.1.6 Λήμμα. Η h είναι καλή ορισμένη απεικόνιση $1-1$ και επί.

Απόδειξη. Ανάλογη αυτής του Λήμματος 6.1.2. □

6.1.7 Πρόριμα. Ισχύει η σχέση $h^{-1}(\phi) = \phi(I)$, για κάθε $\phi \in \mathbb{H}(O, \ell)$.

Μέσω της h μπορούμε να μεταφέρουμε τη δομή της (όχι αναγκαίως αβελια- νής) ομάδας $\mathbb{H}(O, \ell)$ επί του $\mathcal{R}_*$. Έτσι ορίζουμε την **πράξη πολλαπλασιασμού**

$$* : \mathcal{R}_* \times \mathcal{R}_* \longrightarrow \mathcal{R}_* : (P, Q) \mapsto P * Q,$$

όπου

$$(6.1.6) \quad P * Q := h^{-1}(h(P) \circ h(Q)) = h^{-1}(h_P \circ h_Q).$$

Παρόμοια προς το Λήμμα 6.1.4, έχουμε το

6.1.8 Λήμμα. Για κάθε $P, Q \in \mathcal{R}_*$, ισχύουν οι σχέσεις

$$(6.1.7) \quad h_P \circ h_Q = h_{P*Q},$$

$$(6.1.8) \quad P * Q = h_P(Q).$$

6.1.9 Πρόταση. Το ζεύγος $(\mathcal{R}_*, *)$ αποτελεί (πολλαπλασιαστική) ομάδα και η h είναι ισομορφισμός ομάδων.

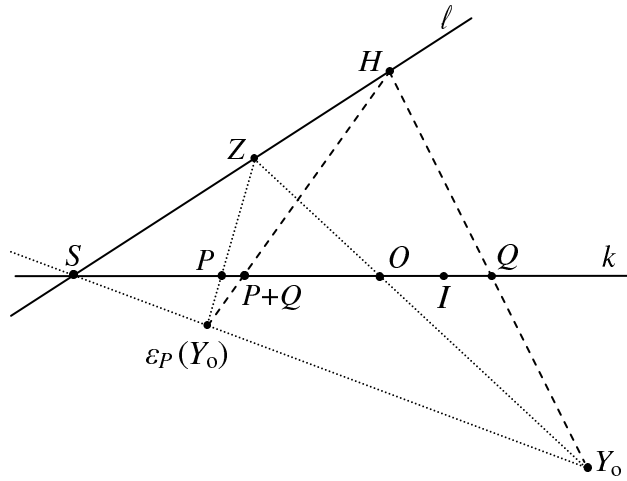
Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη προς αυτήν της Πρότασης 6.1.5. Σημειώ- νουμε μόνον ότι

- το ουδέτερο στοιχείο της $(\mathcal{R}_*, *)$ είναι ακριβώς το σημείο $I \in \mathcal{R}_*$, ενώ
- το αντίστροφο ενός $P \in \mathcal{R}_*$ είναι το $P^{-1} = h_P^{-1}(I) \equiv (h_P)^{-1}(I)$. □

Ας δούμε τώρα σε ένα σχήμα την κατασκευή του αθροίσματος $P + Q$, για δύο σημεία $P, Q \in \mathcal{R}$. Θα θεωρήσουμε ότι και τα δύο σημεία είναι διαφορετικά από το κέντρο O , αλλιώς η κατασκευή είναι τετριμμένη.

Επειδή, κατά την (6.1.4), $P + Q = \mathcal{E}_P(Q)$, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της περίπτωσης ii) του Θεωρήματος 2.2.16 για τον προσδιορισμό των σημείων-εικόνων της $\mathcal{E}_P$, θεωρώντας γνωστά τα σημεία O και $\mathcal{E}_P(O) = P$.

Όπως στην προαναφερομένη γενική μέθοδο, βρίσκουμε πρώτα την εικόνα $\mathcal{E}_P(Y_0)$ ενός βοηθητικού σημείου $Y_0 \notin S \vee O = k$, και κατόπιν, με τη βοήθεια των Y_0 και $\mathcal{E}_P(Y_0)$, προσδιορίζουμε το $\mathcal{E}_P(Q) = P + Q$. Η κατασκευή του $\mathcal{E}_P(Y_0)$ απεικονίζεται στο Σχήμα 6.3 με διάστικτες γραμμές, ενώ η κατασκευή του $P + Q$ [μέσω των Y_0 και $\mathcal{E}_P(Y_0)$] απεικονίζεται με διακεκομμένες γραμμές.

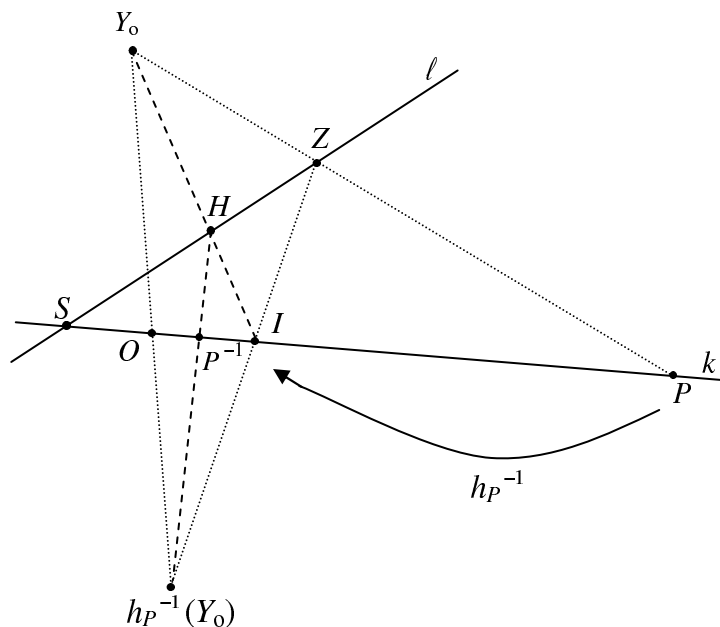


Σχήμα 6.3

Η κατασκευή του $-P$ γίνεται με τρόπο ανάλογο προς την κατασκευή του P^{-1} , που εξηγείται με λεπτομέρειες στη συνέχεια.

Αν $P \in \mathcal{R}_*$, για να προσδιορίσουμε το P^{-1} θα βασιστούμε στη σχέση $P^{-1} = h_P^{-1}(I)$ (βλ. Πρόταση 6.1.9). Αυτό σημαίνει ότι εδώ θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ομολογία h_P^{-1} και ένα κατάλληλο σημείο, του οποίου να είναι γνωστή η εικόνα (μέσω της h_P^{-1}). Από την $h_P(I) = P$ έχουμε ότι $h_P^{-1}(P) = I$. Άρα, μπορούμε και πάλι να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Θεωρήματος 2.2.16 [περίπτωση ii)], με τη βοήθεια των γνωστων σημείων P και I . Όπως προηγουμένως, βρίσκουμε πρώτα την εικόνα $h_P^{-1}(Y_0)$ ενός βοηθητικού σημείου $Y_0 \notin k$, και στη συνέχεια, μέσω των Y_0 και $h_P^{-1}(Y_0)$ προσδιορίζουμε την εικόνα του I , δηλαδή το ζητούμενο $h_P^{-1}(I) = P^{-1}$. Η όλη διαδικασία απεικονίζεται στο Σχήμα 6.4.

Η κατασκευή του $P * Q$ γίνεται αναλόγως προς αυτήν του αθροίσματος, που έγινε πιο πάνω.



Σχήμα 6.4

Θα δείξουμε ότι οι πράξεις "+" και "*" συνδέονται μεταξύ τους με την *επιμεριστική ιδιότητα*. Πρώτα αποδεικνύουμε την

6.1.10 Πρόταση. *Ισχύει η σχέση*

$$(6.1.9) \quad P * (Q + R) = (P * Q) + (P * R),$$

για κάθε $P, Q, R \in \mathcal{R}_*$ με $Q + R \neq O$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τις (6.1.8) και (6.1.4), το πρώτο μέλος της (6.1.9) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$P * (Q + R) = h_P(Q + R) = h_P(\varepsilon_Q(R)) = (h_P \circ \varepsilon_Q)(R).$$

Παρόμοια, το δεύτερο μέλος της ίδιας σχέσης παίρνει τη μορφή

$$(P * Q) + (P * R) = \varepsilon_{P*Q}(P * R) = (\varepsilon_{P*Q} \circ h_P)(R).$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $(h_P \circ \varepsilon_Q)(R) = (\varepsilon_{P*Q} \circ h_P)(R)$, πράγμα που εξασφαλίζεται με το επόμενο γενικότερο αποτέλεσμα. $\square$

6.1.11 Λήμμα. Για κάθε $X, Y \in \mathcal{R}_*$, ισχύει η σχέση

$$\mathcal{E}_{X*Y} = h_X \circ \mathcal{E}_Y \circ h_X^{-1}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\phi := h_X \circ \mathcal{E}_Y \circ h_X^{-1}$. Εφ' όσον οι $\mathcal{E}_Y$ και h_X (άρα και η h_X^{-1}) είναι συγγραμμικότητες με άξονα ℓ , τότε και η ϕ θα είναι συγγραμμικότητα με τον ίδιον άξονα. Θα δείξουμε ότι το κέντρο της ϕ είναι το S .

Πραγματικά, για οποιαδήποτε ευθεία $m \in J(S)$, με $m \neq \ell$ (αλλιώς το αποτέλεσμα είναι άμεσο), έχουμε ότι

$$(6.1.10) \quad \phi(m) = h_X(\mathcal{E}_Y(h_X^{-1}(m))).$$

Επειδή $S \in m$ και το S ανήκει στον άξονα ℓ της h_X^{-1} , θα είναι $h_X^{-1}(S) = S \in h_X^{-1}(m)$, άρα η ευθεία $h_X^{-1}(m)$ διέρχεται από το κέντρο S της $\mathcal{E}_Y$, οπότε $\mathcal{E}_Y(h_X^{-1}(m)) = h_X^{-1}(m)$ και η (6.1.10) μετασχηματίζεται στη

$$\phi(m) = h_X(h_X^{-1}(m)) = m.$$

Επομένως, $\phi \in \mathbb{E}(S, \ell)$.

Απ' το άλλο μέρος, εφ' όσον το O είναι κέντρο των h_X και h_X^{-1} , έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi(O) &= (h_X \circ \mathcal{E}_Y \circ h_X^{-1})(O) = (h_X \circ \mathcal{E}_Y)(h_X^{-1}(O)) \\ &= h_X(\mathcal{E}_Y(O)) = h_X(Y) = X * Y = \mathcal{E}_{X*Y}(O) \end{aligned}$$

Αφού οι επάρσεις $\phi, \mathcal{E}_{X*Y} \in \mathbb{E}(S, \ell)$ συμπίπτουν στο σημείο O , με $O \neq S$ και $O \notin \ell$, θα συμπίπτουν παντού (βλ. Πρόταση 2.2.19), άρα $\phi = \mathcal{E}_{X*Y}$ που αποδεικνύει τη σχέση της εκφώνησης. $\square$

Αναλόγως προς την Πρόταση 6.1.10 έχουμε και την

6.1.12 Πρόταση. Ισχύει η σχέση

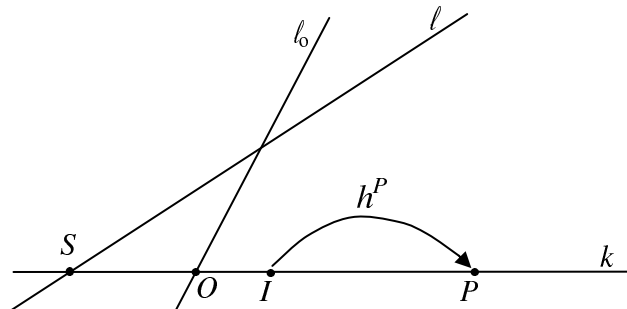
$$(6.1.11) \quad (P + Q) * R = (P * R) + (Q * R),$$

για κάθε $P, Q, R \in \mathcal{R}_*$ με $P + Q \neq O$.

Αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο που ακολουθήσαμε για την απόδειξη της (6.1.9), θα πρέπει να αποδείξουμε ότι $h_{P+Q}(R) = (\mathcal{E}_{P*R} \circ h_Q)(R)$. Όμως, δεν μπορούμε να προχωρήσουμε πιο πέρα (αποδεικνύοντας και το ανάλογο του Λήμματος 6.1.11 στην περίπτωση μας), επειδή το R τώρα εμφανίζεται και ως μεταβλητή στις δύο συγγραμμικότητες και ως δείκτης στην $\mathcal{E}_{P*R}$.

Για να ξεπεράσουμε το αδιέξοδο, καταφεύγουμε στο εξής τέχνασμα: επιλέγουμε μία βοηθητική ευθεία $\ell_0 \in J(O)$ με $\ell_0 \neq k$ και θεωρούμε την ομάδα των

ομολογιών $\mathbb{H}(S, \ell_0)$. Για ένα $P \in \mathcal{R}_*$, συμβολίζουμε με h^P την ομολογία από την ομάδα $\mathbb{H}(S, \ell_0)$, που ικανοποιεί τη συνθήκη $h^P(I) = P$. Προφανώς, η h^P αντιστοιχεί στην προσδιοριστική τετράδα (S, ℓ_0, I, P) .



Σχήμα 6.5

Με τους προηγούμενους συμβολισμούς αποδεικνύεται τώρα το

6.1.13 Λήμμα. Για κάθε $X, Y \in \mathcal{R}_*$, ισχύει η σχέση

$$h^X \circ h_Y = h_Y \circ h^X.$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$h := (h_Y \circ h^X)^{-1} \circ (h^X \circ h_Y) = (h^X)^{-1} \circ h_Y^{-1} \circ h^X \circ h_Y.$$

Επειδή οι h_Y και h_Y^{-1} έχουν κέντρο το O , για κάθε $m \in J(O)$ είναι

$$(6.1.12) \quad h(m) = ((h^X)^{-1} \circ h_Y^{-1} \circ h^X)(m).$$

Ακόμη, επειδή $O \in m$, θα είναι και $h^X(O) = O \in h^X(m)$ (αφού το O ανήκει στον άξονα ℓ_0 της h^X), άρα η $h^X(m)$ διέρχεται από το κέντρο O της h_Y^{-1} , οπότε $h_Y^{-1}(h^X(m)) = h^X(m)$. Έτσι η (6.1.12) παίρνει τη μορφή

$$h(m) = (h^X)^{-1}(h^X(m)) = m,$$

από την οποία συνάγεται ότι το O είναι κέντρο της h .

Παρόμοια, για κάθε $m \in J(S)$ είναι

$$(6.1.13) \quad h(m) = ((h^X)^{-1} \circ h_Y^{-1})(h^X(h_Y(m))).$$

Αλλά $S \in m$, άρα $h_Y(S) = S \in h_Y(m)$ (επειδή το S ανήκει στον άξονα ℓ της h_Y), δηλαδή η $h_Y(m)$ διέρχεται από το κέντρο S της h^X , οπότε $h^X(h_Y(m)) = h_Y(m)$ και η (6.1.13) ανάγεται στην

$$h(m) = (h^X)^{-1}(h_Y^{-1}(h_Y(m))) = (h^X)^{-1}(m) = m$$

[αφού το S είναι κέντρο και της $(h^X)^{-1}$]. Επομένως, το S είναι κέντρο της h . Εφ' όσον $S \neq O$, η h έχει δύο κέντρα. Άρα, κατά την Πρόταση 2.2.21, $h = id_P$, η οποία αποδεικνύει το συμπέρασμα του λήμματος. $\square$

6.1.14 Πόρισμα. Για κάθε $X, Y \in \mathcal{R}_*$, ισχύει η σχέση

$$(6.1.14) \quad h^X(Y) = h_Y(X) = Y * X.$$

Απόδειξη. Υπολογίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης του Λήματος 6.1.13 στο σημείο I , βάσει των ορισμών των h^X και h_Y βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} (h^X \circ h_Y)(I) &= h^X(h_Y(I)) = h^X(Y), \\ (h_Y \circ h^X)(I) &= h_Y(h^X(I)) = h_Y(X). \end{aligned}$$

Επομένως, $h^X(Y) = h_Y(X) = Y * X$, που αποδεικνύει το πόρισμα. $\square$

Μετά από αυτά είμαστε σε θέση να δώσουμε την

Απόδειξη της Πρότασης 6.1.12. Σύμφωνα με τις (6.1.14) και (6.1.4), το πρώτο μέλος της σχέσης (6.1.11) μετασχηματίζεται διαδοχικά στην

$$(P + Q) * R = h^R(P + Q) = h^R(\mathcal{E}_P(Q)) = (h^R \circ \mathcal{E}_P)(Q),$$

ενώ το δεύτερο μέλος στην

$$(P * R) + (Q * R) = \mathcal{E}_{P*R}(Q * R) = \mathcal{E}_{P*R}(h^R(Q)) = (\mathcal{E}_{P*R} \circ h^R)(Q).$$

Οι προηγούμενες σχέσεις, σε συνδυασμό με το επόμενο (γενικό) λήμμα, αποδεικνύουν την (6.1.11). $\square$

6.1.15 Λήμμα. Ισχύει η σχέση

$$\mathcal{E}_{X*Y} = h^Y \circ \mathcal{E}_X \circ (h^Y)^{-1},$$

για κάθε $X, Y \in \mathcal{R}_*$.

Απόδειξη. Ακολουθούμε την τεχνική του Λήμματος 6.1.11: η συγγραμμικότητα $h^Y \circ \varepsilon_X \circ (h^Y)^{-1}$ έχει κέντρο S , αφού οι συγγραμμικότητες που την συνθέτουν έχουν κοινό κέντρο το S .

Απ' το άλλο μέρος, για κάθε $P \in \ell$ έχουμε ότι $(h^Y)^{-1}(P) \in (h^Y)^{-1}(\ell) = \ell$, επειδή $\ell \in J(S)$ και το S είναι κέντρο της $(h^Y)^{-1}$. Άρα η ℓ είναι άξονας της παραπάνω συγγραμμικότητας, οπότε $h^Y \circ \varepsilon_X \circ (h^Y)^{-1} \in \mathbb{B}(S, \ell)$. Όμως,

$$(h^Y \circ \varepsilon_X \circ (h^Y)^{-1})(O) = (h^Y \circ \varepsilon_X)(O) = h^Y(X) = X * Y = \varepsilon_{X*Y}(O).$$

Η προηγούμενη σχέση και το Πόρισμα 2.2.19 αποδεικνύουν συμπέρασμα. $\square$

Ο πολλαπλασιασμός "*" (που αρχικά ορίστηκε στο $\mathcal{R}_*$) επεκτείνεται σε ολόκληρο το $\mathcal{R}$ αν θέσουμε

$$(6.1.15) \quad X * O = O * X := O, \quad \forall X \in \mathcal{R}.$$

Τότε οι (6.1.9) και (6.1.11) έχουν έννοια για οποιαδήποτε στοιχεία του $\mathcal{R}$, συνεπώς καταλήγουμε στο

6.1.16 Θεώρημα. *Ισχύουν οι επιμεριστικές σχέσεις*

$$\begin{aligned} P * (Q + R) &= (P * Q) + (P * R), \\ (P + Q) * R &= (P * R) + (Q * R), \end{aligned}$$

για κάθε $P, Q, R \in \mathcal{R}$

Ανακεφαλαιώνοντας, βλέπουμε ότι στο $\mathcal{R}$ ορίσαμε δύο πράξεις: μία πρόσθεση "+", μέσω της οποίας το ζεύγος $(\mathcal{R}, +)$ αποτελεί αβελιανή (προσθετική) ομάδα, και έναν πολλαπλασιασμό "*" [μετά και την επέκταση (6.1.15)], μέσω του οποίου το ζεύγος $(\mathcal{R}_*, *)$, όπου $\mathcal{R}_* = \mathcal{R} - \{O\}$, αποτελεί ομάδα (όχι κατ' ανάγκην αβελιανή). Επιπλέον, οι δύο πράξεις συνδέονται με την επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις του Θεωρήματος 6.1.15. Αυτά όλα σημαίνουν ότι η τριάδα $(\mathcal{R}, +, *)$ είναι ένας **διαιρετικός δακτύλιος** (division ring).

Σημειώνουμε ότι η δομή του διαιρετικού δακτυλίου βρίσκεται ανάμεσα στη δομή του δακτυλίου και του σώματος. Στο Παράρτημα υπενθυμίζονται οι βασικοί ορισμοί και ιδιότητες των προηγούμενων εννοιών. Επίσης, ένα παράδειγμα διαιρετικού δακτυλίου που δεν είναι σώμα δίνεται στην Άσκηση 6.1.21(8), στο τέλος αυτής της παραγράφου.

Τα μέχρι τώρα συμπεράσματα συνοψίζονται στο εξής βασικό αποτέλεσμα:

6.1.17 Θεώρημα. *Σε κάθε προβολικό επίπεδο Desargues αντιστοιχεί ένας διαιρετικός δακτύλιος $(\mathcal{R}, +, *)$.*

Παρ' όλο που ένα τμήμα του επομένου συμπεράσματος απαιτεί τη χρήση ενός αποτελέσματος που θα αποδειχθεί στην επομένη παράγραφο (Θεώρημα 6.2.2), εδώ είναι η κατάλληλη θέση για τη διατύπωση και απόδειξη του συμπεράσματος αυτού. Για την ακρίβεια έχουμε το

6.1.18 Πρόρισμα. Ένα προβολικό επίπεδο Desargues είναι επίπεδο του Πάππου τότε και μόνον τότε αν η τριάδα $(\mathcal{R}, +, *)$ είναι σώμα.

Απόδειξη. Αν το προβολικό επίπεδο είναι επίπεδο του Πάππου, τότε (κατά τον Ορισμό 5.1.1) η ομάδα των ομολογιών $\mathbb{H}(O, \ell)$ είναι αβελιανή, οπότε λόγω του ισομορφισμού h , θα είναι αβελιανή και η ομάδα $\mathcal{R}_*$ (βλ. Πρόταση 6.1.9). Επομένως η τριάδα $(\mathcal{R}, +, *)$ είναι σώμα.

Αντιστρόφως, αν $(\mathcal{R}, +, *)$ είναι σώμα, τότε η $\mathcal{R}_*$ είναι αβελιανή ομάδα, άρα και η ισομορφία προς αυτήν $\mathbb{H}(O, \ell)$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 6.2.2, θα είναι αβελιανή και κάθε άλλη ομάδα $\mathbb{H}(A, k)$, για οποιοδήποτε $(A, k) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ με $A \notin k$. Άρα έχουμε ένα προβολικό επίπεδο του Πάππου. $\square$

Στην Άλγεβρα αποδεικνύεται το εξής σημαντικό:

Θεώρημα του Wedderburn. Κάθε πεπερασμένος διαιρετικός δακτύλιος είναι σώμα (βλ. T. W. Hungerford [18, Corollary 6.9, Chapter IX]).

Αυτό μας οδηγεί στο

6.1.19 Πρόρισμα. Κάθε πεπερασμένο προβολικό επίπεδο Desargues είναι επίπεδο του Πάππου.

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του Πορίσματος 6.1.18 και του Θεωρήματος του Wedderburn. $\square$

6.1.20 Συμβολισμός. Τα σημεία O και I , που αντιστοιχούν στα ουδέτερα στοιχεία των πράξεων "+" και "*" (βλ. αποδείξεις των Προτάσεων 6.1.5 και 6.1.9) συμβολίζονται επίσης με 0 (μηδέν) και 1 , αντιστοίχως. Η επιλογή των γραμμάτων O και I έγινε ακριβώς λόγω της οπτικής συγγενείας τους με τα 0 και 1 , ώστε να θυμίζουν τα ουδέτερα στοιχεία των αντιστοιχών πράξεων.

6.1.21 Παράδειγμα. Ο διαιρετικός δακτύλιος του επιπέδου των 7 σημείων.

Θεωρούμε το επίπεδο των 7 σημείων, όπως περιγράφεται στο Παράδειγμα 1.2.3(1). Διαπιστώνουμε ότι είναι επίπεδο Desargues. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

α) Στοιχειωδώς βλέπουμε ότι οποιαδήποτε τρίγωνα προοπτικά ως προς κέντρο είναι και προοπτικά ως προς άξονα, και αντιστρόφως. Να σημειωθεί ότι όλες οι περιπτώσεις προοπτικών τριγώνων είναι εκφυλισμένες (βλ. τη σχετική συζήτηση πριν την Πρόταση 4.2.4), για τούτο και ο έλεγχος είναι άμεσος.

β) Επειδή το επίπεδο είναι πεπερασμένο, κατά το Πόρισμα 6.1.19 θα είναι επίπεδο του Πάππου, άρα και Desargues.

Εφ' όσον το επίπεδο των 7 σημείων είναι επίπεδο Desargues, ορίζεται ο διαιρετικός δακτύλιος $\mathcal{R}$, που θα είναι σώμα βάσει του Πορίσματος 6.1.18 και της προηγούμενης παρατήρησης β). Ας δούμε ποιό είναι ακριβώς αυτό το $\mathcal{R}$, ακολουθώντας τη γενική κατασκευή του διαιρετικού δακτυλίου: Επιλέγουμε δύο ευθείες, π.χ. τις $k := \{A_1, A_2, A_3\}$ και $\ell := \{A_3, A_6, A_7\}$. Τότε $S = k \wedge \ell = \{A_3\}$, οπότε $\mathcal{R} = J(k) - \{S\} = \{A_1, A_2\}$. Όμως το $\mathcal{R}$, ως διαιρετικός δακτύλιος, περιέχει οπωσδήποτε τα δύο ουδέτερα στοιχεία 0 και 1 (βλ. Συμβολισμό 6.1.20). Επομένως,

$$\mathcal{R} = \{A_1, A_2\} = \{0, 1\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

δηλαδή το $\mathcal{R}$ είναι σώμα ισόμορφο με το $\mathbb{Z}_2$.

Στο ίδιο αποτέλεσμα φθάνουμε αν, για την κατασκευή του διαιρετικού δακτυλίου, πάρουμε οποιοδήποτε άλλο ζεύγος τεμνομένων ευθειών. Αυτό δείχνει ότι ο διαιρετικός δακτύλιος του υπ' όψιν επιπέδου είναι, μέσω ισομορφίας, μονοσήμαντα ορισμένος. Αυτό θα αποδειχθεί και γενικότερα στην επομένη παράγραφο.

6.1.22 Ασκήσεις.

- 1) Ποιός είναι ο διαιρετικός δακτύλιος του $\mathbb{P}_2$;
- 2) Να αποδειχθεί ότι $\mathcal{E}_O = h_I = id_P$.
- 3) Να αποδειχθεί η σχέση $h^{P*Q} = h^Q \circ h^P$, για κάθε $P, Q \in \mathcal{R}_*$.
- 4) Να συμπληρωθούν οι αποδείξεις των Λημμάτων 6.1.6, 6.1.8, του Πορίσματος 6.1.7, και της Πρότασης 6.1.9.
- 5) Να απεικονιστούν σε σχήματα το σημείο $-P$, για $P \in \mathcal{R}$, και το σημείο $P * Q$, για $P, Q \in \mathcal{R}_*$.
- 6) Να αποδειχθούν οι σχέσεις $\mathcal{E}_{-P} = \mathcal{E}_P^{-1}$ και $h_{P^{-1}} = h_P^{-1}$, για κατάλληλο P κάθε φορά.
- 7) Αν $P * Q = O$, να αποδειχθεί ότι ένα τουλάχιστον από τα P, Q συμπίπτει με το O . Δηλαδή το $\mathcal{R}$ δεν έχει διαιρέτες του μηδενός.
- 8) Θεωρούμε το γραμμικό χώρο $\mathbb{R}^4$ και μία βάση του (e, i, j, k) . Ορίζουμε έναν πολλαπλασιασμό $*$: $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ με τον εξής τρόπο: αν $q = ae + bi + cj + dk$ και $q' = a'e + b'i + c'j + d'k$, τότε το $q * q'$ προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο αθροίσματα κατά όρους, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ισχύουν:
 - 1) Η προσεταιριστική ιδιότητα.

- 2) Η σχέση $\mathcal{H}x = x\mathcal{H}$, για κάθε $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$ και $x = e, i, j, k$.
- 3) Ο επόμενος πίνακας πολλαπλασιασμού των στοιχείων της βάσης:

*	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-I

[Επεξήγηση: Για να βρούμε, π.χ., το γινόμενο $i * j$ ανατρέχουμε στην τομή της γραμμής που βρίσκεται το i και της στήλης που βρίσκεται το j , οπότε $i * j = k$. Παρόμοια, $j * i = -k$, $k * k = -1$ κ.ο.κ. Τα τρία προηγούμενα αποτελέσματα επισημαίνονται στον πίνακα με έντονα (bold) στοιχεία].

Με βάση τα προηγούμενα, ζητούνται τα εξής:

- α) Να βρεθεί η μορφή του $q * q'$.
- β) Να αποδειχθεί ότι η τριάδα $\mathcal{R} = (\mathbb{R}^4, +, *)$ αποτελεί διαιρετικό δακτύλιο, αν $+$ είναι η συνήθης πρόσθεση του $\mathbb{R}^4$.
- γ) Να δικαιολογηθεί γιατί το $\mathcal{R}$ δεν είναι σώμα.
- δ) Να εξηγηθεί γιατί ο πολλαπλασιασμός "*" επεκτείνει τον πολλαπλασιασμό των μιγαδικών αριθμών.

Το προηγούμενο $\mathcal{R}$ καλείται **διαιρετικός δακτύλιος των πραγματικών τετράδων** ή **των τετραδικών αριθμών** (quaternions).

6.2 Το μονοσήμαντο του διαιρετικού δακτυλίου

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, η κατασκευή του διαιρετικού δακτυλίου $\mathcal{R}$ έγινε με την αυθαίρετη επιλογή μιας ευθείας k και τριών διαφορετικών σημείων της S, O, I , καθώς επίσης και με την επιλογή μιας ευθείας ℓ , με $\ell \neq k$ και $\ell \in J(S)$. Επομένως, γεννάται το εύλογο ερώτημα της σύγκρισης του $\mathcal{R}$ με το διαιρετικό δακτύλιο $\mathcal{R}'$, ο οποίος προκύπτει από δύο άλλες ανάλογες ευθείες k', ℓ' και αντίστοιχα σημεία S', O', I' .

Για την απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα χρειαζόμαστε μερικά προκαταρκτικά συμπεράσματα. Υπενθυμίζουμε ότι για τους μορφισμούς προβολικών επιπέδων ακολουθούμε τη Σύμβαση 6.1.1.

6.2.1 Λήμμα. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \epsilon)$ είναι ένα προβολικό επίπεδο Desargues και (A, B, C, D) μία τετράδα διαφορετικών σημείων, τα οποία είναι ανά τρία μη συγγραμμικά. Τότε, για κάθε άλλη τετράδα (A', B', C', D') με τις ίδιες ιδιότητες, υπάρχει μία (όχι κατ' ανάγκην μονοσήμαντα ορισμένη) συγγραμμικότητα $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{P})$, τέτοια ώστε:

$$\sigma(A) = A', \quad \sigma(B) = B', \quad \sigma(C) = C', \quad \sigma(D) = D'.$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε μια ευθεία $k \in \mathcal{L}$, με $A, A' \notin k$, οπότε, επειδή το $\mathcal{P}$ είναι επίπεδο Desargues, υπάρχει η έπαρση $a \in \mathbb{E}(S, k)$ με $a(A) = A'$ (προφανώς $S = (A \vee A') \wedge k$). Επιλέγουμε επίσης και μια ευθεία $\ell \in \mathcal{L}$ με $\ell \in J(A')$ και $B' \notin \ell$. Καλούμε $\beta \in \mathbb{E}(S', \ell)$ την έπαρση (με κέντρο $S' = (a(B) \vee B') \wedge \ell$) που ικανοποιεί τη συνθήκη $\beta(a(B)) = B'$. Επομένως,

$$(6.2.1) \quad (\beta \circ a)(A) = \beta(A') = A', \quad (\beta \circ a)(B) = \beta(a(B)) = B'.$$

Για το σημείο $(\beta \circ a)(C)$ υπάρχουν δύο δυνατότητες:

$$\text{i) } (\beta \circ a)(C) \neq C' \quad \text{και} \quad \text{ii) } (\beta \circ a)(C) = C'.$$

Στην περίπτωση i), θέτοντας $m := A' \vee B'$, θεωρούμε την έπαρση $\gamma \in \mathbb{E}(m)$ με $\gamma((\beta \circ a)(C)) = C'$ και κατάλληλο κέντρο (ποιο;). Φυσικά, για να ορίζεται η έπαρση αυτή θα πρέπει τα C' και $(\beta \circ a)(C)$ να μην είναι σημεία του άξονα m . Πραγματικά, από την υπόθεση για την τετράδα (A', B', C', D') , βλέπουμε ότι $C' \notin A' \vee B' = m$. Επίσης, $(\beta \circ a)(C) \notin m$, γιατί αν ήταν $\beta(a(C)) \in m$, τότε θα είχαμε ότι (αφού $A' \in \ell$)

$$a(C) \in \beta^{-1}(m) = \beta^{-1}(A' \vee B') = \beta^{-1}(A') \vee \beta^{-1}(B') = A' \vee \beta^{-1}(B').$$

Όμως, από την τελευταία, τον ορισμό της a και τη δεύτερη των (6.2.1), προκύπτει ότι

$$C \in a^{-1}(A') \vee a^{-1}(\beta^{-1}(B')) = A \vee (\beta \circ a)^{-1}(B') = A \vee B,$$

που είναι άτοπο.

Επειδή η γ έχει άξονα την $m = A' \vee B'$ και ισχύουν οι (6.2.1), διαπιστώνουμε ότι η συγγραμμικότητα $\gamma \circ \beta \circ a$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$(6.2.2) \quad \begin{aligned} (\gamma \circ \beta \circ a)(A) &= \gamma(A') = A', \\ (\gamma \circ \beta \circ a)(B) &= \gamma(B') = B', \\ (\gamma \circ \beta \circ a)(C) &= C'. \end{aligned}$$

Τώρα, ως προς την εικόνα του D , μέσω της ίδιας συγγραμμικότητας, διακρίνουμε πάλι δύο περιπτώσεις:

$$i_1) (\gamma \circ \beta \circ a)(D) = D' \quad \text{και} \quad i_2) (\gamma \circ \beta \circ a)(D) \neq D'.$$

Στην περίπτωση i_1) είναι φανερόν ότι η $\gamma \circ \beta \circ a$ είναι η ζητούμενη συγγραμμικότητα σ . Στη i_2) παρατηρούμε ότι, θέτοντας $D'' := (\gamma \circ \beta \circ a)(D)$, είναι $D'' \neq A'$ και $D'' \notin B' \vee C'$ (γιατί;), οπότε μπορούμε να βρούμε μία (μοναδική) ομολογία $\delta \in \mathbb{H}(A', B' \vee C')$ με $\delta(D'') = E$, όπου $E := (A' \vee C') \wedge (B' \vee D'')$ [βεβαιωνόμαστε πάλι ότι $E \neq A'$ και $E \notin B' \vee C'$]. Επομένως, από τον ορισμό της δ και τις (6.2.2), προκύπτουν οι σχέσεις:

$$(6.2.3) \quad \begin{aligned} (\delta \circ \gamma \circ \beta \circ a)(A) &= \delta(A') = A', \\ (\delta \circ \gamma \circ \beta \circ a)(B) &= \delta(B') = B', \\ (\delta \circ \gamma \circ \beta \circ a)(C) &= \delta(C') = C', \\ (\delta \circ \gamma \circ \beta \circ a)(D) &= \delta(D'') = E. \end{aligned}$$

Θεωρούμε, τέλος, την ομολογία $\varepsilon \in \mathbb{H}(B', A' \vee C')$ με $\varepsilon(E) = D'$ (η ε υπάρχει επειδή $E \neq B' \neq D'$ και $E, D' \notin A' \vee C'$). Επομένως, από τις (6.2.3) και τη συνθήκη $\varepsilon(E) = D'$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η $\varepsilon \circ \delta \circ \gamma \circ \beta \circ a$ είναι η ζητούμενη συγγραμμικότητα σ .

Η περίπτωση ii) αντιμετωπίζεται παρόμοια. Συνοπτικά διακρίνουμε τις δύο υποπεριπτώσεις:

$$ii_1) (\beta \circ a)(D) = D' \quad \text{και} \quad ii_2) (\beta \circ a)(D) \neq D'.$$

Στην περίπτωση ii_1) προφανώς η $\beta \circ a$ είναι η ζητούμενη σ . Στην ii_2) κατασκευάζουμε τις ομολογίες δ και ε όπως στην περίπτωση i_2), οπότε η σ είναι τώρα η συγγραμμικότητα $\varepsilon \circ \delta \circ \beta \circ a$. $\square$

Το Λήμμα 6.2.1 αποτελεί προφανώς γενίκευση, σε τυχόν προβολικό επίπεδο Desargues, του Λήμματος 3.3.12, πράγμα που μας επιτρέπει να δείξουμε και την ανάλογη γενίκευση του Θεωρήματος 3.3.10, όπως δίνεται στο επόμενο

6.2.2 Θεώρημα. Σε ένα προβολικό επίπεδο Desargues, οποιεσδήποτε ομάδες ομολογιών $\mathbb{H}(A, \ell)$ και $\mathbb{H}(A', \ell')$ (όπου $A \notin \ell$, $A' \notin \ell'$) είναι ισόμορφες.

Απόδειξη. Ακολουθούμε τη μεθοδολογία της απόδειξης του Θεωρήματος 3.3.10 με τις απαραίτητες τροποποιήσεις.

Περιληπτικά, εργαζόμαστε ως εξής: επί της ℓ επιλέγουμε δύο διαφορετικά σημεία B, C . Επίσης, επιλέγουμε και ένα σημείο D μη κείμενο επί της ℓ , έτσι ώστε $A \neq D$ και τα A, B, C, D να είναι ανά τρία μη συγγραμμικά. Παρόμοια, κατασκευάζουμε μίαν ανάλογη τετράδα (A', B', C', D') .

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 6.2.1, βρίσκουμε μία συγγραμμικότητα σ , που απεικονίζει τα A, B, C, D επί των A', B', C', D' αντιστοίχως. Ο ζητούμενος ισομορφισμός $h : \mathbb{H}(A, \ell) \rightarrow \mathbb{H}(A', \ell')$ ορίζεται από τη σχέση $h(\phi) := \sigma \circ \phi \circ \sigma^{-1}$, για κάθε $\phi \in \mathbb{H}(A, \ell)$. $\square$

Παρόμοια έχουμε και την επομένη γενίκευση του Θεωρήματος 3.4.3:

6.2.3 Θεώρημα. Σε ένα προβολικό επίπεδο *Desargues*, οποιεσδήποτε ομάδες επάρσεων είναι ισόμορφες.

Απόδειξη. Εργαζόμαστε όπως στο Θεώρημα 3.4.3 για αντίστοιχα κατάλληλα σημεία. Ο ισομορφισμός έχει μορφή ανάλογη αυτής του ισομορφισμού του Θεωρήματος 6.2.2. $\square$

Ερχόμαστε τώρα στο κύριο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου.

6.2.4 Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{R}$ είναι ο διαιρετικός δακτύλιος, ο οποίος κατασκευάζεται από δύο διαφορετικές ευθείες k, ℓ και τα σημεία S, O, I (όπου $S = k \wedge \ell$, $O \in \ell \ni I$ και $O \neq I \neq S \neq O$). Αν $\mathcal{R}'$ είναι ο διαιρετικός δακτύλιος, ο οποίος κατασκευάζεται από τις ευθείες k', ℓ' και τα σημεία S', O', I' (με ανάλογες ιδιότητες), τότε οι $\mathcal{R}$ και $\mathcal{R}'$ είναι ισόμορφοι.

Απόδειξη. Επί της ℓ θεωρούμε δύο σημεία A, B , που είναι διαφορετικά μεταξύ τους καθώς και προς το S . Ομοίως, θεωρούμε και δύο σημεία $A', B' \in J(\ell')$ με $A' \neq B' \neq S' \neq A'$. Παρατηρούμε ότι οι τετράδες σημείων (A, B, O, I) και (A', B', O', I') ικανοποιούν τις συνθήκες του Λήμματος 6.2.1, άρα υπάρχει συγγραμμικότητα $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{P})$, τέτοια ώστε $\sigma(A) = A'$, $\sigma(B) = B'$, $\sigma(O) = O'$ και $\sigma(I) = I'$, οπότε είναι

$$\begin{aligned}\sigma(k) &= \sigma(O \vee I) = \sigma(O) \vee \sigma(I) = O' \vee I' = k', \\ \sigma(\ell) &= \sigma(A \vee B) = \sigma(A) \vee \sigma(B) = A' \vee B' = \ell' .\end{aligned}$$

Θέτουμε $f := \sigma|_{\mathcal{R}}$ (: περιορισμός της σ επί του $\mathcal{R}$). Τότε, για κάθε $P \in \mathcal{R}$, διαπιστώνουμε ότι

$$f(P) \in k' \text{ [επειδή } P \in k, \text{ οπότε } f(P) = \sigma(P) \in \sigma(k) = k'], \text{ και}$$

$$f(P) \neq S' \text{ [διαφορετικά η } f(P) = S' \text{ θα έδινε ότι } P = \sigma^{-1}(S') = S \text{ (άτοπο)]}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $f(p) \in \mathcal{R}'$, άρα η f είναι απεικόνιση της μορφής $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$, που είναι, προφανώς, 1-1 και επί.

Θα δείξουμε ότι η f είναι επίσης μορφισμός δακτυλίων (άρα και ισομορφισμός), δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις

$$(6.2.4) \quad f(P + Q) = f(P) + f(Q),$$

$$(6.2.5) \quad f(P * Q) = f(P) * f(Q).$$

Για την απόδειξη της πρώτης παρατηρούμε ότι, μέσω της (6.1.4),

$$(6.2.6) \quad f(P + Q) = \sigma(\varepsilon_P(Q)) = (\sigma \circ \varepsilon_P)(Q) = (\sigma \circ \varepsilon_P \circ \sigma^{-1})(\sigma(Q)).$$

Επειδή $\varepsilon_P \in \mathbb{E}(S, \ell)$, το Θεώρημα 6.2.3 (σε συνδυασμό με την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.2) συνεπάγεται ότι $\varepsilon'_{\sigma(P)} := \sigma \circ \varepsilon_P \circ \sigma^{-1} \in \mathbb{E}(S', \ell')$. Επομένως η (6.2.6) μετασχηματίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} f(P + Q) &= (\sigma \circ \varepsilon_P \circ \sigma^{-1})(\sigma(Q)) = \\ &= \varepsilon'_{\sigma(P)}(\sigma(Q)) = \sigma(P) + \sigma(Q) = f(P) + f(Q), \end{aligned}$$

που αποδεικνύει την (6.2.4).

Για την (6.2.5) προχωρούμε αναλόγως:

$$\begin{aligned} f(P * Q) &= \sigma(h_P(Q)) = (\sigma \circ h_P \circ \sigma^{-1})(\sigma(Q)) = \\ &= h'_{\sigma(P)}(\sigma(Q)) = \sigma(P) * \sigma(Q) = f(P) * f(Q), \end{aligned}$$

με την οποία κλείνει η απόδειξη. $\square$

Σύμφωνα με το προηγούμενο βασικό αποτέλεσμα, όλοι οι διαιρετικοί δακτύλιοι, που κατασκευάζονται όπως στην Παράγραφο 6.1, είναι ισόμορφοι. Άρα το Θεώρημα 6.2.4 μπορεί να αναδιατυπωθεί και με την ακόλουθη μορφή:

6.2.5 Θεώρημα. *Ο διαιρετικός δακτύλιος ενός προβολικού επιπέδου Desargues είναι, μέσω ισομορφίας, μονοσημάντως ορισμένος.*

6.2.6 Ασκήσεις.

- 1) Να συμπληρωθούν οι λεπτομέρειες της απόδειξης του Λήμματος 6.2.1, που αναφέρονται στην ύπαρξη των χρησιμοποιούμενων επάρσεων και ομολογιών. Επίσης να συμπληρωθεί η απόδειξη της περίπτωσης ii).
- 2) Να γίνει λεπτομερής απόδειξη των Θεωρημάτων 6.2.2 και 6.2.3.
- 3) Να αποδειχθεί ότι $\sigma \circ \varepsilon_P \circ \sigma^{-1} \in \mathbb{E}(S', \ell')$ και $\sigma \circ h_P \circ \sigma^{-1} \in \mathbb{H}(O', \ell')$ [όπως ισχυριστήκαμε στην απόδειξη των σχέσεων (6.2.4) και (6.2.5)] και να δικαιολογηθούν οι συμβολισμοί $\varepsilon'_{\sigma(P)}$, $h'_{\sigma(P)}$.

6.3 Κατασκευή προβολικού επιπέδου από διαιρετικό δακτύλιο

Στην παράγραφο αυτή υποθέτουμε ότι μας δίνεται ένας διαιρετικός δακτύλιος $\mathcal{D} \equiv (\mathcal{D}, +, \cdot)$. Θυμίζουμε ότι το ζεύγος $(\mathcal{D}, +)$ αποτελεί αβελιανή (προσθετική) ομάδα, της οποίας το ουδέτερο (μηδενικό) στοιχείο συμβολίζεται με 0, ενώ το ζεύγος $(\mathcal{D}_* := \mathcal{D} - \{0\}, *)$ αποτελεί (πολλαπλασιαστική) ομάδα (όχι απαραίτητως

αβελιανή), της οποίας το ουδέτερο (μοναδιαίο) στοιχείο συμβολίζεται με 1. Για ευκολία θα παραλείπεται το σύμβολο του πολλαπλασιασμού "." και θα γράφουμε απλώς ab , αντί $a \cdot b$, για οποιαδήποτε $a, b \in \mathcal{D}$.

Έχοντας ως πρότυπο την αλγεβρική κατασκευή του $\mathbb{P}_2$ (βλ. Παράγραφο 3.1), ορίζουμε την τριάδα $(\mathcal{P}_{\mathcal{D}}, \mathcal{L}_{\mathcal{D}}, \in)$ με

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mathcal{D}} &:= \{[a, b, c] \mid (a, b, c) \in \mathcal{D}_*^3\}, \\ \mathcal{L}_{\mathcal{D}} &:= \{< k, \ell, m > \mid (k, \ell, m) \in \mathcal{D}_*^3\},\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}[a, b, c] &= \{r(a, b, c) \mid r \in \mathcal{D}_*\}, \\ < k, \ell, m > &= \{[a, b, c] \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}} : ak + b\ell + cm = 0\}.\end{aligned}$$

Η σχέση της σύμπτωσης προφανώς εμπεριέχεται στον ορισμό των $< k, \ell, m >$, δηλαδή

$$(*) \quad [p, q, r] \in < u, v, w > \Leftrightarrow pu + qv + rw = 0.$$

Ένας άλλος τρόπος ορισμού των στοιχείων του $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ είναι να θεωρηθούν ως κλάσεις (ισοδυναμίας) της σχέσης ισοδυναμίας στο $\mathcal{D}_*^3$

$$(a', b', c') \sim (a, b, c) \Leftrightarrow \exists r \in \mathcal{D}_* : (a', b', c') = r(a, b, c),$$

ενώ τα στοιχεία του $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ είναι οι κλάσεις της σχέσης ισοδυναμίας (πάλι στο $\mathcal{D}_*^3$)

$$(k', \ell', m') \sim (k, \ell, m) \Leftrightarrow \exists s \in \mathcal{D}_* : (k', \ell', m') = (k, \ell, m)s.$$

Αν συμβολίσουμε, προσωρινά, τις τελευταίες κλάσεις με $\ll k, \ell, m \gg$, ευκολα διαπιστώνουμε ότι ανάμεσα στο σύνολο των κλάσεων της τελευταίας μορφής και στα σύνολα $< k, \ell, m >$ (όπως ορίστηκαν στην αρχή), υπάρχει μία αντιστοιχία 1-1 και επι, μέσω της οποίας αυτά ταυτίζονται. Έτσι χρησιμοποιούμε και στις δύο περιπτώσεις τον απλούστερο συμβολισμό $< k, \ell, m >$ για τα στοιχεία του $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$, διευκρινίζοντας (αν χρειάζεται) την αντίστοιχη ερμηνεία τους. Η σχέση σύμπτωσης παραμένει η $(*)$, όμως τώρα (στην περίπτωση χρήσης κλάσεων ισοδυναμίας) πρέπει να ελεγχθεί ότι αυτή είναι καλά ορισμένη, δηλαδή ανεξάρτητη της επιλογής των αντιπροσώπων των κλάσεων (Άσκηση!).

6.3.1 Παρατηρήσεις. 1) Στον ορισμό των κλάσεων $[a, b, c]$ και $\ll k, \ell, m \gg$ θα πρέπει να επισημανθεί η διαφορά στον πολλαπλασιασμό των αντιπροσώπων με τα στοιχεία του $\mathcal{D}_*$. Ενώ στην πρώτη περίπτωση έχουμε $(a', b', c') = r(a, b, c)$ (πολλαπλασιασμός από αριστερά), στη δεύτερη είναι $(k', \ell', m') = (k, \ell, m)s$ (πολλαπλασιασμός από δεξιά). Η διαφοροποίηση αυτή είναι απαραίτητη για να εξασφαλιστεί ότι η σχέση σύμπτωσης είναι καλά ορισμένη.

2) Με την εξαίρεση της θέσης των παραγόντων r και s , οι προηγούμενες σχέσεις ισοδυναμίας δεν διαφέρουν ουσιαδώς. Η γεωμετρική όμως ερμηνεία των αντιστοιχών κλάσεων ισοδυναμίας είναι εντελώς διαφορετική.

3) Και στην $(*)$, επίσης, η θέση των παραγόντων έχει ουσιαστική σημασία και πρέπει να μένει η ίδια διαρκώς, αφού δεν ισχύει η μεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό του διαιρετικού δακτυλίου.

6.3.2 Θεώρημα. *Η τριάδα $\mathcal{P}_{\mathcal{D}} \equiv (\mathcal{P}_{\mathcal{D}}, \mathcal{L}_{\mathcal{D}}, \epsilon)$ είναι προβολικό επίπεδο.*

Απόδειξη. Η απόδειξη ακολουθεί τη γενική ιδέα της απόδειξης του Θεωρήματος 3.1.1 (Α' τρόπος), λαμβάνοντας ιδιαίτερος υπ' όψιν την μη μεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού.

Για την απόδειξη του αξιώματος (ΠΕ 1) θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία $[a_i, b_i, c_i] \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ ($i = 1, 2$) και αναζητούμε μια μοναδική ευθεία $\langle x, y, z \rangle$ του $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ που τα περιέχει. Προφανώς, μια τέτοια ευθεία θα προσδιορίζεται από τις εξισώσεις

$$(6.3.1) \quad a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0,$$

$$(6.3.2) \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0.$$

Επειδή $(a_1, b_1, c_1) \neq (0, 0, 0)$, μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $a_1 \neq 0$. Τότε η (6.3.1) δίνει την

$$(6.3.3) \quad x + a_1^{-1} b_1 y + a_1^{-1} c_1 z = 0.$$

Για το συντελεστή a_2 διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

$$\text{i) } a_2 \neq 0, \quad \text{και} \quad \text{ii) } a_2 = 0.$$

Στην πρώτη περίπτωση, πολλαπλασιάζοντας με a_2 , μετασχηματίζουμε την (6.3.3) στην

$$a_2 x + a_2 a_1^{-1} b_1 y + a_2 a_1^{-1} c_1 z = 0.$$

Αφαιρώντας την τελευταία από την (6.3.2) βρίσκουμε ότι

$$(6.3.4) \quad (b_2 - a_2 a_1^{-1} b_1) y + (c_2 - a_2 a_1^{-1} c_1) z = 0.$$

Παρατηρούμε ότι ένας εκ των συντελεστών των y, z στην (6.3.4) πρέπει να είναι διαφορετικός από το 0, γιατί αν ήταν

$$b_2 - a_2 a_1^{-1} b_1 = 0 = c_2 - a_2 a_1^{-1} c_1,$$

τότε, θέτοντας $r = a_2 a_1^{-1}$, θα είχαμε ότι $[a_1, b_1, c_1] = [a_2, b_2, c_2]$, που είναι άτοπο σύμφωνα με την αρχική υπόθεση για τα θεωρούμενα σημεία.

Έτσι, αν υποθέσουμε ότι $b_2 - a_2 a_1^{-1} b_1 \neq 0$, τότε από την (6.3.4) προκύπτει η

$$(6.3.5) \quad y = -(b_2 - a_2 a_1^{-1} b_1)^{-1} \cdot (c_2 - a_2 a_1^{-1} c_1) z.$$

Επίσης, από τις (6.3.3) και (6.3.5) βρίσκουμε ότι

$$(6.3.6) \quad x = a_1^{-1} [b_1 (b_2 - a_2 a_1^{-1} b_1)^{-1} \cdot (c_2 - a_2 a_1^{-1} c_1) - c_1] z.$$

Επομένως, δίνοντας στο z μίαν αυθαίρετη τιμή από το $\mathcal{D}_*$, η τριάδα που προκύπτει [απ' αυτό και τις αντίστοιχες τιμές των y, x , μέσω των (6.3.5) και (6.3.6) αντιστοιχώς], προσδιορίζει τη ζητούμενη ευθεία.

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι όλες οι τριάδες που προκύπτουν, καθώς το z διατρέχει το $\mathcal{D}_*$, δίνουν την ίδια ακριβώς ευθεία $\langle x, y, z \rangle \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}$, δηλαδή εξασφαλίζουμε το μονοσήμαντο αυτής. Επίσης, στην ειδική περίπτωση $z = 0$, τότε τα x, y θα προσδιοριστούν με ανάλογο τρόπο από το απλοποιημένο πλέον σύστημα των (6.3.1) και (6.3.2), και όχι από τις (6.3.5) και (6.3.6), οι οποίες οδηγούν στη μη αποδεκτή μηδενική λύση.

Με ανάλογο τρόπο προχωρούμε στην περίπτωση που είναι $c_2 - a_2 a_1^{-1} c_1 \neq 0$.

Στην περίπτωση ii) αναγκάως ένας εκ των συντελεστών b_2, c_2 θα είναι διάφορος του 0. Αν, για παράδειγμα, είναι $b_2 \neq 0$, τότε η (6.3.2) δίνει ότι

$$(6.3.7) \quad y = -b_2^{-1} c_2 z,$$

οπότε, από τις (6.3.3) και (6.3.7) προκύπτει η

$$(6.3.8) \quad x = a_1^{-1} (b_1 b_2^{-1} c_2 - c_1) z.$$

Οι (6.3.7) και (6.3.8), μαζί με τις διάφορες τιμές του z , προσδιορίζουν (κατά τρόπο μονοσήμαντο) τη ζητούμενη ευθεία. Με παρόμοιο τρόπο συμπληρώνονται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις. Επομένως το (ΠΕ 1) αποδεικνύεται πλήρως.

Για το (ΠΕ 2) θεωρούμε τις διαφορετικές ευθείες $\langle k_i, \ell_i, m_i \rangle \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ ($i = 1, 2$). Αποδεικνύουμε την ύπαρξη ενός (μοναδικού) κοινού σημείου $[x, y, z]$ επιλύοντας το σύστημα

$$(6.3.9) \quad x k_1 + y \ell_1 + z m_1 = 0$$

$$(6.3.10) \quad x k_2 + y \ell_2 + z m_2 = 0.$$

Η επίλυση του συστήματος αυτού γίνεται με την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε για το σύστημα των (6.3.1) και (6.3.2), με τη διαφορά ότι τώρα οι πολλαπλασιασμοί με παράγοντες της μορφής k_i^{-1} κλπ. θα γίνονται από δεξιά.

Τέλος, διαπιστώνουμε αμέσως ότι τα σημεία $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ και $[1, 1, 1]$ είναι διαφορετικά και ανα τρία μη συγγραμμικά. Επομένως αποδεικνύεται και το αξίωμα (ΠΕ 3). $\square$

6.3.3 Παρατηρήσεις. 1) Από την απόδειξη του (ΠΕ 1) βλέπουμε ότι το σύστημα των (6.3.1) και (6.3.2) διαθέτει μη μηδενικές λύσεις και το σύνολο των λύσεων αποτελεί πρότυπο (ως προς $\mathcal{D}$) από αριστερά. Αναλόγως και οι λύσεις του συστήματος (6.3.9) – (6.3.10) αποτελούν πρότυπο από δεξιά. Για τις σχετικές αλγεβρικές έννοιες ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί τα συγγράμματα [5], [18] και [19].

2) Αν, ιδιαιτέρως, το $\mathcal{D}$ είναι σώμα, η απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.2 είναι ακριβώς ίδια με αυτήν του Θεωρήματος 3.1.1.

Με παρόμοιες διαδικασίες μπορούμε να συνεχίσουμε την (αλγεβρική) μελέτη του $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ και να πάρουμε συμπεράσματα ανάλογα με αυτά του Κεφαλαίου 3, κάνοντας τις αναγκαίες τροποποιήσεις, όπου χρειάζεται. Εδώ θα περιοριστούμε σε μερικά συμπεράσματα, που μας είναι απαραίτητα για τη συνέχεια.

6.3.4 Λήμμα. Στο προβοδικό επίπεδο $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ ισχύουν τα επόμενα:

i) Κάθε ομολογία $\phi \in \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$ προκύπτει από έναν πίνακα της μορφής

$$(6.3.11) \quad M = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } s \in \mathcal{D}_*.$$

ii) Κάθε έπαρση $\phi \in \mathbb{E}([0, 0, 1], < 1, 0, 0 >)$ προκύπτει από έναν πίνακα της μορφής

$$(6.3.12) \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } s \in \mathcal{D}.$$

Απόδειξη. Ανάλογη προς στις αποδείξεις των Θεωρημάτων 3.3.6 και 3.4.1. $\square$

Με τη βοήθεια του προηγούμενου λήμματος και των Θεωρημάτων 6.2.2 και 6.2.3, αποδεικνύονται και τα ανάλογα των Θεωρημάτων 3.3.13 και 3.4.3 για το $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$, τα οποία συνοψίζονται στο ακόλουθο

6.3.5 Θεώρημα. Στο προβοδικό επίπεδο $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ ισχύουν οι επόμενες ισομορφίες ομαδών:

$$\mathbb{H}(A, \ell) \cong \mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >) \cong \widetilde{M} \cong (\mathcal{D}_*, \cdot), \quad \text{αν } A \notin \ell,$$

$$\mathbb{E}(A, \ell) \cong \mathbb{E}([0, 0, 1], < 1, 0, 0 >) \cong \widetilde{M'} \cong (\mathcal{D}, +), \quad \text{αν } A \in \ell,$$

όπου $\widetilde{M}$ (αντιστ. $\widetilde{M'}$) είναι το σύνολο των πινάκων της μορφής (6.3.11) [αντιστ. (6.3.12)] του Λήμματος 6.3.4.

Ιδιαίτερος ισχύει το επόμενο θεμελιώδες, για τη δομή του $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$, αποτέλεσμα, που είναι ανάλογο του Πορίσματος 4.1.4.

6.3.6 Πόρισμα. *Το προβολικό επίπεδο $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ είναι επίπεδο Desargues.*

Απόδειξη. Μπορούμε να επαναλάβουμε τους συλλογισμούς που ακολουθήσαμε πριν τις (και που οδηγούν στις) αποδείξεις της Πρότασης 4.1.2 και του Πορίσματος 4.1.4. $\square$

6.3.7 Ασκήσεις.

- 1) Να συμπληρωθούν οι λεπτομέρειες της απόδειξης του Θεωρήματος 6.3.2.
- 2) Να αποδειχθεί ότι στο $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ υπάρχουν όλες οι δυνατές επάρσεις.
- 3) Να διατυπωθούν και να αποδειχθούν άλλα συμπεράσματα του $\mathbb{P}_2$, των οποίων τα ανάλογα ισχύουν στο $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ και δεν αναφέρονται στην παρούσα παράγραφο.
- 4) Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ να είναι επίπεδο του Πάππου.
- 5) Αν $P_i = [a_i, b_i, c_i] \in \mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ ($i = 1, 2, 3$) είναι τρία διαφορετικά σημεία, να αποδειχθεί ότι οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

$$(i) \quad P_3 \in P_1 \vee P_2,$$

$$(ii) \quad a_3 = ra_1 + sa_2, \quad b_3 = rb_1 + sb_2, \quad c_3 = rc_1 + sc_2,$$

για κατάλληλα $r, s \in \mathcal{D}_*$. Πώς σχετίζεται το αποτέλεσμα με την Εφαρμογή 3.1.3(4);

- 6) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου, να δικαιολογηθεί γιατί υπάρχουν προβολικά επίπεδα Desargues, τα οποία δεν είναι επίπεδα του Πάππου.

6.4 Συσχετισμός των δακτυλίων $\mathcal{D}$ και $\mathcal{R}$

Υποθέτουμε ότι δίνεται ένας διαιρετικός δακτύλιος $\mathcal{D}$. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, από τον $\mathcal{D}$ κατασκευάζεται ένα προβολικό επίπεδο Desargues $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$. Απ' το άλλο μέρος, στο $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ αντιστοιχεί ένας διαιρετικός δακτύλιος $\mathcal{R}$. Σκοπός μας εδώ είναι να δείξουμε ότι οι διαιρετικοί δακτύλιοι $\mathcal{D}$ και $\mathcal{R}$ είναι ισόμορφοι.

Επειδή, κατά το Θεώρημα 6.2.5 (βλ. επίσης και το Θεώρημα 6.2.4), ο διαιρετικός δακτύλιος είναι μονοσήμαντα ορισμένος μέσω ισομορφίας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{R}$ κατασκευάζεται από τα εξής στοιχεία:

$$\begin{aligned} k &= \langle 0, 1, 0 \rangle, & \ell &= \langle 1, 0, 0 \rangle, \\ S &= [0, 0, 1], & O &= [1, 0, 0], & I &= [1, 0, 1]. \end{aligned}$$

Επομένως, με τους συμβολισμούς της Παραγράφου 6.1, αποδεικνύεται το

6.4.1 Λήμμα. Στο προβολικό επίπεδο $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ ισχύουν τα επόμενα:

i) Κάθε ομολογία $h_P \in \mathbb{H}([1, 0, 0], \langle 1, 0, 0 \rangle)$, όπου $P = [1, 0, p] \in \langle 0, 1, 0 \rangle$ με $p \in \mathcal{D}_*$, έχει αντίστοιχο πίνακα της μορφής

$$M = \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Κάθε έπαρση $\mathcal{E}_P \in \mathbb{E}([0, 0, 1], \langle 1, 0, 0 \rangle)$, όπου $P = [1, 0, p] \in \langle 0, 1, 0 \rangle$ με $p \in \mathcal{D}$, έχει αντίστοιχο πίνακα της μορφής

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας της h_P έχει τη μορφή (6.3.11). Επειδή

$$h_{[1,0,p]}([1, 0, 1]) = h_P(I) = P = [1, 0, p],$$

το ανάλογο του Πορίσματος 3.2.2 για το $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ μας δίνει ότι

$$[(1, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}] = [1, 0, p],$$

ή, ισοδύναμα, $[s, 0, 1] = [1, 0, p]$. Άρα υπάρχει $r \in \mathcal{D}_*$, τέτοιο ώστε $(s, 0, 1) = r(1, 0, p)$, απ' όπου προκύπτει ότι $s = p^{-1}$, οπότε ο πίνακας M έχει τη μορφή της περίπτωσης i).

Παρόμοια, αν ο πίνακας της $\mathcal{E}_P$ είναι ο M' της (6.3.12), η $\mathcal{E}_{[1,0,p]}([1, 0, 0]) = [1, 0, p]$ οδηγεί στη σχέση

$$[(1, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}] = [1, 0, p],$$

από την οποίαν βρίσκουμε ότι $s = p$, δηλαδή καταλήγουμε στον πίνακα M' της περίπτωσης ii). $\square$

Δείχνουμε τώρα το κύριο συμπέρασμα αυτής της παραγράφου.

6.4.2 Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ είναι το προβολικό επίπεδο Desargues, που κατασκευάζεται από έναν διαιρετικό δακτύλιο $\mathcal{D} \equiv (\mathcal{D}, +, \cdot)$. Αν $\mathcal{R} \equiv (\mathcal{R}, +, *)$ είναι ο διαιρετικός δακτύλιος του $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$, τότε οι $\mathcal{D}$ και $\mathcal{R}$ είναι ισόμορφοι.

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι ο $\mathcal{R}$ κατασκευάζεται από τις ευθείες k, ℓ και τα σημεία S, O, I που ορίσαμε πριν την εκφώνηση του Λήμματος 6.4.1. Παρατηρούμε ότι, με αυτά τα δεδομένα, κάθε $P \in k$, με $P \neq S$, έχει τη μορφή $P = [1, 0, p]$. Επομένως, ορίζεται η απεικόνιση

$$f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{R} : p \mapsto f(p) := [1, 0, p],$$

η οποία είναι 1-1 και επί (γιατί;).

Θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$(6.4.1) \quad f(p + q) = f(p) + f(q),$$

$$(6.4.2) \quad f(pq) = f(p) * f(q),$$

για κάθε $p, q \in \mathcal{D}$. Θυμίζουμε ότι (για ευκολία) γράφουμε pq αντί $p \cdot q$.

Πραγματικά, από τον ορισμό της f και την (6.1.2), για οποιαδήποτε $p, q \in \mathcal{D}_*$ έχουμε ότι

$$f(p) + f(q) = \varepsilon_{f(p)}(f(q)) = \varepsilon_{[1, 0, p]}([1, 0, q]).$$

Η προηγούμενη σχέση, μέσω του Λήμματος 6.4.1 [περίπτωση ii)], μετασχηματίζεται στην

$$f(p) + f(q) = [(1, 0, q) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}] = [1, 0, p + q] = f(p + q),$$

που αποδεικνύει την (6.4.1).

Απ' το άλλο μέρος, βάσει της (6.1.8) και της περίπτωσης i) του Λήμματος 6.4.1, για οποιαδήποτε $p, q \in \mathcal{D}_*$ είναι

$$\begin{aligned} f(p) * f(q) &= h_{f(p)}(f(q)) = h_{[1, 0, p]}([1, 0, q]) \\ &= [(1, 0, q) \cdot \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}] \\ &= [p^{-1}, 0, q] = [1, 0, pq] \\ &= f(pq), \end{aligned}$$

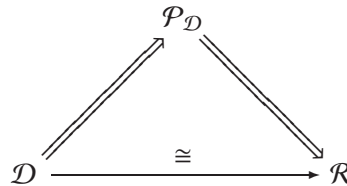
που αποδεικνύει την (6.4.2) για $p, q \in \mathcal{D}_*$.

Επειδή

$$(6.4.3) \quad f(0) = [1, 0, 0] = 0,$$

η σχέση (6.1.15) συνεπάγεται ότι η (6.4.2) ισχύει για κάθε $p, q \in \mathcal{D}$, οπότε ολοκληρώνεται η απόδειξη. $\square$

Το συμπέρασμα του Θεωρήματος 6.4.2 απεικονίζεται στο Σχήμα 6.6, όπου τα διπλά βέλη υποδεικνύουν απλώς τη μετάβαση από το ένα εικονιζόμενο αντικείμενο στο άλλο, ενώ το οριζόντιο απεικονίζει τον ισομορφισμό f του θεωρήματος.



Σχήμα 6.6

6.4.3 Ασκήσεις.

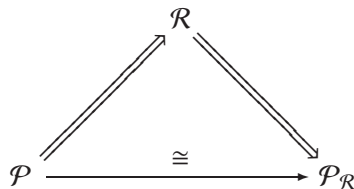
- 1) Να δικαιολογηθεί γιατί τα σημεία της ευθείας $\langle 0, 1, 0 \rangle$, που είναι διαφορετικά από το $[1, 0, 0]$, έχουν τη μορφή $[1, 0, p]$. Ποιά είναι η σημασία αυτής της διαπίστωσης για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.4.2;
- 2) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση f του Θεωρήματος 6.4.2 είναι πραγματικά 1-1 και επί.
- 3) Να δικαιολογηθεί ο ισχυρισμός (στο τέλος απόδειξης του Θεωρήματος 6.4.2) ότι η (6.4.2) ισχύει σε ολόκληρο το $\mathcal{D}$.

6.5 Συσχετισμός των επιπέδων $\mathcal{P}$ και $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$

Εδώ θα ξεκινήσουμε από ένα προβολικό επίπεδο Desargues $\mathcal{P}$. Ο διαιρετικός δακτύλιος $\mathcal{R}$ του $\mathcal{P}$ ορίζει με τη σειρά του ένα νέο επίπεδο Desargues $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \equiv (\mathcal{P}_{\mathcal{R}}, \mathcal{L}_{\mathcal{R}}, \in)$. Θα δείξουμε ότι ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα, του οποίου η απόδειξη είναι αρκετά τεχνική και μακροσκελής, για τούτο και καταλαμβάνει σχεδόν όλη την παρούσα παράγραφο. Την περιλαμβάνουμε εδώ για λόγους πληρότητας.

6.5.1 Θεώρημα. Τα προβολικά επίπεδα (Desargues) $\mathcal{P}$ και $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ είναι μεταξύ τους ισόμορφα.

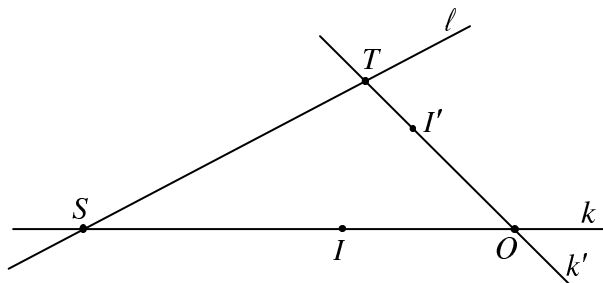
Το συμπέρασμα του θεωρήματος απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα, το οποίο είναι ανάλογο του Σχήματος 6.6 που περιγράφει το Θεώρημα 6.4.2.



Σχήμα 6.7

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε μια παραλλαγή της βασικής ιδέας του F. W. Stevenson [28, σελ. 261]. Οι σχετικές αλλαγές υπαγορεύονται από τις διαφορές που υπάρχουν στην περιγραφή του διαιρετικού δακτυλίου, την κατασκευή προβολικού επιπέδου από διαιρετικό δακτύλιο κ.α.

Όπως γνωρίζουμε, ο διαιρετικός δακτύλιος $\mathcal{R}$ του επιπέδου $\mathcal{P}$ κατασκευάζεται επιλέγοντας δύο ευθείες k, ℓ ($k \neq \ell$), και σταθεροποιώντας επί της k δύο διαφορετικά σημεία O και I με $O \neq S := k \wedge \ell \neq I$. Θυμίζουμε ότι $\mathcal{R} = J(k) - \{S\}$, ενώ τα O και I αποτελούν τα ουδέτερα στοιχεία της πρόσθεσης "+" και του πολλαπλασιασμού "*", αντιστοίχως.



Σχήμα 6.8

Εφ' όσον τα στοιχεία του διαιρετικού δακτυλίου $\mathcal{R}$ είναι σημεία της k (διαφορετικά από το S), τα σημεία του $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ θα είναι της μορφής, π.χ., $[A, B, C]$, ενώ οι ευθείες θα έχουν τη μορφή, π.χ., $\langle A, B, C \rangle$ κλπ. με $A, B, C \in J(k) - \{S\}$.

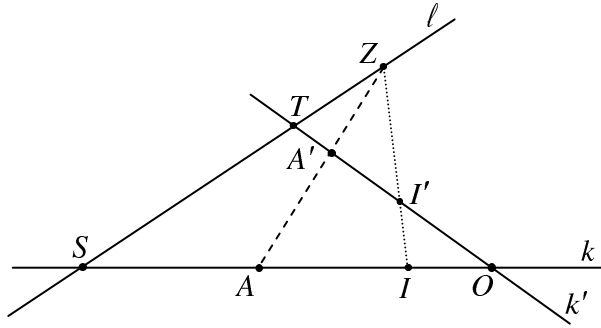
Στη συνέχεια επιλέγουμε μιαν ευθεία $k' \in J(O)$, με $k' \neq k$ (οπότε $k' \neq \ell$), και θέτουμε $T := k \vee \ell$. Επί της k' σταθεροποιούμε επίσης ένα σημείο I' , διαφορετικό από τα O και T (βλ. Σχήμα 6.8). Δηλαδή, επί της k' κάνουμε μια επιλογή

σημείων, όπως στην k , με την οποία θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε (με τη βοήθεια της ℓ και του T) έναν ισοδύναμο διαιρετικό δακτύλιο $\mathcal{R}'$.

Δοθέντος ενός σημείου $A \in \mathcal{R}_* = J(k) - \{S, O\}$, έχουμε ορίσει την ομολογία $h_A \in \mathbb{H}(O, \ell)$, με $h_A(I) = A$. Ακολουθώντας την κατασκευή του Θεωρήματος 2.2.16, μπορούμε να προσδιορίσουμε το σημείο $A' := h_A(I') \in k'$. Ακριβέστερα, το σημείο αυτό δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} A' &:= h_A(I') = (O \vee I') \wedge (h_A(I) \vee Z) \\ (6.5.1) \quad &= k' \wedge (A \vee Z) \\ &= k' \wedge [A \vee ((I \vee I') \wedge \ell)], \end{aligned}$$

σύμφωνα με τις (2.2.7), (2.2.7') και το επόμενο σχήμα.



Σχήμα 6.9

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $A \in \mathcal{R}_*$, είναι $A' \in J(k') - \{T, O\}$. Πραγματικά, αν ήταν $A' = O$, τότε θα είχαμε ότι $h_A(I') = O$, άρα (επειδή το O είναι κέντρο της h_A^{-1}) θα ήταν και $I' = h_A^{-1}(O) = O$, που είναι άτοπο. Αναλόγως, επειδή το T ανήκει στον άξονα ℓ της h_A^{-1} , ελέγχουμε ότι $A' \neq T$ [διαφορετικά θα καταλήγαμε στη σχέση $I' = T$ (άτοπο)]. Επομένως, μεταβάλλοντας το A στη σημειοσειρά $J(k) - \{S, O\}$, λαμβάνουμε αντίστοιχα σημεία A' της $J(k') - \{T, O\}$, οπότε ορίζουμε μίαν αντιστοιχία ανάμεσα στις αναφερόμενες σημειοσειρές.

Αλλά και αντιστρόφως, για κάθε $B' \in J(k') - \{T, O\}$, μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα $B \in J(k) - \{S, O\}$, τέτοιο ώστε $h_B(I') = B'$. Πραγματικά, αν υπάρχει τέτοιο B , τότε θα ισχύουν οι αντίστοιχες σχέσεις (6.5.1), άρα τα σημεία Z, B, B' είναι συγγραμμικά, οπότε $B \in B' \vee Z$ και το ζητούμενο σημείο είναι το

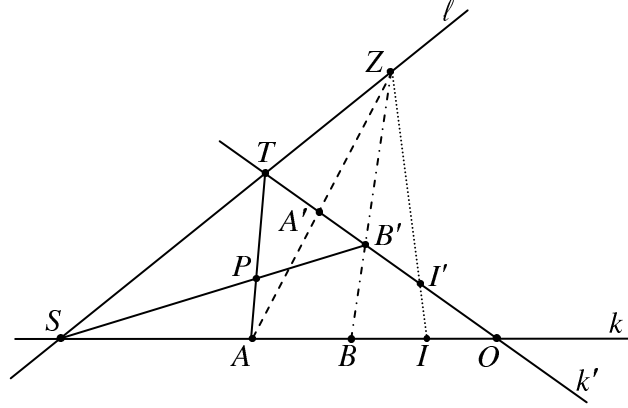
$$(6.5.2) \quad B = k \wedge (B' \vee Z) = k \wedge [B' \vee ((I \vee I') \wedge \ell)].$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ακόμη ότι $B = h'_{B'}(I)$, όπου $h'_{B'} \in \mathbb{H}(O, \ell)$ με $h'_{B'}(I') = B'$.

Η προηγούμενη διαδικασία εισάγει την καλά ορισμένη 1 - 1 και επί απεικόνιση

$$(6.5.3) \quad J(k) - \{S, O\} \ni A \mapsto A' \in J(k') - \{T, O\}.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα τυχόν σημείο $P \in \mathcal{P}$, που δεν ανήκει στις ευθείες k, k' και ℓ .



Σχήμα 6.10

Τότε ορίζονται τα σημεία

$$(6.5.4) \quad A \equiv A_P := (T \vee P) \wedge k,$$

$$(6.5.5) \quad B' \equiv B'_P := (S \vee P) \wedge k'$$

(για ευκολία, ο δείκτης P θα παραλείπεται συστηματικά στη συνέχεια). Συνεπώς, μέσω της (6.5.3) ορίζονται και τα αντίστοιχα $A' = A_P, B = B_P$. Προφανώς $A, B \in J(k) - \{S, O\}$ και $A', B' \in J(k') - \{T, O\}$.

Για να καταλήξουμε στο ζητούμενο ισομορφισμό προβολικών επιπέδων, ξεκινάμε με την απεικόνιση

$$f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{R}},$$

η οποία ορίζεται με τις σχέσεις:

$$f(O) := [I, O, O],$$

$$f(S) := [O, O, I], \quad f(I) := [I, O, I],$$

$$f(T) := [O, I, O], \quad f(I') := [I, I, O],$$

$$f(X) := [I, O, X], \quad \forall X \in J(k) - \{S\} = \mathcal{R},$$

$$f(Y') := [I, Y, O], \quad \forall Y' \in J(k') - \{T\} = \mathcal{R}',$$

$$f(P) := [I, B_P, A_P] \equiv [I, B, A], \quad \forall P \notin J(k), J(k'), J(\ell).$$

Θα δείξουμε ότι η f διατηρεί τη συγγραμμικότητα των σημείων της k και της k' .

α) Επειδή όλα τα σημεία της k είναι συγγραμμικά με τα S και O , αρκεί να δείξουμε ότι, για τυχόν $X \in k$, είναι $f(X) \in f(S) \vee f(O)$. Αλλά

$$f(S) \vee f(O) = [O, O, I] \vee [I, O, O] = \langle O, I, O \rangle,$$

οπότε $f(X) = [I, O, X] \in \langle O, I, O \rangle$.

β) Για τη συγγραμμικότητα των εικόνων των σημείων της k' , αρκεί να δείξουμε ότι $f(Y') \in f(T) \vee f(O)$, για οποιοδήποτε $Y' \in k'$. Αλλά

$$f(T) \vee f(O) = [O, I, O] \vee [I, O, O] = \langle O, O, I \rangle,$$

οπότε $f(Y') = [I, Y, O] \in \langle O, O, I \rangle$.

Θεωρούμε τώρα τον περιορισμό της f επί του συνόλου $\mathcal{P} - J(\ell)$. Χρησιμοποιώντας το ίδιο σύμβολο και για τον περιορισμό, διαπιστώνουμε εύκολα ότι προκύπτει μία απεικόνιση της μορφής

$$f : \mathcal{P} - J(\ell) \longrightarrow \mathcal{P}_R - J(\langle I, O, O \rangle),$$

η οποία είναι 1 - 1 και επί.

Όμως, η αφαίρεση μιας ευθείας από ένα προβολικό επίπεδο οδηγεί στην αποπλήρωσή του, που είναι πλέον συσχετισμένο επίπεδο (βλ. Θεώρημα 1.6.5). Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε, μέσω της f , ένα (συσχετισμένο) ισομορφισμό μεταξύ των παραπάνω συσχετισμένων επιπέδων, από τον οποίον θα προκύψει, τελικώς, ο ισομορφισμός του παρόντος θεωρήματος. Επειδή η f είναι ήδη απεικόνιση 1 - 1 και επί, για την κατασκευή του συσχετισμένου ισομορφισμού αρκεί να αποδείξουμε ότι η f διατηρεί τη συγγραμμικότητα οποιωνδήποτε σημείων [βλ. τις σχετικές Ασκήσεις 2.1.11(9) και 2.1.11(10)].

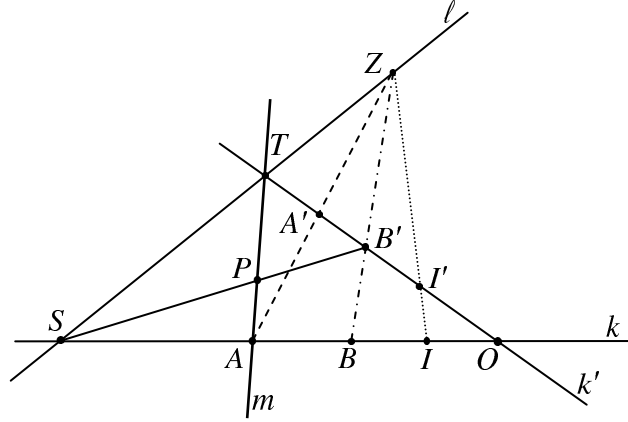
Η συγγραμμικότητα των εικόνων των σημείων της k και της k' έχει ήδη ελεγχθεί. Για συγγραμμικά σημεία σε άλλες ευθείες διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις, τις οποίες υπαγορεύει ουσιαστικά ο ορισμός της f .

ι) Διατήρηση συγγραμμικότητας σημείων επί τυχούσας ευθείας $m \in J(T)$:

Για τυχόν $P \in J(m) - \{T\}$, είναι $f(P) = [I, B, A]$, όπου $A = (T \vee P) \wedge k$ και $B' = (S \vee P) \wedge k'$ [βλ. σχέσεις (6.5.4) και (6.5.5)] ενώ $B = (Z \vee B') \wedge k$ (βλ. και το Σχήμα 6.11). Όπως και στις περιπτώσεις α) και β), επειδή $m = T \vee A$, η ζητούμενη συγγραμμικότητα εξασφαλίζεται αν, για κάθε P όπως προηγουμένως, τα σημεία $f(P), f(T), f(A)$ είναι συγγραμμικά. Αλλά

$$f(T) \vee f(A) = [O, I, O] \vee [I, O, A] = \langle -A, O, I \rangle,$$

επί της οποίας κείται το $f(P) = [I, B, A]$, αφού $I * (-A) + B * O + A * I = O$.



Σχήμα 6.11

ii) Διατήρηση συγγραμμικότητας σημείων επί τυχούσας ευθείας $m \in J(S)$: Εργαζόμαστε όπως στην περίπτωση i).

iii) Διατήρηση συγγραμμικότητας σημείων επί τυχούσας ευθείας $m \in J(O)$: Αρκεί να δείξουμε ότι, για οποιαδήποτε $P, Q \in J(m) - \{O\}$, τα σημεία

$$f(P) = [I, B, A], \quad f(Q) = [I, D, C], \quad f(O) = [I, O, O]$$

είναι συγγραμμικά, όπου (βλ. και Σχήμα 6.12)

$$\begin{aligned} A &= (T \vee P) \wedge k, & B' &= (S \vee P) \wedge k', \\ C &= (T \vee Q) \wedge k, & D' &= (S \vee Q) \wedge k', \end{aligned}$$

Θυμίζουμε ότι, για ευκολία, έχουμε συμφωνήσει να συμβολίζουμε τα A_P, B'_P, A_Q, B'_Q με A, B', C, D' αντιστοίχως.

Επειδή το $\mathcal{P}$ είναι επίπεδο Desargues, υπάρχει μία (μοναδική) ομολογία $h \in \mathbb{H}(O, \ell)$, τέτοια ώστε $h(P) = Q$. Για την h έχουμε ότι

$$h(T \vee P) = h(T) \vee h(P) = T \vee Q,$$

$$h(S \vee P) = h(S) \vee h(P) = S \vee Q,$$

αφού τα S, T βρίσκονται στον άξονα ℓ . Επομένως, επειδή οι k, k' διέρχονται από το κέντρο O και ισχύουν οι σχέσεις (6.5.4), (6.5.5),

$$(6.5.6) \quad h(A) = h(T \vee P) \wedge h(k) = (T \vee Q) \wedge k = C,$$

$$(6.5.7) \quad h(B') = h(S \vee P) \wedge h(k') = (S \vee Q) \wedge k' = D'.$$

σύμφωνα με τις (6.1.8), (6.5.6) και την Άσκηση 6.1.22(6). Επειδή $A \neq O$ και $A \notin \ell$ [αλλιώς αναγόμεστε σε γνωστές ήδη περιπτώσεις (ποιές;)] θα είναι $h = h_C \circ h_A^{-1}$, απ' όπου συνάγεται ότι

$$(6.5.9) \quad D = h(B) = (h_C \circ h_A^{-1})(B) = h_C(A^{-1} * B) = C * A^{-1} * B.$$

Ερχόμαστε τώρα στη συγγραμμικότητα που αναφέρθηκε στην αρχή της παρούσας περίπτωσης. Παρατηρούμε ότι

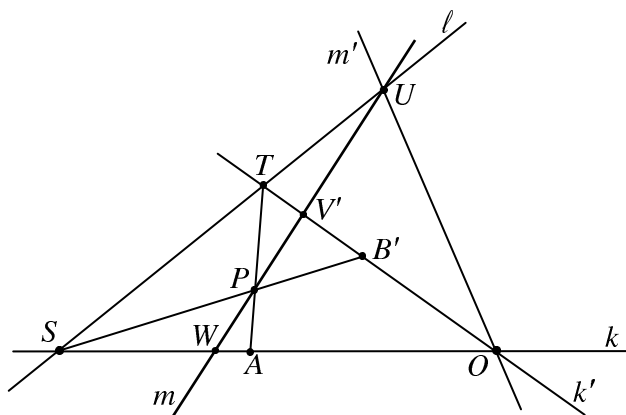
$$f(O) \vee f(P) = [I, O, O] \vee [I, B, A] = \langle O, I, -A^{-1} * B \rangle.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} f(Q) \in f(O) \vee f(P) &\Leftrightarrow [I, D, C] \in \langle O, I, -A^{-1} * B \rangle \\ &\Leftrightarrow D - C * A^{-1} * B = O, \end{aligned}$$

που ισχύει λόγω της (6.5.9), οπότε κλείνει η περίπτωση iii).

iv) Διατήρηση συγγραμμικότητας σημείων επί τυχούσας ευθείας m (που δεν εμπίπτει, φυσικά, σε καμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις):



Σχήμα 6.13

Μια τέτοια ευθεία τέμνει αναγκαστικά τις ℓ , k' και k . Θέτουμε (βλ. και το Σχήμα 6.13)

$$U := m \wedge \ell, \quad V' := m \wedge k', \quad W := m \wedge k, \quad m' := U \vee O.$$

Προφανώς, η ζητούμενη διατήρηση συγγραμμικότητας τώρα εξασφαλίζεται αν δείξουμε ότι, για τυχόν $P \in m = W \vee V'$, τα $f(W)$, $f(P)$, $f(V')$ είναι συγγραμμικά.

Επειδή $W \in J(k) - \{S\} = \mathcal{R}$ (γιατί:), υπάρχει το $-W \in \mathcal{R}$ καθώς και η έπαρση $\mathcal{E}_{-W} \in \mathbb{E}(S, \ell)$, για την οποία έχουμε ότι [λόγω της (6.1.4)]

$$\mathcal{E}_{-W}(O) = -W, \quad \mathcal{E}_{-W}(W) = -W + W = O$$

και (αφού το U ανήκει στον άξονα ℓ)

$$\mathcal{E}_{-W}(m) = \mathcal{E}_{-W}(W \vee U) = \mathcal{E}_{-W}(W) \vee \mathcal{E}_{-W}(U) = O \vee U = m'.$$

Επομένως, η $\mathcal{E}_{-W}$ απεικονίζει τα σημεία W, P, V' της k στα αντίστοιχα σημεία $\mathcal{E}_{-W}(W) = O$, $\mathcal{E}_{-W}(P)$, $\mathcal{E}_{-W}(V')$ της m' . Όμως, η m' διέρχεται από το O , οπότε για τα σημεία της ισχύει η περίπτωση iii), άρα τα

$$(6.5.10) \quad \begin{aligned} f(\mathcal{E}_{-W}(W)) &= f(O) = [I, O, O], \\ f(\mathcal{E}_{-W}(P)) &\text{ και } f(\mathcal{E}_{-W}(V')) \end{aligned}$$

είναι συγγραμμικά.

Για να δούμε τη συνέπεια της συγγραμμικότητας των προηγούμενων σημείων, θα πρέπει να προσδιορίσουμε την αναλυτική μορφή των δύο τελευταίων στο προβολικό επίπεδο $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$.

Για το πρώτο θέτουμε $f(\mathcal{E}_{-W}(P)) = [I, Y, X]$, όπου ([σύμφωνα με τις σχέσεις (6.5.4) και (6.5.5)]) είναι

$$X = (T \vee \mathcal{E}_{-W}(P)) \wedge k, \quad Y' = (S \vee \mathcal{E}_{-W}(P)) \wedge k'.$$

Ας βρούμε τα X , Y' και Y . Ως συνήθως, θα θέσουμε

$$f(P) = [I, B, A],$$

όπου τα A και B' δίνονται και πάλι από τις (6.5.4) και (6.5.5). Από την $A = (T \vee P) \wedge k$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{-W}(A) &= \mathcal{E}_{-W}(T \vee P) \wedge \mathcal{E}_{-W}(k) \\ &= (\mathcal{E}_{-W}(T) \vee \mathcal{E}_{-W}(P)) \wedge \mathcal{E}_{-W}(k) \\ &= (T \vee \mathcal{E}_{-W}(P)) \wedge k \\ &= X \end{aligned}$$

(να δικαιολογηθούν πλήρως οι ισότητες). Επομένως,

$$X = \mathcal{E}_{-W}(A) = -W + A = A - W.$$

Επίσης, από τον ορισμό του Y' , και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το S είναι κέντρο της $\mathcal{E}_{-W}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Y' &= (S \vee \mathcal{E}_{-W}(P)) \wedge k' \\ &= (\mathcal{E}_{-W}(S) \vee \mathcal{E}_{-W}(P)) \wedge k' \\ &= \mathcal{E}_{-W}(S \vee P) \wedge k' \\ &= (S \vee P) \wedge k' = B', \end{aligned}$$

απ' όπου και $Y = B$. Άρα καταλήγουμε στη σχέση

$$(6.5.11) \quad f(\mathcal{E}_{-W}(P)) = [I, Y, X] = [I, B, A - W].$$

Αναλόγως θέτουμε $f(\mathcal{E}_{-W}(V')) = [I, \bar{Y}, \bar{X}]$, όπου

$$\bar{X} = (T \vee \mathcal{E}_{-W}(V')) \wedge k, \quad \bar{Y}' = (S \vee \mathcal{E}_{-W}(V')) \wedge k'.$$

Από την $(T \vee V') \wedge k = O$ οδηγούμαστε στις

$$\begin{aligned} -W &= \mathcal{E}_{-W}(O) = \mathcal{E}_{-W}((T \vee V') \wedge k) \\ &= (\mathcal{E}_{-W}(T) \vee \mathcal{E}_{-W}(V')) \wedge \mathcal{E}_{-W}(k) \\ &= (T \vee \mathcal{E}_{-W}(V')) \wedge k = \bar{X}. \end{aligned}$$

Παρόμοια, από τον ορισμό του $\bar{Y}'$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{Y}' &= (S \vee \mathcal{E}_{-W}(V')) \wedge k' \\ &= \mathcal{E}_{-W}(S \vee V') \wedge k' \\ &= (S \vee V') \wedge k' = V' \end{aligned}$$

(να δικαιολογηθούν και πάλι οι δύο προηγούμενες ομάδες ισοτήτων). Άρα έχουμε και $\bar{Y} = V$, οπότε καταλήγουμε στην

$$(6.5.12) \quad f(\mathcal{E}_{-W}(V')) = [I, \bar{Y}, \bar{X}] = [I, V, -W].$$

Συνοψίζοντας, οι (6.5.10) – (6.5.12), οδηγούν στην τριάδα των συγγραμμικών σημείων

$$\begin{aligned} f(\mathcal{E}_{-W}(W)) &= [I, O, O], \\ f(\mathcal{E}_{-W}(P)) &= [I, B, A - W], \\ f(\mathcal{E}_{-W}(V')) &= [I, V, -W]. \end{aligned}$$

Η συγγραμμικότητα των τελευταίων συνεπάγεται τις ισοδύναμες συνθήκες

$$\begin{aligned}
 [I, B, A - W] &\in [I, O, O] \vee [I, V, -W] && \Leftrightarrow \\
 [I, B, A - W] &\in \langle O, V^{-1} * W, I \rangle && \Leftrightarrow \\
 (6.5.13) \quad &B * V^{-1} * W + A - W = O.
 \end{aligned}$$

Ας γυρίσουμε τώρα στη συγγραμμικότητα των $f(W), f(P), f(V')$, οποία είναι το ζητούμενο της περίπτωσης iv) που εξετάζουμε. Εφ' όσον $W \in k$ και $V' \in k'$, έχουμε ότι $f(W) = [I, O, W]$, $f(V') = [I, V, O]$, οπότε, μαζί με την $f(P) = [I, B, A]$, ελέγχουμε ότι ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$\begin{aligned}
 f(W), f(P), f(V') &\text{ συγγραμμικά} && \Leftrightarrow \\
 f(P) &\in f(W) \vee f(V') && \Leftrightarrow \\
 [I, B, A] &\in [I, O, W] \vee [I, V, O] && \Leftrightarrow \\
 [I, B, A] &\in \langle I, -V^{-1}, -W^{-1} \rangle && \Leftrightarrow \\
 I - B * V^{-1} - A * W^{-1} &= O && \Leftrightarrow \\
 B * V^{-1} * W + A - W &= O.
 \end{aligned}$$

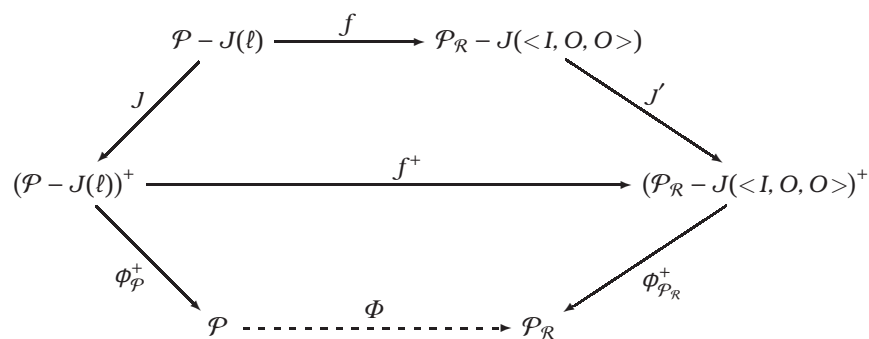
Δηλαδή, η ζητούμενη συγγραμμικότητα ανάγεται στην ήδη ισχύουσα συνθήκη (6.5.13). Επομένως ολοκληρώνεται και η περίπτωση iv).

Ανακεφαλαιώνοντας, δείξαμε ότι η $f : \mathcal{P} - J(\ell) \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{R}} - J(\langle I, O, O \rangle)$ είναι πραγματικά ένας συσχετισμένος ισομορφισμός. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.6, η f εισάγει έναν ισομορφισμό (προβολικών επιπέδων)

$$f^+ : (\mathcal{P} - J(\ell))^+ \longrightarrow (\mathcal{P}_{\mathcal{R}} - J(\langle I, O, O \rangle))^+$$

μεταξύ των αντιστοιχών πληρώσεων. Επειδή τα τελευταία επίπεδα είναι, κατά το Θεώρημα 2.3.4, ισόμορφα αντιστοιχώς με τα αρχικά επίπεδα $\mathcal{P}$ και $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα του θεωρήματος. Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί **ΕΠΙΤΕΛΟΥΣ**. $\square$

Για την κατανόηση του καταληκτικού μέρους της προηγούμενης απόδειξης παραθέτουμε το επόμενο διάγραμμα, στο οποίο οι απεικονίσεις $\phi_{\mathcal{P}}^+$ και $\phi_{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}^+$ αντιστοιχούν στον ισομορφισμό του Θεωρήματος 2.3.4, ενώ οι j και j' συμβολίζουν τις φυσικές εμφυτεύσεις των σημειωμένων συσχετισμένων επιπέδων στις αντίστοιχες πληρώσεις τους. Με Φ (και διακεκομμένη γραμμή) σημειώνεται ο ισομορφισμός του Θεωρήματος 6.5.1.



Διάγραμμα 6.1

Ποια όμως είναι η σημασία του προηγούμενου αποτελέσματος, για την απόδειξη του οποίου τόσο πολύ κοπιάσαμε; Προφανώς, τα σημεία $P \in \mathcal{P}$ μπορούν να ταυτιστούν με κλάσεις ισοδυναμίας της γενικής μορφής $[a, b, c] \in \mathcal{P}_R$ (για ευκολία χρησιμοποιούμε πεζά γράμματα αντί κεφαλαίων). Ένας οποιοσδήποτε αντιπρόσωπος (a, b, c) της κλάσης αποτελεί τις **ομογενείς συντεταγμένες** (homogeneous coordinates) του P . Ο όρος προέρχεται από την «ομογένεια», δηλαδή τη σχέση $(a', b', c') = r(a, b, c)$ που συνδέει τα στοιχεία της κλάσης. Αναλόγως, οι ευθείες του ίδιου επιπέδου ταυτίζονται με κλάσεις της μορφής $\langle k, \ell, m \rangle \in \mathcal{L}_R$.

Με αυτήν τη διαδικασία επιτυγχάνεται η αλγεβροποίηση του τυχόντος προβολικού επιπέδου Desargues, μέσω της οποίας η συνθετική μελέτη αντικειμένων του προβολικού επιπέδου ανάγεται στη μελέτη αντιστοίχων αλγεβρικών αντικειμένων και δομών.

6.5.2 Παρατήρηση. Συχνά, αντί του $\mathcal{P}_D$ (για το προβολικό επίπεδο που κατασκευάζεται από τον διαιρετικό δακτύλιο $\mathcal{D}$), χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\mathbb{P}_2(\mathcal{D})$. Έτσι το Θεώρημα 6.5.1 μπορεί να διατυπωθεί και με τη μορφή:

∇ Για κάθε προβολικό επίπεδο Desargues ισχύει ο ισομορφισμός $\mathcal{P} \cong \mathbb{P}_2(\mathcal{R})$.

Ας σημειωθεί ότι ο δείκτης 2 υποδηλώνει επίπεδο, δηλαδή προβολικό χώρο διάστασης 2, καθ' όσον ορίζονται και προβολικοί χώροι ανώτερης διάστασης.

6.5.3 Ασκήσεις.

- 1) Στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.5.1:
 - a) Να απαντηθούν τα σημειούμενα "γιατί".
 - b) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση (6.5.3) είναι πραγματικά καλά ορισμένη, 1-1 και επί.

- c) Θεωρούμε τα σημεία A, B' που ορίζονται με τις σχέσεις (6.5.4) και (6.5.5). Αν A', B είναι τα σημεία που αντιστοιχούν στα προηγούμενα μέσω της (6.5.3), να δικαιολογηθεί γιατί είναι $A, B \in J(k) - \{S, O\}$ και $A', B' \in J(k') - \{T, O\}$.
- d) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $f : \mathcal{P} - J(\ell) \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{R}} - J(<I, O, O>)$ είναι 1 - 1 και επί.
- e) Να δοθούν οι λεπτομέρεις της περίπτωσης ii).
- 2) Δίνεται το σύνολο $F := \{0, 1\}$. Να δικαιολογηθεί γιατί το $\mathbb{P}_2(F)$ είναι επίπεδο του Πάππου, το οποίο και να προσδιοριστεί.
- 3) Πώς συμβολίζεται, σύμφωνα με την Παρατήρηση 6.5.2, το πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}_2$; Ποιά δομική διαφορά υπάρχει ανάμεσα στο τελευταίο επίπεδο και το $\mathbb{P}_2(\mathcal{R})$, αν $\mathcal{R}$ είναι ο διαιρετικός δακτύλιος ενός επιπέδου Desargues;
- 4) Να ταξινομηθούν, μέσω του διαιρετικού δακτυλίου $\mathcal{R}$, οι ομάδες των ομολογιών και των επάρσεων τυχόντος προβολικού επιπέδου Desargues.

Κεφάλαιο 7

Αρμονικές τετράδες και κωνικές

Ὁ Pascal . . . δεκαεξαετής μόλις ἀνεκάλυψεν (1639) τὸ περίφημον θεώρημα αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κωνικὴν ἑξακορύφου (τὸ μυστικόν ἑξάγραμμα, ὡς τὸ ἀπεκάλεσε). Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐπιτρέπει τὴν εὐρεσιν, τῇ βοήθειᾳ προβολικῶν κατασκευῶν, τυχόντος σημείου κωνικῆς ὀριζομένης ὑπὸ πέντε σημείων αὐτῆς. Δέον νὰ σημειωθῇ, ὅτι ὁ Pascal ὑπῆρξε μαθητὴς τοῦ Desargues, μὲ τὸν ὁποῖον ὁ πατὴρ του συνεδέετο διὰ φιλίας.

Μ. ΜΠΡΙΚΑΣ [22, σελ. 319]

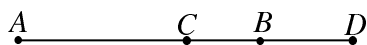
ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΤΟΥ ΠΑΡΟΝΤΟΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΕΙΝΑΙ Η ΣΥΝΤΟΜΗ ΜΕΛΕΤΗ ΔΥΟ ΚΛΑΣΙΚΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ: ΤΩΝ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΤΕΤΡΑΔΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΚΩΝΙΚΩΝ. ΟΙ ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΤΕΤΡΑΔΕΣ, ΠΟΥ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝ ΤΟ ΠΡΟΒΟΛΙΚΟ ΑΝΑΛΟΓΟ ΤΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΔΙΑΪΡΕΣΗΣ ΕΝΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ, ΕΞΕΤΑΖΟΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ.

Η δεύτερη παράγραφος αφιερώνεται στην έννοια και τις θεμελιώδεις ιδιότητες των κωνικών στο προβολικό επίπεδο. Τα περιώνυμα θεωρήματα των Pascal και Brianchon δίνονται στις παραγράφους 3 και 4, αντιστοίχως.

Το κεφάλαιο κλείνει με την υπόδειξη μερικών άλλων κλασικών θεμάτων, τα οποία μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο μελέτης από τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη.

7.1 Αρμονικές τετράδες

Στο σύνηθες (ευκλείδειο) επίπεδο θεωρούμε μία ευθεία ℓ και τέσσερα διαφορετικά σημεία A, B, C, D . Υποθέτουμε ότι στην ℓ έχει καθοριστεί η θετική φορά, δηλαδή η ℓ είναι ένας άξονας.



Σχήμα 7.1

Για την ευκολία της έκθεσης, ας υποθέσουμε ότι τα προηγούμενα σημεία έχουν τη διάταξη του Σχήματος 7.1. Στην ορολογία της κλασικής γεωμετρίας, τα σημεία C και D αποτελούν σημεία «διαίρεσης» (ή «διαχωρισμού») του ευθυγράμμου τμήματος AB . Το C είναι το «εσωτερικό» ενώ το D το «εξωτερικό» σημείο διαίρεσης.

Αν συμβολίσουμε με (AB) , (AC) κ.ο.κ. το κατευθυνόμενο μήκος του ευθυγράμμου τμήματος μέσα στην παρένθεση, μπορούμε να σχηματίσουμε τον διπλό λόγο

$$(7.1.1) \quad \frac{(AC)}{(CB)} : \frac{(AD)}{(DB)}$$

Μνημονοτεχνικά παρατηρεί κανείς ότι ο πρώτος λόγος σχηματίζεται από την τριάδα (A, C, B) και τα ζεύγη (A, C) , (C, B) , ενώ ο δεύτερος από την τριάδα (A, D, B) και τα ζεύγη (A, D) , (D, B) . Και στις δύο περιπτώσεις τα C και D «διαχωρίζουν» τα σημεία A, B .

Λέμε ότι τα σημεία A, B, C, D «χωρίζουν αρμονικά» το τμήμα AB , αν ο διπλός λόγος (7.1.1) είναι «αρμονικός», δηλαδή ισχύει η σχέση

$$(7.1.2) \quad \frac{(AC)}{(CB)} : \frac{(AD)}{(DB)} = -1.$$

Ας δούμε την αιτιολογία της προηγούμενης ορολογίας: από την (7.1.2) προκύπτει η σχέση

$$(7.1.3) \quad (AC) \cdot (DB) = -(CB) \cdot (AD).$$

Απ' το άλλο μέρος (λόγω και της κατεύθυνσης που δώσαμε στο μήκος), είναι

$$\begin{aligned}(CB) &= (AB) - (AC), \\ (DB) &= -[(AD) - (AB)].\end{aligned}$$

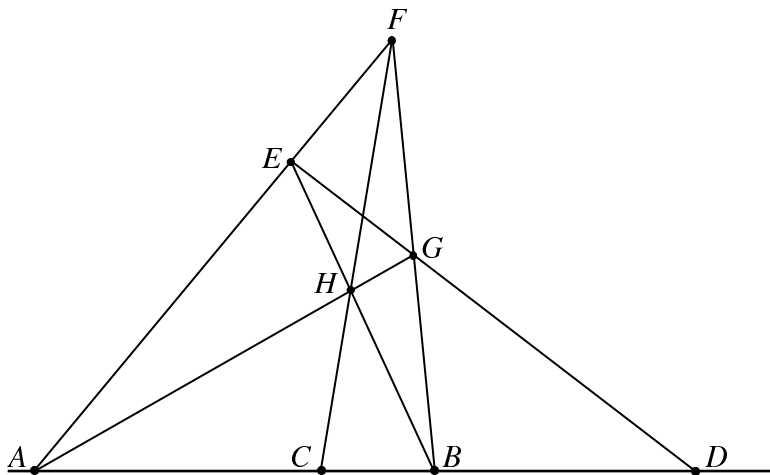
Αντικαθιστώντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις στην (7.1.3), μετά από στοιχειώδεις πράξεις βρίσκουμε ότι

$$(AB) = \frac{2}{\frac{1}{(AC)} + \frac{1}{(AD)}},$$

δηλαδή το (AB) είναι ο «αρμονικός μέσος» των (AC) και (AD) , με άλλα λόγια τα (AC) , (AB) , (AD) αποτελούν αρμονική πρόοδο.

Με μεθόδους της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μπορούμε να δείξουμε ότι ο αρμονικός λόγος διατηρείται με τις προβολές. Ακριβέστερα, αν προβάλλουμε την ℓ σε μία οποιαδήποτε ευθεία k , με κέντρο προβολής τυχόν σημείο O εκτός των ℓ και k , και καλέσουμε A', B', C', D' τις αντίστοιχες προβολές των A, B, C, D [δηλαδή, με τη γνωστή ορολογία της Παραγράφου 1.5, αν θεωρήσουμε την προοπτικότητα $\pi(\ell, k, O)$ και θέσουμε $\pi(A) = A'$, $\pi(B) = B'$ κλπ.], τότε

$$\frac{(A'C')}{(C'B')} : \frac{(A'D')}{(D'B')} = -1.$$



Σχήμα 7.2

Αποδεικνύεται, επίσης, ότι λαμβάνουμε την παραπάνω αρμονική διαίρεση και τον αντίστοιχο αρμονικό λόγο, αν κατασκευάζεται ένα τετράπλευρο $EFGH$,

έτσι ώστε τα ζεύγη των απέναντι πλευρών να τέμνονται στα σημεία A, B και οι δύο διαγώνιοι να διέρχονται από τα C, D (βλ. Σχήμα 7.2).

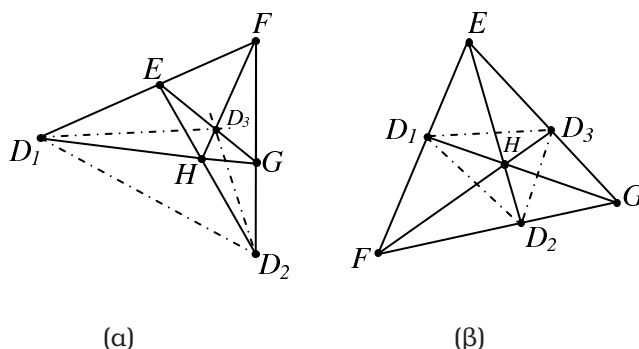
Η ιδιότητα της διατήρησης του αρμονικού λόγου μέσω των προβολών υποβάλλει την ιδέα ότι αυτός (ο λόγος) μπορεί να οριστεί και στο προβολικό επίπεδο. Σε μια τέτοια προσέγγιση γίνεται αντιληπτόν ότι έννοιες όπως το μήκος, η κατεύθυνση, ο λόγος ($:$ διαίρεση) δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Αντιθέτως, ο τελευταίος χαρακτηρισμός της αρμονικότητας σημείων μέσω τετραπλεύρου, επιδέχεται αντίστοιχη ερμηνεία στο προβολικό επίπεδο. Αυτήν την έννοια της αρμονικότητας θα εξετάσουμε στο υπόλοιπο της παραγράφου, αφού αναφέρουμε προηγουμένως μερικούς βασικούς ορισμούς και κατασκευές, που είναι απαραίτητες για να δώσουμε ακριβές περιεχόμενο στις προηγούμενες ιδέες.

Μετά το τρίγωνο, ο αμέσως επόμενος απλός σχηματισμός είναι το τετρακόρυφο, όπως ορίζεται στη συνέχεια.

7.1.1 Ορισμός. Ένα (πλήρες) **τετρακόρυφο** (quadrangle) είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$, που αποτελείται από τέσσερα διαφορετικά και ανα τρία μη συγγραμμικά σημεία, μαζί με τις έξι ευθείες που σχηματίζουν αυτά ανά δύο. Αν καλέσουμε τα σημεία E, F, G, H , τότε το σχηματιζόμενο τετρακόρυφο συμβολίζεται με $EFGH$ και έχουμε ότι

$$EFGH = \{E, F, G, H\} \cup \{E \vee F, F \vee G, G \vee H, H \vee E, E \vee G, F \vee H\}.$$

Τα επόμενα σχήματα απεικονίζουν δύο τετρακόρυφα $EFGH$.



Σχήμα 7.3

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι αναφερόμαστε γενικώς σε τετρακόρυφα, χωρίς να γίνεται διάκριση σε κυρτά [Σχήμα 7.3(α)] ή μη κυρτά [Σχήμα 7.3(β)], όπως συμβαίνει στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.

7.1.2 Ορισμός. Σε ένα τετρακόρυφο $EFGH$, τα σημεία E, F, G, H καλούνται **κορυφές** (vertices), ενώ οι ευθείες $E \vee F, F \vee G, G \vee H, H \vee F, E \vee G, F \vee H$

καλούνται **πλευρές** (sides). Οι τελευταίες δημιουργούν τα ζεύγη των **αντικειμένων** ή **απέναντι πλευρών** (opposite sides) $(E \vee F, G \vee H)$, $(E \vee H, F \vee G)$ και $(E \vee G, F \vee H)$. Τα σημεία τομής των αντικειμένων πλευρών

$$D_1 := (E \vee F) \wedge (G \vee H),$$

$$D_2 := (E \vee H) \wedge (F \vee G),$$

$$D_3 := (E \vee G) \wedge (F \vee H),$$

ονομάζονται **διαγώνια σημεία** (diagonal points).

Στα επόμενα θα χρειαστούμε τετρακόρυφα των οποίων τα διαγώνια σημεία δεν είναι συγγραμμικά, οπότε σχηματίζουν ένα (πλήρες) τρίγωνο (βλ. Ορισμό 4.2.1), που ονομάζεται **διαγώνιο τρίγωνο** (diagonal triangle) του τετρακορύφου. Αυτό εξασφαλίζεται με το επόμενο

Αξίωμα (F): Τα διαγώνια σημεία ενός πλήρους τετρακορύφου είναι μη συγγραμμικά.

7.1.3 Παρατηρήσεις. 1) Η ύπαρξη διαγωνίου τριγώνου δεν εξασφαλίζεται στο οποιοδήποτε προβολικό επίπεδο, που ορίζεται μόνο με τα αξιώματα (ΠΕ 1) – (ΠΕ 3). Για παράδειγμα, στο επίπεδο των 7 σημείων, τα διαγώνια σημεία όλων των τετρακορύφων του είναι συγγραμμικά. Αυτό δικαιολογεί την εισαγωγή του αξιώματος (F).

2) Το F του αξιώματος προέρχεται από το όνομα του Gino Fano (1871–1952).

Εκτός, όμως, από την ύπαρξη του διαγωνίου τριγώνου, το αξίωμα (F) έχει και την εξής συνέπεια :

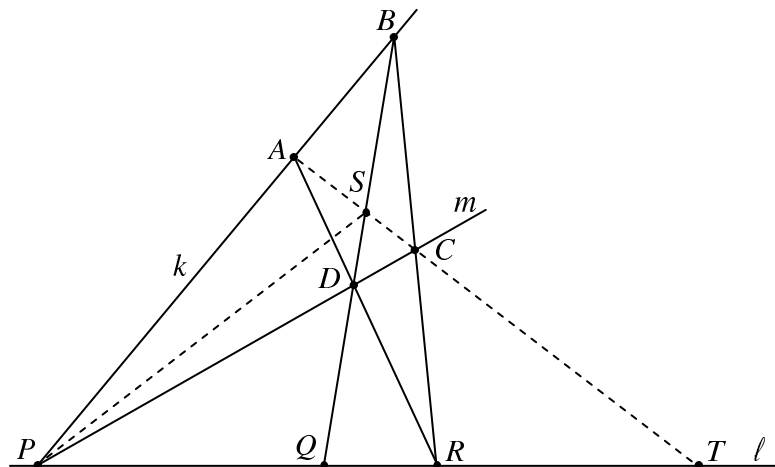
7.1.4 Πρόταση. Αν στα αξιώματα του προβολικού επιπέδου (ΠΕ 1) – (ΠΕ 3) προστεθεί και το αξίωμα (F), τότε κάθε ευθεία του επιπέδου διαθέτει τουλάχιστον τέσσερα διαφορετικά σημεία.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ℓ είναι μία τυχούσα ευθεία και P, Q, R τα τρία σημεία της, που εξασφαλίζονται από την Πρόταση 1.2.6. Για διευκόλυνση, παραθέτουμε το Σχήμα 7.4 στην επομένη σελίδα.

Θεωρούμε δύο ευθείες $k, m \in J(P)$, με $k \neq m \neq \ell \neq k$ (βλ. Πρόταση 1.2.8). Επί της k επιλέγουμε τυχόν σημείον $A \neq P$. Επειδή $A \neq R$, ορίζεται η $A \vee R$, για την οποίαν διαπιστώνουμε ότι $A \vee R \neq m$ [: αν ήταν $A \vee R = m$, τότε τα A, P, R θα ήσαν συγγραμμικά και $m = A \vee P = k$ (άτοπο)]. Επομένως ορίζεται το σημείο $D := (A \vee R) \wedge m$. Προφανώς $D \neq A, P, Q, R$ (έλεγχος!), άρα ορίζεται η $Q \vee D$. Επειδή $Q \vee D \neq k$ (γιατί:), υπάρχει το $B := (Q \vee D) \wedge k$. Αναλόγως ορίζεται και το $C := (B \vee R) \wedge m$. Διαπιστώνουμε επίσης ότι $C \neq A, B, D$.

Έτσι καταλήγουμε στην κατασκευή τεσσάρων διαφορετικών σημείων A, B, C, D , τα οποία, επιπλέον, είναι και ανά τρία μη συγγραμμικά (να ελεγχθούν οι προηγούμενοι ισχυρισμοί), οπότε έχουμε ένα πλήρες τετρακόρυφο $ABCD$, με αντικείμενες πλευρές που δίνονται από τα ζεύγη $(A \vee B, C \vee D)$, $(A \vee D, B \vee C)$, $(B \vee D, A \vee C)$.

Προφανώς, τα P, R είναι διαγώνια σημεία. Επίσης, το ζεύγος $(B \vee D, A \vee C)$ ορίζει το διαγώνιο σημείο S , ενώ το $T := (A \vee C) \wedge \ell$ είναι το ζητούμενο τέταρτο σημείο της ℓ . Φυσικά, πρέπει να δείξουμε ότι $T \neq P, Q, R$.



Σχήμα 7.4

Πραγματικά, αν υποθέσουμε ότι $T = P$, τότε $A \vee T = A \vee P$, άρα

$$S = (A \vee C) \wedge (B \vee D) = (A \vee T) \wedge (B \vee Q) = (A \vee P) \wedge (B \vee Q) = B.$$

Τότε όμως και $A \vee C = A \vee S = A \vee B$, δηλαδή τα A, B, C είναι συγγραμμικά, που είναι άτοπο.

Ανάλογο άτοπο προκύπτει αν υποθεθεί ότι $T = R$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι

$$S = (A \vee T) \wedge (B \vee Q) = (A \vee R) \wedge (B \vee Q) = D,$$

οπότε $A \vee C = A \vee S = A \vee D$, δηλαδή τα A, C, D είναι συγγραμμικά (άτοπο).

Τέλος, αν $T = Q$, τότε

$$S = (B \vee Q) \wedge (A \vee T) = (B \vee Q) \wedge (A \vee Q) = Q,$$

άρα, $S = Q \in P \vee R$. Αυτό σημαίνει ότι τα διαγώνια σημεία P, S, R είναι συγγραμμικά, σε αντίφαση προς το αξίωμα (F). Επομένως, $T \neq P, Q, R$, οπότε η ℓ διαθέτει τουλάχιστον τέσσερα διαφορετικά σημεία. $\square$

Ερχόμαστε τώρα στο κύριο αντικείμενο αυτής της παραγράφου.

7.1.5 Ορισμός. Τέσσερα διαφορετικά σημεία A, B, C, D μίας σημειοσειράς σχηματίζουν **αρμονική τετράδα** (σημείων) ή **αρμονικό σύνολο** (harmonic quadruple/set), αν υπάρχει πλήρες τετρακόρυφο, με κορυφές μη κείμενες επί του άξονος της σημειοσειράς, και τέτοιο ώστε τα A, B να είναι διαγώνια σημεία του, ενώ τα C, D ανήκουν στις υπόλοιπες πλευρές που διέρχονται από το τρίτο διαγώνιο σημείο (βλ. Σχήμα 7.2). Το σημείο C καλείται **αρμονικό συζυγές** (harmonic conjugate) του D και το D αρμονικό συζυγές του C (ως προς A και B).

Μία αρμονική τετράδα, όπως προηγουμένως, συμβολίζεται με $\mathcal{H}(AB, CD)$.

Σημειώνουμε ότι στον συμβολισμό αυτόν είναι καθιερωμένο τα δύο πρώτα σημεία να αναφέρονται στα διαγώνια σημεία του τετρακορύφου, ενώ τα δεύτερα αναφέρονται στα συζυγή σημεία της τετράδας. Όπως όμως θα φανεί στη συνέχεια [βλ. Θεώρημα 7.1.7 και Παρατήρηση 7.1.9(2)], η διάκριση αυτή δεν είναι ουσιώδης, καθ' όσον τα C, D μπορούν να θεωρηθούν διαγώνια σημεία άλλου τετρακορύφου, οπότε τα A, B είναι αρμονικά συζυγή.

Από τον ορισμό και την προηγούμενη παρατήρηση συνάγεται ότι

$$(7.1.4) \quad \mathcal{H}(AB, CD) \Leftrightarrow \mathcal{H}(BA, CD) \Leftrightarrow \mathcal{H}(BA, DC) \Leftrightarrow \mathcal{H}(AB, DC).$$

Επομένως, στον συμβολισμό της αρμονικής τετράδας μπορούμε να εναλλάσσουμε τα διαγώνια σημεία μεταξύ τους, ομοίως και τα συζυγή, αλλά δεν μπορούμε να εναλλάσουμε ένα διαγώνιο με ένα συζυγές.

7.1.6 Θεώρημα. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{P}$ είναι ένα προβολικό επίπεδο Desargues στο οποίο ισχύει και το αξίωμα (F). Αν A, B και C είναι τρία διαφορετικά συγγραμμικά σημεία, τότε υπάρχει ένα μοναδικό αρμονικό συζυγές D του C (ως προς A και B).

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι δίνονται τρία σημεία A, B, C , όπως στην εκφώνηση, και ας καλέσουμε ℓ την κοινή τους ευθεία. Θα δείξουμε πρώτα ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε επί της ℓ ένα αρμονικό συζυγές του C .

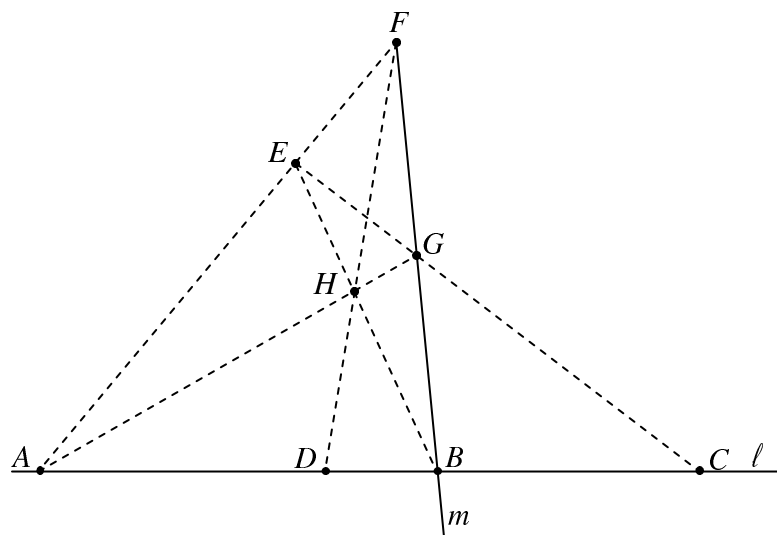
Επιλέγουμε ένα αυθαίρετο σημείο $E \notin \ell$ και μία τυχούσα ευθεία $m \in J(B)$, με $m \neq \ell$ και $m \notin J(E)$ (βλ. Σχήμα 7.5)

Θέτουμε

$$F := (A \vee E) \wedge m, \quad G := (E \vee C) \wedge m, \quad H := (A \vee G) \wedge (E \vee B).$$

Χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία διαπιστώνεται ότι τα σημεία E, F, G και H αποτελούν κορυφές ενός πλήρους τετρακορύφου (δηλαδή είναι όλα μεταξύ τους διαφορε-

τικά και ανά τρία μη συγγραμμικά), οπότε το ζητούμενο αρμονικό συζυγές του C (ως προς A και B) είναι το σημείο $D := (F \vee H) \wedge \ell$.



Σχήμα 7.5

Το D είναι σημείο της ℓ , διαφορετικό από τα A, B, C . Η απόδειξη του ισχυρισμού γίνεται όπως στην κατασκευή του τετάρτου σημείου μιας ευθείας, που έγινε στην απόδειξη της Πρότασης 7.1.4.

Παρά την αυθαιρεσία στην επιλογή του σημείου E και της ευθείας m στην προηγούμενη κατασκευή, το D είναι το μοναδικό συζυγές του C . Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι, εκτός του πλήρους τετρακórυφου $EFGH$, μέσω του οποίου προσδιορίστηκε το D , υπάρχει και ένα άλλο τετρακórυφο $E'F'G'H'$, με το οποίο προσδιορίζεται και ένα δεύτερο σημείο D' , συζυγές του C . Κατά τον ορισμό της αρμονικής τετράδας, από τα αναφερόμενα τετρακórυφα θα έχουμε τις σχέσεις:

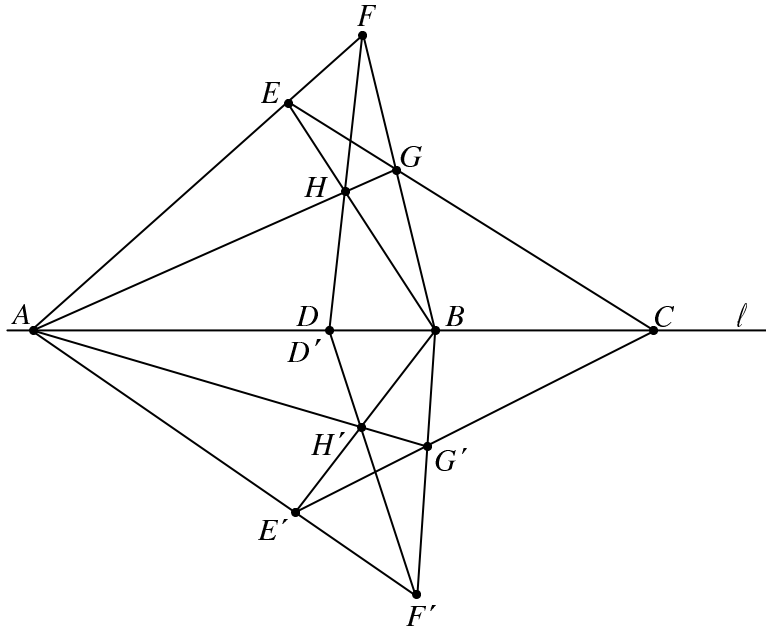
$$\begin{aligned} A &= (E \vee F) \wedge (G \vee H), & B &= (E \vee H) \wedge (F \vee G), \\ C &= (E \vee G) \wedge \ell, & D &= (F \vee H) \wedge \ell, \\ A &= (E' \vee F') \wedge (G' \vee H'), & B &= (E' \vee H') \wedge (F' \vee G'), \\ C &= (E' \vee G') \wedge \ell, & D' &= (F' \vee H') \wedge \ell. \end{aligned}$$

Τα προηγούμενα απεικονίζονται στο Σχήμα 7.6, όπου όμως τα D και D' φαίνονται να συμπίπτουν, όπως ακριβώς θα δείξουμε στη συνέχεια. Από τις παραπάνω σχέσεις και το γεγονός ότι $A, B, C \in \ell$ προκύπτει ότι τα τρίγωνα EFG και $E'F'G'$ είναι προοπτικά ως προς άξονα (την ευθεία ℓ), άρα (επειδή βρισκόμαστε σε ε-

πίπεδο Desargues) είναι προοπτικά και ως προς κέντρο. Αυτό σημαίνει ότι οι ευθείες

$$(7.1.5) \quad E \vee E', \quad F \vee F', \quad G \vee G'$$

διέρχονται από το ίδιο σημείο.



Σχήμα 7.6

Αναλόγως, επειδή τα τρίγωνα EGH , $E'G'H'$ είναι προοπτικά ως προς τον ίδιον άξονα l , θα είναι προοπτικά και ως προς κέντρο, άρα οι ευθείες

$$(7.1.6) \quad E \vee E', \quad G \vee G', \quad H \vee H'$$

διέρχονται από ένα κοινό σημείο.

Επομένως, οι (7.1.5) και (7.1.6) συνεπάγονται ότι όλες οι εμφανιζόμενες σε αυτές ευθείες, και ιδιαίτερα οι $E \vee E'$, $F \vee F'$, $H \vee H'$ διέρχονται από το αυτό σημείο (το οποίο δεν εμφανίζεται στο σχήμα). Μα αυτό ακριβώς σημαίνει ότι τα τρίγωνα EFH και $E'F'H'$ είναι προοπτικά ως προς κέντρο, άρα και ως προς άξονα. Η τελευταία ιδιότητα συνεπάγεται ότι οι ομόλογες πλευρές τέμνονται επί

της αυτής ευθείας, δηλαδή τα σημεία

$$\begin{aligned} A &= (E \vee F) \wedge (E' \vee F'), \\ B &= (E \vee H) \wedge (E' \vee H'), \\ X &:= (F \vee H) \wedge (F' \vee H'), \end{aligned}$$

είναι συγγραμμικά, οπότε $X \in A \vee B = \ell$. Επομένως, λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό των X , D και D' , βρίσκουμε ότι

$$X = (F \vee H) \wedge \ell = D \quad \text{και} \quad X = (F' \vee H') \wedge \ell = D',$$

από τις οποίες καταλήγουμε στη σχέση $D = D'$, που κλείνει την απόδειξη. $\square$

Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι, εκτός από τις μεταθέσεις (7.1.4), επιτρέπεται και μετάθεση του ζεύγους των δύο διαγωνίων σημείων με αυτό των συζυγών. Ακριβέστερα αποδεικνύουμε το

7.1.7 Θεώρημα. Σε ένα προβολικό επίπεδο όπως στο Θεώρημα 7.1.6, ισχύει η ισοδυναμία

$$\mathcal{H}(AB, CD) \Leftrightarrow \mathcal{H}(CD, AB).$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι $\mathcal{H}(AB, CD) \Rightarrow \mathcal{H}(CD, AB)$.

Εφ' όσον έχουμε την αρμονική τετράδα $\mathcal{H}(AB, CD)$, τα A, B είναι διαγώνια σημεία ενός πλήρους τετρακορύφου $EFGH$, ενώ τα C, D είναι τα δύο συζυγή, που βρίσκονται επί των υπολοίπων αντικειμένων πλευρών. Δηλαδή, αν ℓ είναι η κοινή ευθεία των A, B, C, D , έχουμε ότι (βλ. και το Σχήμα 7.7)

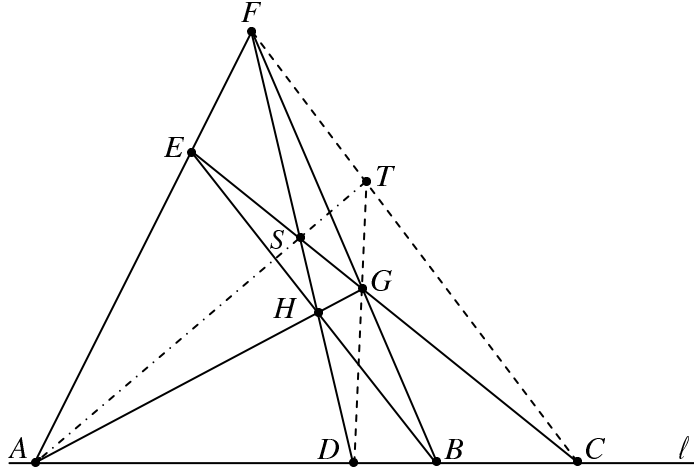
$$\begin{aligned} A &= (E \vee F) \wedge (G \vee H), \quad B = (E \vee H) \wedge (F \vee G), \\ C &= (E \vee G) \wedge \ell, \quad D = (F \vee H) \wedge \ell. \end{aligned}$$

Καλούμε S το τρίτο διαγώνιο σημείο του $EFGH$, δηλ. $S = (E \vee G) \wedge (F \vee H)$, και θέτουμε $T := (F \vee C) \wedge (D \vee G)$. Ελέγχουμε ότι δημιουργείται το πλήρες τετρακόρυφο $SFTG$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} (F \vee T) \wedge (S \vee G) &= (F \vee C) \wedge (E \vee G) = C, \\ (F \vee S) \wedge (T \vee G) &= (F \vee H) \wedge (D \vee G) = D. \end{aligned}$$

Επομένως, τα C, D είναι διαγώνια σημεία του $SFTG$, οπότε είναι κατάλληλα για τη δεύτερη αρμονική τετράδα του θεωρήματος, η οποία θα έχει οριστεί πλήρως,

αν αποδείξουμε ότι τα A και B (ως υποψήφια συζυγή) βρίσκονται στις αντικείμενες πλευρές που διέρχονται από το τρίτο διαγώνιο σημείο του $SFTG$. Ήδη,



Σχήμα 7.7

από το πρώτο τετρακόρυφο, είναι $(F \vee G) \wedge \ell = B$, οπότε, επειδή $A \in \ell$, μένει να δείξουμε ότι η $T \vee S$ διέρχεται από το A .

Για την απόδειξη του τελευταίου ισχυρισμού θεωρούμε τα τρίγωνα ESH και FTG , για τα οποία διαπιστώνουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} (E \vee H) \wedge (F \vee G) &= B, \\ (E \vee S) \wedge (F \vee T) &= (E \vee G) \wedge (F \vee C) = C, \\ (S \vee H) \wedge (T \vee G) &= (F \vee H) \wedge (D \vee G) = D. \end{aligned}$$

Επειδή τα σημεία B, C, D είναι συγγραμμικά (όλα κείνται επί της ℓ), συνάγεται ότι τα τρίγωνα ESH και FTG είναι προοπτικά ως προς τον άξονα ℓ , άρα είναι και προοπτικά ως προς κάποιο κέντρο X , από το οποίο διέρχονται οι ευθείες που συνδέουν τις ομόλογες κορυφές, δηλαδή είναι

$$F \vee E, T \vee S, G \vee H \in J(X).$$

Τότε όμως $X = (F \vee E) \wedge (G \vee H) = A$, άρα και $T \vee S \in J(A)$, όπως ζητούσαμε.

Η απόδειξη της συνεπαγωγής $\mathcal{H}(CD, AB) \Rightarrow \mathcal{H}(AB, CD)$ γίνεται με ανάλογη διαδικασία. $\square$

Συνδυάζοντας τις (7.1.4) και το προηγούμενο αποτέλεσμα, οδηγούμαστε στο

7.1.8 Πόρισμα. Με τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 7.1.7, ισχύουν οι επόμενες ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(AB, CD) &\Leftrightarrow \mathcal{H}(BA, CD) \Leftrightarrow \mathcal{H}(BA, DC) \Leftrightarrow \mathcal{H}(AB, DC) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathcal{H}(CD, AB) \Leftrightarrow \mathcal{H}(DC, AB) \Leftrightarrow \mathcal{H}(DC, BA) \Leftrightarrow \mathcal{H}(CD, BA). \end{aligned}$$

7.1.9 Παρατηρήσεις. 1) Όπως φαίνεται στο προηγούμενο αποτέλεσμα, από τις 24 δυνατές μεταθέσεις των A, B, C, D (ως γνωστόν, το πλήθος τους είναι $4!$), μόνον 8 από αυτές σχηματίζουν αρμονική τετράδα. Μία προσεκτική παρατήρηση δείχνει ότι σε όλες τις αρμονικές τετράδες δεν υπάρχει χωρισμός σημείων του ζεύγους (A, B) από σημεία του (C, D) και αντιστρόφως.

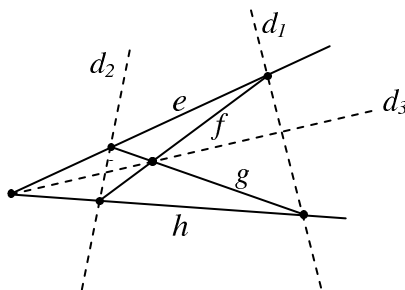
2) Το Θεώρημα 7.1.7 δείχνει ότι και τα A, B είναι μεταξύ τους συζυγή (ως προς τα C και D). Επομένως, σε οποιαδήποτε αρμονική τετράδα, που σχηματίζεται από τα σημεία A, B, C, D , τα (A, B) και (C, D) αποτελούν ζεύγη αρμονικών συζυγών σημείων, κάθε ένα από τα οποία δεν διαχωρίζεται από τα σημεία του άλλου ζεύγους.

Η δυϊκή έννοια του τετρακορύφου δίνεται στον ακόλουθο ορισμό.

7.1.10 Ορισμός. Ένα (πλήρες) **τετράπλευρο** (quadrilateral) είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$, που αποτελείται από τέσσερις διαφορετικές ευθείες, ανά τρεις μη συγκλίνουσες στο αυτό σημείο, μαζί με τα έξι σημεία που σχηματίζουν αυτές ανά δύο. Αν καλέσουμε e, f, g, h τις ευθείες, τότε το σχηματιζόμενο τετράπλευρο συμβολίζεται με $efgh$, οπότε έχουμε ότι

$$efgh = \{e, f, g, h\} \cup \{e \wedge f, f \wedge g, g \wedge h, h \wedge e, e \wedge g, f \wedge h\}.$$

Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται ένα τετράπλευρο $efgh$.



Σχήμα 7.8

7.1.11 Ορισμός. Οι ευθείες ενός τετραπλεύρου $efgh$ καλούνται **πλευρές**, ενώ τα σημεία $e \wedge f, f \wedge g, g \wedge h, h \wedge e, e \wedge g, f \wedge h$ καλούνται **κορυφές**. Τα τελευταία

δημιουργούν τα ζεύγη των **αντικειμένων** (ή **απέναντι**) **κορυφών** $(e \wedge f, g \wedge h)$, $(e \wedge h, f \wedge g)$ και $(e \wedge g, f \wedge h)$. Οι ευθείες που ορίζουν οι αντικείμενες κορυφές

$$d_1 := (e \wedge f) \vee (g \wedge h),$$

$$d_2 := (e \wedge h) \vee (f \wedge g),$$

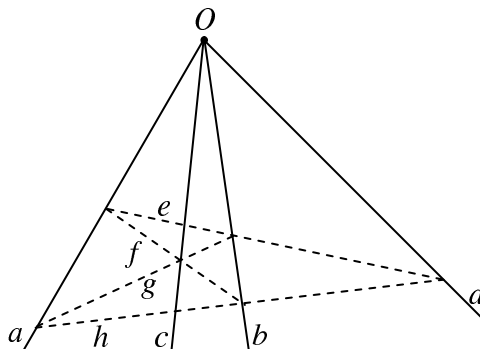
$$d_3 := (e \wedge g) \wedge (f \wedge h),$$

ονομάζονται **διαγώνιες ευθείες** (diagonal lines).

Το δυϊκό του αξιώματος (F) εξασφαλίζει ότι οι διαγώνιες ευθείες ενός τετραπλεύρου δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο, άρα αποτελούν τις πλευρές ενός τριγώνου, που καλείται **διαγώνιο τρίγωνο** του τετραπλεύρου.

7.1.12 Ορισμός. Τέσσερις διαφορετικές ευθείες a, b, c, d μιας δέσμης ευθειών σχηματίζουν **αρμονική τετράδα** (ευθειών) ή **αρμονικό σύνολο** (harmonic quadruple/set), αν υπάρχει ένα πλήρες τετράπλευρο (με πλευρές μη διερχόμενες από το κέντρο της δέσμης και) τέτοιο ώστε οι a, b να είναι διαγώνιες ευθείες του, ενώ οι c, d διέρχονται από τις υπόλοιπες κορυφές που βρίσκονται επί της τρίτης διαγωνίου ευθείας (βλ. Σχήμα 7.9). Η ευθεία c καλείται **αρμονική συζυγής** της d και η d αρμονική συζυγής της c (ως προς a και b).

Μία αρμονική τετράδα, όπως προηγουμένως, συμβολίζεται με $\mathcal{H}(ab, cd)$.



Σχήμα 7.9

Για τις αρμονικές τετράδες ευθειών ισχύουν τα δυϊκά των συμπερασμάτων που αποδείξαμε για τις αρμονικές τετράδες σημείων. Αφήνουμε στον αναγνώστη στη φροντίδα της διατύπωσης τους. Εξάλλου, η απόδειξή τους, χωρίς εφαρμογή της αρχής του δυϊσμού, αποτελεί μίαν επωφελή άσκηση.

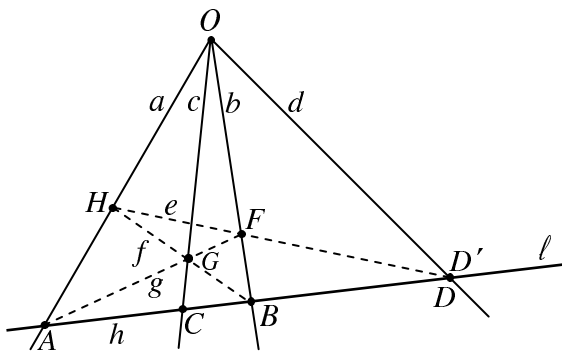
Θα συνδέσουμε τώρα τις αρμονικές τετράδες με τις προβολικότητες, που αποτελούν βασικό μετασχηματισμό σημειοσειρών και δεσμών ευθειών.

7.1.13 Λήμμα. Υποθέτουμε ότι τέσσερα (διαφορετικά) σημεία A, B, C, D μιας ευθείας ℓ σχηματίζουν αρμονική τετράδα $\mathcal{H}(AB, CD)$. Αν O είναι οποιοδήποτε σημείο με $O \notin \ell$ και $a := (O \vee A)$, $b := (O \vee B)$, $c := (O \vee C)$, $d := (O \vee D)$, τότε ορίζεται και η αρμονική τετράδα $\mathcal{H}(ab, cd)$.

Απόδειξη. Επί της a θεωρούμε τυχόν σημείο H , με $A \neq H \neq O$. Θέτουμε

$$G := c \wedge (H \vee B) \quad \text{και} \quad F := b \wedge (A \vee G),$$

οπότε σχηματίζεται το τετρακόρυφο $OFGH$. Παρατηρούμε ότι τα A και B είναι



Σχήμα 7.10

διαγώνια σημεία του τελευταίου, ενώ το C ανήκει στην πλευρά που διέρχεται από το τρίτο διαγώνιο σημείο. Αν θεωρήσουμε και το σημείο $D' := (H \vee F) \wedge \ell$, τότε έχουμε την αρμονική τετράδα $\mathcal{H}(AB, CD')$, άρα το D' είναι το αρμονικό συζυγές του C , όπως και το D . Λόγω του μονοσημάντου του αρμονικού συζυγούς (βλ. Θεώρημα 7.1.6), έχουμε ότι $D' = D$, οπότε η $H \vee F$ διέρχεται από το D .

Με την προηγούμενη διαδικασία σχηματίζεται το τετράπλευρο με πλευρές $H \vee F$, $F \vee B$, $B \vee A$, $A \vee H$. Στο τετράπλευρο αυτό οι a, b συμπίπτουν με τις διαγώνιες ευθείες του, ενώ οι c, d διέρχονται από τις κορυφές της τρίτης διαγωνίου. Επομένως, σχηματίζεται η αρμονική τετράδα $\mathcal{H}(ab, cd)$. $\square$

Εφαρμόζοντας την ορολογία του Ορισμού 1.4.3 και τον συμβολισμό της σχέσης (1.4.1), σε συνδυασμό με την Άσκηση 1.4.10(1), το προηγούμενο αποτέλεσμα αναδιατυπώνεται με την ακόλουθη μορφή:

7.1.14 Λήμμα. Οποιαδήποτε στοιχειώδης απεικόνιση $\delta_{\ell, O} : J(\ell) \rightarrow J(O)$ ($O \notin \ell$) διατηρεί τις αρμονικές τετράδες. Δηλαδή, από κάθε αρμονική τετράδα σημείων $\mathcal{H}(AB, CD)$ με $A, B, C, D \in J(\ell)$, προκύπτει η αντίστοιχη αρμονική τετράδα ευθειών $\mathcal{H}(ab, cd)$, όπου $a = \delta_{\ell, O}(A)$, $b = \delta_{\ell, O}(B)$, $c = \delta_{\ell, O}(C)$, $d = \delta_{\ell, O}(D)$.

Το δυϊκό του προηγούμενου συμπεράσματος διατυπώνεται ως εξής:

7.1.15 Λήμμα. Οποιαδήποτε στοιχειώδης απεικόνιση $\delta_{O,\ell} : J(O) \rightarrow J(\ell)$ ($O \notin \ell$) διατηρεί τις αρμονικές τετράδες. Δηλαδή, από κάθε αρμονική τετράδα ευθειών $\mathcal{H}(ab, cd)$ με $a, b, c, d \in J(O)$, προκύπτει η αντίστοιχη αρμονική τετράδα σημείων $\mathcal{H}(AB, CD)$, όπου $A = \delta_{O,\ell}(a)$, $B = \delta_{O,\ell}(b)$, $C = \delta_{O,\ell}(c)$, $D = \delta_{\ell,O}(d)$.

Τα προηγούμενα συμπεράσματα τελικώς οδηγούν στο

7.1.16 Θεώρημα. Οι προβολικότητες διατηρούν τις αρμονικές τετράδες. Ακριβέστερα, αν A, B, C, D είναι τέσσερα διαφορετικά σημεία μιας ευθείας ℓ , που ορίζουν την αρμονική τετράδα $\mathcal{H}(AB, CD)$, και $\Pi : J(\ell) \rightarrow J(\ell')$ είναι μία τυχούσα προβολικότητα, τότε $\mathcal{H}(A'B', C'D')$, όπου $P' = \Pi(P)$ με $P = A, B, C, D$. Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για προβολικότητες μεταξύ δεσμών ευθειών, ή μεταξύ σημειοσειρών και δεσμών ευθειών.

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της προβολικότητας Π και των Λημμάτων 7.1.14 – 7.1.15. $\square$

7.1.17 Πρόγραμμα. Υποθέτουμε ότι τα σημεία $A, B, C, D \in J(\ell)$ σχηματίζουν την αρμονική τετράδα $\mathcal{H}(AB, CD)$, ενώ τα $A', B', C', D' \in J(\ell')$ σχηματίζουν την αρμονική τετράδα $\mathcal{H}(A'B', C'D')$. Τότε υπάρχει προβολικότητα $\Pi : J(\ell) \rightarrow J(\ell')$, τέτοια ώστε $\Pi(P) = P'$, όπου $P = A, B, C, D$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.5.8, μπορούμε να βρούμε μία προβολικότητα $\Pi : J(\ell) \rightarrow J(\ell')$, τέτοια ώστε $\Pi(A) = A'$, $\Pi(B) = B'$ και $\Pi(C) = C'$. Θέτουμε $\bar{D} := \Pi(D)$. Τότε, κατά το Θεώρημα 7.1.16, $\mathcal{H}(A'B', C'\bar{D})$, οπότε το $\bar{D}$ είναι συζυγές του C . Αλλά, εφ' όσον $\mathcal{H}(A'B', C'D')$, τότε και το D' είναι συζυγές του C . Συνεπώς, $\bar{D} = D'$, απ' όπου $\Pi(D) = D'$, με την οποίαν αποδεικνύεται το συμπέρασμα. $\square$

7.1.18 Ασκήσεις.

- 1) Να επαληθευθεί η Παρατήρηση 7.1.3(1).
- 2) Να ελεγχθούν οι ισχυρισμοί που επισημαίνονται στην απόδειξη της Πρότασης 7.1.4.
- 3) Στο πρώτο μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος 7.1.6 (κατασκευή του συζυγούς σημείου D) να δικαιολογηθεί πλήρως η ύπαρξη του τετρακόρυφου $EFGH$ καθώς και ότι $D \neq A, B, C$.
- 4) Στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.7 να επιβεβαιωθεί ότι πραγματικά ορίζεται το πλήρες τετρακόρυφο $SFTG$.

- 5) Να αποδειχθούν, χωρίς χρήση της αρχής του δυϊσμού, τα αντίστοιχα των Θεωρημάτων 7.1.6, 7.1.7, και του Πορίσματος 7.1.8, για τις αρμονικές τετράδες ευθειών.
- 6) Να συμπληρωθούν οι λεπτομέρειες στην απόδειξη του Λήμματος 7.1.13.
- 7) Ειδικεύοντας την ορολογία του τετρακορύφου και τετραπλεύρου, να οριστούν οι έννοιες τρικόρυφο και τρίπλευρο. Σε ποιά γνωστή έννοια σχηματισμού καταλήγουν και οι δύο;

7.2 Κωνικές σημειοσειρές και δέσμες

Στην Αναλυτική Γεωμετρία, οι κωνικές τομές (έλλειψη, υπερβολή, παραβολή) ορίζονται μέσω δευτεροβαθμίων αλγεβρικών εξισώσεων. Όμως, στη (συνθετική) Ευκλείδεια Γεωμετρία, οι προηγούμενες καμπύλες περιγράφονται ως γεωμετρικοί τόποι σημείων του επιπέδου, που ικανοποιούν μια χαρακτηριστική ιδιότητα. Για παράδειγμα, η έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (του επιπέδου) των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο δεδομένα σταθερά σημεία (:τις εστίες) παραμένει σταθερό κλπ.

Οι παραπάνω χαρακτηρισμοί, όπως είναι φανερό, δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μια γενίκευση της εννοίας της κωνικής τομής. Αντιθέτως, η ιδιότητα των καμπυλών αυτών να παριστάνονται με κατάλληλες τομές ενός κυκλικού κώνου (απ' όπου και η ορολογία «κωνικές τομές») είναι μία ιδιότητα προβολικής φύσης, αφού κάθε σημείο της κωνικής τομής «προβάλλεται» (μέσω της κορυφής του κώνου) στη βάση και αντιστρόφως.

Μία περαιτέρω προσεκτική ανάλυση του τρόπου με τον οποίον μετασχηματίζεται μία κωνική τομή στο σύνηθες προβολικό επίπεδο (δηλαδή στην πλήρωση του ευκλειδείου επιπέδου σε προβολικό) οδήγησε τον J. Steiner (1796–1863) στον παρακάτω Ορισμό 7.2.1, που έχει έννοια και στο παρόν γενικό πλαίσιο της συνθετικής Προβολικής Γεωμετρίας. Για τη σχετική ανάλυση παραπέμπουμε στον J. W. Blattner [7, σελ. 223–225]. Πολλοί θεωρούν ότι η συνθετική αυτή προσέγγιση των κωνικών από τον Steiner είναι ίσως και η σπουδαιότερη συμβολή του στην Προβολική Γεωμετρία (βλ., π.χ., I. M. Yaglom [31, σελ. 43]).

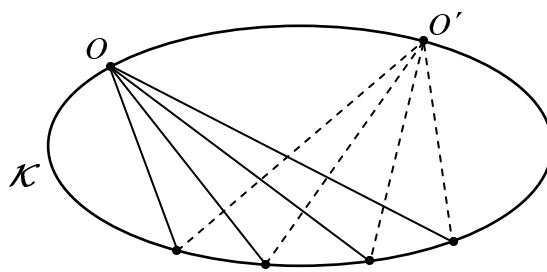
Πριν διατυπώσουμε τον ορισμό της κωνικής σημειοσειράς και δέσμης

θα υποθέσουμε ότι σε ολόκληρη την παρούσα παράγραφο, το προβολικό επίπεδο $\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ είναι *επίπεδο του Πάππου*,

οπότε ισχύει το πλήρες Θεμελιώδες Θεώρημα της Προβολικής 5.2.1 (βλ. επίσης και την πρώτη μορφή του στο Θεώρημα 1.5.11).

7.2.1 Ορισμός. Μία **κωνική σημειοσειρά** $\mathcal{K}$ (point conic) είναι το σύνολο των σημείων τομής των αντιστοιχών ευθειών δύο δεσμών ευθειών, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με μία προβολικότητα που δεν είναι προοπτικότητα. Δηλαδή, αν $\Pi : J(O) \rightarrow J(O')$ ($O \neq O'$) είναι μία προβολικότητα μεταξύ των σημειομένων δεσμών ευθειών, τότε η κωνική, που ορίζεται από τις προηγούμενες δέσμες ευθειών, είναι το σύνολο σημείων

$$\mathcal{K} := \{ k \wedge \Pi(k) \mid k \in J(O) \}.$$



Σχήμα 7.11

Η δυϊκή έννοια της κωνικής σημειοσειράς είναι η **κωνική δέσμη** (line conic). Στην περίπτωση αυτή, μία κωνική δέσμη θα προκύπτει από μία προβολικότητα, που δεν είναι προοπτικότητα, μεταξύ σημειοσειρών $\Pi : J(\ell) \rightarrow J(\ell')$ ($\ell \neq \ell'$) και θα αποτελείται από το σύνολο των ευθειών

$$\mathcal{K} := \{ P \vee \Pi(P) \mid P \in J(\ell) \}.$$

Μία άλλη χρήσιμη έννοια είναι αυτή της εφαπτομένης, όπως ακριβώς ορίζεται στη συνέχεια.

7.2.2 Ορισμός. Αν P είναι τυχόν σημείο μιας κωνικής σημειοσειράς $\mathcal{K}$, η **εφαπτομένη** (tangent line) της $\mathcal{K}$ στο P είναι η ευθεία η οποία έχει ένα μοναδικό κοινό σημείο με την $\mathcal{K}$, το P .

Στον προηγούμενο ορισμό μιλάμε για την εφαπτομένη στο P . Αυτό υπονοεί ότι η εφαπτομένη σε ένα σημείο είναι μονοσήμαντα ορισμένη, όπως θα αποδειχθεί πιο κάτω (βλ. Πρόταση 7.3.3).

Η δυϊκή έννοια της εφαπτομένης σε σημείο μιας κωνικής σημειοσειράς είναι το **σημείο επαφής** (point of contact) μιας κωνικής δέσμης. Είναι, προφανώς, το σημείο του επιπέδου από το οποίο διέρχεται μία μοναδική ευθεία της κωνικής δέσμης.

7.2.3 Παρατηρήσεις. 1) Επειδή χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για τις κωνικές σημειοσειρές και τις κωνικές δέσμες, το είδος της κωνικής θα καθορίζεται κάθε φορά από τα συμφραζόμενα.

2) Οι προηγούμενοι ορισμοί δεν απαιτούν την υπόθεση ότι το $\mathcal{P}$ είναι επίπεδο του Πάππου. Όμως, ο ουσιαστικός ρόλος της υπόθεσης αυτής θα φανεί σύντομα.

Μία στοιχειώδης ιδιότητα των κωνικών σημειοσειρών, που δικαιολογεί και το Σχήμα 7.11, περιγράφεται στο επόμενο αποτέλεσμα.

7.2.4 Πρόταση. Τα κέντρα O και O' των δεσμών ευθειών, μέσω των οποίων (και της αντιστοιχίας προβολικότητας) ορίζεται μία κωνική σημειοσειρά $\mathcal{K}$, ανήκουν και αυτά στην $\mathcal{K}$.

Απόδειξη. Ας θέσουμε $\ell := O \vee O' \in J(O)$. Τότε θα είναι $\ell \neq \Pi(\ell)$, διαφορετικά η Π θα ήταν προοπτικότητα (άτοπο), ως συνέπεια της δυϊκής συνθήκης iii) του Θεμελιώδους Θεωρήματος 1.5.11 (σε συνδυασμό με το πλήρες Θεμελιώδες Θεώρημα 5.2.1 και τη βασική υπόθεση για το παρόν προβολικό επίπεδο). Επομένως, βάσει του ορισμού της ℓ και της κωνικής σημειοσειράς,

$$O' = \ell \wedge \Pi(\ell) \in \mathcal{K}.$$

Η απόδειξη του ότι και $O \in \mathcal{K}$ είναι ανάλογη. □

7.2.5 Λήμμα. Πέντε διαφορετικά σημεία P_i ($i = 1, \dots, 5$), ανα τρία μη συγγραμμικά, ορίζουν μία κωνική σημειοσειρά η οποία και τα περιέχει.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις δέσμες ευθειών $J(P_1)$ και $J(P_2)$, οπότε

$$P_1 \vee P_3, P_1 \vee P_4, P_1 \vee P_5 \in J(P_1) \quad \text{και} \quad P_2 \vee P_3, P_2 \vee P_4, P_2 \vee P_5 \in J(P_2).$$

Λόγω της μη συγγραμμικότητας ανά τρία των P_i , οι παραπάνω ευθείες είναι όλες μεταξύ τους διαφορετικές. Επομένως, κατά τη δυϊκή της Πρότασης 1.5.8, υπάρχει προβολικότητα $\Pi : J(P_1) \rightarrow J(P_2)$, τέτοια ώστε

$$\Pi(P_1 \vee P_3) = P_2 \vee P_3, \quad \Pi(P_1 \vee P_4) = P_2 \vee P_4, \quad \Pi(P_1 \vee P_5) = P_2 \vee P_5.$$

Η προβολικότητα αυτή δεν είναι προοπτικότητα. Πραγματικά, αν ήταν $\Pi = \pi$, όπου $\pi = \pi(P_1, P_2, k)$ είναι κάποια προοπτικότητα από τη δέσμη $J(P_1)$ στη $J(P_2)$, με άξονα k [$: J(P_1) \not\rightarrow k \notin J(P_2)$] τότε θα είχαμε ότι

$$P_2 \vee P_3 = \Pi(P_1 \vee P_3) = \pi(P_1 \vee P_3) := ((P_1 \vee P_3) \wedge k) \vee P_2,$$

απ' όπου προκύπτει ότι τα P_1, P_2, P_3 είναι συγγραμμικά (άτοπο).

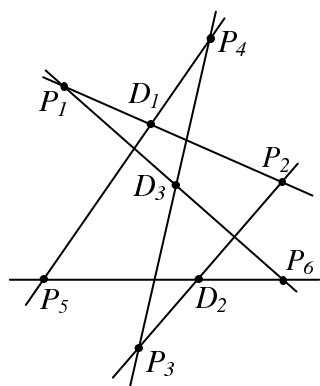
Εφ' όσον η Π είναι προβολικότητα που δεν εκφυλίζεται σε προοπτικότητα, όλα τα σημεία $k \wedge \Pi(k)$, για κάθε $k \in J(P_1)$, ορίζουν μία κωνική σημειοσειρά $\mathcal{K}$. Προφανώς, από τον ορισμό της τελευταίας, $P_3, P_4, P_5 \in \mathcal{K}$. Επίσης, από το Πρόσχημα 7.2.4, και $P_1, P_2 \in \mathcal{K}$. □

Η προηγούμενη κατασκευή βασίστηκε στην αυθαίρετη επιλογή των P_1 και P_2 ως κέντρων καταλλήλων δεσμών ευθειών. Επομένως, αν αλλάξουμε τα κέντρα, κατασκευάζεται μία άλλη, φαινομενικά διαφορετική από την προηγούμενη, κωνική σημειοσειρά, που περιέχει τα πέντε δεδομένα σημεία. Θα δείξουμε ότι η νέα κωνική σημειοσειρά συμπίπτει με την αρχική. Όμως γι' αυτό χρειαζόμαστε μερικά προκαταρκτικά τεχνικά συμπεράσματα, τα οποία, εκτός των άλλων, προετοιμάζουν και την απόδειξη του Θεωρήματος του Pascal, που αναφέρεται στη επομένη παράγραφο. Η σχετική προσέγγιση μπορεί να γίνει με διαφόρους τρόπους. Εδώ θα ακολουθήσουμε τη μεθοδολογία της J. N. Cederberg [8, σελ. 149–152].

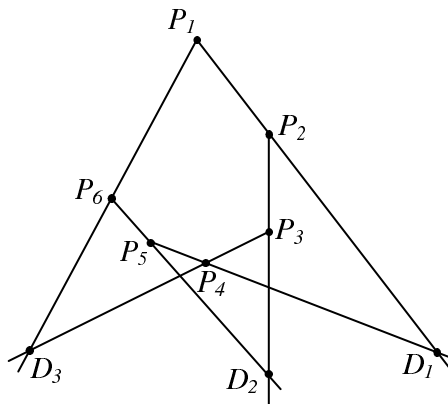
Δίνουμε πρώτα τον εξής βασικό ορισμό.

7.2.6 Ορισμός. Ένα **(απλό) εξακόρυφο** (hexagon), με **κορυφές** τα έξι διαφορετικά και ανά τρία μη συγγραμμικά σημεία P_i ($i = 1, \dots, 6$) είναι ο σχηματισμός του προβολικού επιπέδου

$$P_1P_2P_3P_4P_5P_6 := \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\} \cup \{P_1 \vee P_2, P_2 \vee P_3, P_3 \vee P_4, P_4 \vee P_5, P_5 \vee P_6, P_6 \vee P_1\}.$$



(α)



(β)

Σχήμα 7.12

Οι προηγούμενες ευθείες καλούνται **πλευρές** του εξακορύφου. Τα ζεύγη

$$(P_1, P_4), (P_2, P_5), (P_3, P_6)$$

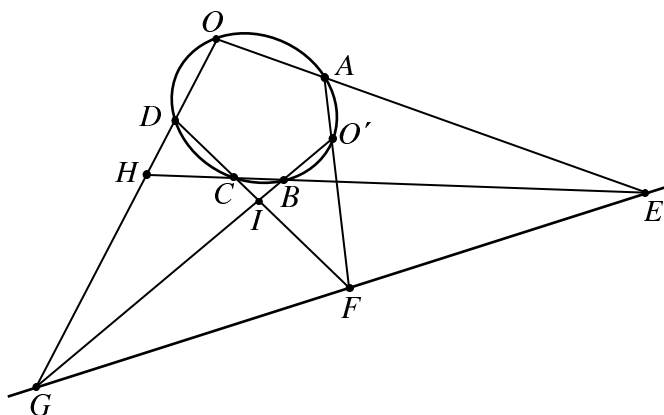
αποτελούν τις **αντικείμενες** (ή **απέναντι**) **κορυφές**, ενώ τα ζεύγη

$$(P_1 \vee P_2, P_4 \vee P_5), (P_2 \vee P_3, P_5 \vee P_6), (P_3 \vee P_4, P_6 \vee P_1)$$

αποτελούν τις **αντικείμενες** (ή **απέναντι**) **πλευρές** του εξακορύφου. Τα σημεία τομής των τελευταίων καλούνται **διαγώνια σημεία** [βλ. τα σχετικά Σχήματα 7.12 (α) και (β)].

7.2.7 Λήμμα. Υποθέτουμε ότι A, B, C, D είναι τέσσερα διαφορετικά σημεία μιας κωνικής σημειοσειράς, η οποία ορίζεται από μία προβολικότητα $\Pi : J(O) \rightarrow J(O')$ που δεν είναι προοπτικότητα. Τότε τα διαγώνια σημεία του εξακορύφου $OAO'BCD$ είναι συγγραμμικά. Και αντιστρόφως, αν δίνεται ένα εξακόρυφο $OAO'BCD$ του οποίου τα διαγώνια σημεία είναι συγγραμμικά, τότε οι κορυφές A, B, C, D ανήκουν σε μία κωνική σημειοσειρά που κατασκευάζεται από μια προβολικότητα της προηγούμενης μορφής.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη, να επιστήσουμε την προσοχή του αναγνώστη στη θέση των κέντρων O, O' ως προς τα σημεία A, B, C, D .



Σχήμα 7.13

Απόδειξη. Τα διαγώνια σημεία του εξακορύφου $OAO'BCD$ είναι τα σημεία

$$E := (O \vee A) \wedge (B \vee C), F := (A \vee O') \wedge (C \vee D), G := (O' \vee B) \wedge (D \vee O).$$

Θεωρούμε τη στοιχειώδη απεικόνιση $\delta_1 : J(O) \rightarrow J(B \vee C)$, από την οποίαν

παίρνουμε τις αντιστοιχίες

$$(7.2.1) \quad \begin{aligned} O \vee A &\mapsto \delta_1(O \vee A) := (O \vee A) \wedge (B \vee C) = E, \\ O \vee B &\mapsto \delta_1(O \vee B) := (O \vee B) \wedge (B \vee C) = B, \\ O \vee C &\mapsto \delta_1(O \vee C) := (O \vee C) \wedge (B \vee C) = C, \\ O \vee D &\mapsto \delta_1(O \vee D) := (O \vee D) \wedge (B \vee C) =: H. \end{aligned}$$

Επίσης, θεωρούμε τη στοιχειώδη απεικόνιση $\delta_2 : J(O') \rightarrow J(C \vee D)$, από την οποίαν παίρνουμε τις

$$(7.2.2) \quad \begin{aligned} O' \vee A &\mapsto \delta_2(O' \vee A) := (O' \vee A) \wedge (C \vee D) = F, \\ O' \vee B &\mapsto \delta_2(O' \vee B) := (O' \vee B) \wedge (C \vee D) =: I, \\ O' \vee C &\mapsto \delta_2(O' \vee C) := (O' \vee C) \wedge (C \vee D) = C, \\ O' \vee D &\mapsto \delta_2(O' \vee D) := (O' \vee D) \wedge (C \vee D) = D. \end{aligned}$$

Αν τώρα σχηματίσουμε την προβολικότητα

$$\overline{\Pi} := \delta_2 \circ \Pi \circ \delta_1^{-1} : J(B \vee C) \longrightarrow J(C \vee D),$$

για το σημείο C της κωνικής προκύπτει ότι [χρησιμοποιώντας και τις τρίτες σχέσεις των (7.2.1) και (7.2.2)]

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}(C) &= (\delta_2 \circ \Pi)(\delta_1^{-1}(C)) = (\delta_2 \circ \Pi)(O \vee C) \\ &= \delta_2(\Pi(O \vee C)) = \delta_2(O' \vee C) = C, \end{aligned}$$

άρα [βλ. Θεωρήματα 5.2.1 και 1.5.11(συνθήκη iii)] η $\overline{\Pi}$ είναι μία προοπτικότητα $\pi = \pi(B \vee C, C \vee D, K)$, της οποίας το κέντρο (προσωρινά το συμβολίζουμε με K) προσδιορίζεται ακριβώς από δύο ζεύγη αντιστοίχων σημείων επί των δεδομένων αξόνων (βλ. Πρόταση 1.5.5). Εδώ παρατηρούμε ότι η $B \vee C$ περιέχει τα γνωστα σημεία A, C, E, H , ενώ η $C \vee D$ περιέχει τα C, D, I, F . Απ' το άλλο μέρος, οι (7.2.1) και (7.2.2) δίνουν και τις αντιστοιχίες

$$(7.2.3) \quad \begin{aligned} B &\xrightarrow{\delta_1^{-1}} O \vee B \xrightarrow{\Pi} O' \vee B \xrightarrow{\delta_2} I, \\ E &\xrightarrow{\delta_1^{-1}} O \vee A \xrightarrow{\Pi} O' \vee A \xrightarrow{\delta_2} F, \\ H &\xrightarrow{\delta_1^{-1}} O \vee D \xrightarrow{\Pi} O' \vee D \xrightarrow{\delta_2} D. \end{aligned}$$

Επομένως $K = (B \vee I) \wedge (E \vee F) = G$. Όμως, από το ίδιο σημείο G θα διέρχεται και η ευθεία των άλλων δύο αντιστοίχων σημείων E και F , δηλαδή $E \vee F \in J(G)$. Άρα τα E, F, G είναι συγγραμμικά, όπως ζητούσαμε.

Το αντίστροφο αποδεικνύεται αντιστρέφοντας την προηγούμενη διαδικασία. Για την πληρότητα σημειώνουμε τα κύρια βήματά της: θεωρούμε την προοπτικότητα $\pi = \pi(B \vee C, C \vee D, G)$, από την οποία προκύπτουν οι σχέσεις

$$(7.2.4) \quad \pi(B) = I, \quad \pi(C) = C, \quad \pi(H) = D, \quad \pi(E) = F.$$

Κατόπιν σχηματίζουμε την προβολικότητα $\Pi := \delta_2^{-1} \circ \pi \circ \delta_1$. Η τελευταία, μέσω των (7.2.1), (7.2.2) και (7.2.4) οδηγεί στις

$$\begin{aligned} \Pi(O \vee A) &= O' \vee A, & \Pi(O \vee B) &= O' \vee B, \\ \Pi(O \vee C) &= O' \vee C, & \Pi(O \vee D) &= O' \vee D, \end{aligned}$$

Συνεπώς, $A = (O \vee A) \wedge \Pi(O \vee A) \in \mathcal{K}$ κ.ο.κ, οπότε κλείνει η απόδειξη. $\square$

Μπορούμε τώρα να συμπληρώσουμε το Λήμμα 5.2.5 με το μονοσήμαντο της κωνικής. Ακριβέστερα, αποδεικνύουμε το επόμενο

7.2.8 Θεώρημα. *Η κωνική σημειοσειρά που ορίζεται από πέντε διαφορετικά και ανά τρία μη συγγραμμικά σημεία είναι μονοσημάντως ορισμένη.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την κωνική σημειοσειρά $\mathcal{K}$, που κατασκευάστηκε (στο Λήμμα 7.2.5) από τα σημεία P_i ($i = 1, \dots, 5$), μέσω της $\Pi : J(P_1) \rightarrow J(P_2)$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι, αν αντικαταστήσουμε τα κέντρα P_1, P_2 των δεσμών ευθειών με οποιαδήποτε άλλα σημεία από τα P_i , η νέα κωνική, ας την πούμε $\mathcal{K}'$, θα συμπίπτει με την $\mathcal{K}$, δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι κάθε σημείο της $\mathcal{K}$ είναι σημείο της $\mathcal{K}'$ και αντιστρόφως.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τυχόν $X \in \mathcal{K}$ και σχηματίζουμε το εξακόρυφο $P_1P_4P_2P_3P_5X$. Τα διαγώνια σημεία του είναι τα

$$(P_1 \vee P_4) \wedge (P_3 \vee P_5), \quad (P_4 \vee P_2) \wedge (P_5 \vee X), \quad (P_2 \vee P_3) \wedge (X \vee P_1).$$

Τα τελευταία, σύμφωνα με το Λήμμα 7.2.7, είναι συγγραμμικά. Τα ίδια σημεία όμως είναι και διαγώνια σημεία του εξακορύφου $P_4P_2P_3P_5XP_1$, οπότε (απο το αντίστροφο του Λήμματος 7.2.7) το X ανήκει στην κωνική $\mathcal{K}'$, που κατασκευάζεται από τα ίδια σημεία P_i ($i = 1, \dots, 5$), μέσω της προβολικότητας $\Pi' : J(P_4) \rightarrow J(P_3)$. Και αντιστρόφως, με τα ίδια εξακόρυφα, τυχόν X της $\mathcal{K}'$ ανήκει και στην $\mathcal{K}$.

Παρόμοια εργαζόμαστε αν στο εξακόρυφο $P_1P_4P_2P_3P_5X$ κρατήσουμε τα P_1, P_2 στη θέση τους και πάρουμε μίαν άλλη μετάθεση των P_3, P_4, P_5 (αφήνοντας το X στην έκτη κορυφή) κ.ο.κ. Με αυτόν τον τρόπο αποδεικνύουμε ότι κατασκευάζεται η ίδια κωνική σημειοσειρά, για οποιαδήποτε επιλογή δύο σημείων από τα P_i ως κέντρων δεσμών ευθειών αντιστοίχων προβολικωτήτων. $\square$

Άμεση συνέπεια των προηγούμενων (βλ. και Ορισμό 7.2.1) είναι το

7.2.9 Θεώρημα (Steiner). *Μία κωνική σημειοσειρά ορίζεται από δύο οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία της και μία προβολικότητα, η οποία δεν είναι προοπτικότητα, μεταξύ των δεσμών ευθειών με κέντρα τα σημεία αυτά.*

7.2.10 Πόρισμα. *Μία ευθεία τέμνει μία κωνική σημειοσειρά το πολύ σε δύο σημεία.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ℓ είναι μία ευθεία που έχει τρία (διαφορετικά) κοινά σημεία A, B και C με μία κωνική σημειοσειρά $\mathcal{K}$. Αν O και O' είναι δύο τυχόντα σημεία της $\mathcal{K}$, τότε η $\mathcal{K}$ ορίζεται μονοσημάντως από τα O, O', A, B και C , μέσω μιας προβολικότητας $\Pi : J(O) \rightarrow J(O')$, που δεν είναι προοπτικότητα (βλ. Λήμμα 7.2.5).

Θεωρούμε τις στοιχειώδεις απεικονίσεις $\delta_1 : J(O) \rightarrow J(\ell)$, $\delta_2 : J(\ell) \rightarrow J(O')$ και την προβολικότητα $\overline{\Pi} := \delta_2 \circ \Pi \circ \delta_1^{-1} : J(\ell) \rightarrow J(\ell)$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\overline{\Pi}(A) &= (\delta_2 \circ \Pi \circ \delta_1^{-1})(A) = (\delta_2 \circ \Pi)(O \vee A) \\ &= \delta_2(O' \vee A) = (O' \vee A) \wedge \ell = A,\end{aligned}$$

και, με ανάλογο τρόπο, $\overline{\Pi}(B) = B$, $\overline{\Pi}(C) = C$. Επομένως, κατά το Θεώρημα 1.5.11, $\overline{\Pi} = id_{J(\ell)}$, οπότε $\Pi = \delta_2^{-1} \circ \delta_1$, δηλαδή η Π είναι προοπτικότητα. Το συμπέρασμα αυτό είναι άτοπο. Το άτοπο προήλθε από την υπόθεση ότι υπάρχουν τρία διαφορετικά σημεία τομής της ℓ με την κωνική σημειοσειρά. Επομένως, τα κοινά σημεία είναι το πολύ δύο. $\square$

7.2.11 Ασκήσεις.

- 1) Αν $\mathcal{K}$ είναι κωνική σημειοσειρά και P οποιοδήποτε σημείο της, να αποδειχθεί ότι $|\mathcal{K}| = |J(P)|$.
- 2) Αν στον ορισμό 7.2.1 παραλειφθεί η απαίτηση η προβολικότητα Π να μην είναι προοπτικότητα, τότε τι θα συνέβαινε στο συμπέρασμα του Πορίσματος 7.2.10;
- 3) Πόσα διαφορετικά εξακόρυφα ορίζουν έξι (διαφορετικά) σημεία;

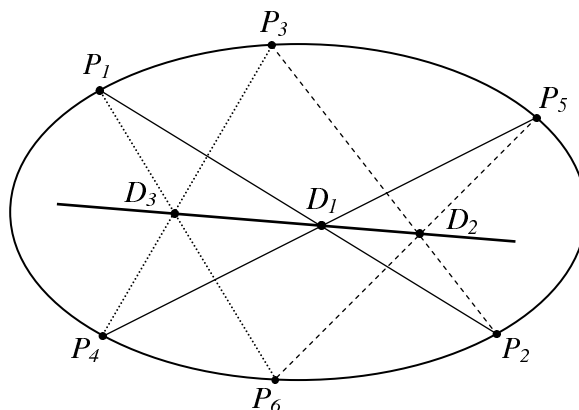
7.3 Το θεώρημα του Pascal

Όπως αναφέρεται στην προμετωπίδα του κεφαλαίου, ο B. Pascal (1623–1662) απέδειξε το ομώνυμο θεώρημα, που το ονόμασε *θεώρημα του μυστικού εξαγράμμου*, σε ηλικία 16 ετών, το 1639. Η απόδειξη έγινε στο πλαίσιο της Ευκλείδειας

Γεωμετρίας και δημοσιεύθηκε το 1640 στο έργο του “*Essai pour les coniques*” («Δομίμιο για τις κωνικές»).

7.3.1 Θεώρημα (Pascal). Αν ένα εξακόρυφο $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ είναι εγγεγραμμένο σε μία κωνική σημειοσειρά $\mathcal{K}$ (δηλαδή οι κορυφές του βρίσκονται επί της $\mathcal{K}$), τότε τα διαγώνια σημεία του εξακορύφου είναι συγγραμμικά.

Απόδειξη. Ουσιαστικά το θεώρημα έχει αποδειχθεί στο Λήμμα 7.2.5. Εφ’ όσον τα σημεία του εξακορύφου βρίσκονται επί της $\mathcal{K}$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η τελευταία προκύπτει (μονοσήμαντα) από μία κατάλληλη προβολικότητα $\Pi : J(P_1) \rightarrow J(P_3)$ και τα σημεία P_2, P_4, P_5, P_6 . Συνεπώς, κατά το προαναφερόμενο λήμμα, τα διαγώνια σημεία $D_1 = (P_1 \vee P_2) \wedge (P_4 \vee P_5)$, $D_2 = (P_2 \vee P_3) \wedge (P_5 \vee P_6)$ και $D_3 = (P_3 \vee P_4) \wedge (P_6 \vee P_1)$ είναι συγγραμμικά (βλ. και το Σχήμα 7.14). $\square$



Σχήμα 7.14

Η ευθεία επί της οποίας βρίσκονται τα διαγώνια σημεία του εγγεγραμμένου σε κωνική σημειοσειρά εξακορύφου καλείται **ευθεία του Pascal**.

Φυσικά, και πάλι βάσει του ιδίου Λήμματος 7.2.7, αν τα διαγώνια σημεία ενός εξακορύφου $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ είναι συγγραμμικά, τότε οι κορυφές του θα βρίσκονται επί μιας κωνικής σημειοσειράς. Έτσι καταλήγουμε στο αντίστροφο του Θεωρήματος του Pascal, οπότε μπορούμε να το αναδιατυπώσουμε και με τη επομένη ολοκληρωμένη μορφή:

7.3.2 Θεώρημα. Έξι διαφορετικά σημεία, ανά τρία μη συγγραμμικά, βρίσκονται επί κωνικής σημειοσειράς τότε και μόνον τότε, αν τα διαγώνια σημεία του εξακορύφου, που σχηματίζεται με κορυφές τα δεδομένα έξι σημεία, είναι συγγραμμικά.

Το θεώρημα του Pascal μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό τυχόντος σημείου μιας κωνικής σημειοσειράς, η οποία έχει οριστεί από πεντε σημεία. Ακριβέστερα, αν η κωνική σημειοσειρά $\mathcal{K}$ ορίζεται από τα σημεία P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , και υποθέσουμε ότι X είναι τυχόν σημείο της (φυσικά διαφορετικό από τα προηγούμενα), τότε –κατά το θεώρημα του Pascal– τα διαγώνια σημεία του σχηματιζομένου εξακορύφου $P_1P_2P_3P_4P_5X$, δηλαδή τα

$$D_1 = (P_1 \vee P_2) \wedge (P_4 \vee P_5),$$

$$D_2 = (P_2 \vee P_3) \wedge (P_5 \vee X),$$

$$D_3 = (P_3 \vee P_4) \wedge (X \vee P_1),$$

είναι συγγραμμικά. Εδώ πρέπει να παρατηρηθεί ότι αν το X δεν είναι γνωστό, τότε το μόνο γνωστό διαγώνιο σημείο είναι το D_1 . Επομένως, το X βρίσκεται στις ευθείες $P_5 \vee X$ και $X \vee P_1$, γεγονός που οδηγεί στην επομένη ιδέα κατασκευής:

Πρώτα θεωρούμε τυχούσα ευθεία $\ell \in J(P_5)$ (που θα παίζει το ρόλο της $P_5 \vee X$), οπότε *ορίζουμε* το σημείο

$$(7.3.1) \quad D_2 := (P_2 \vee P_3) \wedge \ell.$$

Επίσης, επειδή θα πρέπει $D_3 = (P_3 \vee P_4) \wedge (X \vee P_1)$ και $D_3 \in D_1 \vee D_2$, μπορούμε να *ορίσουμε* το σημείο D_3 με τη σχέση

$$(7.3.2) \quad D_3 := (P_3 \vee P_4) \wedge (D_1 \vee D_2).$$

Τέλος, επειδή θέλουμε να είναι $X \in \ell$, καθώς και (από τον αρχικό ορισμό του D_3) τα D_3, X και P_1 να είναι συγγραμμικά, δηλαδή $X \in P_1 \vee D_3$, συνάγεται ότι

$$(7.3.3) \quad X = (P_1 \vee D_3) \wedge \ell.$$

Ανακεφαλαιώνοντας, λοιπόν, προσδιορίζουμε τυχόν σημείο της $\mathcal{K}$ (διαφορετικό από τα $P_i, i = 1, \dots, 5$) με την εξής διαδικασία: θεωρούμε τυχούσα ευθεία ℓ από το P_5 , και ορίζουμε το σημείο D_2 , μέσω της (7.3.1). Κατόπιν ορίζουμε το D_3 μέσω της (7.3.2), εφ' όσον ήδη έχουμε στη διάθεσή μας τα D_1, D_2 . Τέλος, η (7.3.3) μας δίνει ένα σημείο της κωνικής σημειοσειράς [βλ. και Άσκηση 7.3.4(1)]. Προφανώς, μεταβάλλοντας την ℓ , παίρνουμε και τα άλλα σημεία της $\mathcal{K}$.

Θα κλείσουμε την παράγραφο με μερικά συμπεράσματα για την εφαπτομένη μιας κωνικής σημειοσειράς.

7.3.3 Πρόταση. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{K}$ είναι μία κωνική σημειοσειρά και A ένα σημείο της. Τότε υπάρχει μία μοναδική εφαπτομένη t_A της $\mathcal{K}$ στο A . Επιπλέον, ισχύει η σχέση

$$t_A = \Pi(A \vee B),$$

όπου το B είναι τυχόν σημείο της $\mathcal{K}$ και $\Pi : J(B) \rightarrow J(A)$ μία προβολικότητα, η οποία δεν είναι προοπτικότητα.

Απόδειξη. Μαζί με το A , θεωρούμε και τέσσερα άλλα διαφορετικά σημεία B , C , D και E της $\mathcal{K}$. Γνωρίζουμε ότι η $\mathcal{K}$ μπορεί να οριστεί από τα πέντε προηγούμενα σημεία, μέσω μιας προβολικότητας (η οποία δεν εκφυλίζεται σε προοπτικότητα) $\Pi : J(B) \rightarrow J(A)$. Θέτουμε $t_A = \Pi(A \vee B)$. Προφανώς, από τον ορισμό της κωνικής σημειοσειράς, $A = (A \vee B) \wedge \Pi(A \vee B) = (A \vee B) \wedge t_A$, άρα η t_A περιέχει το A . Θα δείξουμε ότι, εκτός του A , η t_A δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη $\mathcal{K}$, οπότε είναι εφαπτομένη στο A .

Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και ένα άλλο κοινό σημείο $P \neq A$. Τότε εμφανίζονται δύο δυνατότητες:

- α) $P \in A \vee B$. Στην περίπτωση αυτή, τα A , B και P είναι συγγραμμικά, άρα $t_A = A \vee P = A \vee B$. Τότε όμως, $\Pi(A \vee B) = t_A = A \vee B$, επομένως (κατά το Θεμελιώδες Θεώρημα της Προβολικής) η Π είναι προοπτικότητα (άτοπο).
- β) $P \notin A \vee B$. Θεωρούμε την ευθεία $B \vee P \in J(B)$. Τότε $\Pi(B \vee P) \in J(A)$, άρα από τον ορισμό της κωνικής σημειοσειράς, $P = (B \vee P) \wedge \Pi(B \vee P) \in \mathcal{K}$ και

$$\Pi(B \vee P) = A \vee P.$$

Απ' το άλλο μέρος,

$$\Pi(A \vee B) = t_A = A \vee P.$$

Οι τελευταίες σχέσεις συνεπάγονται ότι $\Pi(B \vee P) = \Pi(A \vee B)$, απ' όπου (λόγω του 1-1 της Π), $B \vee P = A \vee B$, δηλαδή τα A , B , P είναι συγγραμμικά (άτοπο). Επομένως, σε κάθε περίπτωση η t_A είναι εφαπτομένη.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει και μία άλλη εφαπτομένη t_A στο A . Εφ' όσον $t_A \in J(A)$, θα υπάρχει μία μονοσημάντως ορισμένη ευθεία $\tau \in J(B)$, τέτοια ώστε $\Pi(\tau) = t_A$. Τότε το σημείο $C = t_A \wedge \tau$ είναι σημείο της $\mathcal{K}$. Όμως η t_A , ως εφαπτομένη, θα έχει μόνον ένα κοινό σημείο με την $\mathcal{K}$, άρα αναγκαστικά είναι $C = A$, οπότε $\tau = A \vee B$. Κατά συνέπεια,

$$t_A = \Pi(\tau) = \Pi(A \vee B) = t_A.$$

Τα προηγούμενα αποδεικνύουν πλήρως την πρόταση. □

7.3.4 Ασκήσεις.

- 1) Να δικαιολογηθεί γιατί το σημείο X , που ορίζεται από τη σχέση (7.3.3), είναι πραγματικά σημείο της κωνικής σημειοσειράς $\mathcal{K}$.
- 2) Πόσες ευθείες Pascal ορίζουν 6 διαφορετικά σημεία μιας κωνικής σημειοσειράς;

7.4 Το θεώρημα του Brianchon

Στην Παράγραφο 7.2 ορίσαμε τις έννοιες κωνική δέσμη και σημείον επαφής, που είναι δυϊκές της κωνικής σημειοσειράς και της εφαπτομένης. Επομένως, για όλα τα συμπεράσματα των Παραγράφων 7.2 και 7.3, που αναφέρονται στις κωνικές σημειοσειρές, ισχύουν και τα αντίστοιχα δυϊκά τους, που αφορούν στις κωνικές δέσμες. Για την ακριβή διατύπωση του δυϊκού του θεωρήματος του Pascal δίνουμε πρώτα τον επόμενο ορισμό.

7.4.1 Ορισμός. Ένα **(απλό) εξάπλευρο**, με **πλευρές** τις έξι διαφορετικές, και ανά τρεις μη διερχόμενες από το ίδιο σημείο, ευθείες a_i ($i = 1, \dots, 6$) είναι ο σχηματισμός του προβολικού επιπέδου

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 := \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} \cup \{a_1 \wedge a_2, a_2 \wedge a_3, a_3 \wedge a_4, a_4 \wedge a_5, a_5 \wedge a_6, a_6 \wedge a_1\}.$$

Τα προηγούμενα σημεία τομής καλούνται **κορυφές** του εξαπλεύρου. Τα ζεύγη

$$(a_1, a_4), (a_2, a_5), (a_3, a_6)$$

αποτελούν τις **αντικείμενες** (ή **απέναντι**) **πλευρές**, ενώ τα ζεύγη

$$(a_1 \wedge a_2, a_4 \wedge a_5), (a_2 \wedge a_3, a_5 \wedge a_6), (a_3 \wedge a_4, a_6 \wedge a_1)$$

αποτελούν τις **αντικείμενες** (ή **απέναντι κορυφές** του εξαπλεύρου. Οι ευθείες που σχηματίζουν τα τελευταία καλούνται **διαγώνιες ευθείες**..

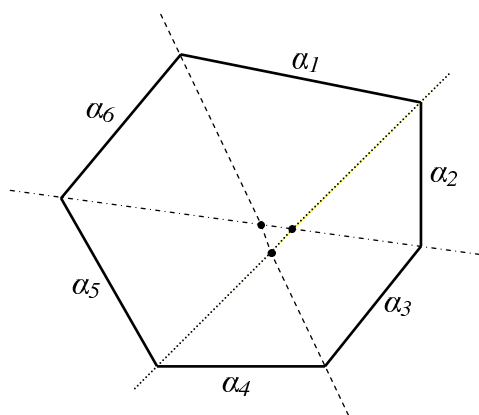
Το Σχήμα 7.15 της επομένης σελίδας απεικονίζει ένα εξάπλευρο, στο οποίον οι διαγώνιες ευθείες σημειώνονται με διακεκομμένες γραμμές.

Αν στον παραπάνω ορισμό θέσουμε

$$\begin{aligned} a_1 \wedge a_2 &= P_2, & a_2 \wedge a_3 &= P_3, & a_3 \wedge a_4 &= P_4, \\ a_4 \wedge a_5 &= P_5, & a_5 \wedge a_6 &= P_6, & a_6 \wedge a_1 &= P_1, \end{aligned}$$

τότε έχουμε αμέσως και τις σχέσεις

$$\begin{aligned} P_1 \vee P_2 &= a_1, & P_2 \vee P_3 &= a_2, & P_3 \vee P_4 &= a_3, \\ P_4 \vee P_5 &= a_4, & P_5 \vee P_6 &= a_5, & P_6 \vee P_1 &= a_6. \end{aligned}$$



Σχήμα 7.15

Τα προηγούμενα σημαίνουν ότι οι κορυφές ενός εξαπλεύρου είναι κορυφές ενός εξακόρυφου, του οποίου οι αντίστοιχες πλευρές είναι οι πλευρές του αρχικού εξαπλεύρου, και αντιστρόφως. Επομένως οι έννοιες (απλό) εξακόρυφο και (απλό) εξαπλευρο οδηγούν στον ίδιο σχηματισμό του προβολικού επιπέδου και μπορούν να έχουν το κοινό όνομα **(απλό) εξάγωνο**.

Η μόνη ουσιαστική διαφορά, στις σχετικές έννοιες που διατυπώθηκαν, είναι τα διαγώνια σημεία και οι διαγώνιες ευθείες. Όμως και οι δύο έννοιες ορίζονται και στα εξακόρυφα και στα εξάπλευρα (παρ' όλο που –για τις συγκεκριμένες ανάγκες της έκθεσης μας– στον Ορισμό 7.2.6 μιλάμε μόνον για διαγώνια σημεία, ενώ στον Ορισμό 7.4.1 αναφερόμαστε μόνο στις διαγώνιες ευθείες)

Ερχόμαστε τώρα στο δυϊκό του Θεωρήματος 7.3.2. Όπως και στην Παράγραφο 7.3, υποθέτουμε ότι εργαζόμαστε σε ένα επίπεδο του Πάππου.

7.4.2 Θεώρημα (Brianchon). *Έξι διαφορετικές ευθείες, ανά τρεις μη διερχόμενες από το ίδιο σημείο, βρίσκονται επί κωνικής δέσμης τότε και μόνον τότε, αν οι διαγώνιες ευθείες του εξαπλεύρου, που σχηματίζεται με πλευρές τις δεδομένες ευθείες, διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

Το κοινό σημείο των διαγωνίων καλείται **σημείο του Brianchon**.

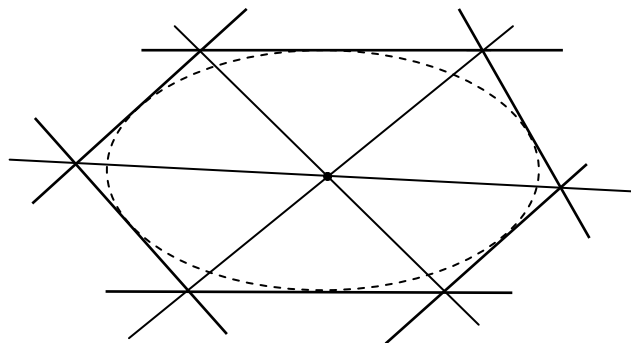
Το προηγούμενο αποτέλεσμα αποδείχτηκε από τον C. J. Brianchon (1783–1864), σε ηλικία 21 ετών, και δημοσιεύτηκε το 1806 (βλ. Μ. Μπρίκα [22, σελ. 135]). Η απόδειξη του έγινε *χωρίς τη χρήση της αρχής του δυϊσμού*, η οποία άλλωστε διατυπώθηκε στη γενική της μορφή πολύ αργότερα (περί το 1825). Φυσικά, το θεώρημα αποδείχτηκε στο πλαίσιο του κλασικού προβολικού επιπέδου

(: πλήρωση του ευκλειδείου επιπέδου). Επίσης και η αρχική του διατύπωση διαφέρει από αυτήν του Θεωρήματος 7.2.4. Ακριβέστερα, με τη δική μας ορολογία, αυτή έχει ως εξής (βλ. και Σχήμα 7.16):

7.4.3 Αρχική μορφή του Θεωρήματος του Brianchon. *Αν οι πλευρές ενός απλού εξαγώνου αποτελούν εφαπτόμενες μιας κωνικής (σημειοσειράς), τότε οι διαγώνιες ευθείες του εξαγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

Η τελευταία διατύπωση, εκ πρώτης όψεως, φαίνεται να μην σχετίζεται με αυτήν του Θεωρήματος 7.4.2, συνεπώς δεν είναι προφανής η δυϊκότητά της προς το Θεώρημα του Pascal. Όμως, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύουν τα επόμενα συμπεράσματα:

1. Οι εφαπτόμενες μιας κωνικής σημειοσειράς αποτελούν κωνική δέσμη.
2. Τα σημεία επαφής μιας κωνικής δέσμης αποτελούν κωνική σημειοσειρά.
3. Αν $\mathcal{K}$ είναι μία κωνική σημειοσειρά, $\mathcal{K}'$ η κωνική δέσμη που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες της $\mathcal{K}$, και $\mathcal{K}''$ η κωνική σημειοσειρά που σχηματίζουν τα σημεία επαφής της $\mathcal{K}'$, τότε $\mathcal{K} = \mathcal{K}''$



Σχήμα 7.16

Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι οι παραπάνω προτάσεις είναι αληθείς στο κλασικό προβολικό επίπεδο, αλλά και σε ένα προβολικό επίπεδο του Πάππου, υπό την προϋπόθεση ότι το τελευταίο έχει *χαρακτηριστική διαφορετική του 2*. Ως **χαρακτηριστική** του επιπέδου του Πάππου εννοούμε την χαρακτηριστική του αντιστοίχου σώματος. Επειδή η πλήρης ανάπτυξη των σχετικών λεπτομερειών, χωρίς να είναι ιδιαίτερα δύσκολη από τεχνική άποψη, είναι έξω από τα όρια του βιβλίου αυτού, ο αναγνώστης παραπέμπεται στον J. W. Blattner [7, § 5.6].

Με τις προηγούμενες διευκρινίσεις, διαπιστώνουμε ότι μπορούμε να διατυπώσουμε το θεώρημα του Brianchon, υπό την αρχική μορφή 7.4.3, και στο

παρόν αφηρημένο πλαίσιο, οπότε (με την προϋπόθεση ότι το επίπεδο του Πάππου έχει χαρακτηριστική διάφορη του 2) καταλήγουμε στο Θεώρημα 7.4.2 και αντιστρόφως. Αυτό ακριβώς δικαιολογεί και τον χαρακτηρισμό του Θεωρήματος 7.4.2 ως θεωρήματος του Brianchon.

7.4.4 Άσκηση.

Να διατυπωθούν και να αποδειχθούν, χωρίς τη χρήση της αρχής του δυϊσμού, τα δυϊκά συμπεράσματα της Παραγράφου 7.4.

7.5 Άλλα θέματα προς μελέτη

Οι σκοποί και τα όρια, που έχουμε θέσει γι' αυτήν την πρώτη γνωριμία με τις πιο βασικές έννοιες της Προβολικής Γεωμετρίας, μας επιβάλλουν να κλείσουμε εδώ τη σύντομη εισαγωγή μας σ' αυτόν τον κλάδο της γεωμετρίας. Με το παρόν υπόβαθρο, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να προσεγγίσει και τα εξής ενδιαφέροντα θέματα:

1. Την *αναλυτική* περιγραφή των κωνικών, μέσω αλγεβρικών εξισώσεων. Στην περίπτωση του κλασικού προβολικού επιπέδου καταλήγουμε στις οικείες δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Σχετικώς παραπέμπουμε στα συγγράμματα [7, σελ. 230–235], [8, σελ. 179–188] και, για την κλασική περίπτωση, στο [22, σελ. 216–223]

2. Τη μελέτη των *πόλων* (poles) και *πολικών* (polars). Αφού οριστεί η έννοια του εσωτερικού και εξωτερικού σημείου μιας κωνικής, η πολική ενός σημείου P (μιλώντας πολύ περιγραφικά) είναι μία ευθεία η οποία, αναλόγως με το αν το σημείο είναι εξωτερικό, ή επί της κωνικής, ή εσωτερικό, είναι αντιστοίχως η ευθεία που καθορίζεται από τα σημεία επαφής των δύο εφαπτομένων που άγονται από το P προς την κωνική, ή η εφαπτομένη της κωνικής στο P , ή κατάλληλη «τέμνουσα» της κωνικής. Η απεικόνιση που, σε κάθε σημείο του επιπέδου, αντιστοιχεί την πολική του (ως προς δεδομένη κωνική) καλείται *πολικότητα* (polarity). Για λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα [7, σελ. 247–266], [8, σελ. 179–188] και [22, σελ. 152–154, 224–246, 216–223].

3. Τον *διπλό* ή *αναρμονικό λόγο* (cross ratio) τεσσάρων σημείων $\mathcal{R}(A, B, C, D)$, ο οποίος είναι μία αριθμητική τιμή (που ορίζεται με αναλυτικές μεθόδους) και μπορεί να θεωρηθεί ως ένας λόγος λόγων αποστάσεων. Το ενδιαφέρον εδώ βρίσκεται στο γεγονός ότι $\mathcal{H}(AB, CD) \Leftrightarrow \mathcal{R}(A, B, C, D) = -1$ (βλ. [7, σελ. 209–214], [8, σελ. 165–168] και [22, σελ. 195–206, 238–240]).

Εκτός από τα προηγούμενα, που συμπληρώνουν κυρίως το Κεφάλαιο 7, τα παρακάτω θέματα αποτελούν επίσης ενδιαφέροντα συμπληρώματα της γενικότερης μελέτης της προβολικής γεωμετρίας:

4. Η θεμελίωση του *προβολικού χώρου*. Σχετικώς παραπέμπουμε στο [7, σελ. 96–101] και –κυρίως– στο [20, 160–194].

5. Η παρουσίαση της Προβολικής Γεωμετρίας ως μιας γενικής γεωμετρίας, η οποία περιλαμβάνει την *Υπερβολική*, τη *Συσχετισμένη* (αλλιώς «Ομοπαράλληλη» ή «Αφφινική») και την *Ευκλείδεια* Γεωμετρία, καθώς και τη Γεωμετρία της *Ομοιότητας*, βρίσκεται στο [8, σελ. 190–199].

Παράρτημα

Συγκεντρώνουμε εδώ μερικές στοιχειώδεις αλγεβρικές έννοιες, τις οποίες χρησιμοποιήσαμε σε προηγούμενα κεφάλαια. Για λεπτομέρειες ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί, π.χ., τα συγγράμματα [2], [5], [18], [19]. Η στοιχειώδης Γραμμική Άλγεβρα θεωρείται γνωστή.

A. Ομάδες

Μία **ομάδα** (group) είναι ένα σύνολο G εφοδιασμένο με μία πράξη **πολλαπλασιασμού**

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G : (a, b) \mapsto a \cdot b,$$

έτσι ώστε να ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

i) Ο πολλαπλασιασμός είναι *προσεταιριστικός*, δηλαδή

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

για κάθε $a, b, c \in G$.

ii) Υπάρχει ένα (μοναδικό) **ουδέτερο** ή **μοναδιαίο** στοιχείο $e \in G$, με την ιδιότητα

$$a \cdot e = e \cdot a = a,$$

για κάθε $a \in G$.

iii) Για κάθε $a \in G$ υπάρχει το **αντίστροφό** του, που συμβολίζεται με $a^{-1} \in G$ και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e.$$

Μία ομάδα, όπως προηγουμένως, συμβολίζεται και ως ένα ζεύγος $(G, \cdot)$, όταν θέλουμε να σημειώσουμε και τον αντίστοιχο πολλαπλασιασμό. Συνήθως σ' ένα «γινόμενο» $a \cdot b$ παραλείπεται το σύμβολο " $\cdot$ " του πολλαπλασιασμού και γράφουμε απλώς ab .

Η **τετριμμένη** ομάδα είναι η ομάδα $G = \{e\}$, δηλαδή αποτελείται μόνον από το ουδέτερο στοιχείο.

Αν G είναι ομάδα και $H \subseteq G$, τότε το H καλείται **υποομάδα** της G (συμβολισμός: $H \leq G$), αν το H είναι ομάδα με την πράξη του πολλαπλασιασμού που εισάγει η G επί του H . Αποδεικνύεται ότι $H \leq G$ αν $ab^{-1} \in H$, για κάθε $a, b \in H$. Ισοδύναμα, $H \leq G$ αν ισχύουν οι συνθήκες:

- i) $ab \in H$, για κάθε $a, b \in H$.
- ii) $a^{-1} \in H$, για κάθε $a \in H$.

Μία ομάδα G καλείται **αβελιανή** (abelian) ή **μεταθετική** (commutative) αν $ab = ba$, για κάθε $a, b \in G$. Στην περίπτωση αυτή, πολλές φορές αντί του συμβόλου " $\cdot$ " χρησιμοποιείται το "+" και το ουδέτερο στοιχείο συμβολίζεται με 0.

Αν $G \equiv (G, \cdot)$ και $H \equiv (H, *)$ είναι ομάδες, μία απεικόνιση $h : G \rightarrow H$ καλείται **ομομορφισμός** αν διατηρεί την πράξη του πολλαπλασιασμού, δηλαδή

$$h(a \cdot b) = h(a) * f(b),$$

για κάθε $a, b \in G$. Ένας ομομορφισμός ομάδων $h : G \rightarrow H$ καλείται **ισομορφισμός** αν η h είναι απεικόνιση 1-1 και επί. Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση αυτή η $h^{-1} : H \rightarrow G$ είναι επίσης ομομορφισμός ομάδων.

B. Δακτύλιοι

Ένας **δακτύλιος** (ring) είναι μία τριάδα $\mathcal{D} \equiv (\mathcal{D}, +, \cdot)$, όπου οι πράξεις της **πρόσθεσης**

$$+ : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D} : (a, b) \mapsto a + b$$

και του **πολλαπλασιασμού**

$$\cdot : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D} : (a, b) \mapsto a \cdot b$$

ικανοποιούν τις επόμενες συνθήκες:

- i) Το ζεύγος $(\mathcal{D}, +)$ αποτελεί **αβελιανή (μεταθετική) ομάδα**.
- ii) Ο πολλαπλασιασμός είναι **προσεταιριστικός**, δηλαδή

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

για κάθε $a, b, c \in \mathcal{D}$.

- iii) Ισχύουν οι **επιμεριστικές ιδιότητες**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$

για κάθε $a, b, c \in \mathcal{D}$.

Το μηδενικό (ουδέτερο) στοιχείο της πρόσθεσης συμβολίζεται με 0.

Όπως και στην περίπτωση της ομάδας, παραλείπεται το σύμβολο "." του πολλαπλασιασμού και γράφουμε απλώς ab αντί $a \cdot b$.

Ένας δακτύλιος $\mathcal{D}$ καλείται **μεταθετικός** (commutative ring) αν είναι μεταθετικός ο πολλαπλασιασμός.

Επίσης, ένας **δακτύλιος με μονάδα** (ring with unit ή unital ring) είναι ένας δακτύλιος εφοδιασμένος με ένα (μοναδικό) στοιχείο, που συμβολίζεται με 1 ($1 \neq 0$) και καλείται **μονάδα** (unit), έτσι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $a1 = 1a = a$, για κάθε $a \in \mathcal{D}$.

Ένας **διαιρετικός δακτύλιος** (division ring) είναι ένας δακτύλιος με μονάδα, έτσι ώστε το ζεύγος $(\mathcal{D}_*, \cdot)$ να είναι (πολλαπλασιαστική) ομάδα. Θυμίζουμε ότι $\mathcal{D}_* := \mathcal{D} - \{0\}$. Άρα, στον διαιρετικό δακτύλιο, κάθε μη μηδενικό στοιχείο έχει **αντίστροφο**. Ιδιαίτερως, ένας μεταθετικός διαιρετικός δακτύλιος καλείται **σώμα** (field). Επομένως, σε ένα σώμα $(\mathcal{D}, +, \cdot)$ και οι δύο ομάδες $(\mathcal{D}, +)$ και $(\mathcal{D}_*, \cdot)$ είναι μεταθετικές.

Υποθέτουμε ότι δίνονται δύο δακτύλιοι $\mathcal{D} \equiv (\mathcal{D}, +, \cdot)$ και $\mathcal{R} \equiv (\mathcal{R}, \oplus, \odot)$. Ένας **μορφισμός** μεταξύ των $\mathcal{D}$ και $\mathcal{R}$ (ring morphism) είναι μία απεικόνιση $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$, η οποία *διατηρεί τις πράξεις του δακτυλίου*, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f(a) \oplus f(b), \\ f(a \cdot b) &= f(a) \odot f(b), \end{aligned}$$

για κάθε $a, b \in \mathcal{D}$.

Ένας μορφισμός δακτυλίων $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$ καλείται **ισομορφισμός** (isomorphism) αν η f είναι απεικόνιση 1-1 και επί. Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι και η $f^{-1} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{D}$ είναι επίσης μορφισμός δακτυλίων.

Συχνά αντί του όρου μορφισμός δακτυλίων χρησιμοποιείται και ο όρος *ομομορφισμός δακτυλίων*.

Βιβλιογραφία

- [1] Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ: *Γραμμική Άλγεβρα*. Αθήνα, 1980.
- [2] Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ: *Εισαγωγή στην Άλγεβρα*. Αθήνα, 1986.
- [3] Ι. ΑΡΑΧΩΒΙΤΗΣ – Ε. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ: *Σημειώσεις Γραμμικής Γεωμετρίας*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα 1985, σελ. 180.
- [4] Δ. ΒΑΡΣΟΣ κ.α. (συγγραφική ομάδα): *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, Τόμος Α*, Εκδόσεις Σοφία, Θεσσαλονίκη, 2003.
- [5] Δ. ΒΑΡΣΟΣ κ.α. (συγγραφική ομάδα): *Μία Εισαγωγή στην Άλγεβρα*, Εκδόσεις Σοφία, Θεσσαλονίκη, 2005.
- [6] E. T. BELL: *The Development of Mathematics*, Dover, New York, 1992.
- [7] J. W. BLATTNER: *Projective plane geometry*, Holden-Day, San Francisco, 1968.
- [8] J. N. CEDERBERG: *A Course in Modern Geometries*, Springer, New York, 1989.
- [9] D. D. DAVIS: *Η Φύση και η Δύναμη των Μαθηματικών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2005.
- [10] N. V. EFIMOV – E. R. ROZENDORN: *Linear Algebra and Multidimensional Geometry*, MIR Publishers, Moscow, 1975
- [11] R. L. FABER: *Foundations of Euclidean and non-Euclidean Geometry*, Marcel Dekker, New York, 1983.
- [12] J. FANG: *Hilbert. Towards a Philosophy of Modern Mathematics II*, Paideia, New York, 1970.
- [13] G. H. HARDY: *A Mathematician's Apology*, Cambridge Univ. Press (Canto Edition), Cambridge, 2002.

- [14] R. HARTSHORNE: *Foundations of Projective Geometry*, Benjamin, New York, 1968.
- [15] M. HENLE: *Modern Geometry: The Analytic Approach*, Prentice Hall, New Jersey, 1997.
- [16] D. HILBERT: *Foundations of Geometry (Grunlangen der Geometrie)*, Open Court, Illinois, 1971.
- [17] S. HOLLINGDALE: *Makers of Mathematics*, Penguin, London, 1991.
- [18] T. W. HUNGERFORD: *Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [19] S. LANG: *Algebra*, Addison-Wesley, Menlo Park, 1984.
- [20] R. J. MIHALEK: *Projective Geometry and Algebraic Structures*, Academic Press, New York, 1972.
- [21] L. MLODINOV: *Euclid's Window. The Story of Geometry from Parallel Lines to Hyperspace*, Allen Lane, The Penguin Press, London, 2002.
- [22] Μ. ΜΠΡΙΚΑΣ: *Μαθήματα Προβολικής Γεωμετρίας*, Αθήνα, 1964.
- [23] N. PENNICK: *Sacred Geometry*, Turnstone Press, Wellingborough, Northamptonshire, 1980.
- [24] J. PIERPONT: *The history of mathematics in the nineteenth century*, Bull. Amer. Math. Soc. **37** (2000), 3–8 [reprinted from Bull. Amer. Math. Soc. **11** (1905), 238–246].
- [25] H. POINCARÉ: *Dernières Pensées*, Flammarion, Paris, 1913.
- [26] M. SPIVAK: *Differential Geometry, Vol. II*, Publish or Perish, Wilmington, 1979.
- [27] Ε. ΣΤΑΜΑΤΗΣ: *Ευκλείδου Γεωμετρία*, Τόμος I (Στοιχείων Βιβλία I–IV), Εκδόσεις Ν. Σάκκουλα, Αθήνα, 1952.
- [28] F. W. STEVENSON: *Projective Planes*, W. H. Freeman, San Francisco, 1972.
- [29] Χ. ΣΤΡΑΝΤΖΑΛΟΣ: *Η εξέλιξη των Ευκλειδείων και μη Ευκλειδείων Γεωμετριών* (Μέρος Α), Εκδόσεις Καρδαμίτσα, Αθήνα, 1987.
- [30] D. J. STRUIK: *Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Ι. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα, 1982.

- [31] I. M. YAGLOM: *Felix Klein and Sophus Lie*, Birkhäuser, Boston, 1988.
- [32] C WEIBEL: *Survey of Non-Desarguesian Planes*, Notices Amer. Math. Soc. **54** (2007), 1294–1303.

Πληκτρολογώντας τις λέξεις *projective geometry* σε οποιαδήποτε μηχανή αναζήτησης του διαδικτύου, ο αναγνώστης μπορεί να βρεί ένα τεράστιο πλήθος σχετικών πληροφοριών, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνονται άρθρα εγκυκλοπαιδειών, εκλαϊκευτικά άρθρα (πολλά με κινούμενα σχέδια), αναφορές σε εφαρμογές (όπως στην οπτική γεωμετρία), και πληθώρα πανεπιστημιακών σημειώσεων.

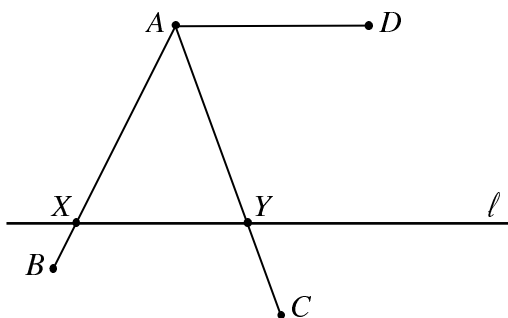
Υποδείξεις λύσεων

Περιλαμβάνονται εδώ μόνον οι λύσεις μερικών επιλεγμένων ασκήσεων.

1.1.11(2). Έστω ℓ τυχούσα ευθεία ενός συσχετισμένου επιπέδου. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1.9, υπάρχουν 4 διαφορετικά σημεία A, B, C, D , που είναι ανά 3 μη συγγραμμικά. Στην ακραία περίπτωση που δύο (το πολύ) από τα A, B, C, D ανήκουν στην ℓ , έχουμε αμέσως το αποτέλεσμα.

Διακρίνουμε τις εξής δύο μη τετριμμένες περιπτώσεις:

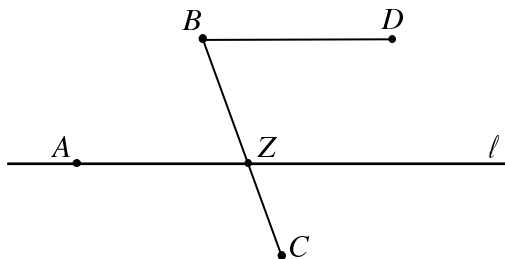
i) Κανένα από τα προηγούμενα σημεία δεν ανήκει στην ℓ .



Τότε ορίζονται οι ευθείες $A \vee B$, $A \vee C$ και $A \vee D$, που είναι διαφορετικές μεταξύ τους καθώς και προς την ℓ (βλ. και την απόδειξη της Πρότασης 1.2.6). Απ' αυτές, μία το πολύ μπορεί να είναι παράλληλη προς την ℓ , ας πούμε η $A \vee D$. Επομένως, οι $A \vee B$, $A \vee C$ θα τέμνουν την ℓ στα αντίστοιχα σημεία X και Y . Παρατηρούμε ότι $X \neq Y$, γιατί διαφορετικά θα είχαμε ότι $A \vee B = A \vee X = A \vee Y = A \vee C$ (άτοπο).

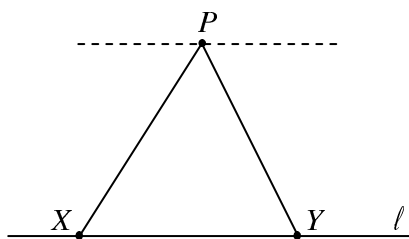
ii) Ένα από τα A, B, C, D βρίσκεται επί της ℓ , ας πούμε το A . Τότε προσδιορίζουμε ένα δεύτερο σημείο $Z \neq A$ ακολουθώντας παρόμοια με την προηγούμενη

διαδικασία, όπως συνοπτικά απεικονίζεται και το επόμενο σχήμα.



1.1.11(3). Α' Τρόπος: Έστω P τυχόν σημείο ενός Σ.Ε. Πρώτα παρατηρούμε ότι υπάρχει μία ευθεία ℓ , η οποία δεν περιέχει το P . Πραγματικά, από το (ΣΕ 3) εξασφαλίζεται η ύπαρξη 3 διαφορετικών και μη συγγραμμικών σημείων A, B, C . Αν το P συμπίπτει με ένα από τα προηγούμενα σημεία, τότε μπορούμε να πάρουμε ως ℓ την ευθεία που ορίζουν τα άλλα δύο. Αν το P δεν συμπίπτει με κανένα από τα σημεία αυτά, τότε θα ανήκει το πολύ σε μία από τις 3 ευθείες που ορίζουν ανά 2 τα A, B, C , άρα μπορούμε να επιλέξουμε τη μια από τις υπόλοιπες.

Σύμφωνα με την προηγούμενη διαπίστωση, μπορούμε να θεωρήσουμε τώρα μια ευθεία ℓ , που δεν περιέχει το P . Κατά την Άσκηση 1.1.11(2), η ℓ περιέχει δύο διαφορετικά σημεία, ας τα καλέσουμε X και Y .



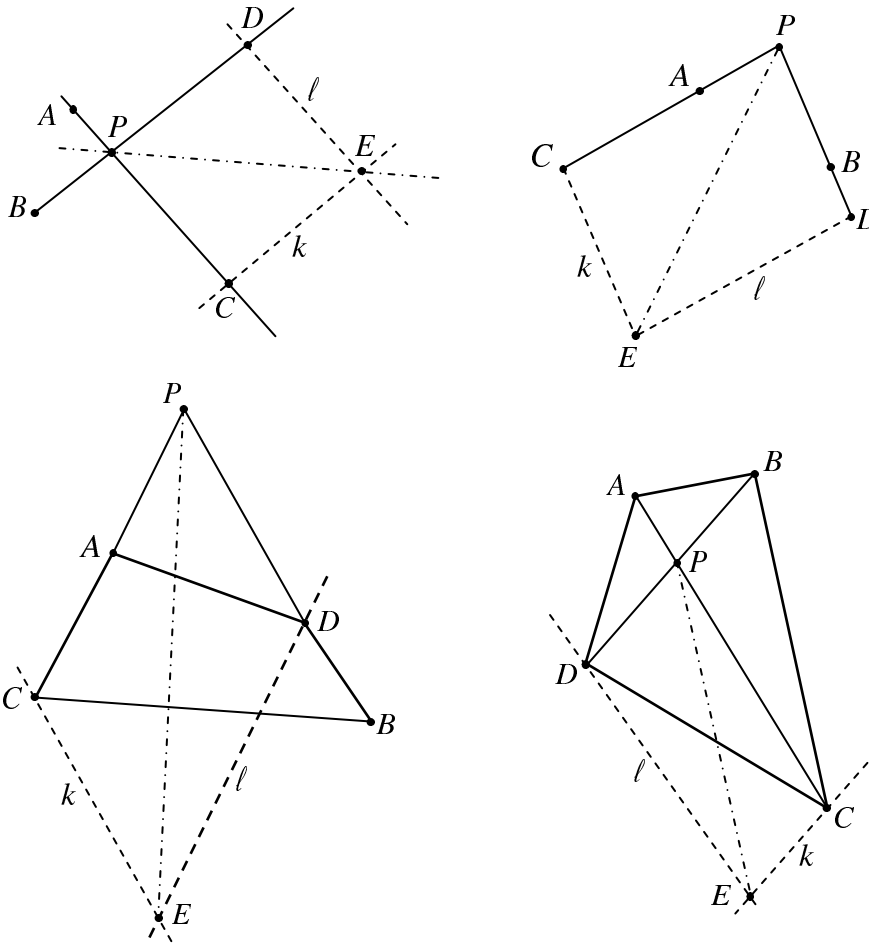
Επειδή $X \neq P \neq Y$, ορίζονται οι $P \vee X$ και $P \vee Y$. Επίσης, κατά το (ΣΕ 2), υπάρχει μία μοναδική ευθεία k , που είναι παράλληλη προς την ℓ και διέρχεται από το P . Διαπιστώνουμε εύκολα ότι οι $k, P \vee X, P \vee Y$ είναι 3 διαφορετικές ευθείες που διέρχονται από το P .

Β' Τρόπος: Θεωρούμε τα 4 σημεία A, B, C, D του Θεωρήματος 1.1.9 και διακρίνουμε διάφορες δυνατές περιπτώσεις, σε σχέση με τη θέση του P ως προς τα A, B, C, D .

i) Το P συμπίπτει με ένα από τα προηγούμενα σημεία, π.χ. το A . Τότε οι ευθείες $P \vee B, P \vee C$ και $P \vee D$ αποδεικνύουν τον ισχυρισμό της άσκησης, επειδή

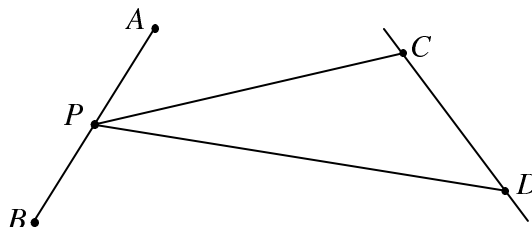
είναι μεταξύ τους διαφορετικές [αν ήταν, για παράδειγμα, $P \vee B = P \vee C$, τότε τα $P = A$ και B, C θα ήσαν συγγραμμικά (άτοπο)].

ii) Το P βρίσκεται στην τομή δύο ευθειών, από αυτές που ορίζουν ανά 2 τα A, B, C, D , όπως στην ομάδα των παρακάτω τεσσάρων σχημάτων.



Στην περίπτωση που, για παράδειγμα, $P = (A \vee C) \wedge (B \vee D)$, φέρνουμε από το C την $k \parallel B \vee D$ και από το D την $\ell \parallel A \vee C$. Παρατηρούμε ότι $k \neq \ell$ [διαφορετικά η $k = \ell$ θα συνεπάγονταν ότι το C θα ήταν σημείο της ℓ (άτοπο)]. Επίσης $k \not\parallel \ell$ [στην αντίθετη περίπτωση θα ήταν και $B \vee D \parallel \ell$ (άτοπο)]. Επομένως ορίζεται το $E = k \wedge \ell$. Επειδή $E \neq P$, ορίζεται και η $P \vee E$. Οι ευθείες $P \vee E$, $A \vee C$ και $B \vee D$ επαληθεύουν τον ισχυρισμό, αφού είναι μεταξύ τους διάφορες [αν, π.χ., ήταν $P \vee E = A \vee C$, τότε το E θα ανήκε στην $A \vee C$ (άτοπο)].

iii) Το P βρίσκεται σε μία από τις ευθείες που ορίζουν 2 από τα προηγούμενα



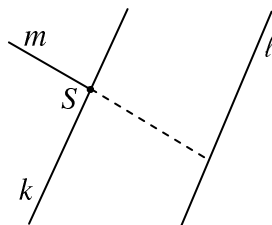
σημεία, ας πούμε την $A \vee B$ (βλ. το προηγούμενο σχήμα). Οι $P \vee C$ και $P \vee D$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους καθώς και προς την $A \vee B$. Πραγματικά, αν ήταν $P \vee C = P \vee D$ τότε θα είχαμε ότι

$$C = (P \vee C) \wedge (C \vee D) = (P \vee D) \wedge (C \vee D) = D,$$

που είναι άτοπο. Επίσης, η $A \vee B = P \vee C$, για παράδειγμα, θα συνεπάγονταν ότι τα A, B, C θα ήσαν συγγραμμικά, που είναι επίσης άτοπο. Οι $A \vee B, P \vee C, P \vee D$ αποτελούν τις ζητούμενες ευθείες.

iv) Αν το P δεν συμπίπτει με κανένα από τα A, B, C, D , τότε μπορούμε να πάρουμε τις ευθείες $P \vee A, P \vee B, P \vee C$, οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

1.1.11(4). Αν $S = k \wedge m$ και υποθέσουμε ότι η m δεν τέμνει την ℓ , τότε από το

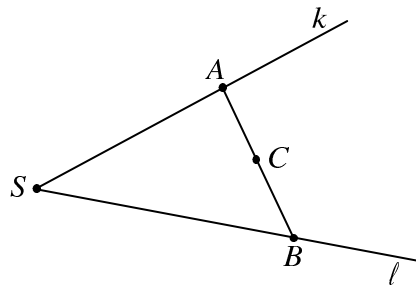


S θα είχαμε δύο παράλληλες προς την ℓ , πράγμα που αντιβαίνει στο (ΣΕ 2).

1.2.9(2). Το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του αξιώματος (ΠΕ 3) [αντιστοίχως του (ΣΕ 3)].

1.2.9(3). Αν ℓ είναι οποιαδήποτε ευθεία, τότε, από τα 4 σημεία του (ΠΕ 3), τουλάχιστον 2 βρίσκονται εκτός της ℓ . Αν τώρα δίνεται ένα σημείο P , τουλάχιστον 2 από τις ευθείες, που ορίζονται από ίδια 4 προηγούμενα σημεία, δεν περιέχουν το P .

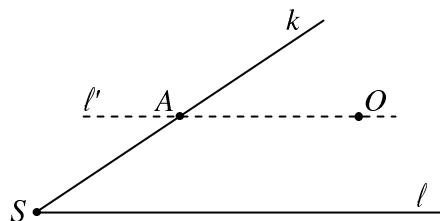
1.2.9(4). Αν $S = k \wedge \ell$, τότε υπάρχει σημείο A της k , με $A \neq S$, και σημείο B της ℓ , με $B \neq S$. Επειδή $A \neq B$, ορίζεται η $A \vee B$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.6,



η $A \vee B$ διαθέτει ακόμη ένα σημείο C διαφορετικό από τα A και B . Το C είναι το ζητούμενο επειδή δεν ανήκει σε καμία από τις δύο ευθείες. Πραγματικά αν, για παράδειγμα, $(C, k) \in \mathcal{I}$, τότε $k = A \vee C = A \vee B$, άρα $(B, k) \in \mathcal{I}$ (άτοπο).

Στην περίπτωση ενός συσχετισμένου επιπέδου διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

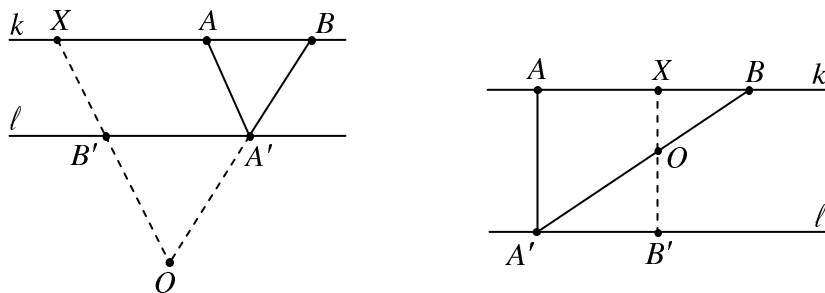
i) Αν οι k και ℓ τέμνονται, θέτουμε $S = k \wedge \ell$.



Επειδή η k διαθέτει τουλάχιστον ένα σημείο $A \neq S$ [βλ. Άσκηση 1.1.11(2)], μπορούμε να φέρουμε από το A μία (μοναδική) ευθεία $\ell' \parallel \ell$. Η ℓ' διαθέτει και ένα σημείο $O \neq A$. Διαπιστώνουμε αμέσως ότι το O είναι ένα σημείο όπως το ζητούμενο.

ii) Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι k και ℓ είναι παράλληλες. Η k διαθέτει τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία A, B και η ℓ άλλα δύο A', B' . Αν το επίπεδο έχει μόνον 4 σημεία, τότε δεν υπάρχει σημείο με τη ζητούμενη ιδιότητα. Αν υπάρχουν περισσότερα από 4, τότε υπάρχει ένα X διαφορετικό από τα προηγούμενα. Στην περίπτωση που το X δεν βρίσκεται σε καμία από τις k, ℓ , τότε αυτό είναι το ζητούμενο. Αν το X ανήκει, ας πούμε, στην k , τότε ορίζονται οι ευθείες $A \vee A'$

και $B \vee A'$, από τις οποίες το πολύ μία είναι παράλληλη προς την $X \vee B'$.



Η τομή της τελευταίας με την μη παράλληλη από τις προηγούμενες δίνει ένα σημείο O με τη ζητούμενη ιδιότητα. Παρόμοια εξετάζεται η περίπτωση να ανήκει το X στην ℓ .

1.2.9(5). Η επαλήθευση των αξιωμάτων του προβολικού επιπέδου είναι άμεση. Το επίπεδο αυτό βρίσκεται σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το $\mathbb{P}_2$. Πραγματικά, κάθε ευθεία του $\mathbb{R}^3$, που περνάει από την αρχή των αξόνων O , τέμνει τη μοναδιαία σφαίρα σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία. Αντιστρόφως, δύο αντιδιαμετρικά σημεία ορίζουν μια διάμετρο, άρα ευθεία που περνάει από το O . Επίσης, κάθε μέγιστος κύκλος ορίζει ένα επίπεδο που περνάει από το O και αντιστρόφως.

1.3.4(1). Το ίδιο το επίπεδο των 7 σημείων.

1.3.4(2). Αυτό διαπιστώνεται με πολλούς τρόπους. Για παράδειγμα:

- Από το δυϊκό του (ΣΕ 1), που δεν αληθεύει πάντοτε λόγω της ύπαρξης παραλλήλων ευθειών.
- Από τη δυϊκή διατύπωση του αξιώματος (ΣΕ 2), που οδηγεί στη μη οριζομένη έννοια παραλληλίας σημείων [παραλληλία δύο διαφορετικών σημείων, δυϊκώς προς αυτήν των ευθειών, θα σήμαινε ανυπαρξία «κοινής» ευθείας (που περιέχει τα σημεία αυτά), σε αντίφαση με το (ΣΕ 1)].
- Το δυϊκό συμπέρασμα της Άσκησης 1.1.11(3) συνεπάγεται ότι κάθε ευθεία διαθέτει τουλάχιστον 3 διαφορετικά σημεία, πράγμα που δεν είναι γενικώς αληθές (: στο συσχετισμένο επίπεδο των τεσσάρων σημείων οι ευθείες έχουν ακριβώς δύο διαφορετικά σημεία).

1.3.4(3). Όχι, αφού το δυϊκό του (ΠΕ 3) δεν περιέχεται στο σύστημα των αξιωμάτων (ΠΕ 1) - (ΠΕ 3). Θα πρέπει να προστεθούν οι Προτάσεις 1.2.4 και 1.2.7.

1.4.10(1). Η απόδειξη γίνεται με συλλογισμούς δυϊκούς προς αυτούς της Προτάσης 1.4.4.

1.4.10(2). Το συμπέρασμα είναι δυϊκό του Πορίσματος 1.4.7.

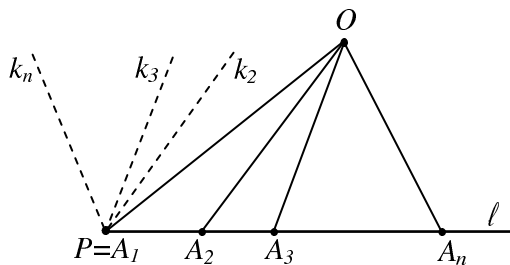
1.4.10(3). Θεωρούμε τυχόν σημείο O εκτός της ℓ . Τότε, σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση και το Πόρισμα 1.4.6, έχουμε ότι $|J(A)| = |J(O)| = |J(\ell)|$. Επομένως το Πόρισμα 1.4.6 ισχύει είτε το O βρίσκεται επί της m είτε όχι.

1.4.10(4). Σε ένα τέτοιο προβολικό επίπεδο όλες οι ευθείες θα περιέχουν τουλάχιστον 4 διαφορετικά σημεία (αλλιώς θα αναγόμεστε στο επίπεδο των 7 σημείων). Επομένως, το πλήθος των σημείων θα είναι τουλάχιστον $3^2 + 3 + 1 = 13$.

1.4.10(6). Επειδή από το O διέρχεται μία ευθεία παράλληλη προς την m , στην περίπτωση που το συσχετισμένο επίπεδο περιέχει άπειρο πλήθος σημείων δεν ισχύει η Πρόταση 1.4.4 και τα Πορίσματα 1.4.6 και 1.4.7. Αν όμως το επίπεδο έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων, τότε το ανάλογο του Πορίσματος 1.4.6 είναι $|J(m)| = |J(O)| - 1$. Με τις ίδιες προϋποθέσεις [και χρησιμοποιώντας την Άσκηση 1.2.9(4) για το συσχετισμένο επίπεδο], η παραπάνω σχέση οδηγεί στην $|J(k)| = |J(\ell)|$, που δίνει το συσχετισμένο ανάλογο του Πορίσματος 1.4.7.

1.4.10(7). Ακολουθούμε τη συλλογιστική της Πρότασης 1.4.8: Θεωρούμε ένα σημείο O εκτός της ℓ . Ορίζονται οι n διαφορετικές ευθείες $O \vee A_i$, όπου A_i ($i = 1, \dots, n$) τα σημεία της ℓ . Επίσης από το O διέρχεται και μία m παράλληλη προς την ℓ . Κάθε μία από τις προηγούμενες ευθείες διαθέτει $n - 1$ διαφορετικά σημεία από το O . Επομένως, μαζί με το O , έχουμε $(n + 1)(n - 1) + 1 = n^2$ διαφορετικά σημεία. Αποδεικνύουμε ότι αυτά είναι ακριβώς τα σημεία του επιπέδου: αν υπάρχει ακόμη ένα σημείο Q διαφορετικό από τα προηγούμενα, τότε ορίζεται η $O \vee Q$, η οποία αναγκαστικά θα συμπίπτει είτε με την m , είτε με μία από τις $O \vee A_i$. Επομένως το Q είναι ένα από τα προηγούμενα n^2 σημεία.

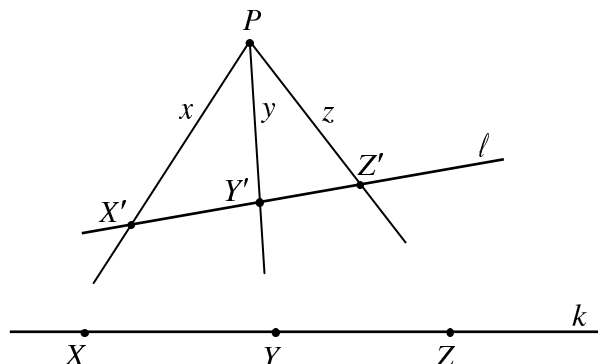
1.4.10(8). Έστω ℓ τυχούσα ευθεία και A_i ($i = 1, \dots, n$) τα σημεία της. Αν P τυχόν σημείον του επιπέδου, που δεν ανήκει στην ℓ , τότε [βλ. τη λύση της Άσκησης 1.4.10(6) για πεπερασμένα συσχετισμένα επίπεδα] είναι $|J(P)| = |J(\ell)| + 1 = n + 1$.



Αν το P ανήκει στην ℓ , τότε αυτό συμπίπτει με κάποιο από τα A_i . Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι $P = A_1$. Θεωρούμε και ένα O εκτός της ℓ . Επομένως από το P διέρχονται οι ευθείες ℓ , $P \vee O$ και $k_j \parallel O \vee A_j$ ($j =$

$2, \dots, n$), δηλαδή συνολικά $n+1$ ευθείες (βλ. και το παραπάνω σχήμα). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι όλες είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

1.5.13(3). Θεωρούμε τυχούσα ευθεία $\ell \neq k$ με $\ell \notin J(P)$ (πάντοτε μπορεί να βρεθεί μια τέτοια ευθεία!).



Η ℓ είναι διαφορετική από τις x, y, z , άρα ορίζονται τα σημεία $X' = \ell \wedge x$, $Y' = \ell \wedge y$ και $Z' = \ell \wedge z$. Διαπιστώνουμε ότι τα τελευταία είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Επομένως (βλ. Πρόταση 1.5.8) υπάρχει προβολικότητα $\overline{\Pi} : J(k) \rightarrow J(\ell)$, τέτοια ώστε $\overline{\Pi}(X) = X'$, $\overline{\Pi}(Y) = Y'$, $\overline{\Pi}(Z) = Z'$. Αν θεωρήσουμε και την προοπτικότητα $\pi : J(\ell) \rightarrow J(P)$, τότε $\pi(X') = x$, $\pi(Y') = y$, $\pi(Z') = z$, οπότε η $\Pi := \pi \circ \overline{\Pi}$ είναι η ζητούμενη προβολικότητα.

1.6.8(3). Οι ευθείες $\{A, B\}$ και $\{C, D\}$ είναι παράλληλες, άρα ορίζουν το ιδεατό σημείο

$$k^* = \{A, B\}^* = \{C, D\}^*.$$

Παρόμοια, οι παράλληλες $\{A, D\}$ και $\{B, C\}$ ορίζουν το

$$l^* = \{A, D\}^* = \{B, C\}^*,$$

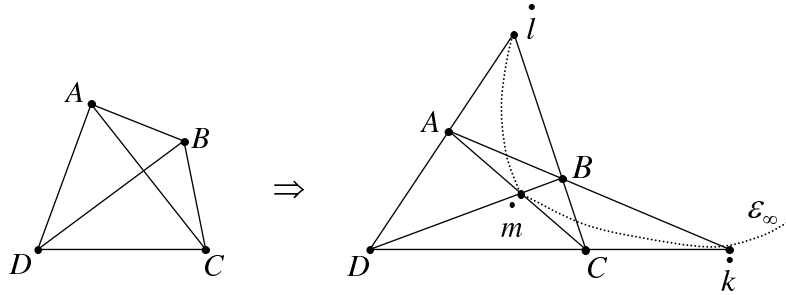
ενώ οι παράλληλες $\{A, C\}$, $\{B, D\}$ ορίζουν το

$$m^* = \{A, C\}^* = \{B, D\}^*.$$

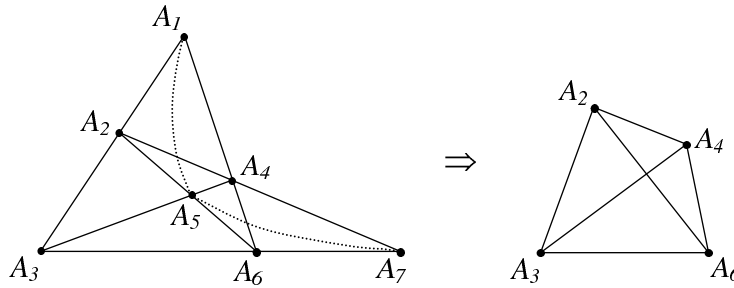
Συνεπώς, η πλήρωση αποτελείται από τα πραγματικά σημεία A, B, C, D και τα ιδεατά k^*, l^*, m^* , δηλαδή καταλήγουμε στο προβολικό επίπεδο των 7 σημείων. Οι ευθείες της πλήρωσης είναι, προφανώς, οι

$$\{A, B, k^*\}, \{C, D, k^*\}, \{A, D, l^*\}, \{B, C, l^*\}, \{A, C, m^*\}, \{B, D, m^*\}, \varepsilon_\infty = \{k^*, l^*, m^*\}.$$

Το παρακάτω σχήμα αποτελεί μια απεικόνιση της προηγούμενης διαδικασίας.



1.6.8(4). Αν αφαιρέσουμε μian ευθεία, για παράδειγμα την $\{A_1, A_5, A_7\}$ τότε παίρνουμε το συσχετισμένο επίπεδο των 4 σημείων, όπως φαίνεται και στο επόμενο βοηθητικό σχήμα.



2.1.11(1). Ας υποθέσουμε ότι $\phi(P) \in \psi(\ell)$. Θεωρούμε τυχόν σημείο $X \in \ell$, οπότε $\phi(X) \in \psi(\ell)$. Επειδή $X \neq P$, ορίζεται η $X \vee P$, άρα $\psi(X \vee P) = \phi(X) \vee \phi(P) = \psi(\ell)$. Επομένως, το 1-1 του μορφισμού συνεπάγεται ότι $X \vee P = \ell$ (άτοπο).

Αν υποθέσουμε ότι ο μορφισμός δεν είναι 1-1, ισχυριζόμαστε ότι δεν ισχύει το προηγούμενο συμπέρασμα, δηλαδή μπορούμε να βρούμε $\mathcal{Q} \in \mathcal{P}$ και $k \in \mathcal{L}$, έτσι ώστε $\mathcal{Q} \notin k$ και $\phi(\mathcal{Q}) \in \psi(k)$. Πραγματικά, αφού η ψ δεν είναι 1-1, υπάρχουν τουλάχιστον δύο ευθείες k, m , τέτοιες ώστε $k \neq m$ και $\psi(k) = \psi(m)$. Θέτουμε $S = k \wedge m$ και επί της m επιλέγουμε και ένα σημείο $\mathcal{Q} \neq S$. Προφανώς $\mathcal{Q} \notin k$. Επιπλέον, αφού (ϕ, ψ) είναι μορφισμός, η $\mathcal{Q} \in m$ συνεπάγεται ότι $\phi(\mathcal{Q}) \in \psi(m) = \psi(k)$, επομένως καταλήγουμε στον ισχυρισμό.

2.1.11(2). Πρόκειται για την αντιθετοαντιστροφή της προηγούμενης άσκησης [: αν ήταν $P \notin \ell$, τότε αναγκάως θα είχαμε ότι $\phi(P) \notin \psi(\ell)$ (άτοπο)].

2.1.11(3). Έστω τυχόν $(P', \ell') \in \mathcal{P}' \times \mathcal{L}'$ με $P' \in \ell'$. Λόγω της υπόθεσης υπάρχουν $P \in \mathcal{P}$ και $\ell \in \mathcal{L}$, τέτοια ώστε $\phi(P) = P'$ και $\psi(\ell) = \ell'$. Επομένως $\phi(P) \in \psi(\ell)$. Εφαρμόζοντας τώρα την Άσκηση 2.1.11(2), από την τελευταία σχέση προκύπτει

ότι $P \in \ell$, και, ισοδύναμα, $\phi^{-1}(P') \in \psi^{-1}(\ell')$, με την οποίαν καταλήγουμε στο συμπέρασμα.

2.1.11(4). Εκφράζουμε πρώτα την ψ μέσω της ϕ : αν ℓ είναι μία ευθεία του πρώτου επιπέδου, θεωρούμε δύο τυχόντα σημεία της A, B . Τότε $\psi(\ell) = \psi(A \vee B) = \phi(A) \vee \phi(B)$. Προφανώς, αν πάρουμε δύο άλλα σημεία της ℓ , ας πούμε τα C, D (ή τα A, C , αν έχουμε το επίπεδο των 7 σημείων, οπότε οι ευθείες έχουν ακριβώς 3 σημεία) θα έχουμε ότι $\ell = A \vee B = C \vee D$, άρα $\psi(\ell) = \phi(C) \vee \phi(D) = \phi(A) \vee \phi(B)$.

Αναλόγως εκφράζεται η ϕ μέσω της ψ .

2.1.11(5). Έστω ℓ τυχούσα ευθεία του πρώτου επιπέδου. Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση, θα είναι $\psi(\ell) = \phi(A) \vee \phi(B) = \psi'(\ell)$, για οποιαδήποτε σημεία A, B της ℓ . Επειδή η τελευταία ισχύει για κάθε $\ell \in \mathcal{L}$, συνάγεται ότι $\psi = \psi'$.

2.1.11(7). Για οποιοδήποτε $(P, \ell) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{L}_1$ με $P \in \ell$, ο ορισμός του μορφισμού συνεπάγεται το επόμενο μεταθετικό διάγραμμα, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

$$\begin{array}{ccc}
 (P, \ell) \in \mathcal{I}_1 & \xrightarrow{(\phi_1, \psi_1)} & (\phi_1(P), \psi_1(\ell)) \in \mathcal{I}_2 \\
 & \searrow (\phi_2 \circ \phi_1, \psi_2 \circ \psi_1) & \downarrow (\phi_2, \psi_2) \\
 & & (\phi_2(\phi_1(P)), \psi_2(\psi_1(\ell))) \in \mathcal{I}_3
 \end{array}$$

2.1.11(8). Για τυχούσα ευθεία ℓ θέτουμε $\psi(\ell) := \phi(A) \vee \phi(B)$, όπου A, B είναι δύο οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία της ℓ . Η ψ είναι καλά ορισμένη: πραγματικά, αν πάρουμε δύο άλλα σημεία της C και D , διαφορετικά μεταξύ τους καθώς και προς τα προηγούμενα (ή τα A, C , αν η ευθεία διαθέτει μόνον 3 σημεία), τότε η συγγραμμικότητα των A, B, C, D και η υπόθεση συνεπάγονται τη συγγραμμικότητα των $\phi(A), \phi(B), \phi(C), \phi(D)$. Επομένως, $\psi(\ell) = \phi(A) \vee \phi(B) = \phi(C) \vee \phi(D)$, που αποδεικνύει ότι ο ορισμός της $\psi(\ell)$ είναι ανεξάρτητος της επιλογής των σημείων της ℓ .

Κατόπιν διαπιστώνουμε ότι το ζεύγος (ϕ, ψ) ορίζει μορφισμό προβολικών επιπέδων: για τυχόν (P, ℓ) με $P \in \ell$, μπορούμε να γράψουμε ότι $\ell = A \vee B$, οπότε, όπως προηγουμένως, $\phi(P) \in \phi(A) \vee \phi(B) = \psi(\ell)$.

Επειδή η ϕ είναι 1-1 και επί, το (ϕ, ψ) είναι ισομορφισμός (βλ. Πρόρισμα 2.1.6). Τέλος, το μονοσήμαντο της ψ είναι συνέπεια της Άσκησης 2.1.11(5).

2.1.11(9). Η απόδειξη του ερωτήματος α) ακολουθεί την απόδειξη των αναλόγων συμπερασμάτων του προβολικού επιπέδου.

Για το β) προχωρούμε ως εξής: Θεωρούμε δύο διαφορετικές (αλλιώς το συμπέρασμα είναι προφανές) παράλληλες ευθείες k, ℓ . Θα δείξουμε ότι $\psi(k) \parallel \psi(\ell)$. Ας υποθέσουμε ότι $\psi(k) \not\parallel \psi(\ell)$. Λόγω του 1-1 της ψ , είναι και $\psi(k) \neq \psi(\ell)$, οπότε ορίζεται το $X' = \psi(k) \wedge \psi(\ell) \in \mathcal{P}'$. Επειδή η ϕ είναι επί, υπάρχει $X \in \mathcal{P}$ με $\phi(X) = X'$. Απ' το άλλο μέρος, το ανάλογο της Πρότασης 2.1.4 για το συσχετισμένο επίπεδο, συνεπάγεται ότι $\phi(X) = \psi(k) \wedge \psi(\ell) = \phi(k \wedge \ell)$, οπότε (αφού η ϕ είναι 1-1) και $X = k \wedge \ell$ (άτοπο). Συνεπώς, $k \parallel \ell \Rightarrow \psi(k) \parallel \psi(\ell)$.

Στο ίδιο άτοπο καταλήγουμε αν χρησιμοποιήσουμε το συσχετισμένο ανάλογο της Άσκησης 2.1.11(2): από την $\phi(X) \in \psi(k)$ προκύπτει ότι $X \in k$. Παρόμοια, $X \in \ell$ κλπ.

2.1.11(10). α) Το επί της ψ αποδεικνύεται όπως στο Θεώρημα 2.1.5.

Αν υποθέσουμε ότι δεν ισχύει το 1-1 της ψ , θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$ με $k \neq \ell$ και $\psi(k) = \psi(\ell)$. Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.5, ισχυριζόμαστε ότι

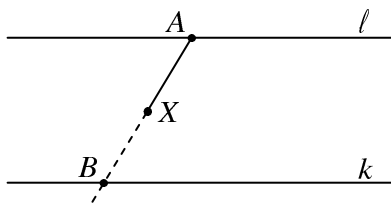
$$(*) \quad \forall X \in \mathcal{P} \Rightarrow \phi(X) \in \psi(k) = \psi(\ell),$$

που οδηγεί σε άτοπο. Η απόδειξη όμως του ισχυρισμού (*) απαιτεί κατάλληλες τροποποιήσεις λόγω της ύπαρξης παραλλήλων. Έτσι θα θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση συσχετισμένων επιπέδων των οποίων οι ευθείες διαθέτουν τουλάχιστον 3 διαφορετικά σημεία. Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

i) $k \parallel \ell$. Θεωρούμε τυχόν $X \in \mathcal{P}$ εκτός των k, ℓ . Επίσης, επί της ℓ επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της, ας το πούμε A . Αφού $X \neq A$, ορίζεται η $A \vee X$ που θα τέμνει την k σε κάποιο σημείο B [βλ. Άσκηση 1.1.11(4), και το παρακάτω σχήμα]. Λόγω του μορφισμού έχουμε τις σχέσεις

$$(A, k) \in \mathcal{I} \Rightarrow (\phi(A), \psi(k)) \in \mathcal{I}'$$

$$(B, \ell) \in \mathcal{I} \Rightarrow (\phi(B), \psi(\ell)) \in \mathcal{I}'.$$



Οι τελευταίες, λόγω του (ΣΕ 1), του 1-1 της ϕ , και της Άσκησης 2.1.11(9α) οδηγούν στην

$$\psi(A \vee B) = \phi(A) \vee \phi(B) = \psi(k) = \psi(\ell).$$

Επομένως, η $X \in A \vee B$ συνεπάγεται την $\phi(X) \in \psi(A \vee B) = \psi(k) = \psi(\ell)$, που αποδεικνύει τον (*) στην περίπτωση αυτή.

ii) $k \not\parallel \ell$ Θεωρούμε τα X, A όπως προηγουμένως. Παρατηρούμε ότι $A \vee X \not\parallel k$. Πραγματικά, αν ήταν $A \vee X \parallel k$, τότε θα ήταν και $\psi(A \vee X) \parallel \psi(k) = \psi(\ell)$. Αλλά

$$\begin{aligned} (A, \ell) \in I &\Rightarrow (\phi(A), \psi(\ell)) \in I', \\ (A, A \vee X) \in I &\Rightarrow (\phi(A), \psi(A \vee X)) \in I', \end{aligned}$$

οπότε οι παράλληλες $\psi(A \vee X)$ και $\psi(\ell)$ θα είχαν κοινό σημείο το $\phi(A)$ (άτοπο). Επομένως, αναγκαστικά, $k \not\parallel \ell$ και προχωρούμε στην απόδειξη του (*) όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

Σε όλα τα προηγούμενα υποθέσαμε ότι οι ευθείες έχουν τουλάχιστον 3 διαφορετικά σημεία. Αν υποθέσουμε ότι έχουν μόνον 2, τότε και τα δύο επίπεδα είναι της μορφής του Παραδείγματος 1.1.3. Ας καλέσουμε τα σημεία τους A, B, C, D και A', B', C', D' αντιστοίχως (βλ. και το σχήμα της επομένης σελίδας), και ας υποθέσουμε (για ευκολία) ότι

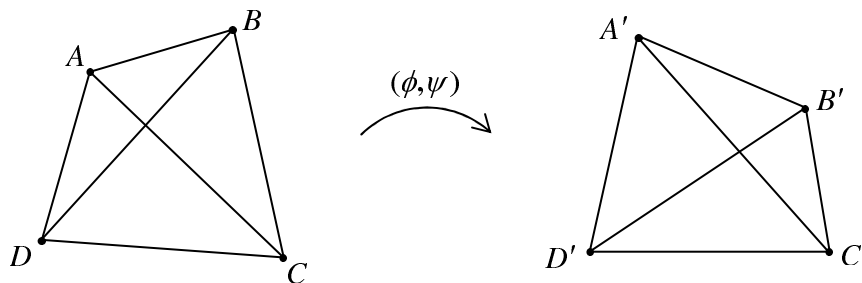
$$\phi(A) = A', \phi(B) = B', \phi(C) = C', \phi(D) = D'.$$

Το επί της ψ αποδεικνύεται όπως στη γενική περίπτωση.

Για το 1-1 προχωρούμε ως εξής: αν πάρουμε δύο οποιεσδήποτε ευθείες του πρώτου επιπέδου (όλες είναι διαφορετικές μεταξύ τους), για παράδειγμα τις $A \vee B, C \vee D$, τότε

$$\begin{aligned} \psi(A \vee B) &= \phi(A) \vee \phi(B) = A' \vee B' \\ &\neq C' \vee D' = \phi(C) \vee \phi(D) = \psi(C \vee D). \end{aligned}$$

Παρόμοια ισχύουν και για τα άλλα ζεύγη διαφορετικών ευθειών.



β) Ακολουθώντας τη διαδικασία της απόδειξης του Θεωρήματος 2.1.8 ορίζουμε την τριάδα $(\mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{L}}, \in)$ και δείχνουμε ότι ισχύουν τα αξιώματα (ΣΕ 1) και (ΣΕ 3) όπως στην περίπτωση του προβολικού επιπέδου.

Για το (ΣΕ 2) ακολουθούμε αναλόγους συλλογισμούς, κατάλληλα προσαρμοσμένους στα νέα δεδομένα. Για την ακρίβεια θεωρούμε τυχόν $(P, \tilde{\ell}) \in P \times \tilde{\mathcal{L}}$ με $P \notin \tilde{\ell} = J(\ell)$. Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι $(P, \ell) \notin \mathcal{I}$, άρα [σύμφωνα με το (ΣΕ 2) για το $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$] υπάρχει μοναδική $k \in \ell$ με $k//\ell$ και $(P, k) \in \mathcal{I}$. Ελέγχουμε αμέσως ότι $J(k) \cap J(\ell) = \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι $\tilde{k}//\tilde{\ell}$ με $P \in \tilde{k}$. Η $\tilde{k}$ είναι η μοναδική ευθεία που περνάει από το P και είναι παράλληλη προς την $\tilde{\ell}$. Πραγματικά, αν υπάρχει και μία $\tilde{m} = J(m)$ με $\tilde{m}//\tilde{\ell}$ και $P \in \tilde{m}$, τότε $J(m) \cap J(k) = \emptyset$, οπότε $m//\ell$ με $(P, m) \in \mathcal{I}$. Επομένως $m = k$ και $\tilde{m} = \tilde{k}$, που ολοκληρώνει την απόδειξη του (ΣΕ 2).

Τέλος θεωρούμε το ζεύγος $(id_{\mathcal{P}}, J)$. Και οι δύο απεικονίσεις είναι 1 – 1 και επί. Επίσης διατηρείται η σύμπτωση (όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.8). Η διατήρηση της παραλληλίας είναι επίσης προφανής: αν $k//\ell$ (με $k \neq \ell$, αλλιώς το συμπέρασμα είναι τετριμμένο), τότε $J(k) \cap J(\ell) = \emptyset$, άρα $J(k) = \tilde{k}//\tilde{\ell} = J(\ell)$.

γ) Το ζεύγος (ϕ^{-1}, ψ^{-1}) διατηρεί τη σχέση της σύμπτωσης, όπως στην Άσκηση 2.1.11(3), χρησιμοποιώντας βέβαια τα απαραίτητα συμπεράσματα από την Άσκηση 2.1.11(9α).

Διατήρηση της παραλληλίας: αν $k'//\ell'$, υπάρχουν $k, \ell \in \mathcal{L}$ με $\psi(k) = k'$ και $\psi(\ell) = \ell'$. Προφανώς $k//\ell$, αλλιώς το $\phi(k \wedge \ell)$ θα ήταν κοινό σημείο των παραλλήλων k', ℓ' . Επομένως, $\psi^{-1}(k') = k//\ell = \psi^{-1}(\ell')$.

δ) Εργαζόμαστε με ανάλογο τρόπο.

2.2.23(4). Άμεση συνέπεια το Πορίσματος 2.2.18 και του δυϊκού του.

2.2.23(5). Ειδική περίπτωση της 2.1.11(8).

2.2.23(6). Λόγω του 1 – 1 της ϕ , στην περίπτωση της ομολογίας έχουμε ότι

$$\begin{aligned} X_0 \neq A &\Rightarrow \phi(X_0) \neq \phi(A) = A, \\ X_0 \neq Z &\Rightarrow \phi(X_0) \neq \phi(Z) = Z, \end{aligned}$$

απ' όπου και το αποτέλεσμα.

Στην περίπτωση της έπαρσης είναι $A = Z$, άρα $\phi(X_0) \in J(A \vee X_0) - \{A\}$.

2.2.23(7). Έστω τυχούσα ομολογία $(\phi, \psi) \in \mathbb{H}(A, \ell)$. Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε σημείο X_0 με $X_0 \neq A$ και $X_0 \notin \ell$. Εφ' όσον η $A \vee X_0$ διαθέτει ακριβώς 3 σημεία, αυτά είναι τα A, X_0 και $Z = A \vee X_0 \wedge \ell$. Απ' το άλλο μέρος, επειδή (κατά την προηγούμενη άσκηση) $\phi(X_0) \neq A, Z$, αναγκαστικά θα είναι $\phi(X_0) = X_0$. Επομένως [βλ. Πόρισμα 2.2.18] $(\phi, \psi) = (id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})$, οπότε $\mathbb{H}(A, \ell) = \{(id_{\mathcal{P}}, id_{\mathcal{L}})\}$. Δηλαδή η ομάδα είναι τετριμμένη. Προφανώς αυτό συμβαίνει στο προβολικό επίπεδο των 7 σημείων.

2.3.9(3). Δεν υπάρχει η αναφερομένη περίπτωση. Αν ήταν, για παράδειγμα, $(A, \ell_0) \in \mathcal{I}$ και $(B, \ell_0) \notin \mathcal{I}$, τότε θα υπήρχε κατάλληλη k , έτσι ώστε $B = \phi(B) = \phi(A) = (k^-)^*$ (άτοπο).

2.3.9(4). Από την Άσκηση 2.1.11(96) προκύπτει και η διατήρηση της παραλληλίας, άρα το (ϕ, ψ) ορίζει μορφισμό συσχετισμένων επιπέδων. Το ζητούμενο τώρα προκύπτει από την Άσκηση 2.1.11(10).

2.3.9(5). Η άσκηση αποτελεί το συσχετισμένο ανάλογο της Άσκησης 2.2.23(5) [βλ. επίσης και την Άσκηση 2.1.11(8)]. Για την επίλυσή της ακολουθούμε (με τις κατάλληλες τροποποιήσεις) την ιδέα των δύο τελευταίων, χρησιμοποιώντας τα απαραίτητα συμπεράσματα των Ασκήσεων 2.1.11(9) και 2.1.11(10).

3.1.4(4). α) $[2, 1, 3] \vee [1, 0, -1] = \langle 1, -5, 1 \rangle$.

β) Δεν ορίζεται ευθεία αφού $[-2, 0, 4] = [-2(1, 0, -2)] = [1, 0, -2]$, δηλαδή τα δεδομένα σημεία συμπίπτουν.

3.1.4(5). α) Δεν υπάρχει τομή. β) $\langle 1, 0, 0 \rangle \wedge \langle 1, -2, 1 \rangle = [0, 1, 2]$.

3.1.4(6). Είναι τα $[t, 1, 0]$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

3.2.4(1). Αν $[a', b', c'] = [a, b, c]$, τότε $(a', b', c') = \mathcal{A}(a, b, c)$ (για $\mathcal{A} \in \mathbb{R}_*$), άρα η γραμμικότητα της f συνεπάγεται ότι $\phi([a', b', c']) = [\mathcal{A}f(a, b, c)] = [f(a, b, c)]$. Ανάλογα ισχύουν και για την (3.2.9).

3.2.4(2). Διαπιστώνουμε ότι η f είναι γραμμική απεικόνιση 1-1 (άρα και επί), δηλαδή γραμμικός αυτομορφισμός του $\mathbb{R}^3$. Επομένως, η f ορίζει μία συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2$. Για να βρούμε την ακριβή μορφή της τελευταίας, υπολογίζουμε τον πίνακα M της f , που είναι ο

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ακόμη έχουμε ότι

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad (M^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \phi([a, b, c]) &= [f(a, b, c)] = [a, b, b + c], \\ \psi(\langle a, \beta, \gamma \rangle) &= \langle (a, \beta, \gamma) \cdot (M^t)^{-1} \rangle = \langle a, \beta - \gamma, \gamma \rangle. \end{aligned}$$

3.2.4(3). Λύνουμε την α), οπότε για τη β) προχωρούμε αναλόγως.

Α' Τρόπος: Θεωρούμε την απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, η οποία ορίζεται με τη σχέση $f(x, y, z) := (z, y, x)$. Διαπιστώνουμε ότι είναι γραμμικός αυτομορφισμός του $\mathbb{R}^3$, με αντίστοιχο πίνακα

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

και

$$(M^t)^{-1} = M^t = M.$$

Επομένως, η f ορίζει μία συγγραμμικότητα, ας την καλέσουμε $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$, μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} \bar{\phi}([a, b, c]) &= [f(a, b, c)] = [c, b, a], \\ \bar{\psi}(\langle a, b, c \rangle) &= \langle (a, b, c) \cdot (M^t)^{-1} \rangle = \langle c, b, a \rangle. \end{aligned}$$

Επειδή, για κάθε $[x, y, z] \in \mathbb{P}_2$, είναι $\phi([x, y, z]) = \bar{\phi}([x, y, z])$, προκύπτει ότι $\phi = \bar{\phi}$. Άρα το ζεύγος (ϕ, ψ) , με $\psi = \bar{\psi}$, είναι η συγγραμμικότητα που ορίζει η απεικόνιση ϕ .

Β' Τρόπος: Πρώτα διαπιστώνουμε ότι η ϕ είναι απεικόνιση 1-1. Πραγματικά, αν, για οποιαδήποτε $[x, y, z], [x', y', z']$ του $\mathbb{P}_2$, είναι $\phi([x, y, z]) = \phi([x', y', z'])$, τότε θα είναι και $[z, y, x] = [z', y', x']$, άρα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}_*$, τέτοιο ώστε $(z', y', x') = \lambda(z, y, x)$, απ' όπου προκύπτει ότι $[x, y, z] = [x', y', z']$.

Η ϕ είναι επί: αν $[a, b, c]$ είναι τυχόν σημείον του $\mathbb{P}_2$, ζητούμε να βρούμε $[x, y, z] \in \mathbb{P}_2$ τέτοιο ώστε $\phi([x, y, z]) = [z, y, x] = [a, b, c]$. Για να συμβαίνει αυτό αρκεί να βρούμε $\lambda \in \mathbb{R}_*$, τέτοιο ώστε $(z, y, x) = \lambda(a, b, c)$. Αν πάρουμε $\lambda = 1$, τότε το ζητούμενο $[x, y, z]$ είναι το $[c, b, a]$.

Απ' το άλλο μέρος, θεωρούμε 3 διαφορετικά συγγραμμικά σημεία $[a_i, b_i, c_i]$ ($i = 1, 2, 3$). Τότε [βλ. σχέση (3.1.14)]

$$(*) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Αν πάρουμε τώρα τις εικόνες των προηγούμενων σημείων μέσω της ϕ , δηλαδή τα $\phi([a_i, b_i, c_i]) = [c_i, b_i, a_i]$, τότε σχηματίζεται η αντίστοιχη ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = \Delta.$$

Λόγω της (*), έχουμε ότι $\Delta = 0$, δηλαδή η ϕ απεικονίζει συγγραμμικά σημεία σε συγγραμμικά. Άρα, κατά την Άσκηση 2.2.23(5), ορίζεται μία συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) .

Θα προσδιορίσουμε τώρα την ψ (φυσικά χωρίς χρήση πινάκων). Έτσι, για τυχούσα ευθεία $k = \langle a, \beta, \gamma \rangle$, θέτουμε $\psi(k) = \langle x, y, z \rangle$. Αν πάρουμε και δύο (διαφορετικά) σημεία $[p, q, r]$ και $[\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}]$ της k , τότε

$$\langle a, \beta, \gamma \rangle = [p, q, r] \vee [\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}],$$

απ' όπου προκύπτει το σύστημα

$$(I) \quad \begin{aligned} pa + q\beta + r\gamma &= 0 \\ \bar{p}a + \bar{q}\beta + \bar{r}\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Επίσης, από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \langle x, y, z \rangle &= \psi(\langle a, \beta, \gamma \rangle) = \psi([p, q, r] \vee [\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}]) = \\ &= \phi([p, q, r]) \vee \phi([\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}]) = [r, q, p] \vee [\bar{r}, \bar{q}, \bar{p}] \end{aligned}$$

οδηγούμαστε στο σύστημα

$$(II) \quad \begin{aligned} rx + qy + pz &= 0 \\ \bar{r}x + \bar{q}y + \bar{p}z &= 0. \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τα συστήματα (I) και (II) βλέπουμε ότι μπορούμε να πάρουμε $(x, y, z) = (\gamma, \beta, a)$, οπότε $\psi(\langle a, \beta, \gamma \rangle) = \langle \gamma, \beta, a \rangle$, η οποία συμπίπτει με τη μορφή της ψ που βρήκαμε και με τον άλλο τρόπο.

3.2.4(4). Υπολογίζουμε τη ζητούμενη ευθεία για τη συγγραμμικότητα α) της προηγούμενης άσκησης.

Α' Τρόπος: Βρήκαμε προηγουμένως ότι η ϕ ορίζει συγγραμμικότητα (ϕ, ψ) με πίνακα

$$(M^t)^{-1} = M^t = M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως,

$$\psi(\langle 0, 0, 1 \rangle) = \langle (0, 0, 1) \cdot M \rangle = \langle 1, 0, 0 \rangle.$$

Β' Τρόπος: Θα εκφράσουμε τη δοθείσα ευθεία μέσω δύο σημείων της. Για το σκοπό αυτό θα βρούμε πρώτα τη μορφή των σημείων της ευθείας. Έτσι, αν $[x, y, z] \in \langle 0, 0, 1 \rangle$, τότε $z = 0$, άρα τα σημεία της $\langle 0, 0, 1 \rangle$ έχουν τη μορφή

$[x, y, 0]$. Επομένως, μπορούμε να εκφράσουμε την $\langle 0, 0, 1 \rangle$ μέσω των $[1, 0, 0]$ και $[0, 1, 0]$, που είναι απλά και διευκολύνουν τους υπολογισμούς. Συνεπώς, μέσω του τύπου της ϕ , βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\psi(\langle 0, 0, 1 \rangle) &= \phi([1, 0, 0]) \vee \phi([0, 1, 0]) \\ &= [0, 0, 1] \vee [0, 1, 0] = \langle 1, 0, 0 \rangle.\end{aligned}$$

3.2.4(5). Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα κέντρο $A = [a, b, c]$. Τότε θα είναι $[a, b, c] = \phi([a, b, c]) = [c, b, a]$. Επομένως, θα υπάρχει $\beta \neq 0$, τέτοιο ώστε $c = \beta a, b = \beta b, a = \beta c$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

I) $b \neq 0$ και II) $b = 0$.

Στην I) θα είναι $\beta = 1$, άρα $c = a$ και $A = [a, b, a]$. Κατά συνέπεια, εμφανίζονται δύο υποπεριπτώσεις:

I₁) $a = 0$. Τότε $A = [0, b, 0] = [0, 1, 0]$

Ας δούμε αν το $A = [0, 1, 0]$ είναι πραγματικά κέντρο. Αν θεωρήσουμε τυχούσα $k = \langle a, \beta, \gamma \rangle \in J(A)$, τότε $k = \langle a, 0, \gamma \rangle$. Επειδή η τελευταία πρέπει να παραμένει σταθερή (αναλλοίωτη) μέσω της ψ , θα είναι

$$\langle a, 0, \gamma \rangle = \psi(\langle a, 0, \gamma \rangle) = \langle \gamma, 0, a \rangle,$$

άρα θα υπάρχει $\rho \neq 0$, τέτοιο ώστε $\gamma = \rho a, a = \rho \gamma$. Παρατηρούμε ότι αναγκάως $a \neq 0 \neq \gamma$, οπότε $a^2 = \gamma^2$. Επομένως, οι μόνες σταθερές (ως προς την ψ) ευθείες, που διέρχονται από το A , είναι οι k που ικανοποιούν τη συνθήκη $a^2 = \gamma^2$. Αυτό σημαίνει ότι το $A = [0, 1, 0]$ δεν είναι κέντρο, αφού παραμένουν σταθερές μόνον συγκεκριμένες ευθείες της δέσμης $J(A)$, και όχι όλες, όπως απαιτεί ο ορισμός του κέντρου.

I₂) $a \neq 0$. Τότε $A = [a, b, a] = [1, b/a, 1] = [1, p, 1]$, με $p \neq 0$. Τυχούσα ευθεία $k = \langle a, \beta, \gamma \rangle \in J([1, p, 1])$ θα ικανοποιεί την

$$(*) \quad a + p\beta + \gamma = 0.$$

Επιπλέον, αν το A ήταν κέντρο, θα ήταν και

$$\langle a, \beta, \gamma \rangle = \psi(\langle a, \beta, \gamma \rangle) = \langle \gamma, \beta, a \rangle,$$

οπότε θα υπήρχε $\mu \neq 0$, έτσι ώστε $\gamma = \mu a, \beta = \mu \beta, a = \mu \gamma$.

Αν $\beta = 0$, τότε η (*) συνεπάγεται ότι $\langle a, \beta, \gamma \rangle = \langle a, 0, -a \rangle = \langle 1, 0, -1 \rangle$. Άρα, η μόνη σταθερή (ως προς την ψ) ευθεία, που διέρχεται από το A είναι η $\langle 1, 0, -1 \rangle$.

Αν $\beta \neq 0$, τότε $\mu = 1$, οπότε $\gamma = a$ και η (*) οδηγεί στη $\beta = -p/2a$, άρα και πάλι οι σταθερές ευθείες της δέσμης του A είναι αυτές που ικανοποιούν την

τελευταία συνθήκη, και όχι όλες οι ευθείες οι διερχόμενες εκ του A . Συνεπώς, το $A = [1, p, 1]$ δεν είναι κέντρο.

Στην περίπτωση II) θα είναι $A = [a, 0, c]$. Για να είναι το A κέντρο, θα πρέπει, όπως και στην περίπτωση I), να είναι

$$[a, 0, c] = \phi([a, 0, c]) = [c, 0, a],$$

άρα $c = va$, $a = vc$ ($v \neq 0$). Παρατηρούμε ότι αναγκαία $a \neq 0 \neq c$ και $v = \pm 1$. Συνεπώς, διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

II₁) $v = 1$. Τότε $A = [a, 0, c] = [1, 0, 1]$. Εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση I), διαπιστώνουμε ότι το A δεν είναι κέντρο, αφού παραμένουν σταθερές (μέσω της ψ) μόνον ορισμένες ευθείες που διέρχονται από το A (ποιές;).

II₂) $v = -1$. Τότε $A = [1, 0, -1]$. Τώρα, τυχούσα $k = \langle a, \beta, \gamma \rangle \in J([1, 0, -1])$ θα έχει τη γενική μορφή $k = \langle a, \beta, a \rangle$, οπότε

$$\psi(k) = \psi(\langle a, \beta, a \rangle) = \langle a, \beta, a \rangle = k.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το $[1, 0, -1]$ είναι, τελικώς, το κέντρο της δεδομένης (ϕ, ψ) .

Για τον προσδιορισμό του άξονα εργαζόμαστε με ανάλογο τρόπο και βρίσκουμε ότι είναι η ευθεία $\langle 1, 0, -1 \rangle$.

3.3.15(1). Για $q \neq 0$ βρήκαμε ότι $t = \frac{b}{q} \cdot \frac{p}{a}$, ενώ για $r \neq 0$ βρίσκουμε (με ανάλογη διαδικασία) ότι $t' = \frac{c}{r} \cdot \frac{p}{a}$. Όμως, τα $[1, 0, 0]$, $[a, b, c]$, $[p, q, r]$ είναι συγγραμμικά, άρα

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix} = br - qc.$$

Επομένως, $\frac{b}{q} = \frac{c}{r}$, οπότε $t = t'$.

3.3.15(2). Στην ταυτοτική, αφού ο πίνακας τώρα είναι ο μοναδιαίος (ταυτοτικός), ο οποίος αντιστοιχεί στον ταυτοτικό αυτομορφισμό του $\mathbb{R}^3$.

3.3.15(3). Θεωρούμε τυχούσα ευθεία $k \in J([1, 0, 0])$, όπως στην υπόδειξη. Επειδή $k = \langle 0, \beta, \gamma \rangle$, τυχόν $P = [a, b, c] \in k$, με $[a, b, c] \neq [1, 0, 0]$, ικανοποιεί τη σχέση

$$(*) \quad \beta b + \gamma c = 0.$$

Απ' το άλλο μέρος, σύμφωνα και με την υπόδειξη, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(k) &= [1, 0, 0] \vee \bar{\phi}([a, b, c]) \\ &= [1, 0, 0] \vee [(a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}] \\ &= [1, 0, 0] \vee [at, b, c].\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το $[at, b, c]$ είναι σημείο της k , λόγω της $(*)$. Επομένως,

$$\bar{\psi}(k) = [1, 0, 0] \vee [at, b, c] = k.$$

Φυσικά πρέπει να ελεγχθεί ότι $[1, 0, 0] \neq [at, b, c]$. Αυτό συμβαίνει γιατί στην αντίθετη περίπτωση θα υπήρχε $\bar{\eta} \neq 0$, τέτοιο ώστε $(at, b, c) = \bar{\eta}(1, 0, 0)$, οπότε $b = c = 0$ και $a \neq 0$ (αφού $t, \bar{\eta} \neq 0$). Επομένως, θα ήταν $[a, b, c] = [a, 0, 0] = [1, 0, 0]$, το οποίο αντίκειται στην αρχική υπόθεση για το P .

3.3.15(4). Ας καλέσουμε (Φ, Ψ) τη συγγραμμικότητα που προκύπτει από τον αυτομορφισμό τf (με αντίστοιχο πίνακα τM). Τότε, για κάθε σημείο $[a, b, c]$ του $\mathbb{P}_2$ είναι

$$\begin{aligned}\Phi([a, b, c]) &= [(a, b, c) \cdot (\tau M)] = [\tau(a, b, c) \cdot M] \\ &= [(a, b, c) \cdot M] = \phi([a, b, c]).\end{aligned}$$

Άρα, $\Phi = \phi$. Παρόμοια βρίσκουμε ότι και $\Psi = \psi$. Επομένως, η (ϕ, ψ) προκύπτει και από τον αυτομορφισμό τf .

3.3.15(5). Καλούμε (Φ, Ψ) τη συγγραμμικότητα που προκύπτει από τον αυτομορφισμό f^{-1} (με αντίστοιχο πίνακα M^{-1}). Τότε, για κάθε σημείο $[a, b, c]$ του $\mathbb{P}_2$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(\Phi \circ \phi)([a, b, c]) &= \Phi(\phi([a, b, c])) = \Phi([(a, b, c) \cdot M]) \\ &= [((a, b, c) \cdot M) \cdot M^{-1}] = [a, b, c],\end{aligned}$$

δηλαδή $\Phi \circ \phi = id|_{\mathbb{P}^2}$. Ομοίως βρίσκουμε ότι και $\phi \circ \Phi = id|_{\mathbb{P}^2}$, οπότε $\Phi = \phi^{-1}$.

Για να δείξουμε ότι και $\Psi = \psi^{-1}$, είτε ακολουθούμε την προηγούμενη διαδικασία (με πίνακες), είτε εφαρμόζουμε την Άσκηση 2.1.1(5): θεωρούμε τα ζεύγη (Φ, Ψ) και (ϕ^{-1}, ψ^{-1}) . Επειδή $\Phi = \phi^{-1}$, κατά την προαναφερθείσα άσκηση θα είναι και $\Psi = \psi^{-1}$. Άρα $(\phi^{-1}, \psi^{-1}) = (\Phi, \Psi)$, απ' την οποίαν προκύπτει το ζητούμενο.

3.3.15(6). Αρκεί να εφαρμόσουμε το Λήμμα 3.3.12 (δύο φορές, κατά αντίθετες κατευθύνσεις).

3.3.15(7). Ακολουθώντας ακριβώς τη διαδικασία που εφαρμόσαμε στη μελέτη της $\mathbb{H}([1, 0, 0], < 1, 0, 0 >)$, βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος πίνακας έχει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } t \in \mathbb{R}_*.$$

3.4.5(2). Αν ήταν αναγκαίως $s \neq 0$, τότε στους πίνακες της μορφής (3.4.1) δεν θα περιλαμβάνονταν ο μοναδιαίος (ταυτοτικός) πίνακας, ο οποίος αντιστοιχεί στην ταυτοτική έπαρση. Επομένως, στην ομάδα $\mathbb{E}([0, 0, 1], < 1, 0, 0 >)$ δεν θα περιλαμβάνονταν το μοναδιαίο στοιχείο (άτοπο).

3.4.5(3). Αν ο πίνακας της (ϕ, ψ) έχει τη μορφή (3.4.1), η υπόθεση συνεπάγεται ότι $[a, b, as + c] = [a, b, c]$, οπότε υπάρχει $\hat{\lambda} \neq 0$, τέτοιο ώστε $(a, b, as + c) = \hat{\lambda}(a, b, c)$. Επομένως, $\hat{\lambda} = 1$ και $s = 0$, άρα $M = I$ (: ο μοναδιαίος πίνακας) και η (ϕ, ψ) είναι η ταυτοτική έπαρση.

3.4.5(4). Εργαζόμαστε όπως στα σχόλια μετά το Θεώρημα 3.3.6: αν υποθέσουμε ότι $\phi([a, b, c]) = [p, q, r]$, όπου τα $[a, b, c]$, $[p, q, r]$ είναι σημεία διαφορετικά από το κέντρο $[0, 0, 1]$ και δεν βρίσκονται στον άξονα $< 1, 0, 0 >$, τότε θα υπάρχει $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}_*$, έτσι ώστε

$$(p, q, r) = \hat{\lambda} (a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

οπότε

$$(*) \quad p = \hat{\lambda}a, \quad q = \hat{\lambda}b, \quad r = \hat{\lambda}(as + c).$$

Επειδή τα $[0, 0, 1]$, $[a, b, c]$, $[p, q, r]$ είναι συγγραμμικά, έχουμε ακόμη ότι

$$0 = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \\ p & q & r \end{pmatrix} = aq - bp.$$

Επίσης $a \neq 0$, αφού $[a, b, c] \notin < 1, 0, 0 >$. Επομένως, οι τελευταίες συνθήκες, σε συνδυασμό με τις (*) δίνουν ότι

$$\hat{\lambda} = \frac{p}{a} \quad \text{και} \quad s = \frac{ar - c}{ap}.$$

3.4.5(5). Εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση της ομάδας $(\mathbb{E}([0, 0, 1], < 1, 0, 0 >)$, βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος πίνακας έχει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } s \in \mathbb{R}.$$

4.1.12(1). Σύμφωνα με το Πόρισμα 2.2.18, η συγγραμμικότητα τώρα είναι η ταυτοτική. Επειδή αυτή υπάρχει πάντοτε, δεν είναι απαραίτητο το επίπεδο να είναι επίπεδο Desargues.

4.1.12(4). Οι $(\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2)$ έχοντας το ίδιο κέντρο $K := A_1 = A_2$ θα ανήκουν στην ομάδα $\mathbb{E}(K, \ell)$, άρα $(\phi_1, \psi_1) \circ (\phi_2, \psi_2) \in \mathbb{E}(K, \ell)$. Επομένως, το κέντρο A της σύνθεσης συμπίπτει με το K , λόγω του μονοσημάντου του κέντρου (βλ. Πρόταση 2.2.21).

4.1.12(5). Υποθέτουμε ότι (A, ℓ, X, X') είναι μία προσδιοριστική τετράδα του κλασικού προβολικού επιπέδου με $A \notin \ell$. Ας συμβολίσουμε με (Φ, Ψ) τον (αντίστροφο) ισομορφισμό από το κλασικό προβολικό επίπεδο στο $\mathbb{P}_2$, που εξασφαλίζεται μέσω το Θεωρήματος 3.5.3. Διαπιστώνουμε αμέσως ότι η τετράδα $(\Phi(A), \Psi(\ell), \Phi(X), \Phi(X'))$ είναι προσδιοριστική στο $\mathbb{P}_2$ με $\Phi(A) \in \Psi(\ell)$, άρα υπάρχει μία (μοναδική) ομολογία του $\mathbb{P}_2$, ας την καλέσουμε $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ με κέντρο $\Phi(A)$, άξονα $\Psi(\ell)$, και τέτοια ώστε $\bar{\phi}(\Phi(X)) = \Phi(X')$.

Ορίζουμε το ζεύγος $(\phi, \psi) := (\Phi, \Psi)^{-1} \circ (\bar{\phi}, \bar{\psi}) \circ (\Phi, \Psi)$ και παρατηρούμε ότι είναι συγγραμμικότητα του κλασικού προβολικού επιπέδου, ως σύνθεση ισομορφισμών προβολικών επιπέδων. Επειδή

$$\phi(X) = (\Phi^{-1} \circ \bar{\phi} \circ \Phi)(X) = \Phi^{-1}(\Phi(X)) = X',$$

θα έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό της άσκησης, αν δείξουμε ότι η (ϕ, ψ) έχει κέντρο A και άξονα ℓ (άρα είναι ομολογία).

Πραγματικά, για τυχούσα ευθεία $k \in J(A)$, βρίσκουμε ότι

$$\psi(k) = (\Psi^{-1} \circ \bar{\psi} \circ \Psi)(k) = \Psi^{-1}(\bar{\psi}(\Psi(k))).$$

Όμως, η $A \in k$ συνεπάγεται ότι $\Phi(A) \in \Psi(k)$, οπότε $\bar{\psi}(\Psi(k)) = \Psi(k)$, αφού το $\Phi(A)$ είναι το κέντρο της $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$. Άρα, τελικώς, $\psi(k) = (\Psi^{-1}(\Psi(k))) = k$, που αποδεικνύει ότι το A είναι πραγματικά το κέντρο της (ϕ, ψ) . Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι η ℓ είναι ο άξονας της ίδιας συγγραμμικότητας.

4.1.12(7). Αν θέσουμε $H^{-1}(X_0) = (\bar{\phi}, \bar{\psi})$, θα έχουμε ότι

$$X_0 = H((\bar{\phi}, \bar{\psi})) = \bar{\phi}(X_0).$$

Επομένως, κατά το Πόρισμα 2.2.18, $H^{-1}(X_0) = (\bar{\phi}, \bar{\psi}) = (id_P, id_L)$. Το ίδιο ισχύει και για την E .

4.2.9(4). Για το 1-1 της ϕ εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε πρώτα δύο σημεία X και $\bar{X}$, που δεν βρίσκονται στην $X_0 \vee X'_0$, με $\phi(X) = \phi(\bar{X})$. Θέτουμε

$$Z = (X \vee X_0) \wedge \ell \quad \text{και} \quad \bar{Z} = (\bar{X} \vee X_0) \wedge \ell.$$

Επειδή (βλ. Πρόταση 2.2.13)

$$\begin{aligned} Z &= (X \vee X_0) \wedge \ell = (\phi(X) \vee \phi(X_0)) \wedge \ell, \\ \bar{Z} &= (\bar{X} \vee X_0) \wedge \ell = (\phi(\bar{X}) \vee \phi(X_0)) \wedge \ell, \end{aligned}$$

η υπόθεση συνεπάγεται ότι $Z = \bar{Z}$, άρα

$$X = (X_0 \vee Z) \wedge (A \vee \phi(X)) = (\bar{X}_0 \vee Z) \wedge (A \vee \phi(\bar{X})) = \bar{X}.$$

Με παρόμοιο τρόπο εξετάζεται η περίπτωση $X, \bar{X} \in X \vee X_0$.

Για το επί της ϕ προχωρούμε ως εξής: Έστω τυχόν $P \in \mathcal{P}$. Αναζητούμε X τέτοιο ώστε $\phi(X) = P$. Επειδή τα $A, X, \phi(X) = P$ είναι συγγραμμικά, θα είναι $X \in A \vee P$. Αλλά και $X \in X_0 \vee Z$, όπου $Z = X'_0 \vee P$. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι το $X = (X_0 \vee Z) \wedge (A \vee P)$ είναι το ζητούμενο σημείο.

Επίσης, για κάθε $X \in \ell$ με $X \notin X_0 \vee X'_0$, είναι

$$\begin{aligned} \phi(X) &= (A \vee X) \wedge [X'_0 \vee ((X \vee X_0) \wedge \ell)] \\ &= (A \vee X) \wedge (X'_0 \vee X) = X. \end{aligned}$$

Παρόμοια και για κάθε $X \in \ell$ με $X \in X_0 \vee X'_0$, άρα $\phi(X) = X$, για κάθε $X \in \ell$.

Τέλος, για οποιαδήποτε $k \in J(A)$ έχουμε ότι

$$\psi(k) = (k \wedge \ell) \vee \phi((A \vee X_0) \wedge k) = (k \wedge \ell) \vee \phi(A) = (k \wedge \ell) \vee A = k.$$

4.2.9(6). Εφ' όσον τα P, Q, R είναι διαφορετικά μεταξύ τους (για να ορίζεται το τρίγωνο PQR), θα είναι διαφορετικά μεταξύ τους και τα $\phi(P), \phi(Q), \phi(R)$, οπότε ορίζεται το τρίγωνο $\phi(P)\phi(Q)\phi(R)$. Απ' το άλλο μέρος, επειδή η (ϕ, ψ) είναι κεντρική/αξονική συγγραμμικότητα, οι ευθείες $P \vee \phi(P)$, $Q \vee \phi(Q)$ και $R \vee \phi(R)$ διέρχονται από το κέντρο A (βλ. Πρόταση 2.2.12), δηλαδή τα τρίγωνα PQR και $\phi(P)\phi(Q)\phi(R)$ είναι προοπτικά ως προς κέντρο.

Τα ίδια τρίγωνα είναι και προοπτικά ως προς άξονα (την ευθεία ℓ), επειδή τα ζεύγη των ευθειών $(P \vee Q, \phi(P) \vee \phi(Q))$, $(P \vee R, \phi(P) \vee \phi(R))$ και $(Q \vee R, \phi(Q) \vee \phi(R))$ τέμνονται επί της ℓ (βλ. Πρόταση 2.2.13).

5.1.10(4). Θα δείξουμε ότι $D \neq Z$ (παρόμοια εξετάζονται και οι υπόλοιπες περιπτώσεις). Πραγματικά, αν ήταν $D = Z$, θα είχαμε ότι

$$A \vee B' = A \vee D = A \vee Z = A \vee C',$$

συνεπώς θα ήταν και

$$B' = (A \vee B') \wedge \ell = (A \vee C') \wedge \ell = C',$$

που είναι άτοπο.

6.1.22(1). Αν $\mathcal{R}$ συμβολίζει τον διαιρετικό δακτύλιο του $\mathbb{P}_2$, τότε [βάσει της σχέσης (6.1.1), του Λήμματος 6.1.2 και του Θεωρήματος 3.4.3] έχουμε κατά σειράν τις ισομορφίες

$$\mathcal{R} \cong \mathbb{E}(S, \ell) \cong \mathbb{R},$$

για κατάλληλα S και ℓ του $\mathbb{P}_2$. Επομένως ο ζητούμενος δακτύλιος μπορεί να ταυτιστεί (μέσω ισομορφίας) με το σώμα των πραγματικών αριθμών, πράγμα που συμφωνεί και με το γεγονός ότι το $\mathbb{P}_2$ είναι επίπεδο του Πάππου (βλ. Παραδείγματα 5.1.2).

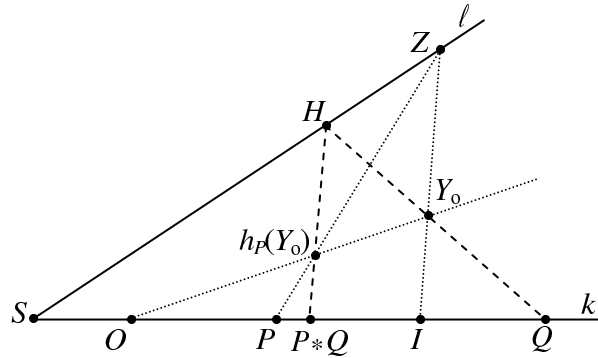
6.1.22(2). Επειδή $\varepsilon_O(O) = O$, όπου $O \neq S$ και $O \notin \ell$, το Πόρισμα 2.2.18 συνεπάγεται ότι $\varepsilon_O = id_P$. Η σχέση $h_I = id_P$ αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

6.1.22(3). Παρατηρούμε ότι

$$(h^Q \circ h^P)(I) = h^Q(h^P(I)) = h^Q(P) = P * Q = h^{P*Q}(I).$$

Επειδή οι ομολογίες $h^Q \circ h^P$ και h^{P*Q} από την ομάδα $\mathbb{H}(S, \ell_0)$ συμπίπτουν στο I , όπου $I \neq S$ και $I \notin \ell_0$, το Πόρισμα 2.2.18 αποδεικνύει το ζητούμενο.

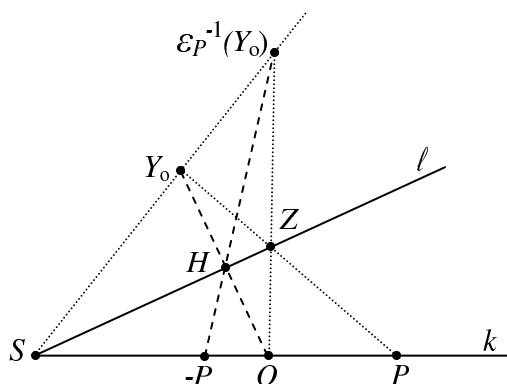
6.1.22(5). Στο επόμενο σχήμα απεικονίζεται το $P * Q$.



Οι διάστικτες γραμμές δείχνουν τον προσδιορισμό της εικόνας $h_P(Y_0)$ ενός βοη-

θητικού σημείου $Y_0 \notin O \vee I$, ενώ οι διακεκομμένες απεικονίζουν την κατασκευή του $P * Q = h_P(Q)$ με τη βοήθεια των Y_0 και $h_P(Y_0)$.

Η κατασκευή του $-P$ παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Επεξήγηση: επειδή $-P = E_P^{-1}(O)$, προσδιορίζουμε πρώτα την εικόνα $E_P^{-1}(Y_0)$ ενός βοηθητικού σημείου $Y_0 \notin S \vee O$, όπως φαίνεται με τις διάστικτες γραμμές του σχήματος. Κατόπιν (βλ. τις διακεκομμένες γραμμές), προσδιορίζουμε το $-P$ με τη βοήθεια των Y_0 και $E_P^{-1}(Y_0)$. Θυμίζουμε εδώ ότι για τον προσδιορισμό του $E_P^{-1}(Y_0)$ θα χρησιμοποιούμε τα γνωστά σημεία P και $E_P^{-1}(P) = O$. Η τελευταία σχέση είναι προφανής συνέπεια της $E_P(O) = P$.

6.1.22(6). Σύμφωνα με όσα αναφέρονται στην απόδειξη της Πρότασης 6.1.9,

$$h_{P^{-1}}(I) = P^{-1} = h_P^{-1}(I),$$

για κάθε $P \in \mathcal{R}_*$. Όπως και σε προηγούμενες ασκήσεις, επειδή οι ομολογίες $h_{P^{-1}}$ και h_P^{-1} συμπίπτουν σε ένα σημείο διαφορετικό από το κέντρο και μη κείμενο επί του άξονος, θα συμπίπτουν παντού. Επομένως $h_{P^{-1}} = h_P^{-1}$. Για την $E_{-P} = E_P^{-1}$ εργαζόμαστε αναλόγως.

6.1.22(7). Αν ήταν $P \neq O \neq Q$, τότε θα ήταν και $P, Q \in \mathcal{R}_*$. Επομένως, αφού το $\mathcal{R}_*$ είναι ομάδα, θα είχαμε ότι $P * Q \in \mathcal{R}_* := \mathcal{R} - \{O\}$, δηλαδή $P * Q \neq O$ (άτοπο).

Ένα άλλος τρόπος είναι ο εξής: αν $P \neq O$, τότε από την $O = P * Q = h_P(Q)$ προκύπτει ότι $Q = h_P^{-1}(O) = O$, επειδή το O ανήκει στον άξονα ℓ της h_P^{-1} . Παρόμοια, αν $Q \neq O$, τότε από την $O = P * Q = h^Q(P)$ προκύπτει ότι $P = (h^Q)^{-1}(O) = O$, επειδή το O ανήκει στον άξονα ℓ_0 της $(h^Q)^{-1}$.

6.2.6(3). Προφανώς η $\sigma \circ E_P \circ \sigma^{-1}$ είναι συγγραμμικότητα, ως σύνθεση συγγραμμικοτήτων. Θα δείξουμε ότι έχει κέντρο το S' .

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι (βλ. και την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.4)

$$\sigma(S) = \sigma(k \wedge \ell) = \sigma(k) \wedge \sigma(\ell) = k' \wedge \ell' = S'.$$

Επομένως, για τυχούσα $m' \in J(S')$, είναι $S = \sigma^{-1}(S') \in \sigma^{-1}(m')$, δηλαδή η $\sigma^{-1}(m')$ διέρχεται από το κέντρο της $\mathcal{E}_P$, άρα $\mathcal{E}_P(\sigma^{-1}(m')) = \sigma^{-1}(m')$, οπότε $(\sigma \circ \mathcal{E}_P \circ \sigma^{-1})(m') = m'$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Παρόμοια, για κάθε $X' \in \ell'$, έχουμε ότι $\sigma^{-1}(Q') \in \sigma^{-1}(\ell') = \ell$, άρα $\mathcal{E}_P(\sigma^{-1}(Q')) = \sigma^{-1}(Q')$, αφού η ℓ είναι άξονας της $\mathcal{E}_P$. Επομένως $(\sigma \circ \mathcal{E}_P \circ \sigma^{-1})(Q') = Q'$, που αποδεικνύει ότι η ℓ' είναι άξονας. Άρα, τελικώς, $\sigma \circ \mathcal{E}_P \circ \sigma^{-1} \in \mathbb{H}(S', \ell')$.

Απ' το άλλο μέρος,

$$(\sigma \circ \mathcal{E}_P \circ \sigma^{-1})(O') = (\sigma \circ \mathcal{E}_P)(O) = \sigma(P),$$

επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι $\sigma \circ \mathcal{E}_P \circ \sigma^{-1} = \mathcal{E}'_{\sigma(P)}$. Ο τόνος μπαίνει για να υπενθυμίσει ότι βρισκόμαστε τώρα στην ομάδα των επάρσεων $\mathbb{H}(S', \ell')$.

Για την $\sigma \circ h_P \circ \sigma^{-1} \in \mathbb{H}(O', \ell')$ εργαζόμαστε αναλόγως.

6.3.7(2). Ακολουθούμε τη διαδικασία της απόδειξης της Πρότασης 4.1.2.

6.3.7(4). Βάσει του του Ορισμού 5.1.1 και του ισομορφισμού ομάδων $\mathbb{H}(A, \ell) \cong (\mathcal{D}_*, \cdot)$ (βλ. Θεώρημα 6.3.5), το $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$ είναι επίπεδο του Πάππου τότε και μόνον τότε αν το $\mathcal{D}_*$ είναι αβελιανή ομάδα, δηλαδή τότε και μόνον τότε αν το $\mathcal{D}$ είναι σώμα.

6.3.7(5). Δείχνουμε πρώτα ότι (ii) $\Rightarrow$ (i): Αν θέσουμε $P_1 \vee P_2 = \langle k, \ell, m \rangle$, τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$(1) \quad a_1 k + b_1 \ell + c_1 m = 0,$$

$$(2) \quad a_2 k + b_2 \ell + c_2 m = 0,$$

οπότε, μέσω των (ii), (1) και (2) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} a_3 k + b_3 \ell + c_3 m &= (ra_1 + sa_2)k + (rb_1 + sb_2)\ell + (rc_1 + sc_2)m \\ &= r(a_1 k + b_1 \ell + c_1 m) + s(a_2 k + b_2 \ell + c_2 m) \\ &= 0, \end{aligned}$$

η οποία αποδεικνύει ακριβώς την (i).

Για την απόδειξη της (i) $\Rightarrow$ (ii) εργαζόμαστε ως εξής: επειδή $(a_1, b_1, c_1) \neq (0, 0, 0)$, μπορούμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) να υποθέσουμε ότι $a_1 \neq 0$. Θεωρούμε το σύστημα

$$(3) \quad ra_1 + sa_2 = a_3,$$

$$(4) \quad rb_1 + sb_2 = b_3,$$

με αγνώστους r και s , τους οποίους και θα προσδιορίσουμε. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $b_2 - a_2 a_1^{-1} b_1 \neq 0$ [: αν η προηγούμενη διαφορά μηδενίζεται, τότε αντί του συστήματος των (3) και (4) παίρνουμε το σύστημα των $ra_1 + sa_2 = a_3$ και $rc_1 + sc_2 = c_3$, οπότε τώρα (αναγκαστικά) $c_2 - a_2 a_1^{-1} c_1 \neq 0$. Αυτό ισχύει γιατί, αν ήταν $b_2 - a_2 a_1^{-1} b_1 = c_2 - a_2 a_1^{-1} c_1 = 0$, τότε, θέτοντας $d = a_2 a_1^{-1}$, θα ήταν και

$$P_2 = [a_2, b_2, c_2] = [d(a_1, b_1, c_1)] = [a_1, b_1, c_1] = P_2$$

(άτοπο). Φυσικά $d \in \mathcal{D}_*$, αλλιώς θα ήταν $(a_2, b_2, c_2) \neq (0, 0, 0)$, που είναι επίσης άτοπο].

Με την προηγούμενη παραδοχή, επιλύοντας τις (3) και (4) ως προς r και s , βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} s &= (b_3 - a_3 a_1^{-1} b_1) \cdot (b_2 - a_2 a_1^{-1} b_1)^{-1}, \\ r &= a_3 a_1^{-1} - (b_3 - a_3 a_1^{-1} b_1) \cdot (b_2 - a_2 a_1^{-1} b_1)^{-1} \cdot a_2 a_1^{-1}. \end{aligned}$$

Επομένως, για r και s όπως παραπάνω, ισχύουν οι σχέσεις (3) και (4), που είναι οι δύο πρώτες των (ii), άρα μένει να αποδειχθεί και η τρίτη εξ αυτών. Για το σκοπό αυτό θέτουμε και πάλι $P_1 \vee P_2 = \langle k, \ell, m \rangle$. Πρώτα παρατηρούμε ότι $m \neq 0$: πραγματικά, αν ήταν $m = 0$, τότε οι (1) και (2) μετασχηματίζονται, αντιστοίχως, στις

$$(5) \quad a_1 k + b_1 \ell = 0,$$

$$(6) \quad a_2 k + b_2 \ell = 0.$$

Απ' το άλλο μέρος, επειδή $a_1 \neq 0$, προκύπτει ότι $k = -a_1^{-1} b_1 \ell$. Αντικαθιστώντας την τελευταία στην (6) βρίσκουμε ότι $b_2 - a_2 a_1^{-1} b_1 \cdot \ell = 0$. Επειδή η παράσταση της παρένθεσης δεν μηδενίζεται (όπως υποθέσαμε παραπάνω), θα είναι αναγκαία $\ell = 0$. Τότε, όμως, η (5) συνεπάγεται ότι $k = 0$, άρα τελικά $\langle k, \ell, m \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$ (άτοπο). Συνεπώς, $m \neq 0$, όπως ισχυριστήκαμε.

Γυρίζοντας πίσω στην υπόθεση $P_3 = P_1 \vee P_2$, βλέπουμε ότι αυτή συνεπάγεται τις (1), (2) και την

$$(7) \quad a_3 k + b_3 \ell + c_3 m = 0.$$

Άρα, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις (1), (2), (7), καθώς και τις (3), (4), που ήδη ισχύουν, έχουμε διαδοχικά τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} c_3 - rc_1 - sc_2 &= -(a_3 k + b_3 \ell) m^{-1} + \\ &+ r(a_1 k + b_1 \ell) m^{-1} + s(a_2 k + b_2 \ell) m^{-1} = \\ &= (-a_3 + ra_1 + sa_2) k m^{-1} + (-b_3 + rb_1 + sb_2) \ell m^{-1} = 0, \end{aligned}$$

η οποία αποδεικνύει την τρίτη των (ii), όπως ζητούσαμε.

Στη διατύπωση της άσκησης επισημαίνουμε ότι τα r και s είναι κατάλληλα στοιχεία του $\mathcal{D}_*$. Το "κατάλληλα" προφανώς αναφέρεται στο ότι αυτά συνδέονται με τα $[a_i, b_i, c_i]$ με τις σχέσεις που βρήκαμε κατά την επίλυση του συστήματος (3) και (4). Ας δικαιολογήσουμε γιατί $r, s \in \mathcal{D}_*$: αν $r = 0$ (ή $s = 0$), τότε το P_3 θα συμπίπτει με το P_2 (ή, αντιστοίχως, με το P_1), πράγμα που αντιβαίνει την αρχική υπόθεση για τα P_1, P_2, P_3 .

Τέλος, σημειώνουμε ότι μπορούμε να αναπτύξουμε μία θεωρία οριζουσών στο πλαίσιο των *διαιρετικών* δακτυλίων, με ιδιότητες ανάλογες προς αυτές των συνήθων οριζουσών. Στην περίπτωση αυτή, οι συνθήκες (i) και (ii) είναι ισοδύναμες με τη συνθήκη

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

που συμπίπτει με την (3.1.14) όταν $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

6.3.7(6). Κάθε προβολικό επίπεδο, που προκύπτει από έναν διαιρετικό δακτύλιο $\mathcal{D}$, είναι επίπεδο Desargues. Για να είναι επίπεδο του Πάππου πρέπει το $\mathcal{D}$ να είναι σώμα [βλ. Άσκηση 6.3.7(4)], πράγμα που δεν ισχύει για οποιοδήποτε διαιρετικό δακτύλιο, όπως προκύπτει από το παράδειγμα των πραγματικών τετράδων [βλ. Άσκηση 6.1.22(8)]. Έτσι, το προβολικό επίπεδο που κατασκευάζεται από τον διαιρετικό δακτύλιο των πραγματικών τετράδων είναι επίπεδο Desargues αλλά όχι επίπεδο του Πάππου.

6.4.3(1). Αν $[x, y, z]$ είναι τυχόν σημείο της $\langle 0, 1, 0 \rangle$, τότε (από τον ορισμό της σχέσης της σύμπτωσης) προκύπτει ότι $y = 0$. Επίσης, επειδή $[x, y, z] \neq [0, 0, 1]$, είναι και $x \neq 0$. Επομένως,

$$[x, y, z] = [x, 0, z] = [x(1, 0, x^{-1}z)] = [1, 0, p],$$

όπου $p = x^{-1}z \in \mathcal{D}$. Ιδιαίτερως, για $p = 0$ παίρνουμε το $O = [1, 0, 0]$ της $\langle 0, 1, 0 \rangle$.

Επειδή κάθε κλάση της μορφής $[1, 0, p]$ καθορίζεται πλήρως από το $p \in \mathcal{D}$, δημιουργείται η δυνατότητα της σύνδεσης του $\mathcal{D}$ με το $\mathcal{R}$, όπως δείχνεται και τυπικά στο Θεώρημα 6.4.2.

6.4.3(3). Αν $p = 0$, τότε

$$(*) \quad f(p \cdot q) = f(0) = [1, 0, 0] = O,$$

ενώ

$$f(p) * f(q) = [1, 0, 0] * f(q) = O * f(q) = h^{f(q)}(O) = O$$

(αφού το O είναι το κέντρο της $h^{f(q)}$). Άρα έχουμε την (6.4.3).

Αν $q = 0$, τότε πάλι ισχύει η $(*)$ και

$$f(p) * f(q) = f(p) * [1, 0, 0] = f(p) * O = h_{f(p)}(O) = O$$

(επειδή το O είναι το κέντρο και της $h_{f(p)}$). Επομένως καταλήγουμε στην (6.4.3).

Στην περίπτωση $p = q = 0$ έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα, επειδή ισχύει η $(*)$ και $f(p) * f(q) = [1, 0, 0] * [1, 0, 0] = O * O = O$.

6.5.3(2). Το $F := \{0, 1\}$ αποτελεί, κατά τρόπον τετριμμένο, σώμα, Άρα, το $\mathbb{P}_2(F)$ αποτελεί επίπεδο του Πάππου. Απ' το άλλο μέρος, έχουμε βρει (βλ. Παράδειγμα 6.1.21) ότι ο διαιρετικός δακτύλιος του προβολικού επιπέδου των 7 σημείων είναι ισόμορφος με το $\mathbb{Z}_2$. Επομένως, ταυτίζοντας το F με το $\mathbb{Z}_2$, το Θεώρημα 6.5.1 αποδεικνύει ότι το $\mathbb{P}_2(F)$ είναι ισόμορφο με το επίπεδο των 7 σημείων.

Ανάλογα προς το Σχήμα 6.7, τώρα έχουμε το επόμενο:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Z}_2 \equiv F & \\ \nearrow & & \searrow \\ \mathcal{P}_7 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{P}_2(F) \end{array}$$

όπου $\mathcal{P}_7$ συμβολίζει το προβολικό επίπεδο των 7 σημείων.

6.5.3(3). Μπορούμε να γράψουμε ότι $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Το τελευταίο είναι επίπεδο του Πάππου, κάτι που δεν συμβαίνει οπωσδήποτε και για το $\mathbb{P}_2(\mathcal{R})$, αν το $\mathcal{R}$ είναι μόνον διαιρετικός δακτύλιος.

6.5.3(4). Μετά την ταύτιση τυχόντος προβολικού επιπέδου $\mathcal{R}$ με το $\mathcal{R}_{\mathcal{P}} = \mathbb{P}_2(\mathcal{R})$ (βλ. Θεώρημα 6.5.1), το ανάλογο του Θεωρήματος 6.3.5 για $\mathcal{D} = \mathcal{R}$ δίνει τις ισομορφίες

$$\mathbb{H}(A, \ell) \cong \mathbb{H}([I, O, O], \langle I, O, O \rangle) \cong \widetilde{\mathcal{M}} \cong (\mathcal{R}_*, \cdot), \quad \text{αν } A \notin \ell,$$

$$\mathbb{E}(A, \ell) \cong \mathbb{E}([O, O, I], \langle I, O, O \rangle) \cong \widetilde{\mathcal{M}'} \cong (\mathcal{R}, +), \quad \text{αν } A \in \ell,$$

όπου, κατά το Λήμμα 6.3.4, $\widetilde{\mathcal{M}}$ είναι το σύνολο των πινάκων της μορφής

$$M = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } P \in \mathcal{R}_*,$$

και $\widetilde{\mathcal{M}}$ το σύνολο των πινάκων της μορφής

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathcal{Q} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } \mathcal{Q} \in \mathcal{R}.$$

Επειδή το O (αντιστ. I) αντιπροσωπεύει το μηδενικό (αντιστ. μοναδιαίο) στοιχείο του $\mathcal{R}$, στις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα 0 και 1 αντί των O και I , σε πλήρη αναλογία με τα Θεωρήματα 3.3.13, 3.4.3 και 6.3.5.

7.1.18(7). Πρόκειται περί του (πλήρους) τριγώνου (βλ. Ορισμό 4.2.1).

7.2.11(1). Έστω $\mathcal{K}$ μία κωνική. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ορίζεται από το δεδομένο P , τυχόν άλλο σημείο της P' και μία κατάλληλη προβολικότητα $\Pi : J(P) \rightarrow J(P')$. Ορίζουμε την απεικόνιση $J(P) \ni k \mapsto k \wedge \Pi(k) \in \mathcal{K}$, η οποία είναι προφανώς επί. Ελέγχουμε ότι είναι και 1-1: αν $k_1 \wedge \Pi(k_1) = k_2 \wedge \Pi(k_2)$, τότε

$$k_1 = O \vee (k_1 \wedge \Pi(k_1)) = O \vee (k_2 \wedge \Pi(k_2)) = k_2.$$

Επομένως, το 1-1 και επί της προηγούμενης απεικόνισης και ο ορισμός της κωνικής σημειοσειράς οδηγούν στην

$$|J(O)| = |\{k \wedge \Pi(k) \mid k \in J(P)\}| = |\mathcal{K}|.$$

7.2.11(2). Έστω ότι η κωνική σημειοσειρά $\mathcal{K}$ κατασκευάζεται μέσω μιας προβολικότητας $\pi = \pi(O, O', \ell)$. Τότε η $\mathcal{K}$ θα περιέχει τα σημεία της μορφής

$$P = m \wedge \pi(m) = m \wedge ((m \wedge \ell) \vee O'), \quad \forall m \in J(O).$$

Αλλά τα προηγούμενα σημεία ανήκουν και στην m , η οποία περιέχει τουλάχιστον 3 διαφορετικά σημεία. Επομένως, θα υπήρχαν ευθείες που θα είχαν τουλάχιστον 3 διαφορετικά σημεία κοινά με την $\mathcal{K}$.

7.2.11(3). Τα λαμβανόμενα εξακόρυφα είναι τόσα όσα και οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να ονομάσουμε τα σημεία, όπως $ABCDEF$, $ACBDEF$ κ.ο.κ. Κάθε τέτοια διάταξη δημιουργεί και τις αντίστοιχες εξάδες πλευρών, με τις οποίες ορίζεται κάθε εξακόρυφο. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $A \vee B = B \vee A$ κλπ., έχουμε 60 διαφορετικά εξακόρυφα.

7.3.4(1). Θεωρούμε το εξακόρυφο $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 X$, όπου $X := (P_1 \vee D_3) \wedge \ell$ και $\ell \in J(P_5)$. Επίσης, έχουμε και τις σχέσεις

$$D_2 := (P_2 \vee P_3) \wedge \ell \quad \text{και} \quad D_3 := (P_3 \vee P_4) \wedge (D_1 \vee D_2).$$

Αν συμβολίζουμε με $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$ και $\bar{D}_3$ τα διαγώνια σημεία του $P_1P_2P_3P_4P_5X$, τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\bar{D}_1 &= (P_1 \vee P_2) \wedge (P_4 \vee P_5) = D_1 \\ \bar{D}_2 &= (P_2 \vee P_3) \wedge (P_5 \vee X) = (P_2 \vee P_3) \wedge \ell = D_2,\end{aligned}$$

επειδή $\ell \in J(P_5)$ και $X \in \ell$, ενώ

$$(1) \quad \bar{D}_3 = (P_3 \vee P_4) \wedge (X \vee P_1).$$

Από τον ορισμό του X προκύπτει ότι τα X, P_1, D_3 είναι συγγραμμικά, άρα

$$(2) \quad X \vee P_1 = P_1 \vee D_3 = X \vee D_3,$$

οπότε η (1) μετασχηματίζεται στην

$$(3) \quad \bar{D}_3 = (P_3 \vee P_4) \wedge (X \vee D_3).$$

Όμως,

$$(X \vee D_3) \ni D_3 \in P_3 \vee P_4 \quad \text{και} \quad X \vee D_3 \neq P_3 \vee P_4,$$

άρα η (3) δίνει ότι $\bar{D}_3 = D_3$.

Επειδή τα διαγώνια σημεία του $P_1P_2P_3P_4P_5X$ συμπίπτουν με τα D_1, D_2, D_3 , που είναι ήδη συγγραμμικά, συνάγεται ότι τα $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, X$ ανήκουν στην $\mathcal{K}$, άρα $X \in \mathcal{K}$.

Ας επαληθεύσουμε ότι $X \vee D_3 \neq P_3 \vee P_4$, όπως ισχυριστήκαμε πιο πάνω: αν δεν συνέβαινε αυτό, τότε [λόγω και της (2)] θα είχαμε ότι

$$P_3 \vee P_4 = X \vee D_3 = X \vee P_1.$$

Αλλά έτσι η ευθεία $P_3 \vee P_4$ θα περιείχε τρία (διαφορετικά) σημεία της $\mathcal{K}$, τα P_1, P_3, P_4 , που είναι άτοπο κατά το Πρόγραμμα 7.2.10.

7.3.4(2). Σύμφωνα με την Άσκηση 7.2.11(3), θα υπάρχουν 60 ευθείες, όχι απαραίτητως όλες διαφορετικές μεταξύ τους.

Πίνακας συμβόλων

Στον πίνακα δίνονται τα κυριότερα σύμβολα, που έχουν κάποιο σταθερό νόημα, μαζί με μία σύντομη περιγραφή τους και τη σελίδα της πρώτης εμφάνισής τους.

Κεφάλαιο 1

$\mathcal{P}$	σύνολο σημείων	18
$\mathcal{L}$	σύνολο ευθειών	19
I	σχέση σύμπτωσης	19
$k // \ell$	παράλληλες ευθείες	20
$k \nparallel \ell$	ευθείες μη παράλληλες	22
$(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$	συσχετισμένο επίπεδο	20
— " —	προβολικό επίπεδο	25
$P \vee Q$	ένωση των σημείων P και Q	21
— " —	βλ. επίσης και σελίδα	25
$k \wedge \ell$	τομή των ευθειών k και ℓ	22
— " —	βλ. επίσης και σελίδα	25
$(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, I^*)$	δυϊκό προβολικό επίπεδο	33
$J(m)$	σημειοσειρά ή δέσμη σημείων της ευθείας m	34
$J(O)$	δέσμη ευθειών του σημείου O	34
$ J(O) $	ισχύς της δέσμης ευθειών $J(O)$	36
$\# J(O)$	άλλος συμβολισμός της ισχύος της $J(O)$	36
$ J(m) $	ισχύς της σημειοσειράς $J(m)$	36

$\pi = \pi(k, \ell, O)$	προοπτικότητα	40
$k \stackrel{O}{\wedge} \ell$	άλλος συμβολισμός της προοπτικότητας	40
Π	προβολικότητα	42
$\ell^* := [\ell]$	κλάση των παραλλήλων προς την ℓ ευθειών	47
$\mathcal{E}_\infty$	ιδεατή ή κατ' εκδοχήν ευθεία	47
$\mathcal{P}^+$	το σύνολο $\mathcal{P} \cup \mathcal{E}_\infty$	47
P^+	τα σημεία του $\mathcal{P}^+$	47
ℓ^*	το σύνολο $J(\ell) \cup \{\ell^*\}$	47
$\mathcal{L}^+$	το σύνολο $\{\ell^* \mid \ell \in \mathcal{L}\} \cup \{\mathcal{E}_\infty\}$	47
ℓ^+	οι ευθείες του $\mathcal{L}^+$	47
$(\mathcal{P}^+, \mathcal{L}^+, I^+)$	η πλήρωση συσχετισμένου επιπέδου	48
$\mathcal{P}^-$	το σύνολο $\mathcal{P} - J(\ell_0)$	50
k^-	το σύνολο $J(k) - \{k \wedge \ell_0\}$	50
$\mathcal{L}^-$	το σύνολο των ευθειών της μορφής k^-	50
$(\mathcal{P}^-, \mathcal{L}^-, I^-)$	η αποπλήρωση προβολικού επιπέδου	51
Κεφάλαιο 2		
(ϕ, ψ)	μορφισμός προβολικών επιπέδων	58
$\mathbf{P}(\mathcal{P})$	το δυναμοσύνολο του $\mathcal{P}$	62
$\tilde{\mathcal{L}}$	το σύνολο $J(\mathcal{L})$	62
$1_{\mathcal{P}}$	η ταυτοτική απεικόνιση του $\mathcal{P}$	62
$(\phi_2, \psi_2) \circ (\phi_1, \psi_1)$	σύνθεση μορφισμών	64
— " —	βλ. και σύνθεση συγγραμμικότητας, σελίδα	65
$(\phi, \psi)^{-1}$	αντίστροφος ισομορφισμός	64
— " —	βλ. και αντίστροφη συγγραμμικότητα, σελίδα	66
$\mathcal{A}ut(\mathcal{P})$	η ομάδα των συγγραμμικότητας του $\mathcal{P}$	65
$\mathbb{L}(A, \ell)$	το σύνολο συγγραμμικότητας με κέντρο A και άξονα ℓ	70

$\mathbb{H}(A, \ell)$	το σύνολο των ομολογιών με κέντρο A και άξονα ℓ	70
$\mathbb{E}(A, \ell)$	το σύνολο των επάρσεων με κέντρο A και άξονα ℓ	70
Κεφάλαιο 3		
$\mathbb{R}_*$	το σύνολο $\mathbb{R} - \{0\}$	88
$\Pi(a, \beta, \gamma)$	το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ με συντελεστές (a, β, γ)	89
$\mathbb{R}_*^3$	το σύνολο $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$	89
$[a, b, c]$	η κλάση ισοδυναμίας του (a, b, c)	89
$\mathcal{P}^a$	το σύνολο των κλάσεων $[a, b, c]$, με $(a, b, c) \in \mathbb{R}_*^3$	90
$\mathcal{L}^a$	το σύνολο των κλάσεων $\langle a, \beta, \gamma \rangle$, με $(a, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_*^3$	90
$\mathbb{P}_2^a$	το προβολικό επιπεδο $(\mathcal{P}^a, \mathcal{L}^a, \epsilon)$	91
	το σύνολο των πινάκων της μορφής	
$\widetilde{\mathcal{M}}$	$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}_*$	108
— " —	βλ. και πίνακες με στοιχεία του $\mathcal{D}_*$, σελίδα	197
	το σύνολο των πινάκων της μορφής	
$\widetilde{\mathcal{M}}'$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$	119
— " —	βλ. και πίνακες με στοιχεία του $\mathcal{D}$, σελίδα	197
Κεφάλαιο 4		
(A, ℓ, P, P')	προσδιοριστική τετραδα	126
$\mathbb{E}(\ell)$	το σύνολο των επάρσεων με κοινόν άξονα ℓ	131
ABC	τρίγωνο με κορυφές A, B, C	136
Κεφάλαιο 6		
$\mathcal{R}$	το σύνολο $J(k) - \{S\}$	176
$\mathcal{E}_P$	η έπαρση της $\mathbb{E}(S, \ell)$ με $\mathcal{E}_P(O) = P$	176
$\mathcal{E}$	η απεικόνιση $\mathcal{R} \ni P \mapsto \mathcal{E}_P \in \mathbb{E}(S, \ell)$	177
$P + \mathcal{Q}$	αθροισμα σημείων του $\mathcal{R}$	178

$(\mathcal{R}, +)$	η προσθετική ομάδα $\mathcal{R}$	178
$-P$	το αντίθετο του $P \in \mathcal{R}$	179
$\mathcal{R}_*$	το σύνολο $\mathcal{R} - \{O\}$	179
h_P	η ομολογία της $\mathbb{H}(O, \ell)$ με $h_P(I) = P$	179
h	η απεικόνιση $\mathcal{R}_* \ni P \mapsto h_P \in \mathbb{H}(O, \ell)$	179
$P * Q$	γινόμενο σημείων του $\mathcal{R}_*$	180
$(\mathcal{R}_*, *)$	η πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathcal{R}_*$	180
P^{-1}	το αντίστροφο του $P \in \mathcal{R}_*$	180
h^P	η ομολογία της $\mathbb{H}(S, \ell_0)$ με $h^P(I) = P$	184
$(\mathcal{R}, +, *)$	ο διαιρετικός δακτύλιος επίπεδου Desargues	186
$(\mathcal{D}, +, \cdot)$	διαιρετικός δακτύλιος (γενικώς)	186
— " —	βλ. επίσης και στο Παράρτημα, σελίδα	249
$(\mathcal{P}_{\mathcal{D}}, \mathcal{L}_{\mathcal{D}}, \in)$	το προβολικό επίπεδο που κατασκευάζεται από έναν διαιρετικό δακτύλιο $\mathcal{D}$	194
$\mathbb{P}_2(\mathcal{D})$	ισοδύναμος συμβολισμός του $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$	212
Κεφάλαιο 7		
$EFGH$	τετρακόρυφο με κορυφές E, F, G, H	218
$\mathcal{H}(AB, CD)$	αρμονική τετράδα σημείων	221
$efgh$	τετράπλευρο με πλευρές e, f, g, h	226
$\mathcal{H}(ab, cd)$	αρμονική τετράδα ευθειών	227
$\mathcal{K}$	κωνική σημειοσειρά ή δέσμη	231
$P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6$	εξακόρυφο με κορυφές $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$	233
t_A	η εφαπτομένη κωνικής σημειοσειράς στο σημείο A	239
$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$	εξάπλευρο με πλευρές $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$	241

Πίνακας εννοιών

Αξίωμα (F)[του Fano], 219

άξονας

- προοπτικότητας, 138
- σημειοσειράς, 34
- συγγραμμικότητας, 67

αποπλήρωση, 51

αρμονική συζυγής, 227

αρμονική τετράδα

- ευθειών, 227
- σημείων, 221

αρμονικό συζυγές, 221

αρμονικό σύνολο

- ευθειών, 227
- σημείων, 221

αρχή του δυϊσμού, 31, 33

Γεωμετρία Klein, 66

Δακτύλιος, 248

- διαιρετικός, 249
- με μονάδα, 249
- μεταθετικός, 249

δέσμη

- ευθειών, 34
- σημείων, 34

διαγώνια σημεία

- εξακορύφου, 234
- τετρακορύφου, 219

διαγώνιες ευθείες

- εξαπλεύρου, 241
- τετραπλεύρου, 227

διαγώνιο τρίγωνο

- τετρακορύφου, 219

- τετραπλεύρου, 227

διαιρετικός δακτύλιος, 186, 249

- προβολικού επιπέδου, 186

- του επιπέδου των 7 σημείων, 187

- των πραγματικών τετράδων, 189

- των τετραδικών αριθμών, 189

διατήρηση

- παραλληλίας, 64
- συγγραμμικότητας σημείων, 64
- σύμπτωσης, 58, 64

δυϊκή πρόταση, 31

Ελαχίστη ισχύς

- προβολικού επιπέδου, 38
- συσχετισμένου επιπέδου, 24

ένωση σημείων, 21, 25

εξάγωνο, 242

εξακόρυφο, 233

εξάπλευρο, 241

έπαρση, 70

επέκταση μορφισμού, 84

επίπεδο

- προβολικό, 25
- κλασικό, 54
- συσχετισμένο, 20

επιτρεπτές θέσεις, 78

ευθεία, 19, 24

- αρμονική συζυγής, 227

- ιδεατή, 48

- κατ' εκδοχήν, 48

- πραγματική, 48

- του Πάππου, 159
- του Pascal, 238
- ευθείες
 - διαγώνιες
 - εξαπλεύρου, 241
 - τετραπλεύρου, 227
 - παράλληλες, 20
- εφαπτομένη κωνικής, 231
- Θεώρημα**
 - Θεμελιώδες της Προβολικής
 - Α' μορφή, 45
 - πλήρους μορφή, 169
 - Πάππου, 168
 - Brianchon, 242
 - Desargues, 145
 - Pascal, 238
 - Steiner, 237
 - Wedderburn, 187
- Ισόμορφα**
 - προβολικά επίπεδα, 58
 - σύνολα, 57
- ισομορφισμός
 - δακτυλίων, 249
 - δομής, 57
 - ομάδων, 248
 - προβολικών επιπέδων, 58
 - συσχετισμένων επιπέδων, 65
- ισχύς
 - δέσμης ευθειών, 36
 - σημειοσειράς, 36
- Κέντρο**
 - δέσμης ευθειών, 34
 - προοπτικότητας, 40, 137
 - συγγραμμικότητας, 67
- κορυφές
 - αντικείμενες/απέναντι
 - εξακορύφου, 234
 - εξαπλεύρου, 241
 - τετραπλεύρου, 227
- κορυφή
 - εξακορύφου, 233
 - εξαπλεύρου, 241
 - τετρακορύφου, 218
 - τετραπλεύρου, 226
 - τριγώνου, 136
- κωνική
 - δέσμη, 231
 - σημείο επαφής της, 231
 - σημειοσειρά, 231
 - εφαπτομένη της, 231
- Μονάδα δακτυλίου, 249**
- μορφισμός, 56
 - δακτυλίων, 249
 - προβολικών επιπέδων, 58
 - 1-1, 58
 - επί, 58
 - συσχετισμένων επιπέδων, 65
- Ομάδα, 247**
 - αβελιανή, 248
 - μεταθετική, 248
 - τετριμμένη, 248
- ομογενείς συντεταγμένες, 212
- ομόλογες
 - κορυφές, 137
 - πλευρές, 138
- ομολογία, 70
- ομομορφισμός
 - δακτυλίων, 249
 - ομάδων, 248
- Πίνακας**
 - έπαρσης, 119
 - ομολογίας, 110
- πλευρά
 - εξακορύφου, 233
 - εξαπλεύρου, 241
 - τετρακορύφου, 219

- τετραπλεύρου, 226
- τριγώνου, 136
- πλευρές
 - αντικείμενες/απέναντι
 - εξακορύφου, 234
 - εξαπλεύρου, 241
 - τετρακορύφου, 219
- πλήρωση, 48
- πράξη
 - πολλαπλασιασμού, 180, 247
 - πρόσθεσης, 178, 248
- προβολικό επίπεδο, 25
 - Desargues, 127, 145
 - δυϊκό, 32
 - πεπερασμένο, 36
 - πραγματικό διάστασης 2, 27
 - των επτά σημείων, 25
 - Πάππου, 158, 168
- προβολικότητα, 42
- προοπτικότητα, 40
- προσδιοριστική τετραδα, 126
- Σ**ημεία συγγραμμικά, 20
- σημείο, 18, 24
 - αρμονικό συζυγές, 221
 - διαγώνιο
 - εξακορύφου, 234
 - τετρακορύφου, 219
 - επαφής κωνικής, 231
 - ιδεατό, 47
 - κατ' εκδοχήν, 47
 - κοινό, 22
 - πραγματικό, 47
 - του Brianchon, 242
- σημειοσειρά, 34
- στοιχείο
 - αντίστροφο, 247
 - μοναδιαίο, 247
 - ουδέτερο, 247
- στοιχειώδης απεικόνιση, 35
- συγγραμμικότητα, 65
 - αξονική, 67
 - κεντρική, 67
 - συσχετισμένη, 84
- σύμπτωση, *βλέπε* σχέση σύμπτωσης
- συνθήκη
 - (D) [Desargues], 138
 - (Π) [Πάππου], 159
- σχέση σύμπτωσης, 19, 24
- σχήμα (πλήρες) του Πάππου, 159
- σώμα, 249
- Τ**άξη προβολικού επιπέδου, 39
- τετράπλευρο, 226
- τετρακόρυφο, 218
- τομή ευθειών, 22, 25
- τρίγωνα προοπτικά
 - ως προς άξονα, 138
 - ως προς κέντρο, 137
- τρίγωνο, 136
 - διαγώνιο τετρακορύφου, 219
 - διαγώνιο τετραπλεύρου, 227
- Υ**ποομάδα, 248
- Χ**αρακτηριστική επιπέδου του Πάππου, 243

