
Αστρικές Ατμόσφαιρες

Ισορροπίες – Βασικοί

Ορισμοί

Ισορροπία

Θερμική

Θερμοδυναμική

Υδροστατική

Ακτινοβολιακή

Θερμική Ισορροπία

Συνθήκη Θερμικής Ισορροπίας:

$$dL_r = \varepsilon dM_r$$

ε : συντελεστής παραγωγής ενέργειας
(dE/gr/sec)

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon \quad \text{ή} \quad L = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \varepsilon dr$$

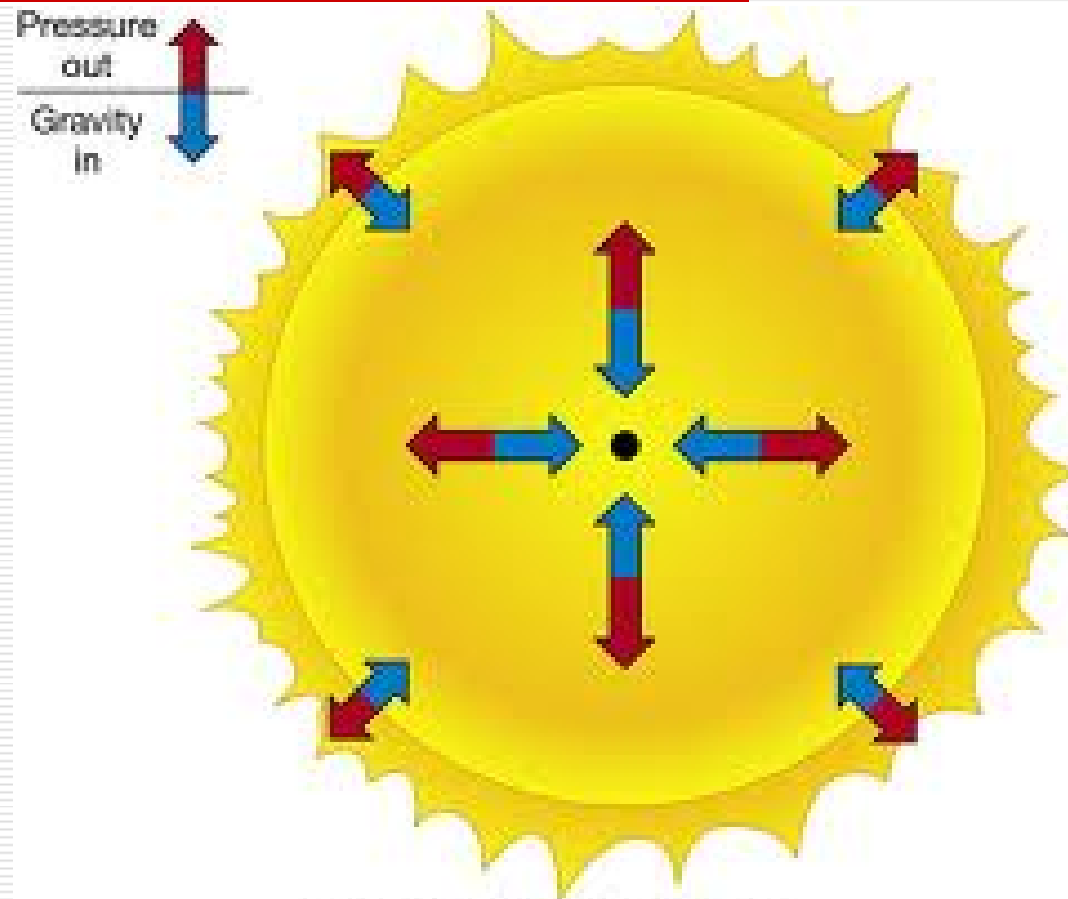
Θερμοδυναμική Ισορροπία

Η θερμοδυναμική κατάσταση καθορίζεται μόνο από τη θερμοκρασία T .

Τοπική Θερμοδυναμική Ισορροπία (Τ.Θ.Ι.):

Η μέση ελεύθερη διαδρομή σωματιδίου είναι πολύ μικρή συγκρινόμενη με την απόσταση στην οποία η θερμοκρασία παρουσιάζει σημαντική αλλαγή.

Υδροστατική Ισορροπία

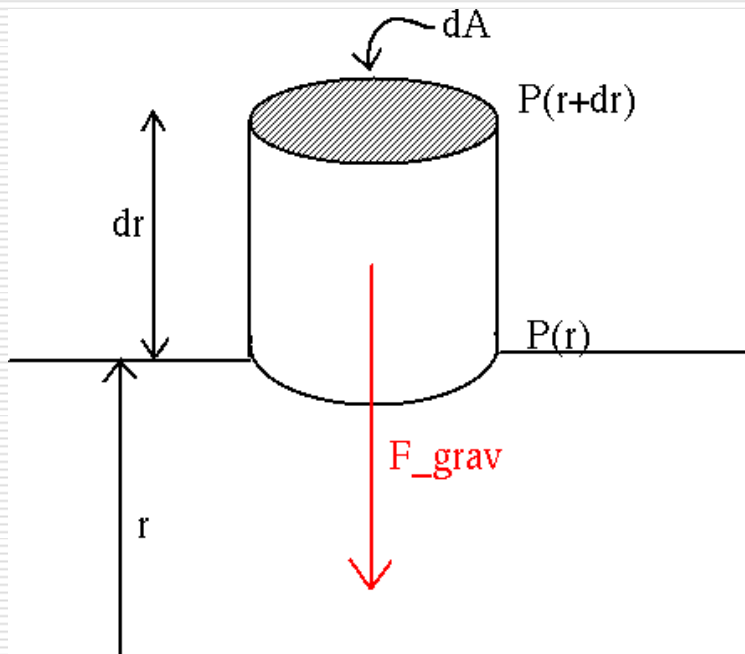


Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

Υδροστατική Ισορροπία

$$dP \cdot dS = -G \frac{M_r \cdot dM_r}{r^2} \quad \longleftrightarrow \quad dM_r = dS \cdot dr \cdot \rho$$

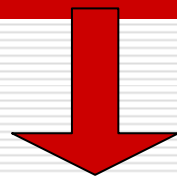
$$dP = -G \cdot \frac{M_r}{r^2} \cdot dr \cdot \rho$$



$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G \cdot M_r}{r^2} \cdot \rho$$

$$\frac{dP}{dr} = -g \cdot \rho$$

Ακτινοβολιακή Ισορροπία



ΟΤΑΝ:

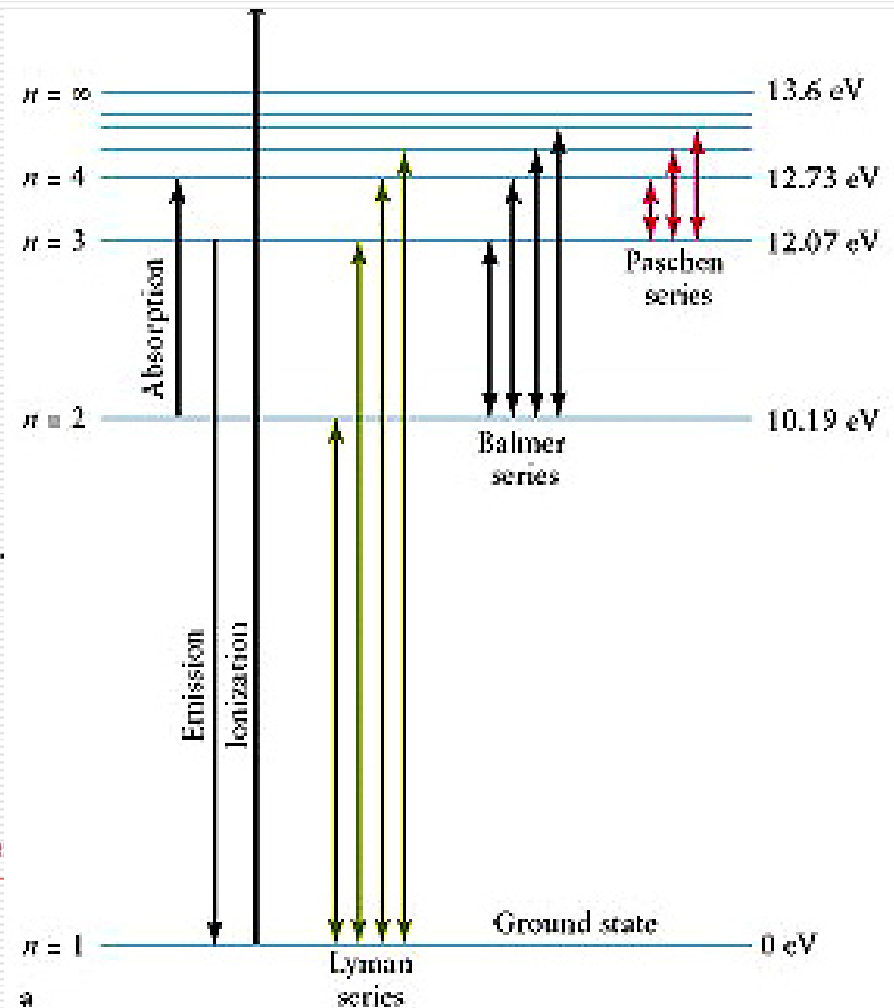
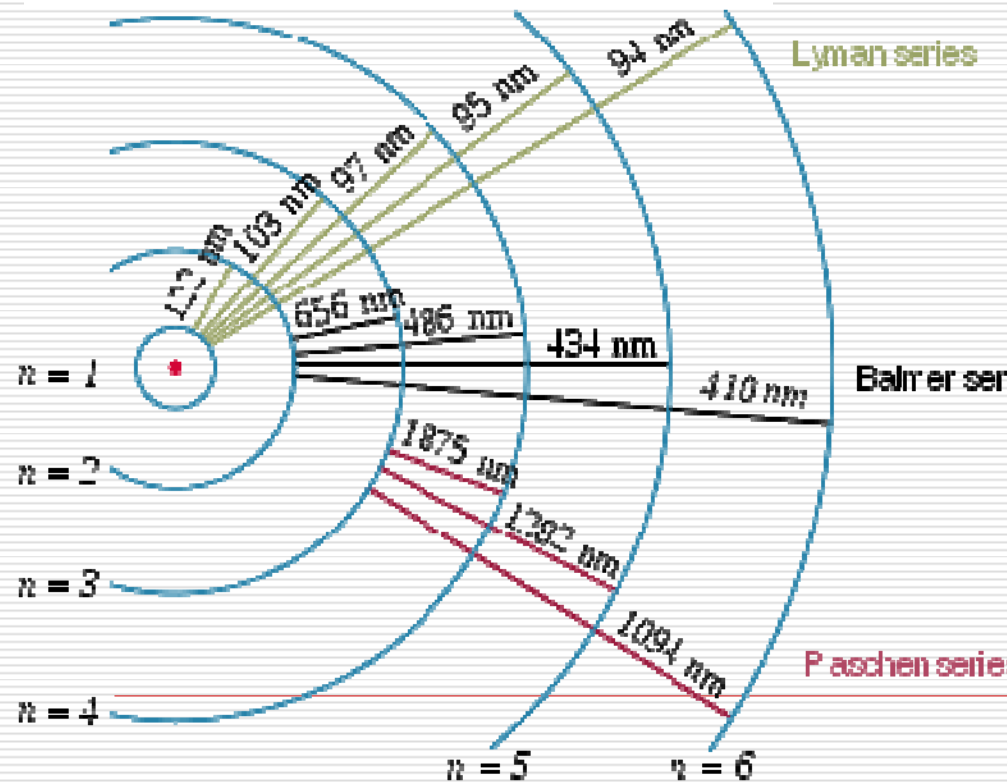
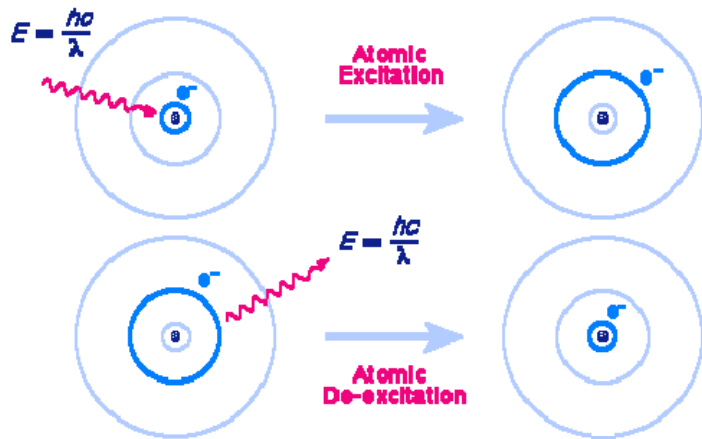
- Η Μεταφορά ενέργειας γίνεται μόνο με ακτινοβολία
- Δεν υπάρχει δημιουργία ή απώλεια ενέργειας στην αστρική ατμόσφαιρα

και

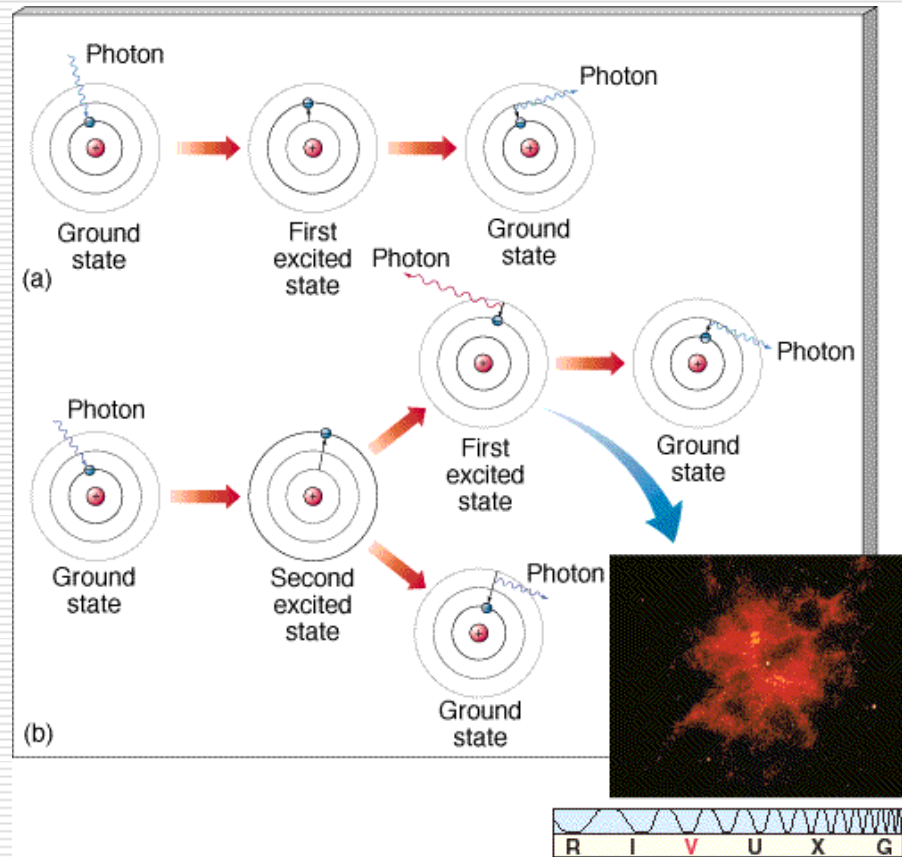
$$\frac{dF(x)}{dx} = 0$$

F: ροή ακτινοβολίας

Διέγερση και Ιονισμός ατόμου

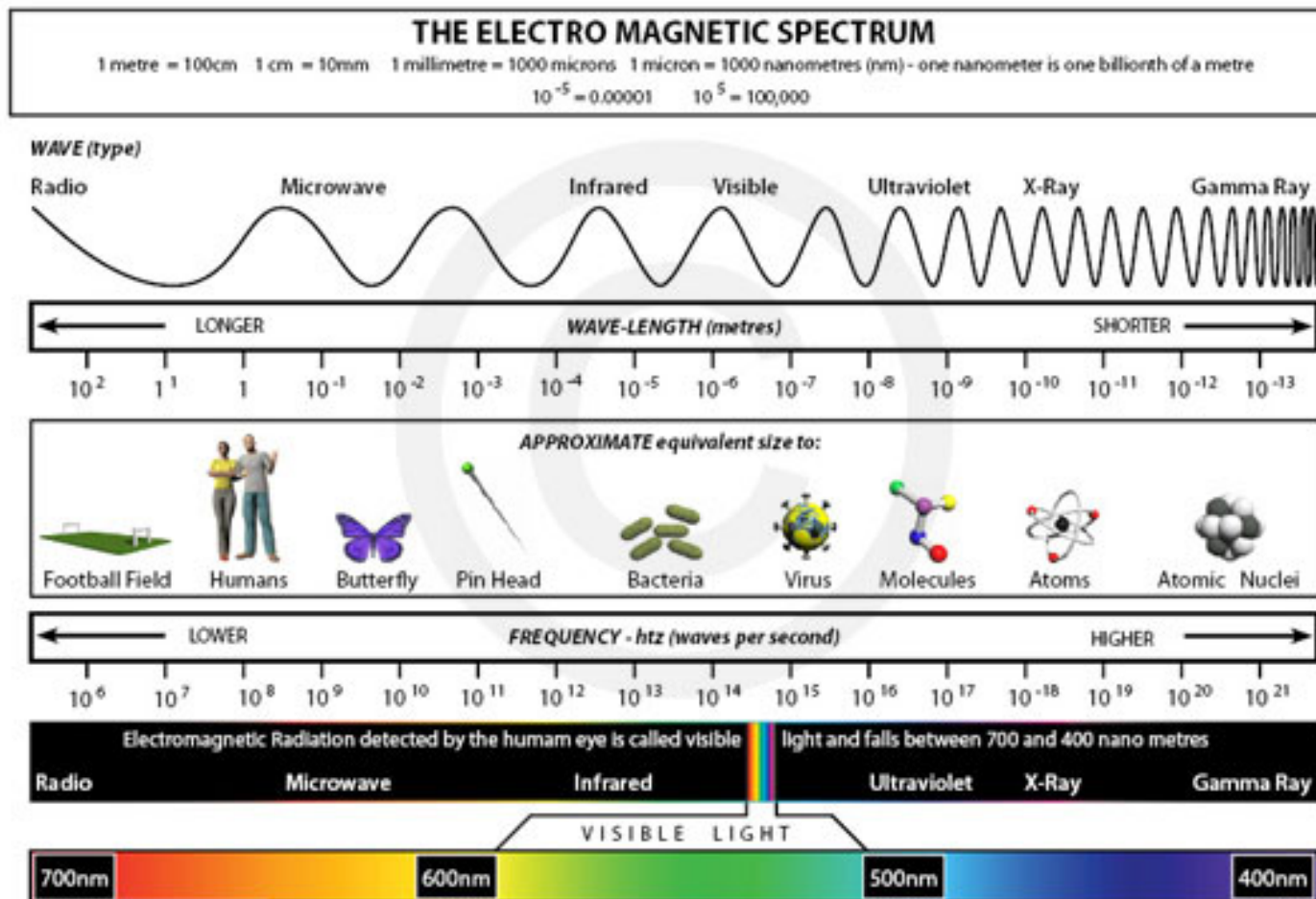


Διέγερση και Ιονισμός ατόμου



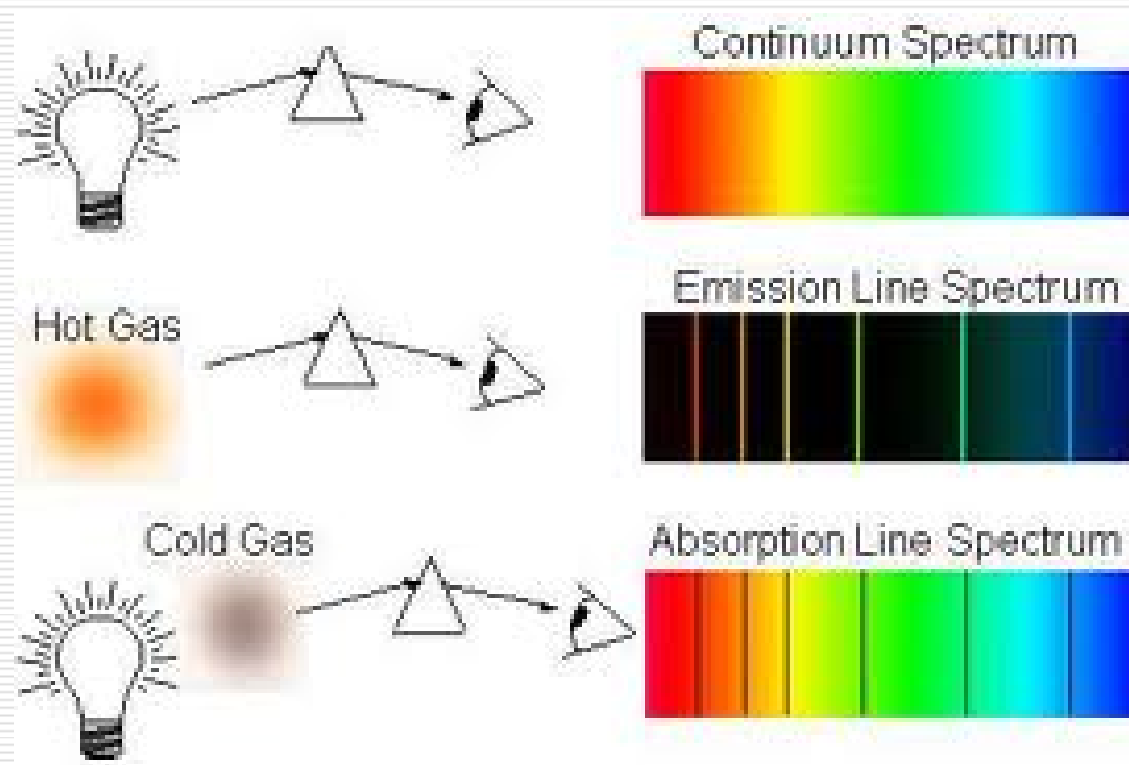
Ηλεκτρομαγνητικό Φάσμα

Συνεχές



Ηλεκτρομαγνητικό Φάσμα

Γραμμικό

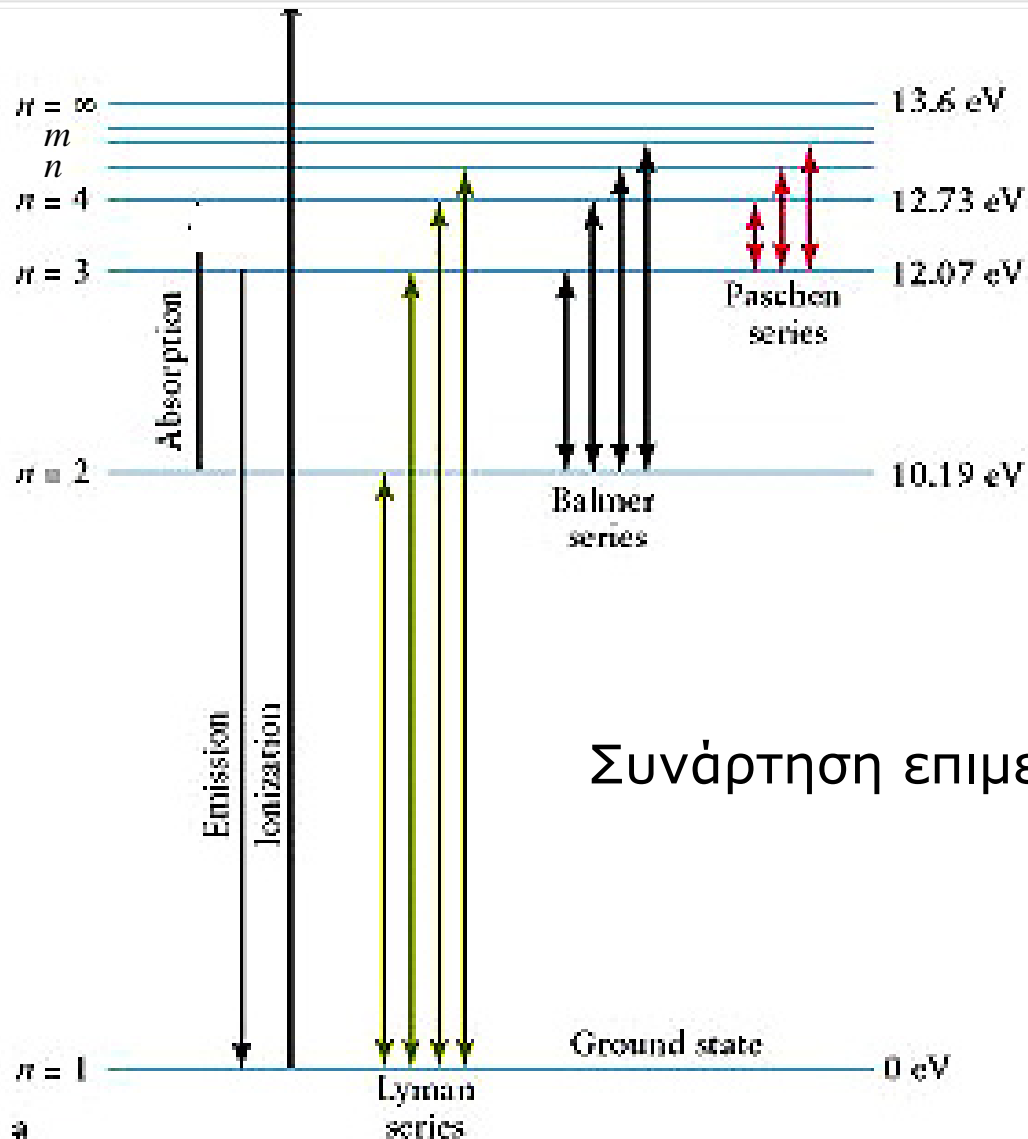


Βασικοί Νόμοι στη Θερμοδυναμική Ισορροπία

- Νόμος Boltzmann
 - Νόμος Saha
 - Νόμος κατανομής ταχυτήτων
Maxwell-Boltzmann
-

Νόμος Boltzmann

$$N_n = \text{σταθ} \cdot g_n \cdot \exp(-x_n / kT)$$



$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n}{g_m} \cdot e^{\frac{\Delta x}{kT}}$$

$$\frac{N_n}{N} = \frac{g_n}{u(T)} \cdot e^{\frac{-x_n}{kT}}$$

Συνάρτηση επιμερισμού: $u(T) = \sum g_i e^{\frac{-x_i}{kT}}$

N_n : αριθμός διεγερμένων ατόμων (ηλεκτρονίων) στη στάθμη n με ενέργεια διεγέρσεως x_n

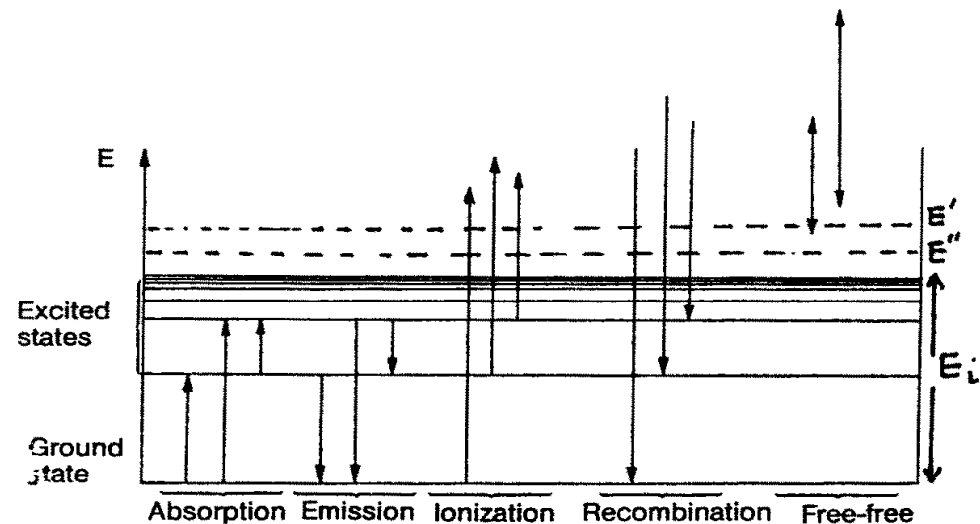
Νόμος Saha

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{(2\pi m_e)^{3/2}}{h^3} \cdot \frac{(kT)^{5/2}}{P_e} \cdot \frac{2u_{i+1}(T)}{u_i(T)} \cdot e^{(-x_{i+1}/kT)}$$

όπου m_e η μάζα ηλεκτρονίου, $P_e = n_e kT$ η πίεση ηλεκτρονίων, T η θερμοκρασία ιονισμού, x_i η ενέργεια ιονισμού.

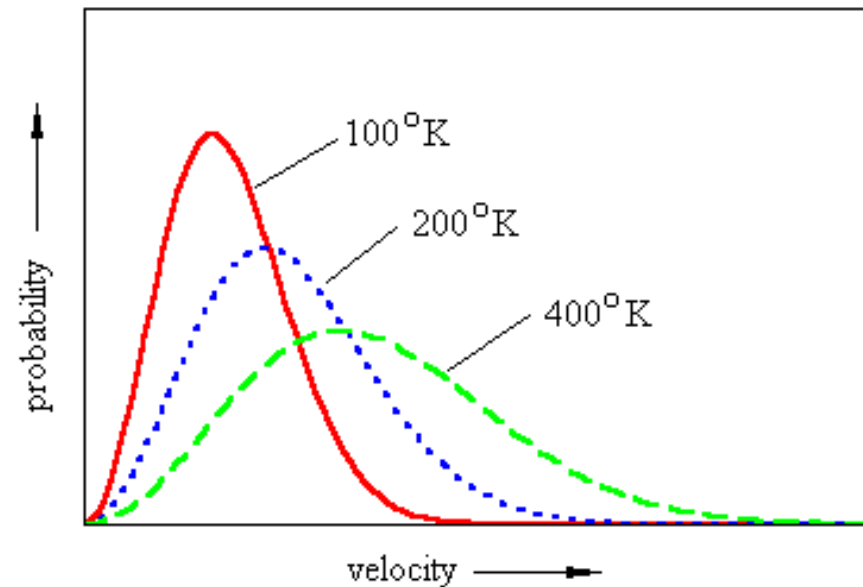
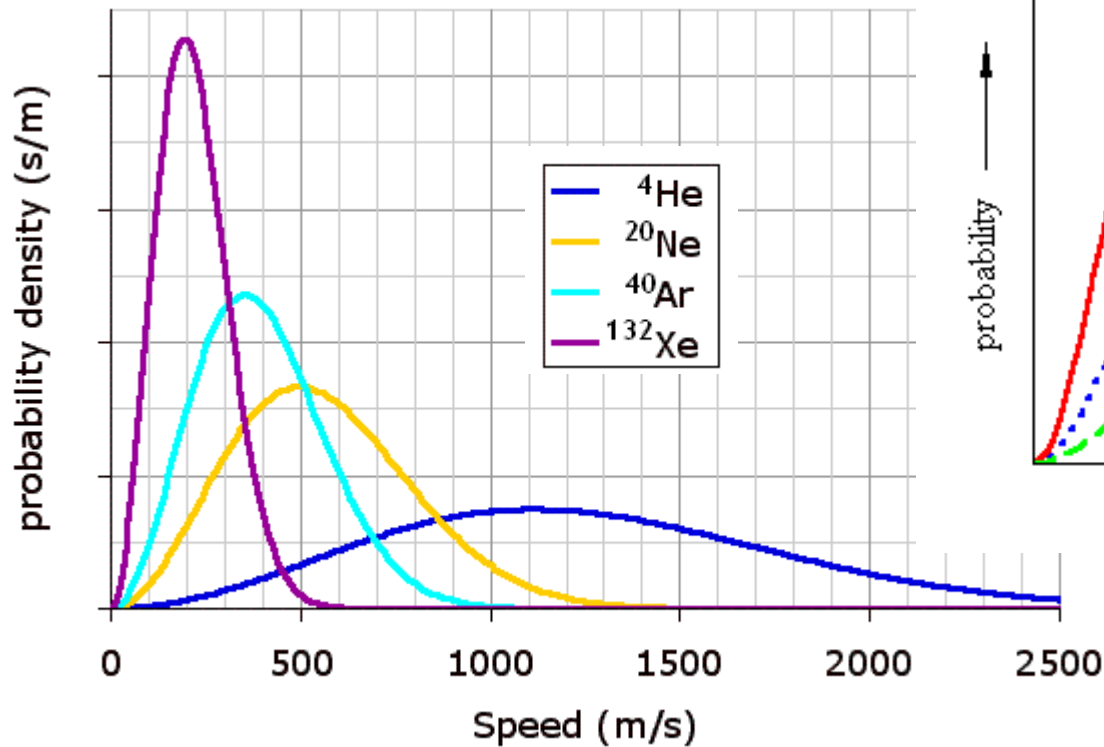
Ή πιο απλά:

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{\Phi(T)}{P_e}$$



Νόμος κατανομής Maxwell-Boltzmann

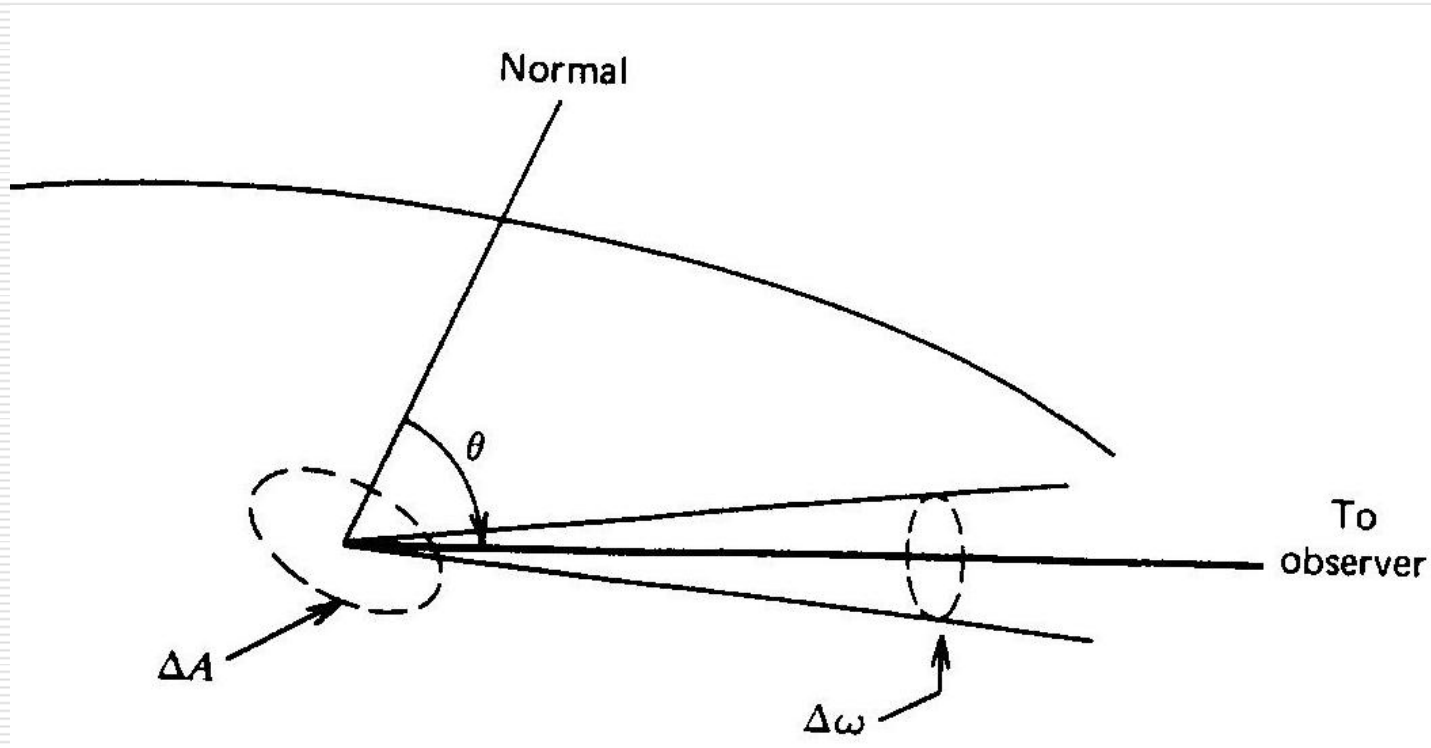
$$\frac{dN(v_x, v_y, v_z)}{N_{\text{ολικο}}} = \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{3/2} \exp(-mv_r^2 / 2kT) dv_x dv_y dv_z$$



Βασικοί Ορισμοί

- Ένταση Ακτινοβολίας
 - Ροή Ακτινοβολίας
 - Πυκνότητα Ενέργειας
 - Πίεση Ακτινοβολίας
-

Ένταση Ακτινοβολίας



$$I_v = \frac{dE_v}{dv \cdot dt \cdot d\omega \cdot d\sigma \cdot \cos \theta}$$

Ένταση Ακτινοβολίας

- Μέση Ένταση J_v

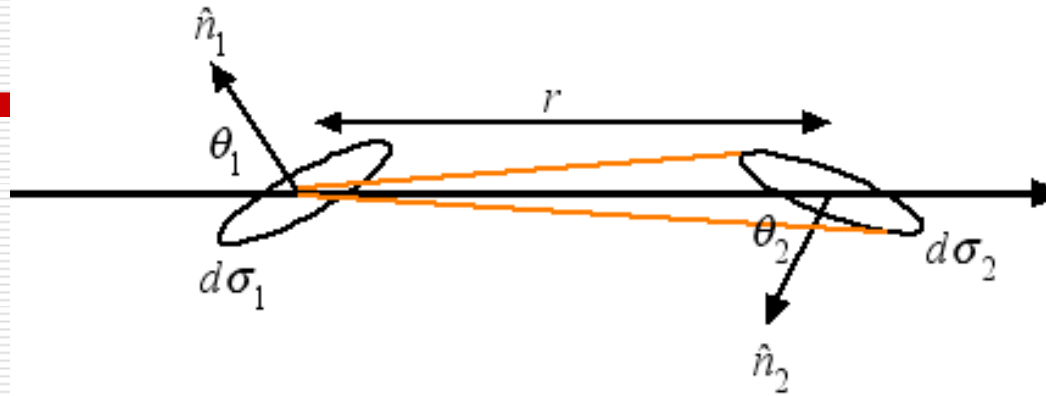
$$J_v = \frac{\oint I_v(x, \theta) d\omega}{\oint d\omega} \quad J_v = \frac{1}{4\pi} \oint I_v d\omega$$

Για ισότροπη ακτινοβολία: $J_v = I_v$

- Ολοκληρωμένη Ειδική Ένταση

$$I = \int_0^{\infty} I_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} I_{\nu} d\nu$$

Το αμετάβλητο της Ειδικής Έντασης



$$dE_{\nu,2} = I_{\nu,1} d\sigma_1 \cos \theta_1 dt_1 d\omega_1$$

$$d\omega_1 = \frac{d\sigma_2 \cos \theta_2}{r^2}$$

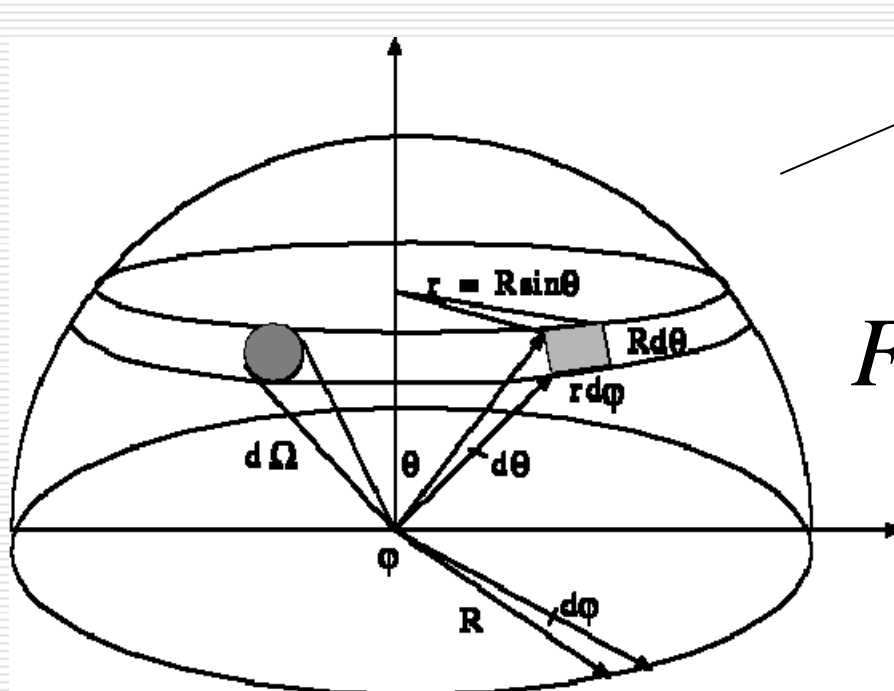
$$dE_{\nu,1} = I_{\nu,2} d\sigma_2 \cos \theta_2 dt_2 d\omega_2$$

$$d\omega_2 = \frac{d\sigma_1 \cos \theta_1}{r^2}$$

Όταν έχουμε κενό $dE_{\nu,1} = dE_{\nu,2}$ οπότε $I_{\nu,1} = I_{\nu,2}$

Ροή Ακτινοβολίας

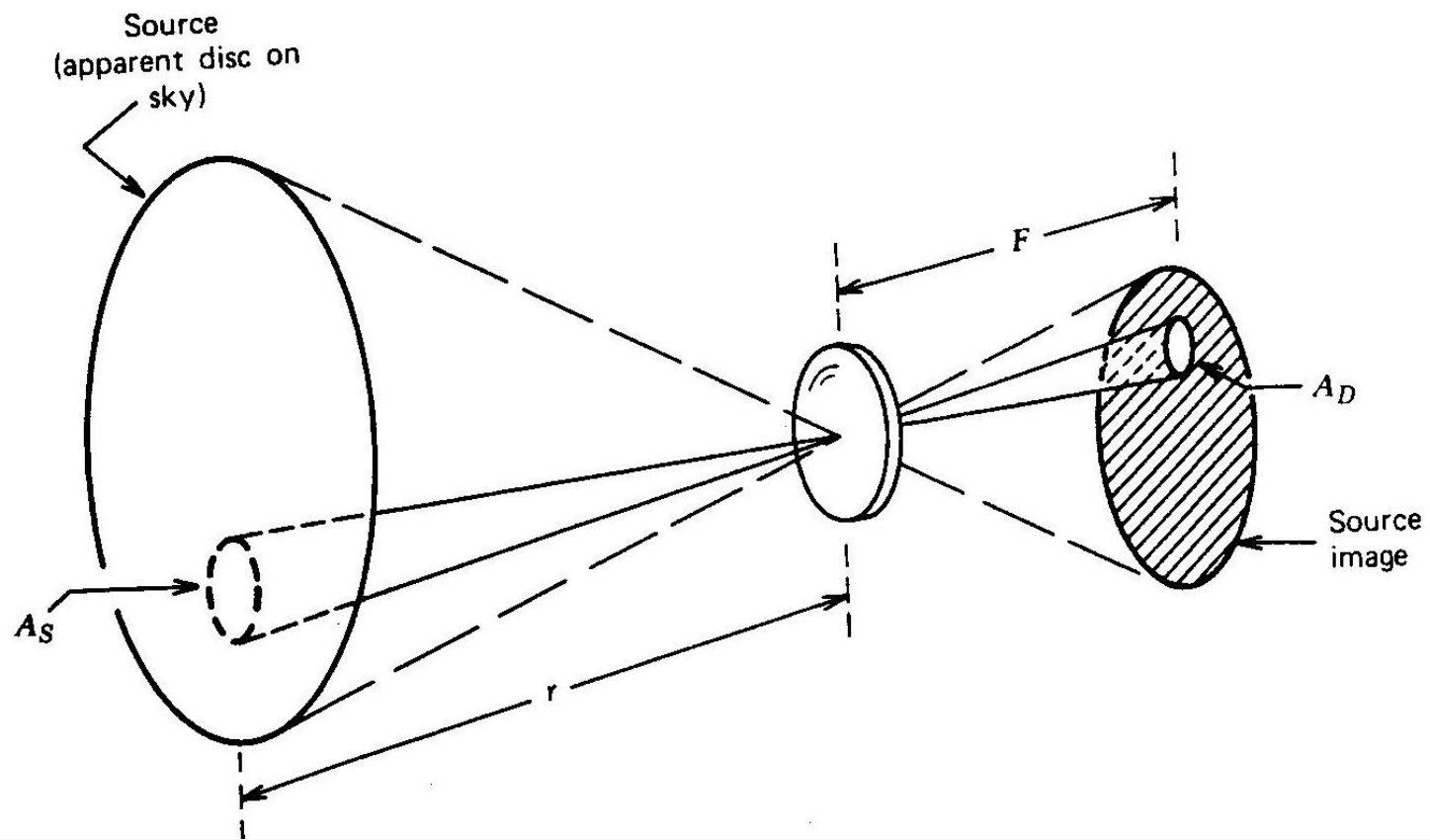
$$F_v = \frac{\int dE_v}{dt d\sigma dv} = \int I_v \cos \theta d\omega \quad \text{όπου} \quad d\omega = \frac{dA}{r^2}$$



$$d\omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

$$F_v = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_v \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

Ροή Ακτινοβολίας



Πυκνότητα Ενέργειας

Είναι το ποσό της ακτινοβολούμενης ενέργειας που ρέει από όλες τις στερεές γωνίες από όγκο dV δια του όγκου αυτού.

$$dU_\nu = \frac{dE_\nu}{dV} \Rightarrow U_\nu = \frac{1}{c} \oint I_\nu d\omega$$

όπου $dE_\nu = I_\nu dV dt d\omega d\sigma \cos \theta$

$$dV = l d\sigma d\cos \theta \quad \text{και} \quad l = c dt$$

Για ισότροπο και ομογενές μέσο :

$$U_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu$$

Πίεση Ακτινοβολίας

Είναι ο ρυθμός μεταβολής της κάθετης συνιστώσας της ορμής που μεταφέρεται από μια δέσμη ακτινοβολίας ανά μονάδα επιφάνειας, χρόνου και συχνότητας.

$$dP_v = \frac{dE_v \cos \theta}{c \cdot dt \cdot dv \cdot d\sigma} = \frac{1}{c} \cdot I_v \cos^2 \theta d\omega \Rightarrow$$

$$P_v = \int_{\omega} \frac{I_v \cos^2 \theta d\omega}{c}$$

Για ισότροπο και ομογενές μέσο : $P_v = 4\pi I_v / 3c$

Συνοπτικός πίνακας φυσικών μεγεθών

$$I_v = \frac{dE_v}{dv \cdot dt \cdot d\omega \cdot d\sigma \cdot \cos \theta}$$

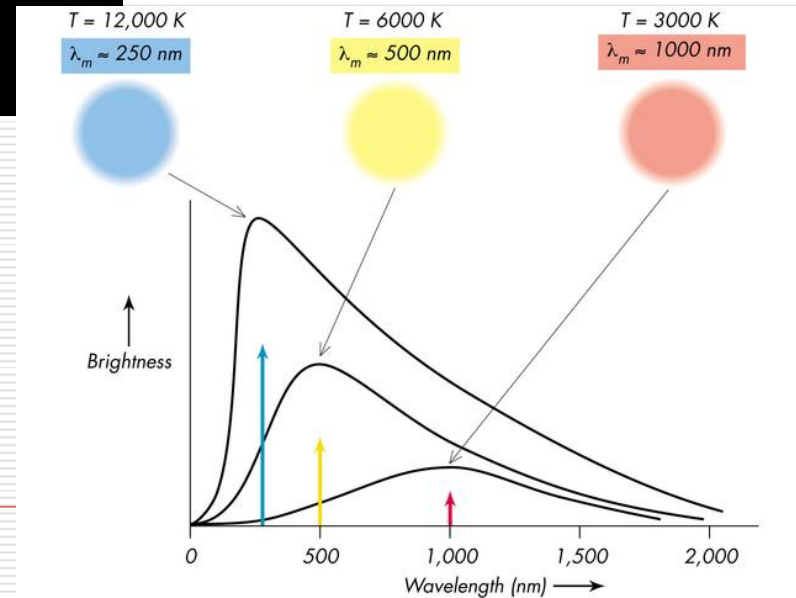
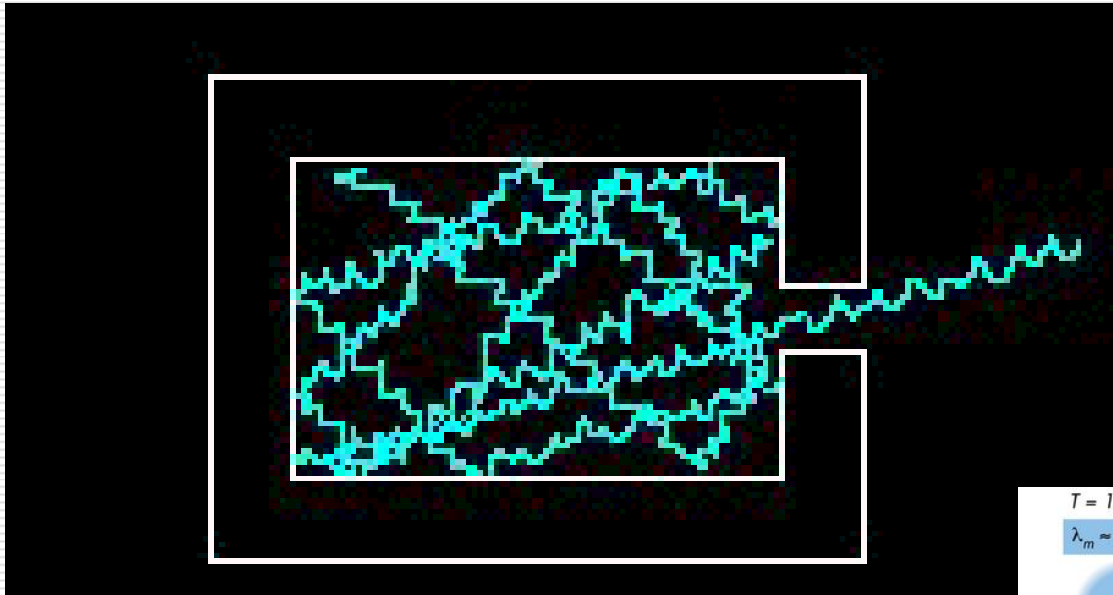
$$J_v = \frac{1}{4\pi} \oint I_v d\omega$$

$$F_v = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_v \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$U_v = \frac{E_v}{dV} = \frac{1}{c} \oint I_v d\omega$$

$$P_v(r) = \frac{1}{c} \oint I_v \cos^2 \theta d\omega$$

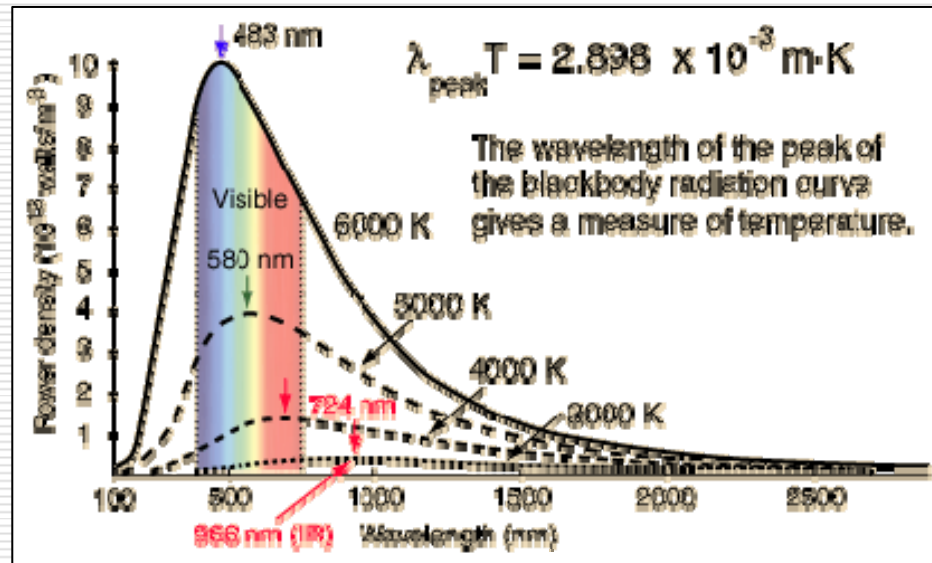
Ακτινοβολία Μέλανος Σώματος



Νόμοι που ισχύουν

Νόμος του Wien:

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{σταθερο} = 0,28973 \text{ cm} \cdot \text{deg}$$



Νόμος Stefan-Boltzmann:

$$F = \sigma \cdot T^4 \quad \text{όπου} \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-5} \text{ erg} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{deg}^{-4}$$

Προσεγγίσεις

- Προσέγγιση Wien: για μεγάλες συχνότητες ή μικρές θερμοκρασίες

$$h\nu \gg kT$$

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{(-h\nu/kT)} \quad \text{ή} \quad B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{(-hc/\lambda kT)}$$

Προσεγγίσεις

- Προσέγγιση Rayleigh-Jeans: για μικρές συχνότητες ή μεγάλες θερμοκρασίες

$$h\nu \ll kT$$

$$B_\nu(T) = 2 \frac{\nu^2}{c^2} kT \quad \text{ή} \quad B_\lambda(T) = 2 \frac{c}{\lambda^4} kT$$

Αλληλεπίδραση Ακτινοβολίας και Ύλης

Συντελεστής απορρόφησης: k_v

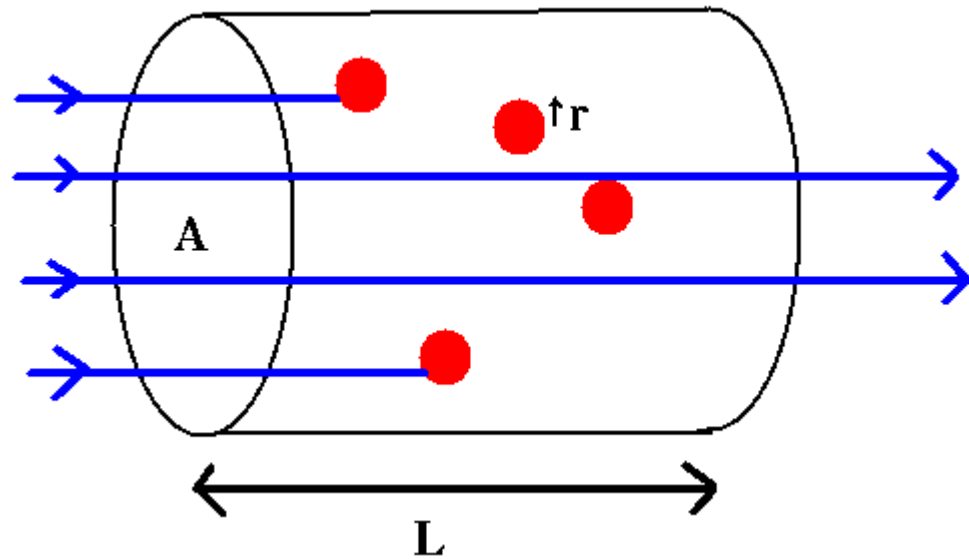
$$dI_v = -k_v \cdot \rho \cdot I_v \cdot dx$$

Συντελεστής Εκπομπής: J_v

$$dI_v = j_v \cdot \rho \cdot dx$$

Ενεργός διατομή σ :

$$k_v = k_v \rho = N \sigma$$



Συνάρτηση πηγής

$$S_v \equiv \frac{\dot{J}_v}{k_v}$$

1) Καθαρή Απορρόφηση: $S_v = \frac{\dot{J}_v}{k_v} = I_v$

$$k_{v,απορ} \cdot I_v = \dot{J}_{v,θερμ}$$

2) Μόνο σκέδαση:

$$k_{v,σκεδ} \int I_v d\omega = \dot{J}_{v,σκεδ} \cdot 4\pi \quad S_v = \frac{\dot{J}_{v,σκεδ}}{k_{v,σκεδ}} = J_v$$

3) Απορρόφηση και σκέδαση:

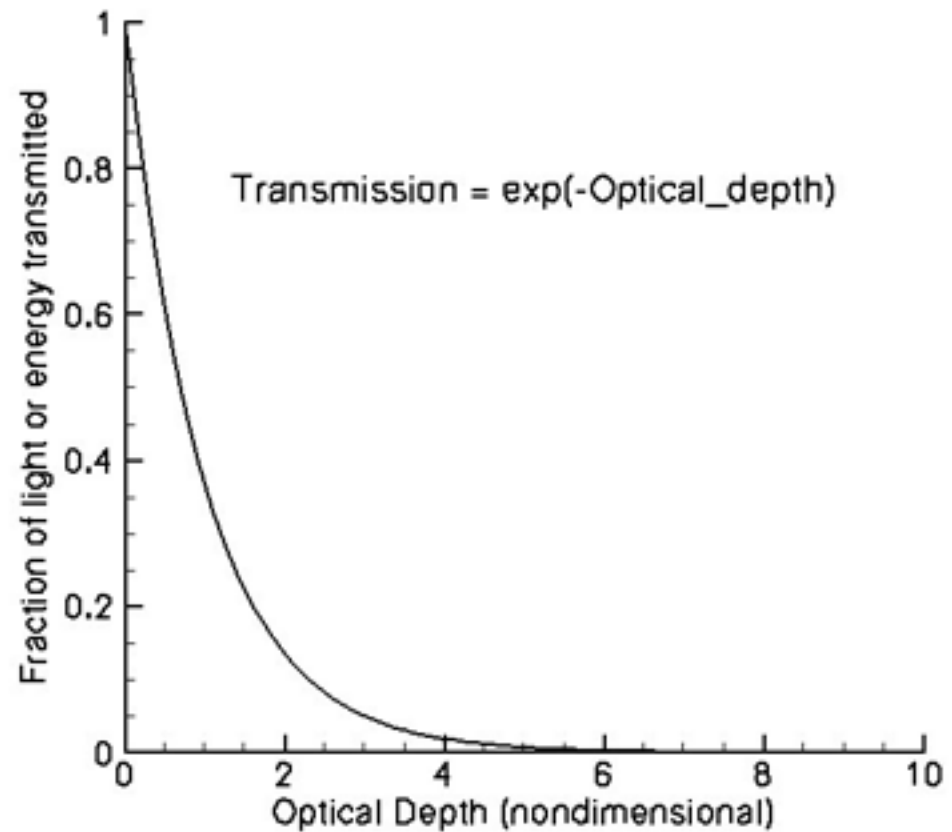
$$\dot{J}_{v,σκεδ} = k_{v,σκεδ} \cdot J_v$$

$$S_v = \frac{k_{v,απορ} B_v + k_{v,σκεδ} J_v}{k_{v,απορ} + k_{v,σκεδ}}$$

Οπτικό βάθος

$$\tau_v = -\int k_v \rho dx$$

$$I_v = I_{v,0} e^{-\tau_v}$$



Αδιαφάνεια:

φυσικές διεργασίες που την δημιουργούν
Θερμοί αστέρες $T > 10.000\text{K}$

Καθαρή Απορρόφηση

- 1) δέσμιες- δέσμιες μεταπτώσεις:
ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΦΑΣΜΑ
- 2) δέσμιες - ελεύθερες μεταπτώσεις
(ονομάζεται και φωτοϊονισμός):
Φωτόνια με $\lambda = hc/\chi_n$ όπου χ_n η
ενέργεια ιονισμού από την n
στάθμη. ΣΥΝΕΧΕΣ ΦΑΣΜΑ
- 3) ελεύθερες -ελεύθερες
μεταπτώσεις: όταν ένα ελεύθερο
ηλεκτρόνιο κοντά σε ένα ιόν
απορροφά ένα φωτόνιο και
αυξάνεται η ταχύτητά του.
ΣΥΝΕΧΕΣ ΦΑΣΜΑ

Σκέδαση

Σκέδαση ακτινοβολίας
από ελεύθερα ηλεκτρόνια
(το φωτόνιο αλλάζει
διεύθυνση αλλά όχι
συχνότητα). ΣΥΝΕΧΕΣ
ΦΑΣΜΑ

Ενεργός διατομή

$$\sigma_T = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$$

Αδιαφάνεια:

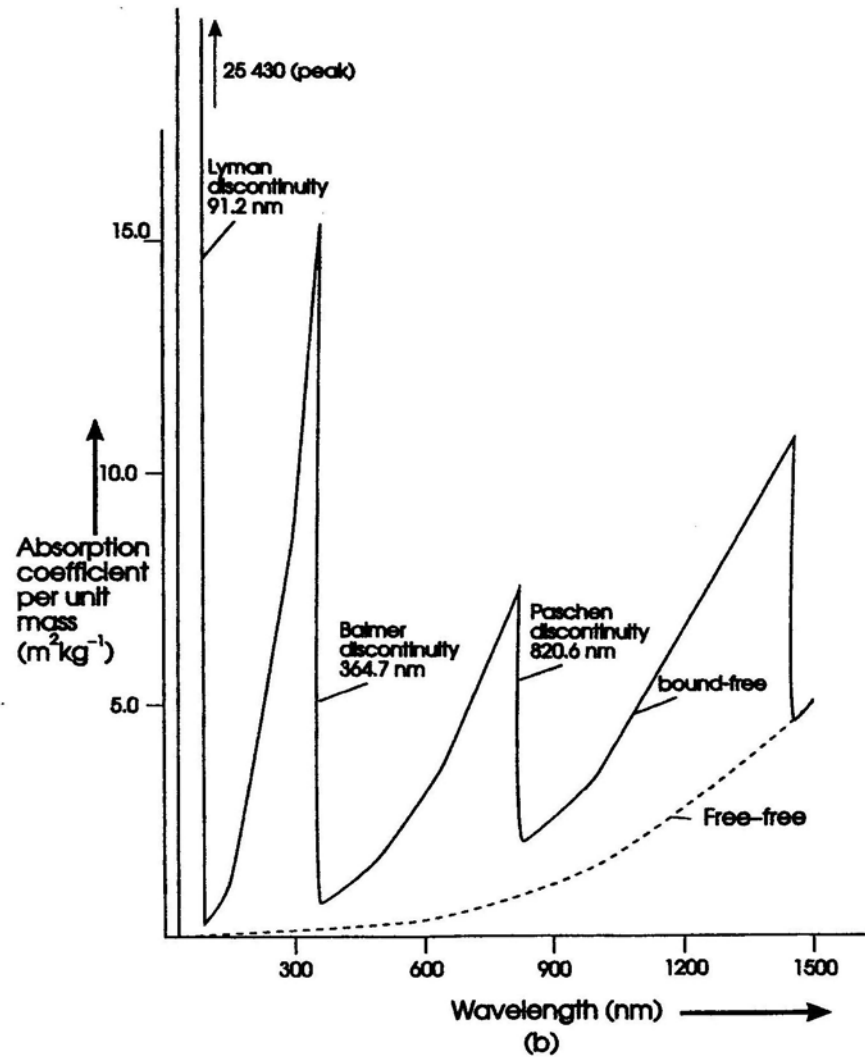
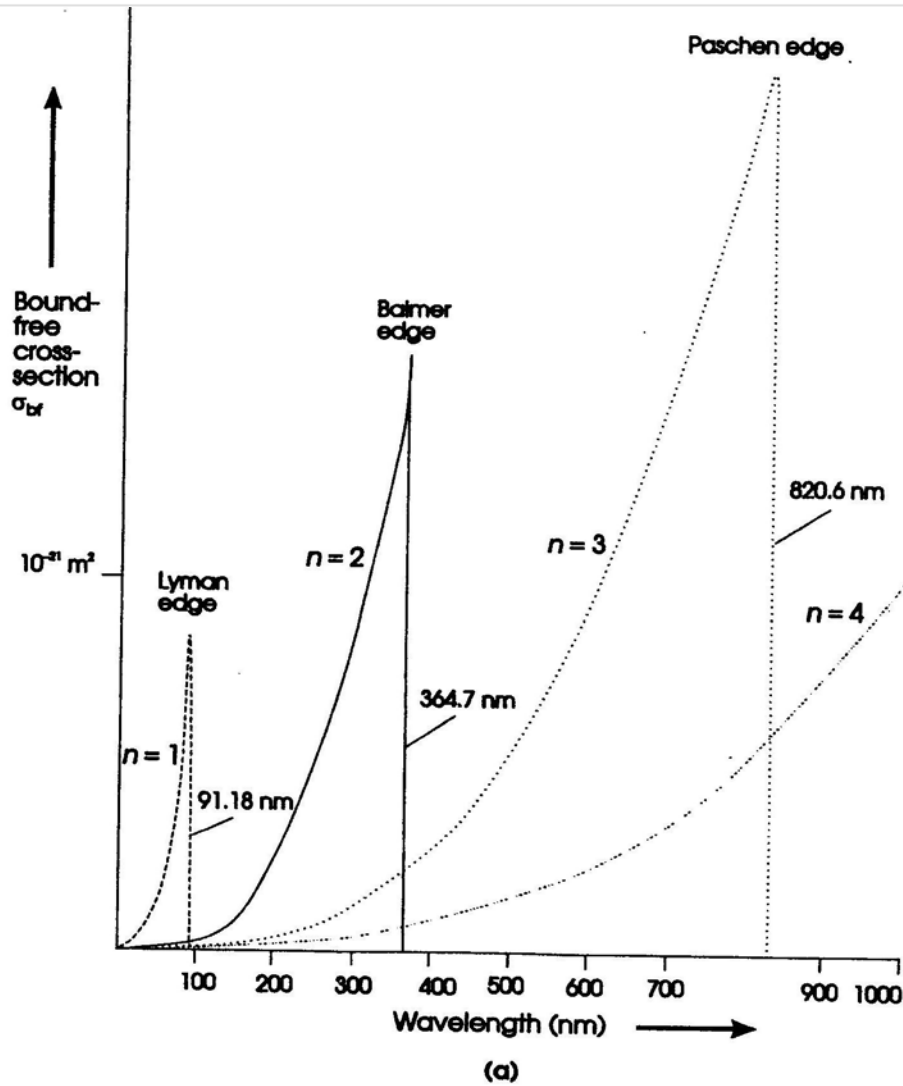
φυσικές διεργασίες που την δημιουργούν
Ψυχροί αστέρες $T < 10.000K$

Απορρόφηση αρνητικού ιόντος υδρογόνου (βασική αιτία απορρόφησης για την ηλιακή ατμόσφαιρα)

Φωτοδιάσπαση μορίων: τα μόρια απορροφούν ενέργεια με αποτέλεσμα ή να διαχωριστούν σε άτομα ή να σχηματίσουν τις μοριακές ταινίες απορρόφησης στο φάσμα

Σκέδαση Rayleigh φωτονίων από μόρια ή άτομα: συντελεστής σκέδασης

$$\sigma = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^4$$



$$k_{\nu\rho} = N \cdot \sigma_{b-f}$$

Απορρόφηση αρνητικού ιόντος Υδρογόνου σε αστέρες ηλιακού τύπου

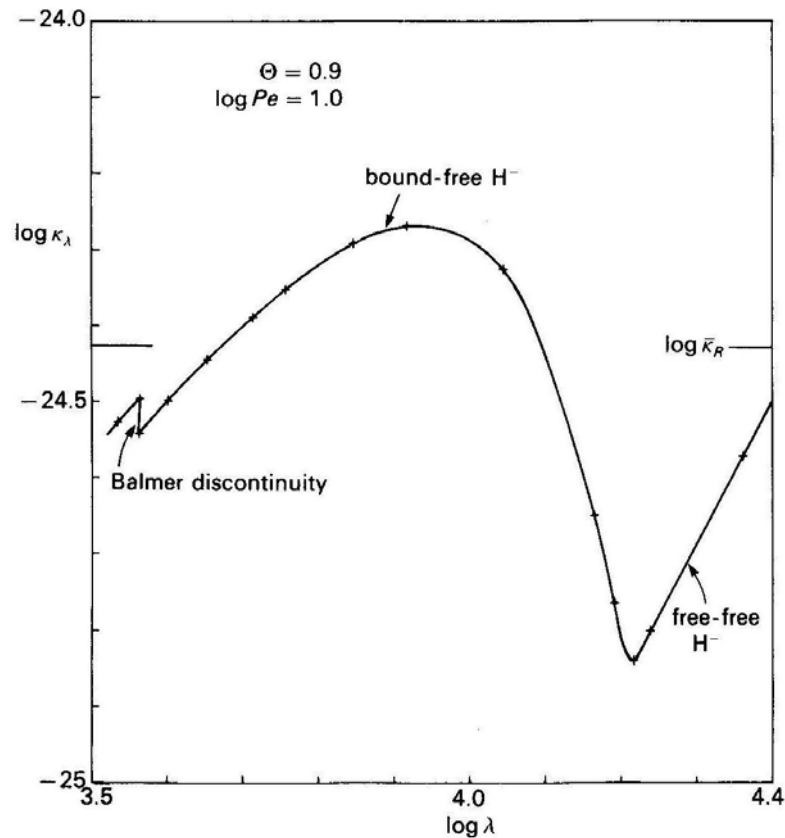


Fig. 7.5. The continuous absorption coefficient per particle is shown for $\Theta = 0.9$, which means $T = 5600$, and $\log P_e = 1.0$. The contributions from the bound-free and free-free continua of H⁻ are dominant. The small contribution from the Balmer continuum of hydrogen is visible at $\log \lambda = 3.562$. $\bar{\kappa}_R$ is the Rosseland mean absorption coefficient; see section 8.4.

Για το αρνητικό ιόν
του Υδρογόνου
 $\chi_{\text{ιον}} = 0,7 \text{ eV} \Rightarrow$
 $\lambda = 16400 \text{ \AA}$

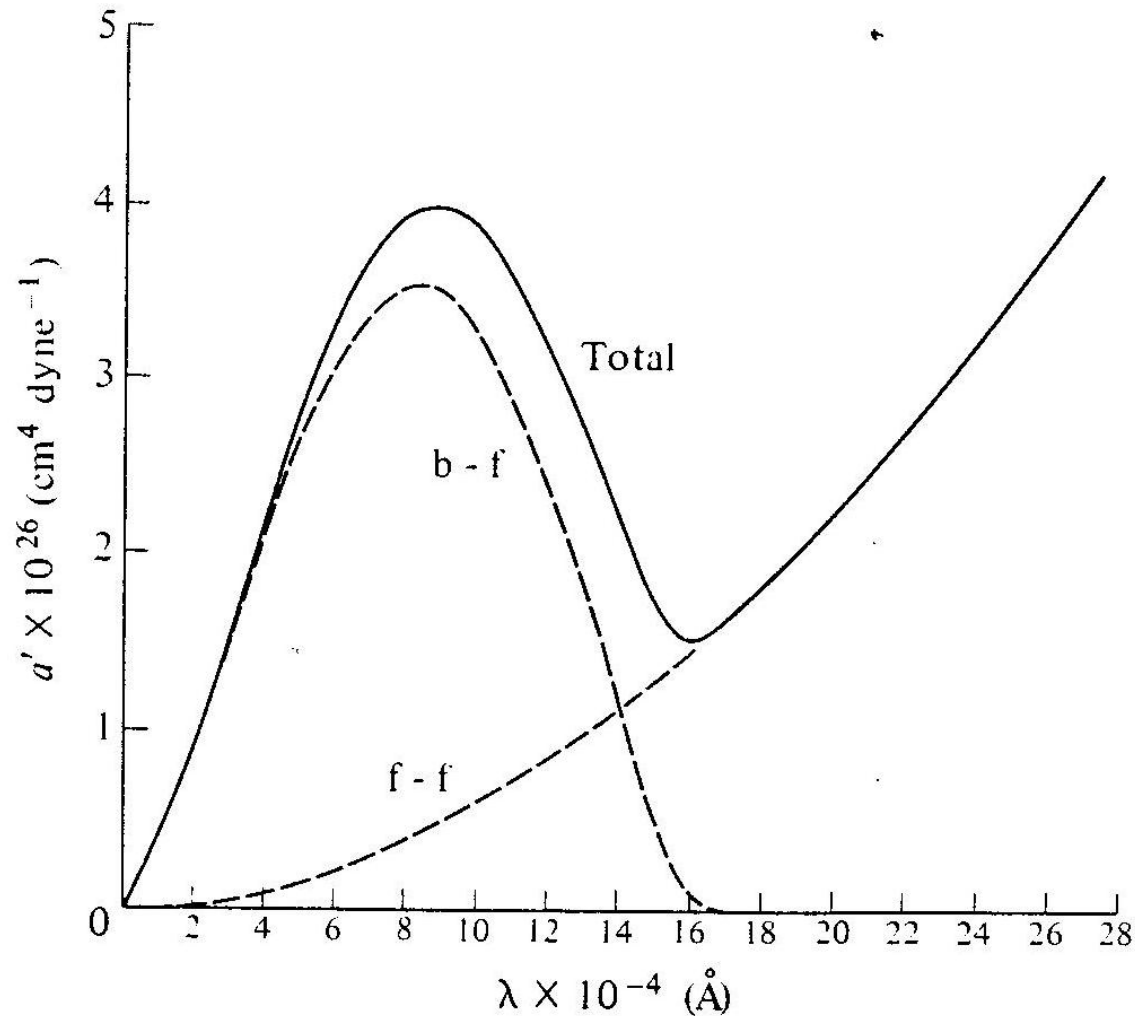
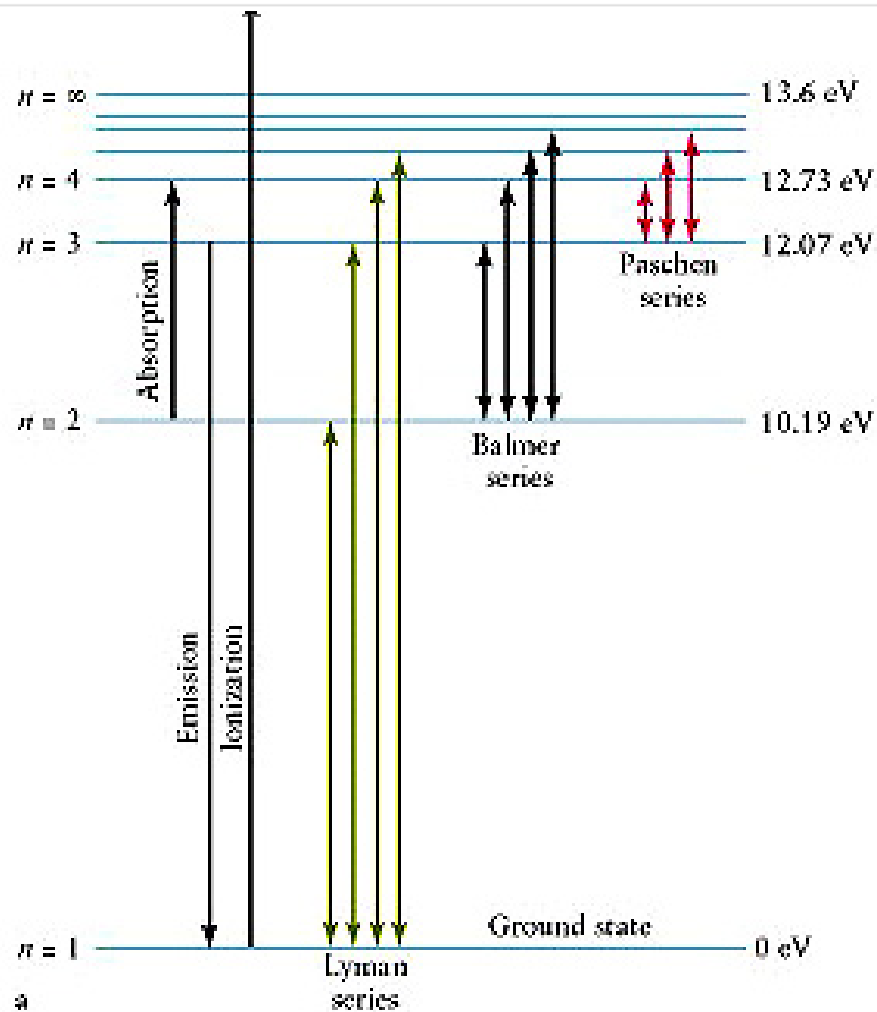


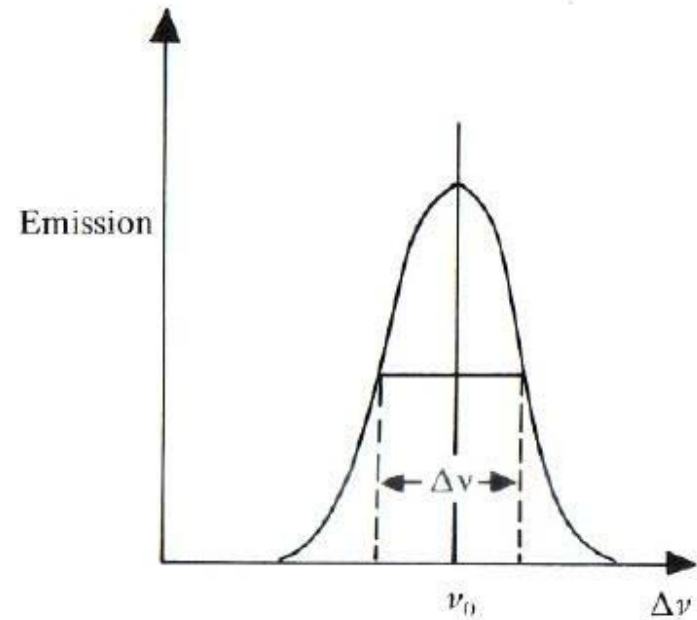
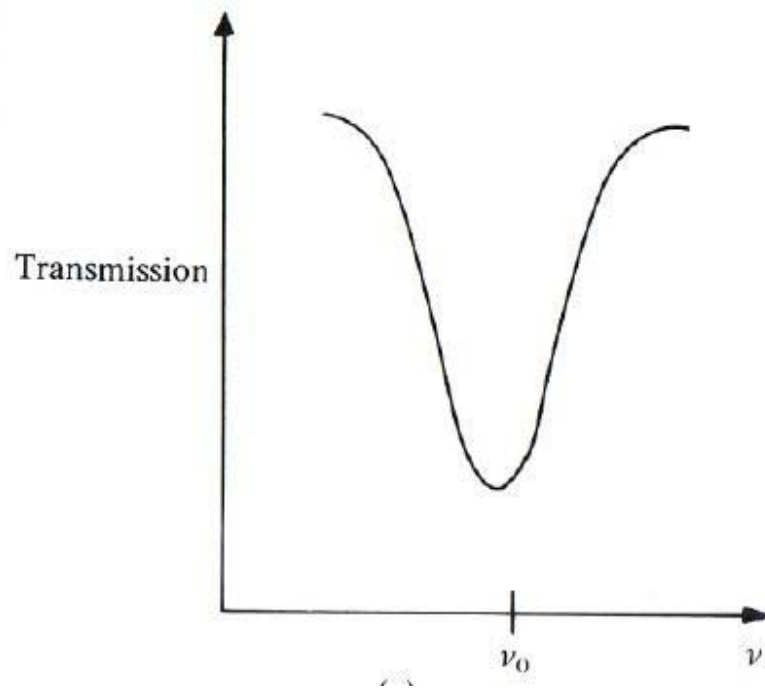
Fig. 3-11 The Absorption Coefficient of the Negative Hydrogen Ion at a Temperature of 6300°K ($\theta = 0.8$) due to Bound-Free and Free-Free Transitions. The quantity plotted is 10^{26} times the absorption coefficient per unit electron pressure and per neutral hydrogen atom in one cm^3 . Thus the coefficient has the dimensions cm^{-1} and is not a mass absorption coefficient. [Adapted from N. A. Doughty and P. A. Fraser, 1966 (211).]

Γραμμικό Φάσμα - Σχηματισμός



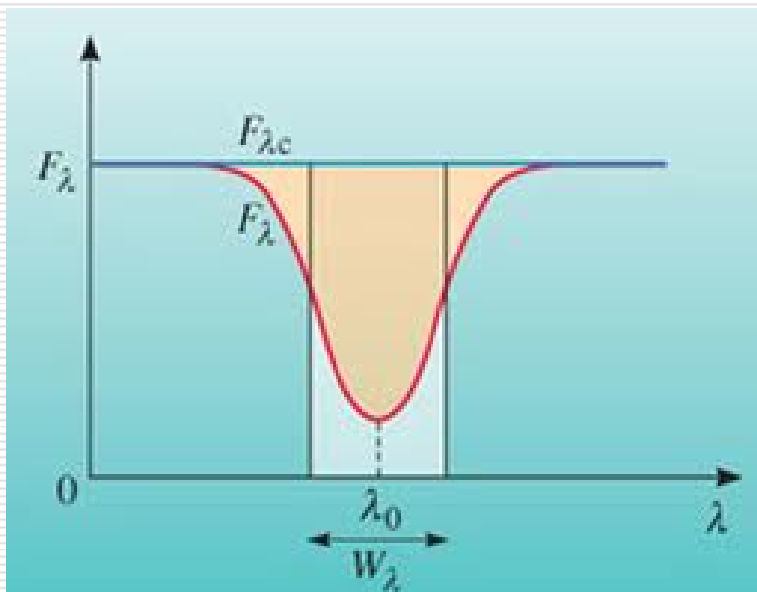
$$E = h \cdot \nu$$

Γραμμές απορροφήσεως και εκπομπής



Προφίλ – ισοδύναμο πλάτος φασματικής γραμμής

Προφίλ γραμμής:



$$R_{\lambda} = \frac{F_c - F_{\lambda}}{F_c}$$

Ισοδύναμο πλάτος W_{λ} είναι το πλάτος μιας τελείως μαύρης γραμμής απορρόφησης που έχει την ίδια ολική απορρόφηση (εμβαδόν) όπως η πραγματική γραμμή

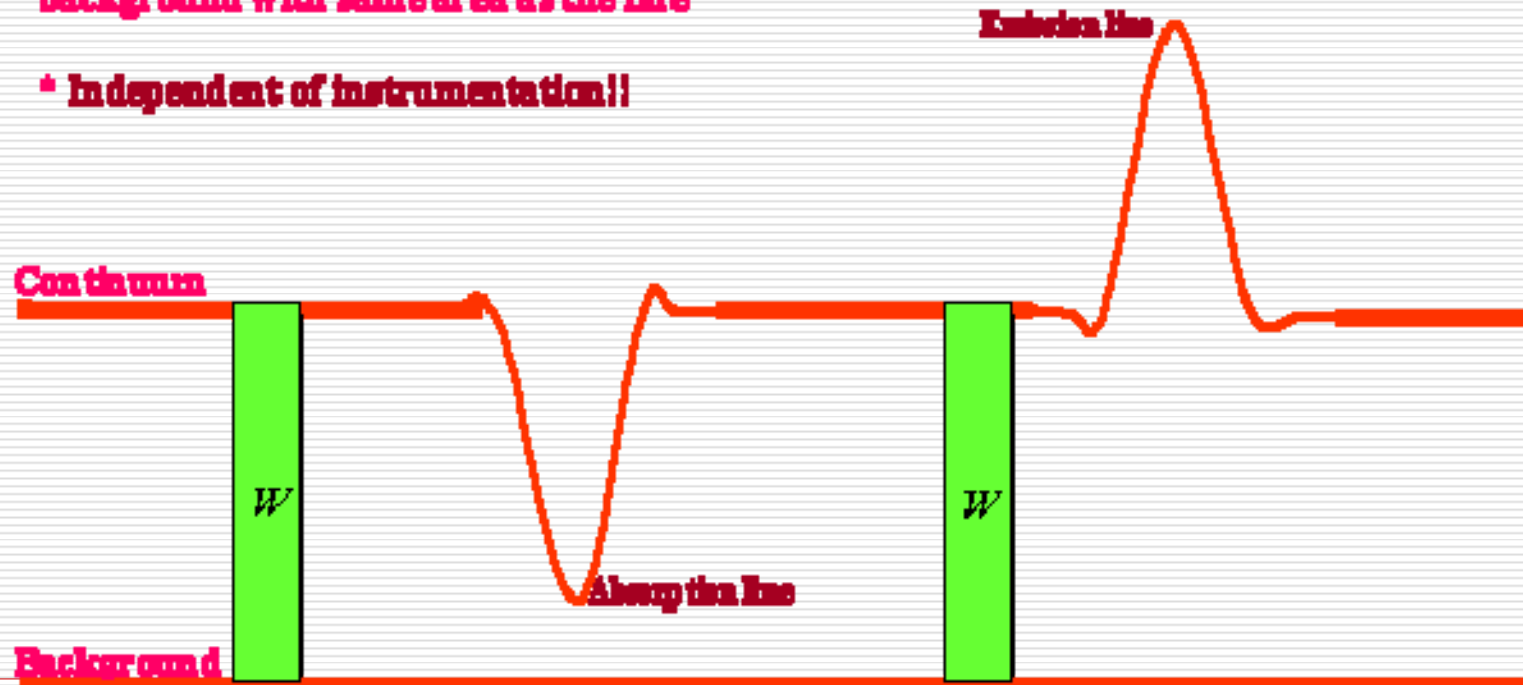
$$W_{\lambda} = \int_0^{\infty} \frac{F_c - F_{\lambda}}{F_c} d\lambda$$

Ισοδύναμο πλάτος

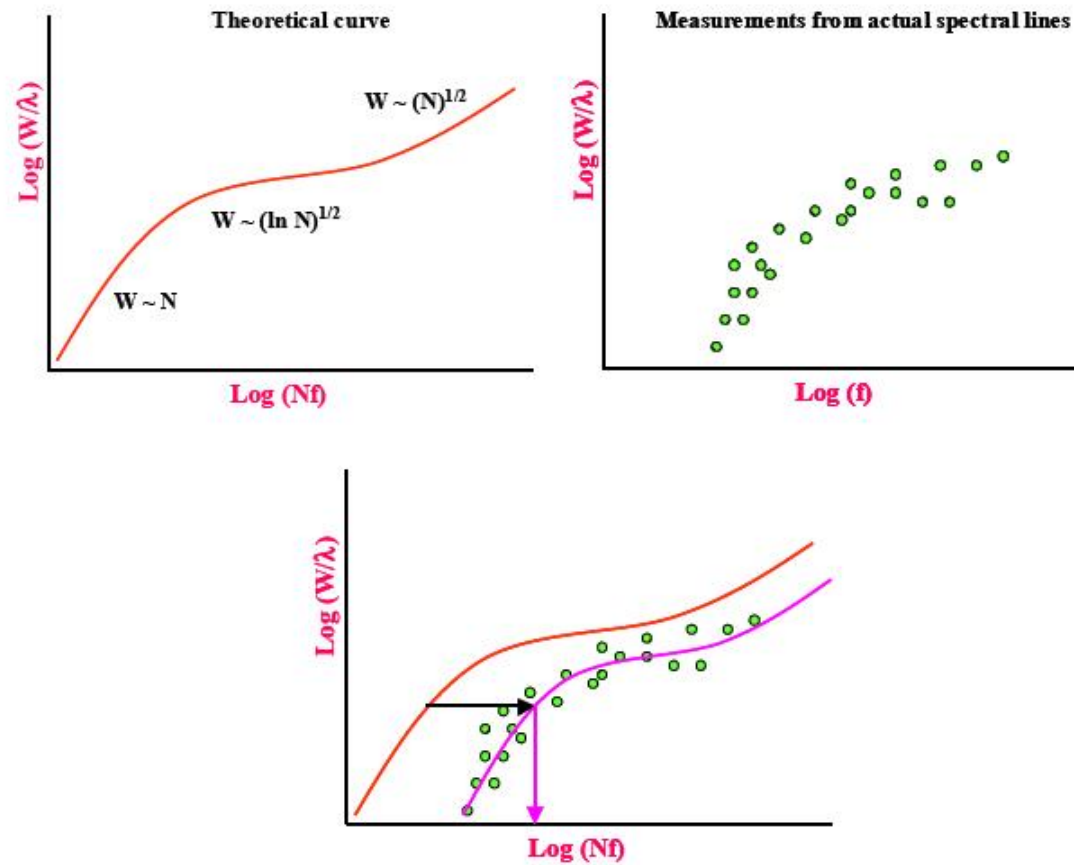
Measurement of Line Intensity: The Equivalent Width (W)

W = width of rectangle between continuum and background with same area as the line

* Independent of instrumentation!!



Καμπύλη Ανάπτυξης

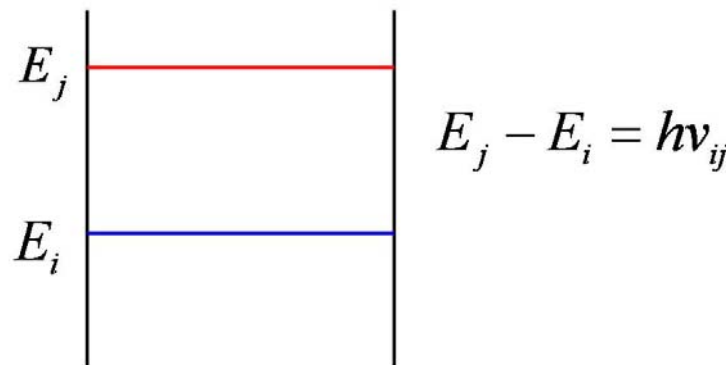


Συντελεστές Einstein

A_{ji} : η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου ένα άτομο που βρίσκεται στη διεγερμένη στάθμη j να μεταπέσει τυχαία στην κατώτερη ενεργειακή στάθμη i .

$B_{ij}I\nu d\omega$: η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου ένα άτομο που βρίσκεται στη στάθμη i , στο πεδίο ακτινοβολίας $I\nu d\omega$ να διεγερθεί στη στάθμη j .

$B_{ji}I\nu d\omega$: η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου ένα άτομο που βρίσκεται στη διεγερμένη στάθμη j , στο πεδίο ακτινοβολίας $I\nu d\omega$ να μεταπέσει στην κατώτερη στάθμη i .



$$I_\nu = \frac{A_{ji}}{B_{ij}(N_i / N_j) - B_{ji}}$$

όπου N_i , N_j οι πληθυσμοί των σταθμών i και j ανά μονάδα όγκου

$$B_{ji} = \frac{c^2}{2h\nu^3} A_{ji}$$

$$B_{ji} = (g_i / g_j) B_{ij}$$

Πλάτυνση Φασματικών Γραμμών

Φυσική πλάτυνση

Αρχή Απροσδιοριστίας Heisenberg: $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$

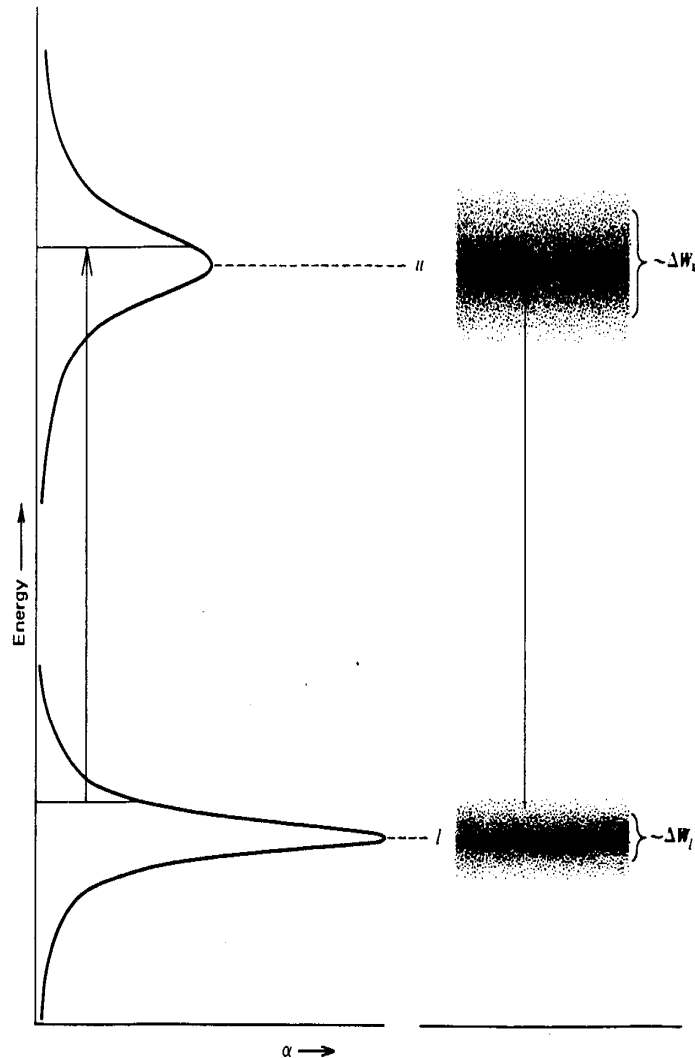
Συντελεστής απορρόφησης μάζας για τη γραμμή

όπου

$$k_\nu \rho = \frac{e^2}{mc} N \frac{\gamma / 4\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma / 4\pi)^2}$$

- e και m το φορτίο και η μάζα του ηλεκτρονίου,
- ν_0 η ιδιοσυχνότητα του ηλεκτρονίου
- ν η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας
- γ σταθερά απόσβεσης που είναι το αντίστροφο του μέσου χρόνου ζωής στη δεδομένη διεγερμένη κατάσταση
- N ο αριθμός των ταλαντωτών ανά κυβικό εκατοστό που μπορούν να απορροφούν σε συχνότητες της γραμμής που είναι κεντραρισμένη στη συχνότητα ν_0

Φυσική πλάτυνση



$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta t = 1/\gamma_u = 1/\Sigma A_{ul}$$

$$\gamma = \gamma_u + \gamma_l \quad (\text{Damping constant})$$

Συμβολικό διάγραμμα του επιπέδου ενέργειας που παρουσιάζει το ενεργειακό εύρος των ατομικών επιπέδων. Η μετάβαση ξεκινά στο κατώτερο επίπεδο με πιθανότητα a_i και τελειώνει στο ανώτερο επίπεδο με τελική ενέργεια a με πιθανότητα a_{ii} .

Πλάτυνση Φασματικών Γραμμών

Πλάτυνση λόγω φαινομένου Doppler – θερμική πλάτυνση

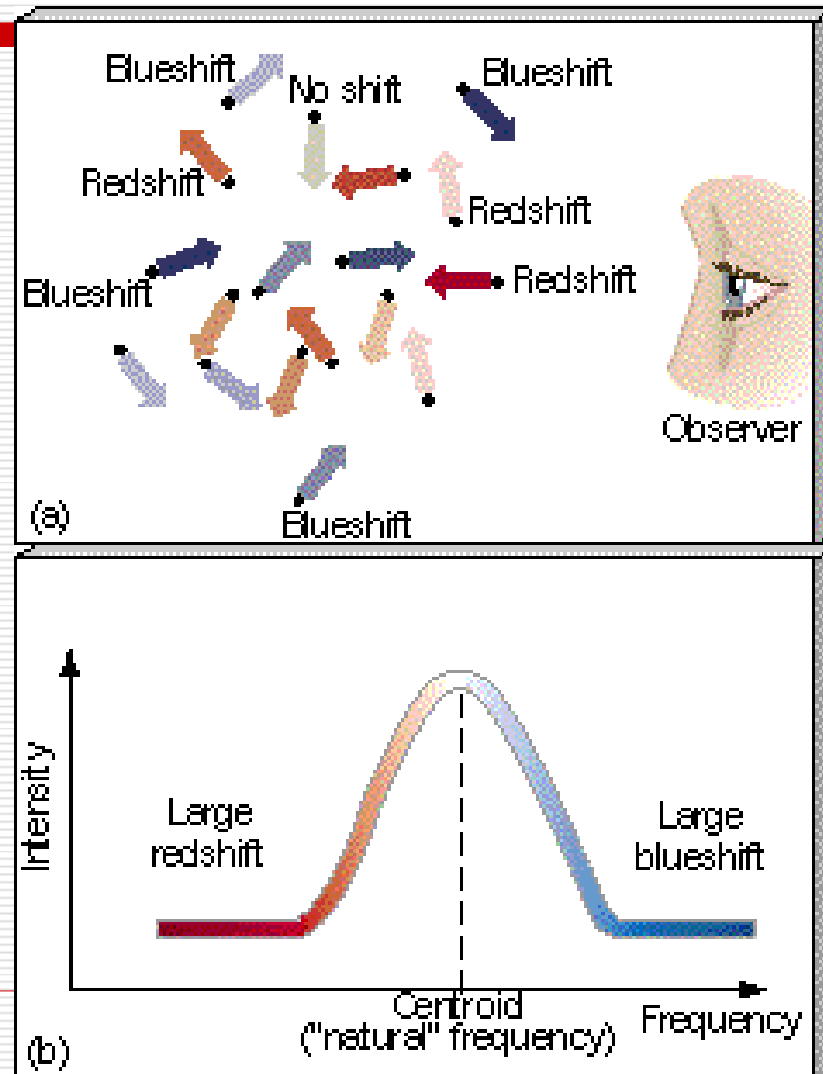
Μετατοπίσεις Doppler: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{V_r}{c}$

Πλάτυνση φασματικής γραμμής λόγω Doppler:

$$\Delta\lambda_D = \frac{V_D}{c} \lambda = \frac{\lambda}{c} \left[\frac{2kT}{m} \right]^{1/2} = 7.16 \cdot 10^{-7} \lambda \left[\frac{T}{m} \right]^{1/2}$$

όπου V_D η διασπορά των ταχυτήτων $V_D \approx V_0 = \left[\frac{2kT}{m} \right]^{1/2}$

Θερμική Πλάτυνση



Πλάτυνση Φασματικών Γραμμών

Πλάτυνση λόγω κρούσεων ή λόγω πίεσης

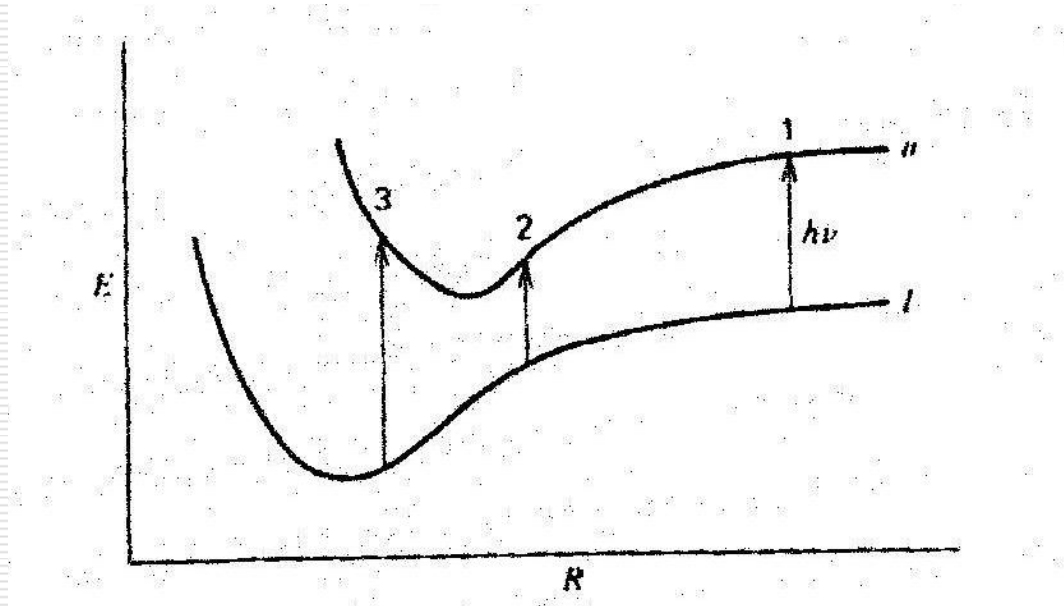
Οι συγκρούσεις των ατόμων προκαλούν πρόσθετη πλάτυνση των φασματικών γραμμών καθώς οι ενεργειακές στάθμες των ατόμων που προκαλούν τη φασματική γραμμή διαταράσσονται από γειτονικά σωματίδια και έτσι δεν υπάρχει πλέον μια ορισμένη ενεργειακή διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών.

$$\Delta \nu = C_n R^{-n}$$

ή

$$\Delta \nu = C_n / R^n$$

Πλάτυνση λόγω κρούσεων

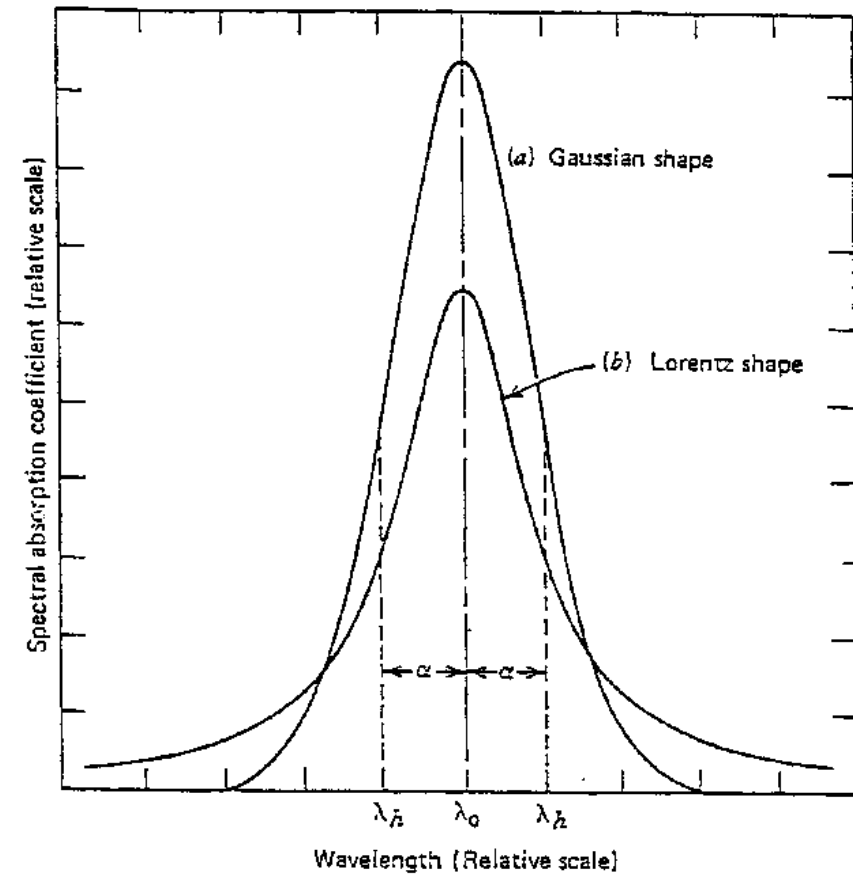


Οι ενέργειες που σχετίζονται με δύο ατομικά επίπεδα u και l εξαρτώνται από τη θέση R της διαταραχής. Η μετάβαση ανάμεσα στα επίπεδα u και l μπορεί να αντιστοιχεί σε μεγαλύτερα ή μικρότερα ποσά ενέργειας από την αδιατάρακτη κατάσταση ανάλογα με την απόσταση.

Πλάτυνση Φασματικών Γραμμών

(a) Θερμική
πλάτυνση

(b): φυσική και
πλάτυνση κρούσεως



Λύση της εξίσωσης Διάδοσης

Θεωρούμε ότι η ακτινοβολία διαδίδεται σε μια διεύθυνση S . Η μεταβολή της ειδικής έντασης I_ν σε μια απόσταση ds είναι το αλγεβρικό άθροισμα της απορροφούμενης και της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας:

$$dI_\nu = -k_\nu \rho I_\nu ds + j_\nu \rho ds$$

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + \frac{j_\nu}{k_\nu} = S_\nu - I_\nu$$

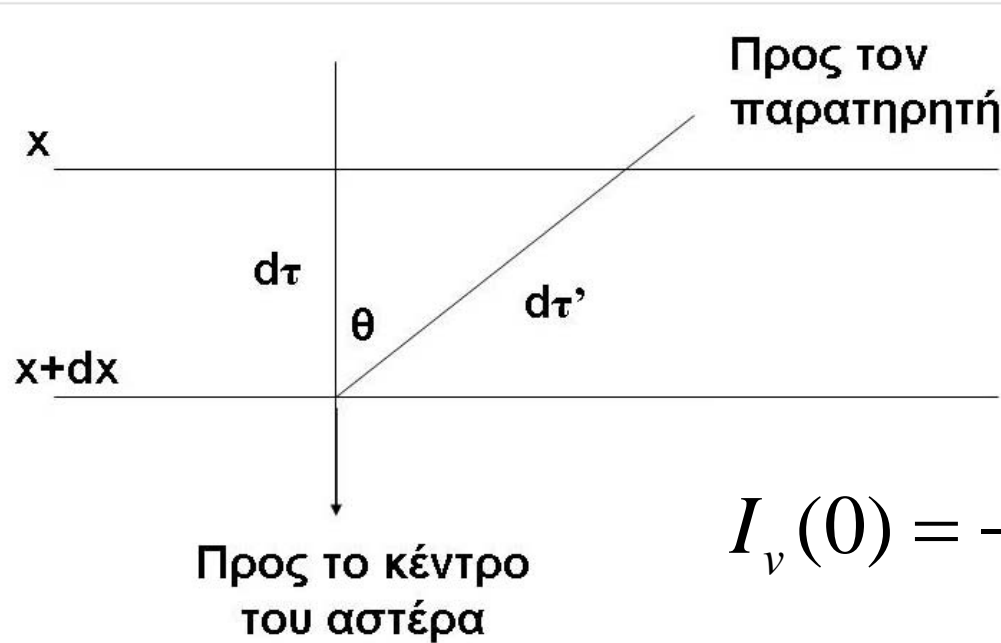
Λύση της εξίσωσης Διάδοσης

$$I_{\nu}(t_{\nu}) = \int_0^{t_{\nu}} S_{\nu}(t_{\nu}) e^{-(\tau_{\nu}-t_{\nu})} dt_{\nu} + I_{\nu}(0) e^{-\tau_{\nu}}$$

Βασική μορφή της λύσης της
εξίσωσης διάδοσης με ακτινοβολία

Λύση της εξίσωσης διάδοσης για το συνεχές

Ομογενής επίπεδη αστρική ατμόσφαιρα



$$I_{\nu}(0) = - \int_0^{\infty} S_{\nu}(t_{\nu}) e^{-t_{\nu} \cdot \sec \theta} \sec \theta dt_{\nu}$$

Προσεγγιστικές λύσεις της εξίσωσης διάδοσης για το συνεχές φάσμα

- Eddington – Barbier ($S_\nu = a + b t_\nu$):

$$I_\nu(t_\nu) = \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-(\tau_\nu - t_\nu)} dt_\nu = a + b \cos \theta$$

- Γκρι ατμόσφαιρα ($k_\nu = k$):

$$S = \int_0^\infty S_\nu d\nu \Rightarrow \cos \theta \frac{dI}{d\tau} = I - S$$

Στην περίπτωση της γκρι ατμόσφαιρας, το πρόβλημα της διάδοσης ακτινοβολίας λύνεται με την επίλυση μιας και μόνο εξίσωσης ενώ στη γενική περίπτωση απαιτείται η επίλυση απείρων εξισώσεων, μίας για κάθε συχνότητα.

Προσεγγιστικές λύσεις της εξίσωσης διάδοσης για το συνεχές φάσμα

- Πραγματική περίπτωση – Μέσος συντελεστής Rosseland ($k_\nu = \bar{k}$)

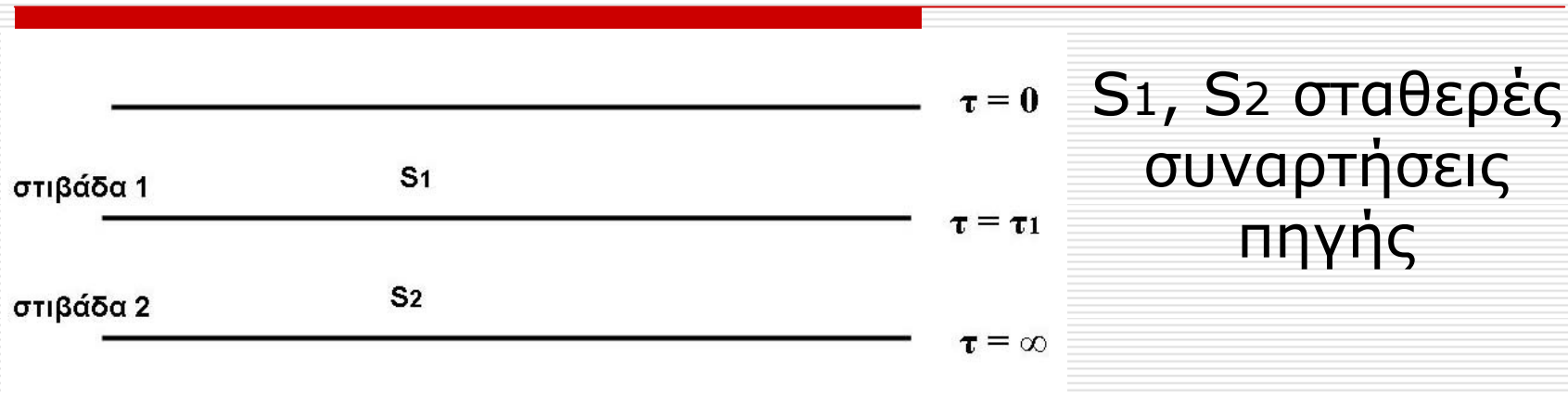
$$\frac{1}{k} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}$$

Προσεγγιστικές λύσεις της εξίσωσης διάδοσης για το γραμμικό φάσμα

- Προσέγγιση Schuster – Schwarzschild (S-S)
Το συνεχές φάσμα μιας πηγής προέρχεται από τη φωτόσφαιρα και οι γραμμές από τη λεπτή στοιβάδα πάνω από τη φωτόσφαιρα (ανατρεπτική στοιβάδα).

 - Προσέγγιση Milne – Eddington (M-E)
Το γραμμικό και το συνεχές φάσμα σχηματίζονται στην ίδια ατμοσφαιρική στοιβάδα.
-

Προσέγγιση Schuster – Schwarzschild (S-S)



$$I = S_1 \int_0^{\tau_1} e^{-\tau} d\tau + S_2 \int_{\tau_1}^{\infty} e^{-\tau} d\tau$$

Για αμυδρές γραμμές (TL μικρό):

$$\frac{I_c - I_L}{I_c} = \tau_L \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)$$

Για έντονες γραμμές (TL μεγάλο):

$$\frac{I_c - I_L}{I_c} = 1 - \frac{S_1}{S_2}$$

Προσέγγιση Milne – Eddington (M-E)

$$S = a + b\tau_c$$

$$I_L = a + b \frac{k_c}{k_c + k_L}$$

$$I_c = a + b$$

$$\frac{I_c - I_L}{I_c} = \frac{b}{a + b} \frac{n}{1 + n}$$

όπου $n = k_L/k_c$
