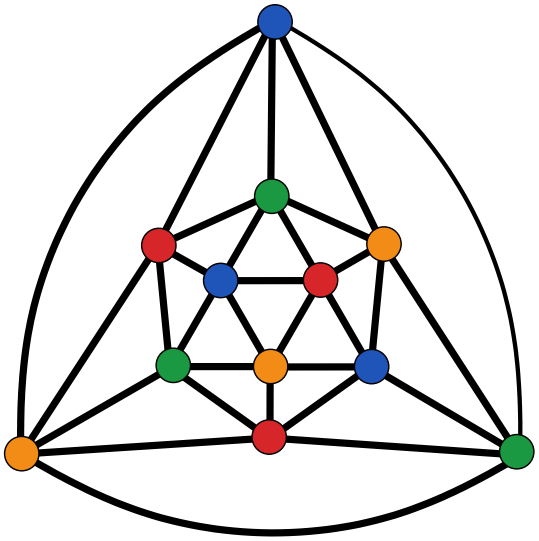
Σημειώσεις στὴ
ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ



Δημήτρης Ζῶρος
Δημήτριος Μ. Θηλυκός

Τμῆμα Μαθηματικῶν
Ἐθνικὸ καὶ Καποδιστριακὸ Πανεπιστήμιο Ἀθηνῶν

Διϊδρυματικὸ Μεταπτυχιακὸ Πρόγραμμα Εἰδίκευσης στοὺς Ἀλγορίθμους, τὴ Λογικὴ καὶ τὰ Διακριτὰ Μαθηματικὰ (ΑΛΜΑ)

14 Ὀκτωβρίου 2026

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εἰσαγωγή **1**

1 Βασικοὶ ὁρισμοί **5**
1.1 Γενικοὶ ὁρισμοί 5
1.2 Γραφήματα καὶ ἰσομορφισμοί 5
1.3 Εἰδικὰ γραφήματα 8
1.4 Αὐτομορφισμοὶ γραφημάτων 11
1.5 Γενικεύσεις τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ γραφήματος 12

2 Πράξεις καὶ σχέσεις **17**
2.1 Πράξεις σὲ γραφήματα 17
2.2 Τοπικοὶ μετασχηματισμοί 20
2.3 Σχέσεις μεταξὺ γραφημάτων 22

3 Βαθμοὶ κορυφῶν **29**
3.1 Ἐλάχιστος, μέσος καὶ μέγιστος βαθμός 29
3.2 Ἐκφυλισμὸς καὶ πυκνότητα 31
3.3 Γραφικὲς ἀκολουθίες 35

4 Μονοπάτια καὶ κύκλοι **41**
4.1 Διάμετρος καὶ ἀκτῖνα 44
4.2 Ἀποσυνθέσεις ἀπόστασης 47
4.3 Γραφήματα μὲ μικρὸ μέγιστο βαθμὸ καὶ διάμετρο 50

4.4 Περίμετρος καὶ περιφέρεια 51

5 Συνεκτικότητα 57
5.1 Δισυνεκτικότητα 60
5.2 Συνεκτικότητα καὶ ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια 66
5.3 3-συνεκτικότητα 74
5.4 k-συνεκτικὰ ὑπογραφήματα 84
5.5 Συνεκτικότητα ἀκμῶν 86

6 Δέντρα 89
6.1 Δάση καὶ δέντρα 89
6.2 Παραγόμενα ὑποδέντρα 91
6.3 Δέντρα μὲ ἐτικέτες 92

7 Ἐπίπεδα γραφήματα 97
7.1 Ἐνεπίπεδα γραφήματα 97
7.2 Τοπολογικῶς ἰσόμορφα ἐνεπίπεδα πολυγραφήματα 101
7.3 Δυϊκὰ γραφήματα 104
7.4 Πυκνότητα καὶ ἐπιπεδότητα 107
7.5 Πλατωνικὰ γραφήματα 108
7.6 Πλήρεις χαρακτηρισμοὶ γιὰ ἐπίπεδα γραφήματα 110
7.7 Ἐξωεπίπεδα γραφήματα 115

8 Χρωματισμοὶ κορυφῶν 121
8.1 k-μερῆ γραφήματα καὶ χρωματικοὶ ἀριθμοί 121
8.2 Χρωματικότητα καὶ ἐκφυλισμός 125
8.3 Χρωματισμοὶ καὶ ἐπίπεδα γραφήματα 127
8.4 Χρωματισμοὶ καὶ μέγιστος βαθμός 128
8.5 Χρωματισμοὶ καὶ περιφέρεια 131
8.6 Χρωματισμοὶ καὶ ἀραιὰ γραφήματα 133
8.7 Χρωματισμοὶ ἀκμῶν 136

9 Κλίκες καὶ ἀνεξάρτητα σύνολα 141
9.1 Κλίκες 141
9.2 Ἀνεξάρτητα σύνολα 144

10 Καλύμματα καὶ ταιριάσματα **149**
10.1 Καλύμματα κορυφῶν 149
10.2 Ταιριάσματα 151
10.3 Τὸ θεώρημα τοῦ Tutte 158

11 Πακεταρίσματα **161**
11.1 Σύνολα ἀνάδρασης κορυφῶν 161
11.2 Πακεταρίσματα κύκλων 161
11.3 Δενδρικότητα 168

12 Τέλεια γραφήματα **173**
12.1 Κλάσεις τέλειων γραφημάτων 173
12.2 Χορδικὰ γραφήματα 175
12.3 Τὸ θεώρημα τῶν τέλειων γραφημάτων 178
12.4 Γραφήματα συγκρισιμότητας 182
12.5 Τὸ ἰσχυρὸ θεώρημα τέλειων γραφημάτων 186

13 Διαπεράσεις **189**
13.1 Διαπεράσεις ἀκμῶν 189
13.2 Διαπεράσεις κορυφῶν 196

14 Σύνολα κυριαρχίας **201**
14.1 Ἐλαχιστικὰ καὶ ἐλάχιστα σύνολα κυριαρχίας 202
14.2 Βασικὰ λήμματα 204
14.3 Στοιχειώδη φράγματα 205
14.4 Τὸ φράγμα τοῦ Ore 206
14.5 Κυριαρχία σὲ δέντρα 207
14.6 Ἁπληστη προσέγγιση τοῦ ἀριθμοῦ κυριαρχίας 209
14.7 Τέλεια σύνολα κυριαρχίας 216

15 Ῥοές **219**
15.1 Δίκτυα καὶ ῥοές 219
15.2 Τομές 220
15.3 Ἐπαυξήσεις 222
15.4 Ἀκέραιες ῥοές 226

16 Καλὴ μερικὴ διάταξη σὲ γραφήματα **233**
16.1 Χαρακτηρισμοὶ Kuratowski 234
16.2 Εἰκασία Wagner 235
16.3 Τὸ Θεώρημα Ἐλασσόνων Γραφημάτων γιὰ δέντρα 239
16.4 Παρεμποδίσεις 242

17 Δεντροπλάτος **245**
17.1 Δεντρο-ἀποσυνθέσεις καὶ δεντροπλάτος 246
17.2 Δεντροπλάτος καὶ χαρακτηρισμοὶ Kuratowski 250
17.3 Βάτα καὶ τὸ θεώρημα δυϊσμοῦ 253
17.4 Διαχωριστὲς σὲ ἐπίπεδα γραφήματα 261
17.5 Ἰσορροπημένοι διαχωριστὲς καὶ δεντροπλάτος 266

Ὁδηγὸς περαιτέρω μελέτης **273**

Βιβλιογραφία **275**

Λίστα Συμβόλων **285**

Εὑρετήριο Ὅρων **289**

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἡ θεωρία γραφημάτων μελετᾶ ἕνα ἀπὸ τὰ ἁπλούστερα μαθηματικὰ ἀντικείμενα ποὺ μπορεῖ νὰ φανταστεῖ κανείς: ἕνα σύνολο σημείων καὶ μιὰ σχέση ποὺ δηλώνει ποιὰ ζεύγη σημείων εἶναι συνδεδεμένα μεταξύ τους. Παρὰ τὴν λιτότητα τοῦ ὁρισμοῦ, ἢ μᾶλλον ἐξαιτίας της, τὸ γράφημα ἀποδεικνύεται ἕνα ἀπὸ τὰ πιὸ εὐέλικτα ἐργαλεῖα μοντελοποίησης ποὺ διαθέτουμε. Ὁτιδήποτε μπορεῖ νὰ περιγραφεῖ ὡς «ἀντικείμενα καὶ σχέσεις ἀνὰ δύο» — δρόμοι μεταξὺ πόλεων, δεσμοὶ μεταξὺ ἀτόμων ἑνὸς μορίου, ὑπολογιστὲς ἑνὸς δικτύου, ἐξαρτήσεις μεταξὺ ἐργασιῶν ἑνὸς χρονοπρογράμματος, γνωριμίες μεταξὺ ἀνθρώπων — εἶναι ἤδη ἕνα γράφημα. Καὶ τὸ οὐσιῶδες εἶναι ὅτι πολλά, φαινομενικὰ ἄσχετα μεταξύ τους, ἐρωτήματα γιὰ τέτοια συστήματα ἀνάγονται στὸ ἴδιο μικρὸ σύνολο μαθηματικῶν προβλημάτων.

Ἡ ἀφετηρία τῆς θεωρίας εἶναι ἀσυνήθιστα καθαρή. Τὸ 1736 ὁ Leonhard Euler παρουσίασε τὴν λύση τοῦ προβλήματος τῶν ἑπτὰ γεφυρῶν τοῦ Königsberg (ἡ ἐργασία δημοσιεύτηκε τὸ 1741 [38]), δείχνοντας ὅτι δὲν ὑπάρχει διαδρομὴ ποὺ νὰ διασχίζει κάθε γέφυρα ἀκριβῶς μία φορά. Ἡ ἀποφασιστικὴ κίνηση τοῦ Euler ἦταν νὰ παραμερίσει ἐντελῶς τὴν γεωμετρία τῆς πόλης καὶ νὰ κρατήσει μόνο τὸ ποιὲς περιοχὲς συνδέονται μὲ ποιές. Ἡ ἐργασία αὐτή, τὴν ὁποία ὁ ἴδιος ἐνέταξε στὴν *geometria situs* τοῦ Leibniz, θεωρεῖται σήμερα ἡ πρώτη ἐργασία τόσο τῆς θεωρίας γραφημάτων ὅσο καὶ τῆς τοπολογίας. Ἀκολούθησε μιὰ μακρὰ περίοδος σχεδὸν πλήρους ἀδράνειας, ὥσπου τὸν 19ο αἰῶνα τὸ ἀντικείμενο ξαναγεννήθηκε μέσα ἀπὸ τὶς ἐφαρμογές του: τὸ 1847 ὁ Gustav Kirchhoff χρησιμοποίησε δέντρα γιὰ τὴν ἀνάλυση ἠλεκτρικῶν κυκλωμάτων [58], καὶ τὸ 1857 ὁ Arthur Cayley τὰ εἰσήγαγε ὡς αὐτοτελὲς μαθηματικὸ ἀντικείμενο [16], γιὰ νὰ τὰ χρησιμοποιήσει ἀργότερα στὴν ἀπαρίθμηση τῶν ἰσομερῶν τῶν κορεσμένων ὑδρογονανθράκων [17]. Ὁ ἴδιος

ὁ ὅρος «γράφημα» μὲ τὴν σημερινή του σημασία ὀφείλεται στὸν James Joseph Sylvester, ὁ ὁποῖος τὸ 1878 παρατήρησε τὴν ἀναλογία ἀνάμεσα στοὺς χημικοὺς δεσμοὺς καὶ στὶς μαθηματικὲς συνδέσεις [97].

Τὸν 20ό αἰῶνα ἡ θεωρία γραφημάτων ἀπέκτησε δική της δυναμική. Τὸ πρόβλημα τῶν τεσσάρων χρωμάτων, ποὺ διατυπώθηκε τὸ 1852 καὶ παρέμεινε ἀνοικτὸ ἐπὶ ἑκατὸν εἴκοσι πέντε χρόνια, λειτούργησε ὡς κινητήρας γιὰ τὴν ἀνάπτυξη ὁλόκληρων κλάδων τοῦ ἀντικειμένου προτοῦ λυθεῖ, τὸ 1977, ἀπὸ τοὺς Appel καὶ Haken μὲ τὴν πρώτη ἀπόδειξη ποὺ στηρίχθηκε οὐσιωδῶς σὲ ὑπολογιστὴ [5]. Ὁ Paul Erdős εἰσήγαγε τὴν πιθανοτικὴ μέθοδο, δείχνοντας ὅτι μπορεῖ κανεὶς νὰ ἀποδείξει τὴν ὕπαρξη γραφημάτων μὲ παράδοξες ἰδιότητες χωρὶς νὰ τὰ κατασκευάσει ποτὲ [32, 31]. Καὶ στὸ διάστημα 1983–2010 οἱ Neil Robertson καὶ Paul Seymour, σὲ μιὰ σειρὰ εἴκοσι τριῶν ἐργασιῶν, ἀνέπτυξαν τὴν θεωρία τῶν ἐλασσόνων γραφημάτων [92, 93], ἕνα ἀπὸ τὰ βαθύτερα οἰκοδομήματα τῶν σύγχρονων μαθηματικῶν, μὲ ἄμεσες συνέπειες στὴν θεωρία ἀλγορίθμων.

Ἡ πρακτικὴ χρησιμότητα τοῦ ἀντικειμένου δύσκολα ὑπερτονίζεται. Στὴν ἐπιστήμη τῶν ὑπολογιστῶν, τὰ γραφήματα εἶναι ἡ βασικὴ δομὴ δεδομένων γιὰ τὴν ἀναπαράσταση δικτύων, καὶ τὰ προβλήματα συντομότερης διαδρομῆς, ῥοῆς, χρωματισμοῦ, καὶ ταιριάσματος ἀποτελοῦν τὸν πυρῆνα τῆς ἀλγοριθμικῆς. Ἡ κατάταξη ἱστοσελίδων ἀπὸ τὶς μηχανὲς ἀναζήτησης, ἡ δρομολόγηση πακέτων στὸ διαδίκτυο, ἡ ἀνάθεση συχνοτήτων σὲ σταθμούς, ἡ κατάρτιση ὡρολογίων προγραμμάτων, καὶ ἡ ἀνάλυση κοινωνικῶν δικτύων εἶναι ὅλα, στὸ ἐπίπεδο τῆς διατύπωσής τους, γραφοθεωρητικὰ προβλήματα. Στὴν βιολογία τὰ γραφήματα μοντελοποιοῦν δίκτυα ἀλληλεπίδρασης πρωτεϊνῶν καὶ συναρμολόγηση γονιδιωμάτων· στὴν χημεία, μοριακὲς δομές· στὴν γλωσσολογία, συντακτικὲς ἐξαρτήσεις. Τὸ ἴδιο σημαντικὸ εἶναι ὅτι ἡ θεωρία γραφημάτων παρέχει ἕνα ἐξαιρετικὸ πεδίο ἐκπαίδευσης στὴν μαθηματικὴ σκέψη: οἱ ἔννοιες ὁρίζονται μὲ λίγες γραμμές, τὰ ἐρωτήματα διατυπώνονται χωρὶς τεχνικὸ ὑπόβαθρο, καὶ ὅμως οἱ ἀποδείξεις ἀπαιτοῦν ἐπαγωγή, ἀκραῖα ἐπιχειρήματα, μετρήσεις μὲ δύο τρόπους, καὶ κατασκευές — ὁλόκληρο δηλαδὴ τὸ ῥεπερτόριο τοῦ συνδυαστικοῦ συλλογισμοῦ.

Τὸ βιβλίο αὐτὸ καλύπτει τὸν κορμὸ τῆς κλασικῆς θεωρίας πεπερασμένων, μὴ κατευθυνόμενων γραφημάτων. Τὰ δύο πρῶτα κεφάλαια θεμελιώνουν τὶς βασικὲς ἔννοιες, τὶς πράξεις μεταξὺ γραφημάτων, καί — μέσα ἀπὸ ἕνα ἐνιαῖο σχῆμα τοπικῶν μετασχηματισμῶν — τὶς σχέσεις ὑπογραφήματος, τοπολογικοῦ ἐλάσσονος, καὶ ἐλάσσονος. Τὸ τρίτο κεφάλαιο μελετᾶ τοὺς βαθμοὺς τῶν κορυφῶν καὶ δείχνει πῶς ἡ πυκνότητα, ἕνα καθολικὸ μέγεθος, ἐπιβάλλει τοπικὴ δομή. Τὸ τέταρτο πραγματεύεται μονοπάτια, κύκλους, καὶ τὰ μεγέθη ἀπόστασης, ἐνῶ τὸ πέμπτο ἀφιερώ-

νεται στὴν συνεκτικότητα, μὲ κορυφαῖα σημεῖα τὸ θεώρημα τοῦ Menger [77] καὶ τὴν θεωρία τῶν 3-συνεκτικῶν γραφημάτων τοῦ Tutte [104]. Ἀκολουθοῦν τὰ δέντρα, μὲ τὸν τύπο τοῦ Cayley [18] γιὰ τὴν ἀπαρίθμησή τους, καὶ τὰ ἐπίπεδα γραφήματα, ὅπου συναντᾶμε τὸν τύπο τοῦ Euler [39], τὰ Πλατωνικὰ στερεά, καὶ τοὺς χαρακτηρισμοὺς τῆς ἐπιπεδότητας τῶν Kuratowski [64] καὶ Wagner [106].

Τὸ ὄγδοο κεφάλαιο εἰσάγει τοὺς χρωματισμοὺς κορυφῶν, ἀπὸ τὸ θεώρημα τῶν πέντε χρωμάτων καὶ τὸ θεώρημα τοῦ Brooks [15] μέχρι τὴν εἰκασία τοῦ Hadwiger [48] καὶ τὴν ὕπαρξη γραφημάτων μὲ ταυτόχρονα μεγάλη περιφέρεια καὶ μεγάλο χρωματικὸ ἀριθμό. Τὰ ἑπόμενα κεφάλαια ἐξετάζουν κλίκες καὶ ἀνεξάρτητα σύνολα, μαζὶ μὲ τὰ θεωρήματα τοῦ Turán [101] καὶ τοὺς ἀριθμοὺς Ramsey [86], καὶ στὴ συνέχεια καλύμματα καὶ ταιριάσματα, ὅπου ἐμφανίζονται τὰ μεγιστοελάχιστα θεωρήματα τῶν Kőnig [62] καὶ Hall [51]. Τὸ ἑνδέκατο κεφάλαιο ἐξετάζει σύνολα ἀνάδρασης κορυφῶν, πακεταρίσματα κύκλων, μὲ τὸ θεώρημα τῶν Erdős καὶ Pósa [35], καὶ τὴν δενδρικότητα. Τὸ δωδέκατο κεφάλαιο εἶναι ἀφιερωμένο στὰ τέλεια γραφήματα — χορδικά, γραφήματα διαστημάτων, γραφήματα συγκρισιμότητας — καὶ κορυφώνεται μὲ τὸ θεώρημα τῶν τέλειων γραφημάτων τοῦ Lovász [68]. Ἀκολουθοῦν οἱ διαπεράσεις, ποὺ μᾶς ἐπιστρέφουν στὸ σημεῖο ἀπ᾽ ὅπου ξεκίνησαν ὅλα: στὶς γέφυρες τοῦ Königsberg καὶ στὸ ἐρώτημα πότε ἕνα γράφημα διασχίζεται ἐξ ὁλοκλήρου μὲ μία διαδρομή. Τὰ τελευταῖα κεφάλαια ἐξετάζουν τὰ σύνολα κυριαρχίας, τὶς ροὲς σὲ δίκτυα, τὴν καλὴ μερικὴ διάταξη τῶν γραφημάτων, καὶ τὸ δεντροπλάτος.

Ἡ ἔκθεση εἶναι αὐτοτελὴς καὶ δὲν προϋποθέτει τίποτε πέρα ἀπὸ στοιχειώδη γνώση συνολοθεωρίας καὶ μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς. Οἱ ἔννοιες ἀναπτύσσονται μὲ τὴν σειρὰ ποὺ τὶς χρειάζεται ἡ ἀφήγηση, καὶ κάθε κεφάλαιο συνοδεύεται ἀπὸ ἀσκήσεις. Ὁ ἀναγνώστης ἐνθαρρύνεται νὰ σχεδιάζει· στὴν θεωρία γραφημάτων ἕνα πρόχειρο σχῆμα ἀξίζει συχνὰ ὅσο μιὰ σελίδα συλλογισμῶν.

Τελευταία ἐνημέρωση 14 Ὀκτωβρίου 2026, στὶς 17:15.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1.1 Γενικοὶ ὁρισμοί

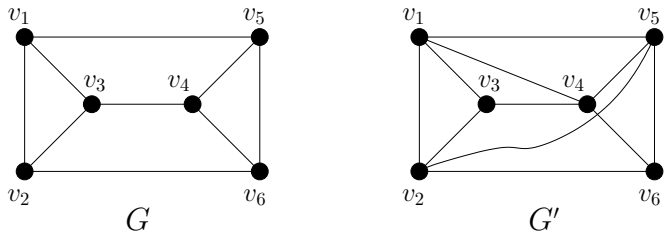
Συμβολίζουμε μὲ $\mathbb{N}$ τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$, $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Γιὰ κάθε πεπερασμένο $S \subseteq \mathbb{N}$ καὶ $k \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε μὲ 2^S τὸ δυναμοσύνολο τοῦ S, μὲ $\binom{S}{k}$ τὰ ὑποσύνολα τοῦ S μεγέθους k, καὶ μὲ $\binom{S}{\leq k}$ τὰ ὑποσύνολα τοῦ S μεγέθους τὸ πολὺ k.

1.2 Γραφήματα καὶ ἰσομορφισμοί

Ὁρισμός 1.1. Καλοῦμε *γράφημα* κάθε διατεταγμένο ζεῦγος $G = (V, E)$ ὅπου V εἶναι ἕνα πεπερασμένο σύνολο καὶ E εἶναι ἕνα σύνολο ὑποσυνόλων τοῦ V τὸ καθένα ἐκ τῶν ὁποίων ἔχει δύο στοιχεῖα του. Καλοῦμε τὰ στοιχεῖα τοῦ V *κορυφὲς* τοῦ G καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ E *ἀκμὲς* τοῦ G. Γιὰ κάθε ἀκμὴ $e = \{v, u\} \in E$, καλοῦμε τὶς κορυφὲς v καὶ u *ἄκρα* τῆς e καὶ λέμε ὅτι οἱ κορυφὲς v καὶ u εἶναι *συνδεδεμένες* στὸ G.

Δεδομένου ἑνὸς γραφήματος G, χρησιμοποιοῦμε τοὺς συμβολισμοὺς $V(G)$ καὶ $E(G)$ γιὰ τὸ σύνολο κορυφῶν καὶ τὸ σύνολο ἀκμῶν του ἀντίστοιχα. Ἐπίσης ὁρίζουμε $n(G) = |V(G)|$ καὶ $m(G) = |E(G)|$. Καλοῦμε τὸ $n(G)$ *τάξη* τοῦ γραφήματος G καὶ τὸ $m(G)$ *μέγεθος* τοῦ G.

Ὑπάρχουν πολλοὶ τρόποι νὰ *ἀναπαραστήσουμε* ἕνα γράφημα. Ὁ πιὸ πρακτικὸς εἶναι νὰ ζωγραφίσουμε ἕνα διάγραμμα στὸ ὁποῖο ἀναπαριστοῦμε τὶς κορυφὲς μὲ

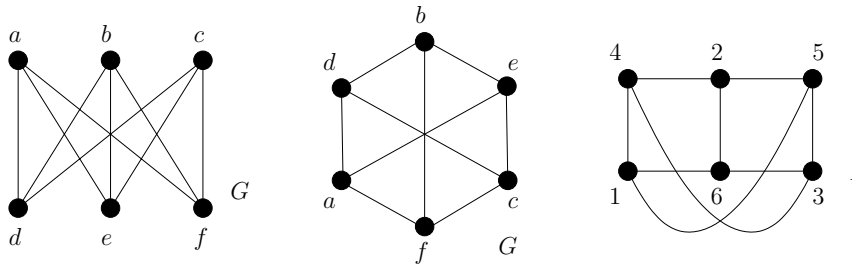


Σχῆμα 1.1: Διαγράμματα τῶν γραφημάτων G καὶ G' μὲ $V(G) = V(G') = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_6\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\}\}$ καὶ $E(G') = E(G) \cup \{\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_5\}\}$.

ἐπιλεγμένα σημεῖα τοῦ ἐπίπεδου καὶ τὶς ἀκμὲς μὲ γραμμὲς οἱ ὁποῖες συνδέουν τὰ σημεῖα ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ ἄκρα τους. Γιὰ παράδειγμα, τὸ Σχῆμα 1.1 περιέχει ἕνα διάγραμμα τοῦ γραφήματος $G = (V, E)$ μὲ $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ καὶ $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_6\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\}\}$. Στὸ ἴδιο σχῆμα ὑπάρχει ἕνα διάγραμμα τοῦ γραφήματος G' τὸ ὁποῖο ἔχει τὶς ἴδιες κορυφὲς μὲ τὸ G ἀλλὰ καὶ δύο πρόσθετες ἀκμές. Ὁ τρόπος αὐτὸς νὰ ἀναπαραστήσουμε ἕνα γράφημα εἶναι ὁ πιὸ παραστατικὸς ἀλλὰ ὅταν χρησιμοποιεῖται πρέπει νὰ λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ὅτι ὑπάρχουν πολλά, συχνὰ ἀρκετὰ διαφορετικὰ μεταξύ τους, διαγράμματα γιὰ τὸ ἴδιο γράφημα (βλ. Σχῆμα 1.2). Παρατηροῦμε ὅτι συχνὰ σὲ διαγράμματα γραφημάτων δύο γραμμὲς μπορεῖ νὰ τέμνονται. Στὴν περίπτωση αὐτὴ φροντίζουμε ὥστε νὰ ὑπάρχει *μόνο* ἕνα σημεῖο τομῆς ἀνὰ ζεῦγος τεμνομένων γραμμῶν καὶ τὸ σημεῖο αὐτὸ νὰ μὴν εἶναι κορυφὴ τοῦ γραφήματος. Ἐπίσης, γιὰ νὰ βελτιστοποιήσουμε αἰσθητικὰ τὴν ἀναπαράσταση τοῦ γραφήματος προσπαθοῦμε νὰ ἐλαχιστοποιοῦμε τὸν ἀριθμὸ τῶν τεμνομένων γραμμῶν καὶ προσπαθοῦμε, ἂν εἶναι δυνατόν, οἱ ἀκμὲς αὐτὲς νὰ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα. (π.χ. τὸ γράφημα G' τοῦ Σχήματος 1.1 μπορεῖ νὰ ἀναπαρασταθεῖ μὲ διάγραμμα ποὺ δὲν περιέχει τεμνόμενες γραμμὲς καὶ ὅπου ὅλες οἱ ἀκμὲς ἀναπαρίστανται μὲ εὐθύγραμμα τμήματα, βλ. Ἄσκηση 1.2).

Τὰ διαγράμματα εἶναι ἐποπτικὰ ἀλλὰ ἀκατάλληλα γιὰ ὑπολογισμούς. Ἡ ἀναπαράσταση ποὺ ἀκολουθεῖ μεταφράζει ἕνα γράφημα σὲ ἀλγεβρικὸ ἀντικείμενο, κάτι ποὺ θὰ ἀξιοποιήσουμε στὸ Θεώρημα 4.4.

Ὁρισμός 1.2. Μποροῦμε νὰ ἀναπαραστήσουμε ἕνα γράφημα μὲ τὴν βοήθεια ἑνὸς πίνακα. Συγκεκριμένα, τὸ γράφημα G μὲ $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ μπορεῖ νὰ ἀναπα-



Σχῆμα 1.2: Οἱ δύο πρῶτες εἰκόνες εἶναι δύο διαφορετικὰ διαγράμματα τοῦ γραφήματος $G = (\{a,b,c,d,e,f\}, \{\{a,d\},\{a,e\},\{a,f\},\{b,d\},\{b,e\},\{b,f\},\{c,d\},\{c,e\},\{c,f\}\})$. Ἡ τρίτη εἰκόνα εἶναι ἕνα διάγραμμα του, ἰσόμορφου μὲ τὸ G, γραφήματος $H = (\{1,2,3,4,5,6\}, \{\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\}\})$.

ρασταθεῖ μὲ τὴ βοήθεια ἑνὸς $n \times n$-πίνακα $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[n]^2}$ ὅπου

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ἂν } \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{ἂν } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \end{cases}$$

Καλοῦμε κάθε τέτοιο πίνακα *πίνακα ἀναπαράστασης* τοῦ G.

Παρατήρηση 1.3. Κάθε πίνακας ἀναπαράστασης ἑνὸς γραφήματος εἶναι συμμετρικὸς καὶ ἔχει ὅλες τὶς διαγώνιες τιμές του ἴσες μὲ τὸ 0. Ἐπίσης, σὲ κάθε γράφημα μὲ n κορυφὲς ἀντιστοιχοῦν τὸ πολὺ $n!$ πίνακες ἀναπαράστασης.

Παρατήρηση 1.4. Οἱ πίνακες

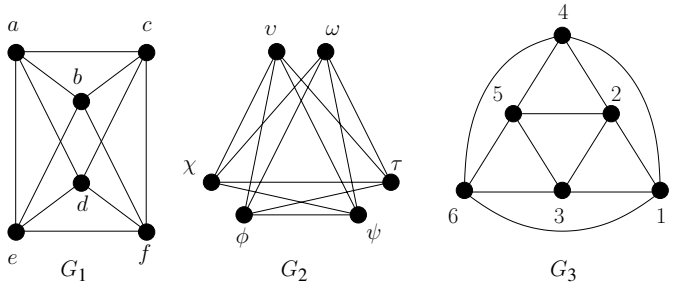
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ καὶ } A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

εἶναι πίνακες ἀναπαράστασης τῶν γραφημάτων G καὶ G' τοῦ Σχήματος 1.1.

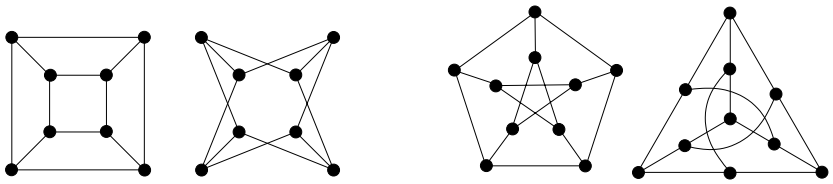
Ὁρισμός 1.5. Δύο γραφήματα G, H, καλοῦνται *ἰσόμορφα* ἂν ὑπάρχει μιὰ 1-1 καὶ ἐπὶ ἀπεικόνιση $\sigma : V(G) \to V(H)$ τέτοια ὥστε γιὰ κάθε $x, y \in V(G)$ μὲ $x \neq y$, ἰσχύει ὅτι $\{x,y\} \in E(G) \Leftrightarrow \{\sigma(x), \sigma(y)\} \in E(H)$. Ἂν δύο γραφήματα G καὶ H εἶναι ἰσόμορφα χρησιμοποιοῦμε τὸν συμβολισμὸ $G \simeq H$ καὶ θὰ λέμε ἐναλλακτικὰ ὅτι τὸ G *εἶναι τὸ ἴδιο γράφημα μὲ τὸ* H ἢ, ἀκόμη ἁπλούστερα, ὅτι τὸ G εἶναι τὸ H.

Κάποια παραδείγματα μπορεῖτε νὰ δεῖτε στὰ Σχήματα 1.2, 1.3 καὶ 1.4.

Παρατήρηση 1.6. Ἡ σχέση $\simeq$ εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας.



Σχῆμα 1.3: Τρεῖς τρόποι νὰ ζωγραφίσουμε τὸ ὀκτάεδρο.



Ὁ τρισδιάστατος κύβος Q_3.

Τὸ γράφημα τοῦ Petersen.

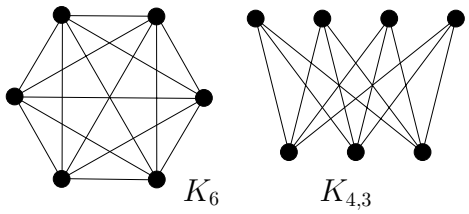
Σχῆμα 1.4: Τὸ πρῶτο ζεῦγος γραφημάτων ἀντιστοιχεῖ στὸν *τρισδιάστατο κύβο* καὶ τὸ συμβολίζουμε ὡς Q_3. Τὸ γράφημα ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ δεύτερο ζεῦγος καλεῖται *γράφημα τοῦ Petersen*.

1.3 Εἰδικὰ γραφήματα

Λόγῳ τῆς Παρατήρησης 1.6, ἕνα γράφημα μπορεῖ νὰ εἶναι ἰσόμορφο μὲ ἄπειρα στὸ πλῆθος γραφήματα ποὺ ἀνήκουν στὴν ἴδια κλάση ἰσοδυναμίας. Γιὰ τὸν λόγο αὐτό, σὲ πολλὲς περιπτώσεις θὰ συμβολίζουμε μὲ κάποιο «γράφημα ἀντιπρόσωπο» ὅλη τὴν κλάση ἰσοδυναμίας στὴν ὁποία ἀνήκει. Σὲ αὐτὴ τὴν ἑνότητα θὰ ὁρίσουμε τὰ κυριότερα γραφήματα «ἀντιπροσώπους» τὰ ὁποία θὰ χρησιμοποιήσουμε στὴ συνέχεια.

Ὁρισμός 1.7. Γιὰ κάθε $r \geq 0$ ὁρίζουμε τὸ γράφημα

$$K_r = (\{v_1, \ldots, v_r\}, \{\{v_i, v_j\} \mid 1 \leq i < j \leq r\})$$



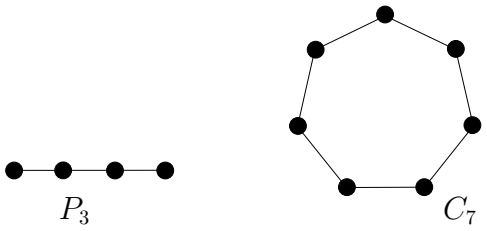
Σχῆμα 1.5: Τὰ γραφήματα K_6 καὶ $K_{4,3}$.

καὶ θὰ τὸ ὀνομάζουμε *κλίκα μὲ r κορυφές*, *r-κλίκα* ἢ ἁπλὰ *κλίκα*. Ἕνα γράφημα G μὲ r κορυφὲς καλεῖται *πλῆρες* ἂν $G \simeq K_r$ (βλ. Σχῆμα 1.5).

Στὸν ἀντίποδα τῆς κλίκας βρίσκονται τὰ γραφήματα στὰ ὁποία οἱ ἀκμὲς συνδέουν ἀποκλειστικὰ δύο ὁμάδες κορυφῶν, χωρὶς καμία ἀκμὴ στὸ ἐσωτερικὸ τῶν ὁμάδων.

Ὁρισμός 1.8. Γιὰ κάθε ζεῦγος $p, q \geq 0$, ὁρίζουμε τὸ γράφημα $K_{p,q} = (A \cup B, E)$ ἔτσι ὥστε $A = \{v_1, \ldots, v_p\}, B = \{u_1, \ldots, u_q\}$, καὶ $E = \{\{v_i, u_j\} \mid 1 \leq i \leq p \text{ καὶ } 1 \leq j \leq q\}$ (βλ. Σχῆμα 1.5). Καλοῦμε τὸ γράφημα $K_{1,r}$ (γιὰ $r \geq 0$), *r-ἄστρο*.

Παρατήρηση 1.9. Τὸ γράφημα τοῦ Σχήματος 1.2 εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ $K_{3,3}$.



Σχῆμα 1.6: Τὰ γραφήματα P_4 καὶ C_7.

Ὁρισμός 1.10. Γιὰ κάθε $r \geq 0$, τὸ γράφημα

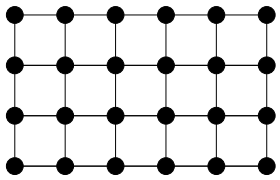
$$P_r = (\{v_1, \ldots, v_r\}, \{\{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{r-1}, v_r\}\})$$

καλεῖται *μονοπάτι* καὶ οἱ κορυφὲς v_1 καὶ v_r καλοῦνται *ἄκρα* του ἐνῶ οἱ ὑπόλοιπες κορυφὲς καλοῦνται *ἐσωτερικὲς* κορυφές του. Ἐπίσης καλοῦμε ἕνα μονοπάτι μὲ ἄκρα x καὶ y *(x, y)-μονοπάτι*. Τὸ *μῆκος* ἑνὸς μονοπατιοῦ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν

ἀκμῶν του (τὸ κενὸ μονοπάτι P_0 δὲν ἔχει μῆκος καὶ τὸ τετριμμένο μονοπάτι P_1 ἔχει μῆκος 0). Ἐπίσης γιὰ κάθε $r \geq 3$, τὸ γράφημα

$$C_r = (\{v_1, \ldots, v_r\}, \{\{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{r-1}, v_r\}, \{v_r, v_1\}\})$$

καλεῖται *κύκλος*. Τὸ *μῆκος* ἑνὸς κύκλου εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν του. Γιὰ παραδείγματα μονοπατιοῦ καὶ κύκλου βλ. Σχῆμα 1.6. Τὸ γράφημα C_3 καλεῖται *τρίγωνο*.



Σχῆμα 1.7: Ἡ $(6, 4)$-σχάρα.

Ὁρισμός 1.11. Καλοῦμε (p, q)-*σχάρα* ἢ ἁπλὰ *σχάρα* τὸ γράφημα

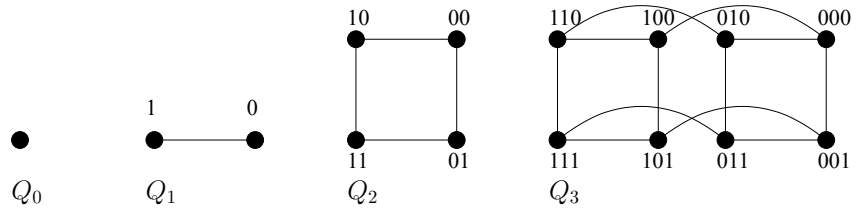
$$([p] \times [q], \{\{(x, y), (x', y')\} \in \binom{[p] \times [q]}{2} \mid |x - x'| + |y - y'| = 1\}).$$

Γιὰ ἕνα παράδειγμα σχάρας, βλ. Σχῆμα 1.7.

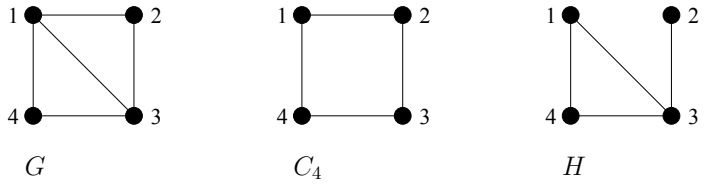
Ὁ κύβος ὁρίζεται ἐδῶ συνδυαστικά, μέσῳ δυαδικῶν συμβολοσειρῶν· γιὰ $r \leq 3$ ἡ γεωμετρική του εἰκόνα δικαιολογεῖ τὸ ὄνομα.

Ὁρισμός 1.12. Ἔστω ἀκέραιος $r \geq 0$ καὶ ἔστω V_r τὸ σύνολο ὅλων τῶν δυαδικῶν συμβολοσειρῶν μήκους r. Ὁρίζουμε τὸν r-*διάστατο κύβο* ὡς ἑξῆς:

$$Q_r = (V_r, \{\{x, y\} \mid x, y \in V_r \text{ καὶ τὰ } x \text{ καὶ } y \text{ διαφέρουν σὲ ἕνα μόνο σύμβολο}\})$$



Σχῆμα 1.8: Τὸ γράφημα Q_i γιὰ $i = 0, 1, 2, 3$.



Σχῆμα 1.9: Τὰ γραφήματα G, C_4, καὶ H.

1.4 Αὐτομορφισμοὶ γραφημάτων

Ὁρισμός 1.13. Ἔστω γράφημα G. Καλοῦμε *αὐτομορφισμὸ τοῦ* G κάθε ἰσομορφισμὸ τοῦ G στὸν ἑαυτό του. Συνεπῶς κάθε αὐτομορφισμὸς ἑνὸς γραφήματος εἶναι μιὰ μετάθεση τῶν κορυφῶν του (βλ. Σχῆμα 1.9). Εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ὅτι ἡ ταυτοτικὴ συνάρτηση στὸ $V(G)$ εἶναι αὐτομορφισμός. Ἐπίσης ἡ σύνθεση δύο αὐτομορφισμῶν εἶναι αὐτομορφισμὸς καὶ ἡ ἀντίστροφη συνάρτηση ἑνὸς αὐτομορφισμοῦ εἶναι ἐπίσης αὐτομορφισμός. Ὅλα αὐτὰ συνηγοροῦν στὸ ὅτι τὸ σύνολο τῶν αὐτομορφισμῶν ἑνὸς γραφήματος εἶναι ὁμάδα ὡς πρὸς τὴν πράξη τῆς σύνθεσης συναρτήσεων. Καλοῦμε τὴν ὁμάδα αὐτὴ *ὁμάδα αὐτομορφισμῶν τοῦ* G καὶ τὴν συμβολίζουμε ὡς $\mathrm{Aut}(G)$.

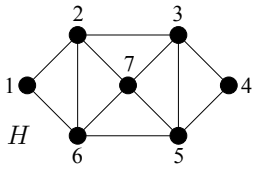
Οἱ αὐτομορφισμοὶ τοῦ γραφήματος G (βλ. Σχῆμα 1.9) περιγράφονται ἀπὸ τὶς ἑξῆς μεταθέσεις: $\langle 1,2,3,4\rangle$, $\langle 1,4,3,2\rangle$, $\langle 3,2,1,4\rangle$, $\langle 3,4,1,2\rangle$. Ἰσχύει ἐπίσης ὅτι $\mathrm{Aut}(C_4) = \{\langle 1,2,3,4\rangle, \langle 1,4,3,2\rangle, \langle 3,2,1,4\rangle, \langle 2,3,4,1\rangle, \langle 3,4,1,2\rangle, \langle 4,3,2,1\rangle, \langle 4,1,2,3\rangle, \langle 2,1,4,3\rangle\}$. Τέλος, γιὰ τὸ τρίτο γράφημα τοῦ Σχήματος 1.9 ἰσχύει ὅτι $\mathrm{Aut}(H) = \{\langle 1,2,3,4\rangle, \langle 4,2,3,1\rangle\}$

Παρατήρηση 1.14. Κάθε μετάθεση τοῦ $V(K_n)$ εἶναι αὐτομορφισμός. Κατὰ συνέπεια, ἡ ὁμάδα $\mathrm{Aut}(K_n)$ εἶναι ἰσόμορφη μὲ τὴν συμμετρικὴ ὁμάδα S_n τάξης $n!$. Χρησιμοποιώντας τὸν συμβολισμὸ $\cong$ γιὰ τὸν ἰσομορφισμὸ ὁμάδων μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι $\mathrm{Aut}(K_n) \cong S_n$.

Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G τὸ $\mathrm{Aut}(G)$ εἶναι ἰσόμορφο μὲ κάποια ὑποομάδα τῆς συμμετρικῆς ὁμάδας S_n. Τὸ παρακάτω θεώρημα προκύπτει ἄμεσα ἀπὸ τὸ Θεώρημα τοῦ Lagrange σχετικὰ μὲ τὴν τάξη τῶν ὑποομάδων μιᾶς πεπερασμένης ὁμάδας.

Θεώρημα 1.15. Γιὰ κάθε γράφημα G μὲ n κορυφές, ἡ τάξη $|\mathrm{Aut}(G)|$ τῆς ὁμάδας τῶν αὐτομορφισμῶν τοῦ G εἶναι διαιρέτης τοῦ $n!$.

Ἀπόδειξη. Ἡ σύνθεση δύο αὐτομορφισμῶν τοῦ G εἶναι αὐτομορφισμὸς τοῦ G,



Σχῆμα 1.10: Τὸ γράφημα H.

ὅπως καὶ ἡ ἀντίστροφη ἀπεικόνιση ἑνὸς αὐτομορφισμοῦ, ἐνῶ ἡ ταυτοτικὴ ἀπεικόνιση εἶναι πάντοτε αὐτομορφισμός. Ἄρα τὸ $\mathrm{Aut}(G)$, θεωρούμενο ὡς σύνολο μεταθέσεων τοῦ $V(G)$, εἶναι ὑποομάδα τῆς συμμετρικῆς ὁμάδας S_n. Ἀφοῦ $|S_n| = n!$, ἀπὸ τὸ Θεώρημα τοῦ Lagrange ἡ τάξη $|\mathrm{Aut}(G)|$ διαιρεῖ τὸν $n!$. □

Οἱ αὐτομορφισμοὶ ἐπιτρέπουν νὰ ξεχωρίσουμε ποιὲς κορυφὲς εἶναι ἰσοδύναμες μεταξύ τους ἀπὸ τὴν σκοπιὰ τῆς δομῆς τοῦ γραφήματος.

Ὁρισμός 1.16. Ἔστω G γράφημα. Ὁρίζουμε τὴν σχέση ὁμοιότητας μεταξὺ τῶν κορυφῶν του ὡς ἑξῆς: Ἔστω $x, y \in V(G)$. Λέμε ὅτι οἱ κορυφὲς x καὶ y εἶναι *ὅμοιες* ἂν $\sigma(x) = y$ γιὰ κάποιον αὐτομορφισμὸ $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ καὶ χρησιμοποιοῦμε τὸν συμβολισμὸ $x \sim y$. Οἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας τῆς σχέσης $\sim$ καλοῦνται *τροχιὲς* τοῦ G.

Γιὰ τὰ γραφήματα τοῦ Σχήματος 1.9, ἔχουμε ὅτι οἱ τροχιὲς τοῦ G εἶναι οἱ $\{1, 3\}$ καὶ $\{2, 4\}$, τὸ γράφημα C_4 ἔχει μόνο μιὰ τροχιά, τὴν $\{1, 2, 3, 4\}$ καὶ τὸ γράφημα H ἔχει τρεῖς τροχιές, τὶς $\{2\}$, $\{3\}$ καὶ $\{1, 4\}$. Τέλος, οἱ τροχιὲς τοῦ γραφήματος H στὸ Σχῆμα 1.10 εἶναι οἱ $\{1, 4\}$, $\{2, 3, 5, 6\}$ καὶ $\{7\}$.

Στὸ ἄλλο ἄκρο βρίσκονται τὰ γραφήματα στὰ ὁποία καμία κορυφὴ δὲν ξεχωρίζει ἀπὸ τὶς ὑπόλοιπες.

Ὁρισμός 1.17. Καλοῦμε ἕνα γράφημα G *μεταβατικὸ ὡς πρὸς τὶς κορυφές του* (ἢ ἁπλὰ *μεταβατικό*) ἂν ἔχει μία μόνο τροχιά, δηλαδή, γιὰ κάθε ζεῦγος κορυφῶν τοῦ x καὶ y ὑπάρχει αὐτομορφισμὸς $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ τέτοιος ὥστε $\sigma(x) = y$.

Παρατήρηση 1.18. Τὰ γραφήματα C_r ($r \geq 3$), K_r ($r \geq 1$) καὶ $K_{r,r}$ ($r \geq 1$) εἶναι ὅλα μεταβατικά.

1.5 Γενικεύσεις τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ γραφήματος

Ὁ ὁρισμὸς τοῦ γραφήματος ποὺ δώσαμε παραπάνω δὲν εἶναι ὁ μοναδικός. Ὑπάρχουν πολλὲς παραλλαγὲς καὶ ἐπεκτάσεις του καὶ στὴν ἑνότητα αὐτὴ θὰ δώ-

σουμε τὶς κυριότερες ἀπὸ αὐτές.

Ὁρισμός 1.19. Ἂν στὸν ὁρισμὸ τοῦ γραφήματος ἀπαιτήσουμε οἱ ἀκμὲς νὰ εἶναι *διατεταγμένα ζεύγη* κορυφῶν, τότε τὰ γραφήματα ποὺ ὁρίζουμε καλοῦνται *διατεταγμένα*. Ἂν ἀναθέσουμε σὲ κάθε ἀκμὴ ἑνὸς γραφήματος ἕναν ἀριθμὸ (*βάρος*) τότε καλοῦμε τὸ γράφημα αὐτὸ *βεβαρημένο*. Μποροῦμε νὰ ἐπιτρέψουμε τὸ σύνολο ἀκμῶν νὰ περιέχει καὶ μονοσύνολα τὰ ὁποία ὁρίζουν ἀκμὲς μὲ ἕνα μόνο ἄκρο τὶς ὁποῖες καλοῦμε *θηλιές*. Μποροῦμε ἐπίσης νὰ ὁρίσουμε τὸ σύνολο ἀκμῶν ὡς πολυσύνολο ὅπου τὸ ἴδιο στοιχεῖο μπορεῖ νὰ παρουσιαστεῖ περισσότερες ἀπὸ μιὰ φορά. Στὴν περίπτωση ποὺ ἐπιτρέπουμε θηλιὲς ἢ πολλαπλὲς ἀκμὲς καλοῦμε τὸ G *πολυγράφημα* καὶ οἱ ἀκμὲς ποὺ ἐπαναλαμβάνονται καλοῦνται *πολυακμές*. Ἂν ἐπιπλέον ἐπιτρέψουμε στὸ σύνολο ἀκμῶν νὰ περιέχει μὴ-κενὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου τῶν κορυφῶν του χωρὶς περιορισμὸ στὸν πληθάριθμό τους, τότε καλοῦμε τὸ G *ὑπεργράφημα* (γιὰ παραδείγματα βλ. Σχῆμα 1.11). Τέλος, ὅλες οἱ παραπάνω παραλλαγὲς μποροῦν νὰ ἐπεκταθοῦν στὴν περίπτωση ὅπου τὸ V δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκη ἕνα πεπερασμένο σύνολο. Τὰ γραφήματα ποὺ ὁρίζονται μὲ αὐτὸ τὸν τρόπο καλοῦνται *ἄπειρα*.

Παρατήρηση 1.20. Τὸ γράφημα $G = (\mathbb{N}, E)$ ὅπου $E = \{\{x, y\} \in \binom{\mathbb{N}}{2} \mid y^2 = x^3 \text{ ἢ } x^2 = y^3\}$ εἶναι ἕνα ἄπειρο γράφημα.

Παρατήρηση 1.21. Τὸ γράφημα $G = (\mathbb{R}, E)$ ὅπου $E = \{\{x, y\} \in \binom{\mathbb{R}}{2} \mid y^2 + x^2 = 1\}$ εἶναι ἕνα ἄπειρο γράφημα μὲ μὴ ἀριθμήσιμο πλῆθος κορυφῶν.

Ἀσκήσεις Κεφαλαίου

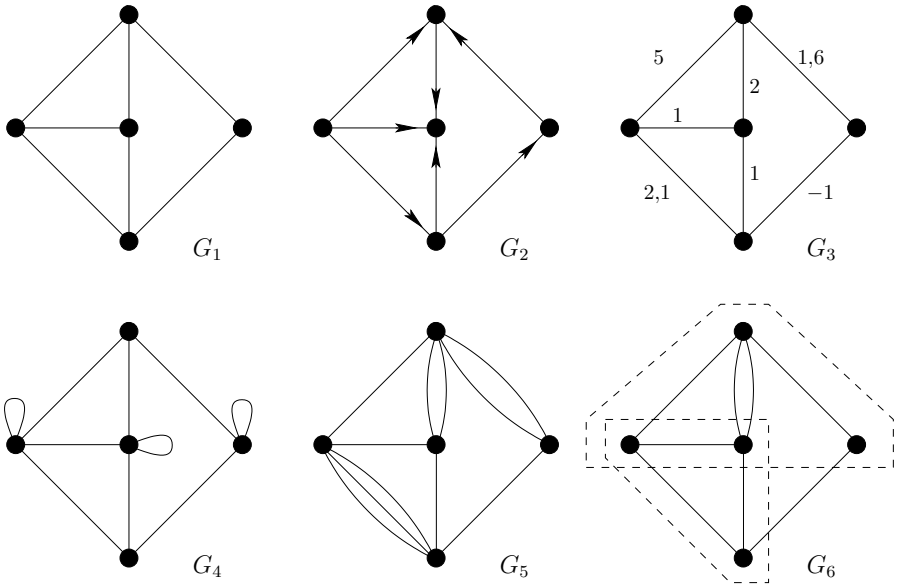
1.1 (☆☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχουν 8 διαφορετικὰ (δηλ. μὴ-ἰσομορφικὰ μεταξύ τους) γραφήματα μὲ ≤ 3 κορυφές.

1.2 (☆☆☆)**.** Βρέστε ἕνα διάγραμμα γιὰ τὸ γράφημα G' τοῦ Σχήματος 1.1 τοῦ ὁποίου οἱ γραμμὲς δὲν τέμνονται μεταξύ τους καὶ εἶναι ὅλες εὐθύγραμμα τμήματα.

1.3 (☆☆☆)**.** Ἀποδεῖξτε λεπτομερῶς ὅτι ἡ σχέση $\simeq$ εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας (Παρατήρηση 1.6).

1.4 (☆☆☆)**.** Βρέστε ἕναν πίνακα ἀναπαράστασης γιὰ τὸ γράφημα Q_3 τοῦ Σχήματος 1.4.

1.5 (★☆☆)**.** Δείξετε ὅτι τὸ γράφημα ποὺ ἔχει ὡς πίνακα ἀναπαράστασης τὸν $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq r}$ μὲ $a_{i,j} = (i + j) \pmod 2$ εἶναι ἰσόμορφο μὲ τὸ $K_{\lfloor r/2 \rfloor, \lceil r/2 \rceil}$.



Σχῆμα 1.11: Τὸ γράφημα G_1, τὸ διατεταγμένο γράφημα G_2, τὸ βεβαρημένο γράφημα G_3, τὸ γράφημα μὲ θηλιὲς G_4, τὸ πολυγράφημα G_5, καθὼς καὶ τὸ ὑπεργράφημα G_6 ἔχουν ὡς σύνολο κορυφῶν τὸ {a,b,c,d,e}. Τὸ σύνολο τῶν ἀκμῶν τοῦ G_1 εἶναι τὸ $E(G_1) = \{\{\text{a,b}\}, \{\text{a,e}\}, \{\text{a,d}\}, \{\text{b,e}\}, \{\text{e,d}\}, \{\text{b,c}\}, \{\text{c,d}\}\}$. Τὸ σύνολο ἀκμῶν τοῦ G_2 εἶναι τὸ $E(G_2) = \{(\text{a,b}), (\text{a,e}), (\text{a,d}), (\text{b,e}), (\text{d,e}), (\text{c,b}), (\text{d,c})\}$, τὸ σύνολο ἀκμῶν τοῦ G_3 εἶναι τὸ $E(G_1)$ μὲ βάρη 5, 1, 2,1, 2, 1, 1,6 καὶ -1 ἀντίστοιχα, τὸ σύνολο ἀκμῶν τοῦ G_4 εἶναι τὸ $E(G_4) = E(G_1) \cup \{\{\text{a}\}, \{\text{e}\}, \{\text{c}\}\}$. Τὸ πολυσύνολο ἀκμῶν τοῦ G_5 εἶναι τὸ $E(G_1)$ ὅπου ἡ ἀκμὴ {a,d} ἐμφανίζεται τρεῖς φορὲς καὶ οἱ ἀκμὲς {b,e} καὶ {b,c} ἐμφανίζονται δύο φορές. Τέλος τὸ σύνολο τῶν ὑπερακμῶν τοῦ ὑπεργραφήματος G_6 εἶναι τὸ $E(G_1) \cup \{\{\text{a,e,d}\}, \{\text{a,b,c,e}\}\}$.

1.6 (★☆☆). Ἀποδεῖξτε ὅτι τὰ γραφήματα, G_1, G_2, καὶ G_3 τοῦ Σχήματος 1.3 εἶναι ἰσόμορφα.

1.7 (★☆☆). Ὁρίστε μιὰ σχέση ἰσομορφισμοῦ πινάκων ἔτσι ὥστε δύο γραφήματα νὰ εἶναι ἰσόμορφα ἂν καὶ μόνο ἂν δύο ὁποιοιδήποτε πίνακες ἀναπαράστασής τους εἶναι ἰσόμορφοι.

1.8 (☆☆☆). Δῶστε ἕνα διάγραμμα τοῦ γραφήματος τὸ ὁποῖο ὡς πίνακα ἀπεικόνισης ἔχει τὸν $A = [a_{i,j}]_{1 \le i,j \le 8}$ μὲ $a_{i,j} = (i + j) \bmod 2$.

1.9 (★☆☆). Ἔστω $\sigma : V(G) \to V(H)$ ἕνας ἰσομορφισμὸς μεταξὺ δύο γραφημάτων G καὶ H. Τότε γιὰ κάθε $S \subseteq V(G)$, ἰσχύει ὅτι $\sigma(N_G(S)) = N_H(\sigma(S))$. (Γιὰ κάθε $S \subseteq V(G)$, ὁρίζουμε $\sigma(S) = \{\sigma(v) \mid v \in S\}$.)

1.10 (★☆☆). Δεῖξτε ὅτι τὰ ζεύγη γραφημάτων τοῦ Σχήματος 1.4 εἶναι ἰσόμορφα.

1.11 (☆☆☆). Ἕνα γράφημα G εἶναι πλῆρες ἂν καὶ μόνο ἂν $m(G) = \binom{n(G)}{2}$.

1.12 (★☆☆). Κάθε (p, q)-*σχάρα* ἔχει ἀκριβῶς $2\,p\,q - p - q$ ἀκμές.

1.13 (★☆☆). Γιὰ ποιὲς τιμὲς τῶν a, b, r τὰ γραφήματα C_a καὶ Q_b εἶναι τὰ ἴδια μὲ μιὰ (r, r)-σχάρα;

1.14 (★☆☆). Ὑπολογίστε τὸν ἀριθμὸ τῶν ἀκμῶν τοῦ Q_r ὡς συνάρτηση τοῦ r.

1.15 (★☆☆). Τὸ γράφημα Q_r εἶναι μεταβατικὸ γιὰ κάθε $r \ge 0$.

1.16 (★★☆). Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ γράφημα τοῦ Petersen εἶναι μεταβατικό.

1.17 (★★☆). Βρεῖτε τὴν ὁμάδα αὐτομορφισμῶν γιὰ τὸ γράφημα G τοῦ Σχήματος 1.1. Βρεῖτε ἐπίσης ὅλες τὶς τροχιὲς τοῦ $\mathrm{Aut}(G)$.

1.18 (★☆☆). Ἀποδεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G, $|\mathrm{Aut}(G)| = 1$ ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ G περιέχει $n(G)$ τροχιές.

1.19 (★☆☆). Δεῖξτε ὅτι τὸ γράφημα ποὺ ὁρίζεται στὴν Ἄσκηση 1.8 εἶναι μεταβατικό.

1.20 (★☆☆). Ἀποδεῖξτε ὅτι ἂν A εἶναι ἕνας πίνακας ἀναπαράστασης ἑνὸς μεταβατικοῦ γραφήματος, τότε ὅλες οἱ στῆλες καὶ ὅλες οἱ γραμμές του περιέχουν τὸν ἴδιο ἀριθμὸ μηδενικῶν.

1.21 (☆☆☆)**.** Ποιὸς εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς ἀκμῶν ποὺ μπορεῖ νὰ ἔχει ἕνα πολυγράφημα n κορυφῶν μὲ θηλιὲς ἀλλὰ χωρὶς πολλαπλὲς ἀκμές;

1.22 (★☆☆)**.** Ποιὸς εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς ἀκμῶν ποὺ μπορεῖ νὰ ἔχει ἕνα ὑπεργράφημα n κορυφῶν;

1.23 (★☆☆)**.** Προσαρμόστε τὸν ὁρισμὸ τοῦ ἰσομορφισμοῦ γραφημάτων σὲ ὅλες τὶς γενικεύσεις (πεπερασμένων) γραφημάτων ποὺ ὁρίστηκαν σὲ αὐτὴν τὴν ἑνότητα.

1.24 (★☆☆)**.** Ἐπεκτείνετε τὴν ἔννοια τοῦ πίνακα ἀναπαράστασης γραφήματος γιὰ ὅλες τὶς γενικεύσεις (πεπερασμένων) γραφημάτων ποὺ ὁρίστηκαν σὲ αὐτὴν τὴν ἑνότητα. Ὑπάρχει κάποια περίπτωση γιὰ τὴν ὁποία μιὰ τέτοια ἐπέκταση δὲν εἶναι δυνατή;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ

Ἔχοντας στὴ διάθεσή μας γραφήματα, τὸ ἑπόμενο φυσικὸ βῆμα εἶναι νὰ τὰ συνδυάζουμε καὶ νὰ τὰ μετασχηματίζουμε. Τὸ κεφάλαιο χωρίζεται σὲ τρία μέρη. Στὸ πρῶτο ὁρίζουμε *πράξεις* ποὺ ἀπὸ ἕνα ἢ δύο γραφήματα φτιάχνουν ἕνα νέο, συνήθως μεγαλύτερο. Στὸ δεύτερο μελετᾶμε *τοπικοὺς μετασχηματισμούς*, οἱ ὁποῖοι πειράζουν τὸ γράφημα σὲ ἕνα μόνο σημεῖο του καὶ συνήθως τὸ μικραίνουν. Στὸ τρίτο, οἱ μετασχηματισμοὶ αὐτοὶ δίνουν *σχέσεις διάταξης* ἀνάμεσα σὲ γραφήματα: τὸ πότε δηλαδὴ ἕνα γράφημα «κρύβεται» μέσα σὲ ἕνα ἄλλο. Οἱ σχέσεις αὐτές, καὶ ἰδίως ἡ σχέση τοῦ ἐλάσσονος, διατρέχουν ὅλο τὸ ὑπόλοιπο βιβλίο.

2.1 Πράξεις σὲ γραφήματα

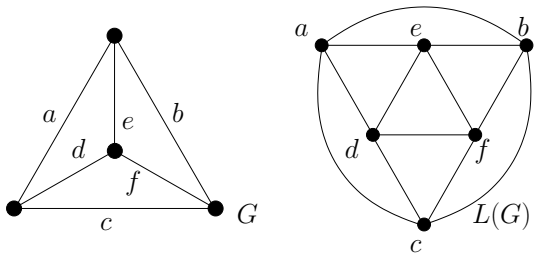
Ὁρισμός 2.1. Ἔστω G γράφημα. Ὁρίζουμε ὡς *συμπλήρωμα* τοῦ G τὸ γράφημα

$$\overline{G} = (V(G), \{\{x, y\} \mid x, y \in V(G) \text{ μὲ } x \neq y\} \backslash E(G))$$

(τὸ $\overline{G}$ ἔχει τὶς ἴδιες κορυφὲς μὲ τὸ G ἀλλὰ ἔχει ἀκριβῶς τὶς ἀκμὲς ποὺ δὲν ἔχει τὸ G). Δύο γραφήματα καλοῦνται *συμπληρωματικὰ* ὅταν τὸ ἕνα εἶναι συμπλήρωμα τοῦ ἄλλου.

Ὁρισμός 2.2. Ἔστω G γράφημα. Τὸ *γραμμικὸ γράφημα τοῦ* G εἶναι τὸ γράφημα

$$L(G) = (E(G), \{\{e_1, e_2\} \mid e_1, e_2 \in E(G) \text{ μὲ } e_1 \neq e_2 \text{ καὶ } e_1 \cap e_2 \neq \emptyset\}).$$



Σχῆμα 2.1: Τὸ γράφημα K_4 (τετράεδρο) καὶ τὸ γραμμικό του γράφημα $L(K_4)$ (ὀκτάεδρο).

Ὁρισμός 2.3. Ἔστω G καὶ H γραφήματα. Ὁρίζουμε τὸ *καρτεσιανὸ γινόμενο τῶν G καὶ H* ὡς

$$G\Box H = (V(G) \times V(H), \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} \mid$$

$$(\{x_1, x_2\} \in E(G) \text{ καὶ } y_1 = y_2) \text{ ἢ } (\{y_1, y_2\} \in E(H) \text{ καὶ } x_1 = x_2)\}).$$

Ὁρίζουμε ἐπίσης τὴν *ἕνωση* καὶ τὴν *τομὴ* τῶν G καὶ H ὡς

$$G \cup H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H))$$

καὶ

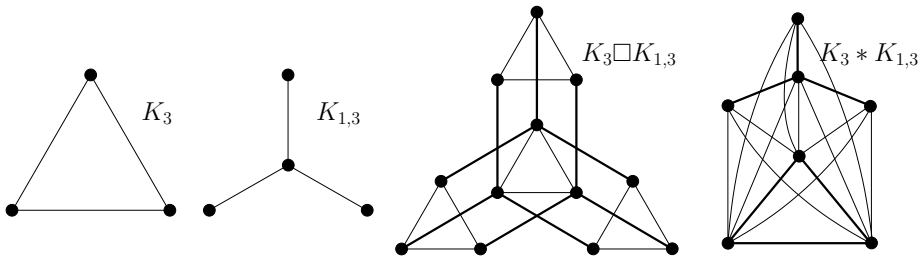
$$G \cap H = (V(G) \cap V(H), E(G) \cap E(H)).$$

Ἂν $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ τότε τὰ γραφήματα G καὶ H καλοῦνται *διακεκριμένα*. Ἐπίσης, ἂν τὰ G καὶ H εἶναι διακεκριμένα τὸ γράφημα $G \cup H$ καλεῖται *διακεκριμένη ἕνωση τῶν G καὶ H* καὶ συμβολίζεται ὡς $G + H$. Ἐπίσης γιὰ διακεκριμένα γραφήματα G καὶ H, ὁρίζουμε τὴν *διακεκριμένη σύνδεσή τους* ὡς

$$G * H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H) \cup \{\{x, y\} \mid x \in V(G) \text{ καὶ } y \in V(H)\}).$$

δηλαδή, τὸ $G * H$ κατασκευάζεται ἀπὸ τὴ διακεκριμένη ἕνωση τῶν G καὶ H ἂν ἐπιπλέον συνδέσουμε ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ G μὲ ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ H (οἱ συμβολισμοὶ $G + H$ καὶ $G * H$ προϋποθέτουν ὅτι τὰ G καὶ H εἶναι διακεκριμένα).

Παρατήρηση 2.4. Οἱ πράξεις $\cup, \cap, +, \Box$ καὶ $*$ μεταξὺ γραφημάτων εἶναι ἀντιμεταθετικὲς καὶ προσεταιριστικὲς (ἡ $\Box$ μόνο ὡς πρὸς τὴν ἰσομορφία, ἀφοῦ, γιὰ παράδειγμα, $V(G\Box H) \neq V(H\Box G)$).



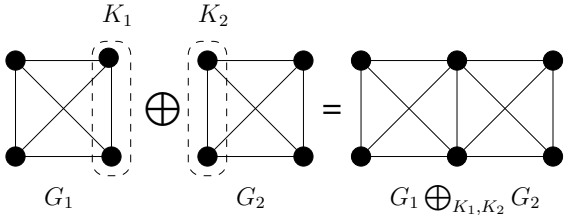
Σχῆμα 2.2: Τὰ γράφηματα $K_3, K_{1,3}, K_3 \square K_{1,3}$ καὶ $K_3 * K_{1,3}$.

Ὁρισμός 2.5. Γιὰ κάθε ἀκέραιο $k \geq 0$ καὶ κάθε γράφημα G, ὁρίζουμε

$$k \cdot G = \underbrace{G + \cdots + G}_{k \text{ φορές}}, \; G^{[k]} = \underbrace{G \square \cdots \square G}_{k \text{ φορὲς}} \text{ καὶ } G^{\langle k \rangle} = \underbrace{G * \cdots * G}_{k \text{ φορές}},$$

ὅπου στὰ $k \cdot G$ καὶ $G^{\langle k \rangle}$ χρησιμοποιοῦμε k ἀνὰ δύο διακεκριμένα ἀντίγραφα τοῦ G.

Παρατήρηση 2.6. Γιὰ κάθε γράφημα G, $0 \cdot G \simeq G^{\langle 0 \rangle} \simeq K_0$ (κενὸ γράφημα) καὶ $G^{[0]} \simeq K_1$ (γράφημα μὲ μία μόνο κορυφή).



Σχῆμα 2.3: Ἡ πράξη τοῦ ἀθροίσματος κλικῶν.

Ὁρισμός 2.7. Ἔστω G_1 καὶ G_2 γραφήματα καὶ ἔστω K καὶ K' κλίκες τοῦ G_1 καὶ τοῦ G_2 ἴσου μεγέθους. Καλοῦμε *ἄθροισμα κλικῶν τῶν G_1 καὶ G_2 σὲ σχέση μὲ τὶς κλίκες K καὶ K'*, τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει ἂν ταυτίσουμε μιὰ πρὸς μία τὶς κορυφὲς τῶν K καὶ K' καὶ τὸ συμβολίζουμε μὲ $G_1 \oplus_{K,K'} G_2$ ἢ ἁπλὰ $G_1 \oplus G_2$.

Παρατήρηση 2.8. Τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸ ἄθροισμα κλικῶν δύο γραφημάτων δὲν εἶναι μοναδικό. Ἀνάλογα μὲ τὴν ἐπιλογὴ τῶν κορυφῶν ποὺ θὰ ταυτίσουμε ἀπὸ τὶς δύο κλίκες μπορεῖ νὰ προκύψουν διαφορετικὰ μὴ ἰσόμορφα γραφήματα.

2.2 Τοπικοὶ μετασχηματισμοί

Συχνὰ παρουσιάζεται ἡ ἀνάγκη νὰ κάνουμε κάποια μετατροπὴ σὲ ἕνα γράφημα. Γιὰ τὸν λόγο αὐτὸ θὰ ὁρίσουμε μιὰ σειρὰ ἀπὸ στοιχειώδεις μετασχηματισμούς, ἡ διαδοχικὴ ἐφαρμογὴ τῶν ὁποίων θὰ μᾶς ἐπιτρέψει νὰ περιγράφουμε τέτοιες μετατροπές. Οἱ μετασχηματισμοὶ αὐτοὶ εἶναι τοπικοὶ καὶ ἀφοροῦν κορυφὲς ἢ ἀκμές.

Ὁρισμός 2.9. Ἔστω G γράφημα καὶ ἔστω $S \subseteq V(G)$. Καλοῦμε *γειτονιὰ τοῦ S στὸ G* τὸ σύνολο $N_G(S) = \{u \in V(G) \backslash S \mid \exists v \in S : \{v, u\} \in E(G)\}$, δηλ. τὸ σύνολο ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ G ποὺ εἶναι συνδεδεμένες μὲ κάποια κορυφὴ τοῦ S καὶ δὲν ἀνήκουν στὸ S. Ἂν $v \in V(G)$, ὁρίζουμε $N_G(v) = N_G(\{v\})$. Ἂν γιὰ μιὰ κορυφὴ $x \in V(G)$ ἰσχύει ὅτι $N_G(x) = \emptyset$ τότε λέμε ὅτι ἡ x εἶναι *ἀπομονωμένη* κορυφή.

Ὁρισμός 2.10. Ἔστω γράφημα G. Λέμε ὅτι μιὰ ἀκμὴ $e \in E(G)$ *πρόσκειται* σὲ μιὰ κορυφὴ v ἂν $v \in e$, δηλαδὴ ἂν ἡ v εἶναι ἄκρο τῆς e. Ἂν $v \in V(G)$ τότε θὰ συμβολίζουμε μὲ $E_G(v)$ τὸ σύνολο τῶν ἀκμῶν τοῦ $E(G)$ ποὺ πρόσκεινται στὴν v. Ἐπίσης γιὰ $F \subseteq E(G)$, ὁρίζουμε $V(F) = \cup_{e \in F} e$ (τὸ σύνολο τῶν κορυφῶν ποὺ εἶναι ἄκρα ἀκμῶν στὸ F).

Παρατήρηση 2.11. Γιὰ κάθε κορυφὴ $v \in V(G)$ ἰσχύει ὅτι $N_G(v) = V(E_G(v)) \backslash \{v\}$.

Ὁρισμός 2.12. Ἔστω G γράφημα καὶ ἔστω $S \subseteq V(G)$, $v \in V(G)$, $F \subseteq E(G)$ καὶ $e = \{x, y\} \in E(G)$. Ὁρίζουμε

1. $G - S = (V(G) \backslash S, \{\{x, y\} \in E(G) \mid \{x, y\} \cap S = \emptyset\})$,
2. $G - v = G - \{v\}$,
3. $G - F = (V(G), E(G) \backslash F)$ καί
4. $G - e = G - \{e\}$.

(Οἱ ὁρισμοὶ τῶν $G - \{x, y\}$ καὶ $G - e$ ἐμπεριέχουν κάποια ἀσάφεια γιὰ τὸ πότε τὰ $\{x, y\}$ καὶ e θὰ εἶναι μιὰ ἀκμὴ καὶ πότε ἕνα σύνολο μὲ δύο κορυφές. Γιὰ τὸν λόγο αὐτό, ἐπιμένουμε ὅτι στὴν περίπτωση τοῦ $G - \{x, y\}$, τὸ $\{x, y\}$ θὰ εἶναι τὸ σύνολο τῶν δύο κορυφῶν x καὶ y καὶ στὴν περίπτωση τοῦ $G - e$ τὸ e θὰ εἶναι ἡ ἀκμὴ καὶ ὄχι τὸ σύνολο ποὺ περιέχει τὰ ἄκρα της.)

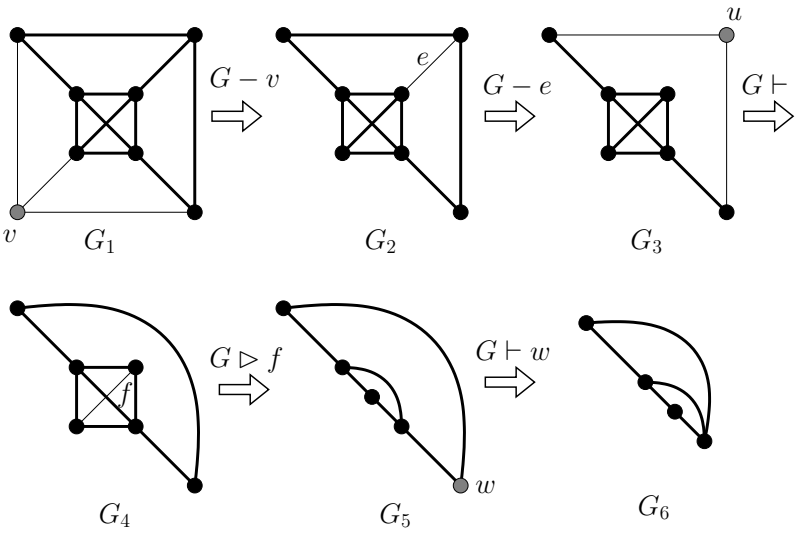
Οἱ δύο ἑπόμενοι μετασχηματισμοὶ ἀφαιροῦν ἢ εἰσάγουν κορυφὲς βαθμοῦ 2 καί, ἑπομένως, δὲν ἀλλοιώνουν τὸ «σχῆμα» τοῦ γραφήματος παρὰ μόνο τὶς λεπτομέρειές του.

Ὁρισμός 2.13. Ἔστω G γράφημα καὶ ἔστω κορυφὴ $v \in V(G)$, στὴν ὁποία πρόσκεινται ἀκριβῶς δύο ἀκμὲς $\{x, v\}$ καὶ $\{v, y\}$ ($x \neq y$). Λέμε τότε ὅτι τὸ γράφημα

$$G/v = (V(G)\backslash\{v\}, E(G)\backslash\{\{x, v\}, \{v, y\}\} \cup \{\{x, y\}\})$$

προκύπτει ἀπὸ τὴ *διάλυση* τῆς κορυφῆς v στὸ G, δηλαδὴ βγάζουμε τὴν κορυφὴ v καὶ ἑνώνουμε τὶς γειτονικές της κορυφὲς μὲ μία ἀκμὴ (ἂν ἡ ἀκμὴ αὐτὴ δὲν ὑπάρχει ἤδη στὸ γράφημα).

Ὁρισμός 2.14. Ἡ ἀντίστροφη πράξη τῆς διάλυσης, δηλαδὴ ἡ ἀντικατάσταση μιᾶς ἀκμῆς e ἀπὸ ἕνα μονοπάτι μήκους 2 καλεῖται *ὑποδιαίρεση τῆς* e. Ἂν ἕνα γράφημα G προκύπτει μετὰ ἀπὸ διαδοχικὲς ὑποδιαιρέσεις ἀκμῶν σὲ ἕνα γράφημα H, τότε τὸ G καλεῖται *ὑποδιαίρεση τοῦ* H (γιὰ πληρότητα θεωροῦμε ὅτι κάθε γράφημα εἶναι ὑποδιαίρεση τοῦ ἑαυτοῦ του).



Σχῆμα 2.4: Διαδοχικὲς ἐφαρμογὲς τῶν μετασχηματισμῶν τοῦ συνόλου $\mathcal{T} = \{-v, /v, -e, /e\}$.

Ἡ σύνθλιψη εἶναι ὁ δραστικότερος ἀπὸ τοὺς μετασχηματισμούς μας: ταυτίζει δύο γειτονικὲς κορυφὲς σὲ μία καὶ μπορεῖ νὰ μειώσει σημαντικὰ τὸ μέγεθος τοῦ γραφήματος.

Ὁρισμός 2.15. Ἔστω G γράφημα καὶ ἔστω $e = \{x, y\} \in E(G)$. Ἔστω ἐπίσης μιὰ κορυφὴ $v_{\text{νέα}}$ ποὺ δὲν ἀνήκει στὸ $V(G)$. Τότε λέμε ὅτι τὸ γράφημα $G/e = (V', E')$ ὅπου

$$V' = V(G)\backslash\{x, y\} \cup \{v_{\text{νέα}}\} \text{ καὶ}$$
$$E' = E(G)\backslash E_G(x)\backslash E_G(y) \cup \{\{v_{\text{νέα}}, u\} \mid u \in N_G(\{x, y\})\},$$

προκύπτει ἀπὸ τὴ *σύνθλιψη* τῆς ἀκμῆς $e = \{x, y\}$ στὸ G (δηλαδὴ ἀφαιροῦμε τὶς κορυφὲς x καὶ y, καθὼς καὶ τὶς προσκείμενες σὲ αὐτὲς ἀκμὲς καὶ προσθέτουμε μιὰ νέα κορυφὴ $v_{\text{νέα}}$ τὴν ὁποία συνδέουμε μὲ τὴ γειτονιὰ τοῦ $\{x, y\}$ στὸ G).

Παρατήρηση 2.16. Ἡ διάλυση μιᾶς κορυφῆς μπορεῖ νὰ ἐξομοιωθεῖ ἀπὸ τὴ σύνθλιψη μιᾶς ἀπὸ τὶς προσκείμενες ἀκμές της.

Μόλις ὁρίσαμε τέσσερις μετασχηματισμοὺς σὲ γραφήματα ποὺ ἀφοροῦν κορυφὲς ἢ ἀκμές. Τοὺς συνοψίζουμε στὸν πίνακα τοῦ Σχήματος 2.5 καί τους ὁμαδοποιοῦμε στὸ σύνολο $\mathcal{T} = \{-v, /v, -e, /e\}$.

Μετασχηματισμοὶ μὲ κορυφὲς		Μετασχηματισμοὶ μὲ ἀκμές	
$-v$:	ἀφαίρεση κορυφῆς	$-e$:	ἀφαίρεση ἀκμῆς
$/v$:	διάλυση κορυφῆς	$/e$:	σύνθλιψη ἀκμῆς.

Σχῆμα 2.5: Οἱ μετασχηματισμοὶ τοῦ συνόλου $\mathcal{T} = \{-v, /v, -e, /e\}$.

2.3 Σχέσεις μεταξὺ γραφημάτων

Κάθε ἐπιλογὴ ἐπιτρεπόμενων μετασχηματισμῶν ὁρίζει καὶ μιὰ διαφορετικὴ ἔννοια τοῦ «περιέχεται». Ἡ ἑνιαία αὐτὴ ὀπτικὴ συνοψίζει μὲ ἕναν ὁρισμὸ τόσο τὶς κλασικὲς σχέσεις ὑπογραφήματος ὅσο καὶ τὶς σχέσεις ἐλάσσονος.

Ὁρισμός 2.17. Ἔστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ μὲ $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Ἔστω ἐπίσης G καὶ H γραφήματα. Θὰ γράφουμε $H \subseteq_{\mathcal{A}} G$ ἂν εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευάσουμε ἕνα γράφημα ἰσόμορφο μὲ τὸ H, ξεκινώντας ἀπὸ τὸ γράφημα G καὶ ἐφαρμόζοντας (ἐνδεχομένως κανέναν) μετασχηματισμοὺς ἀπὸ τὸ σύνολο $\mathcal{A}$.

Παρατήρηση 2.18. Γιὰ κάθε μὴ κενὸ ὑποσύνολο $\mathcal{A}$ τοῦ $\mathcal{T}$, ἡ σχέση $\subseteq_{\mathcal{A}}$ εἶναι σχέση μερικῆς διάταξης στὶς κλάσεις ἰσομορφίας τῶν γραφημάτων.

Ὁρισμός 2.19. Ὁρίζουμε τὶς ἑξῆς σχέσεις μερικῆς διάταξης σὲ γραφήματα:

1. Ἂν $\mathcal{A} = \{-e, -v\}$, τότε ἀντὶ γιὰ $H \subseteq_{\mathcal{A}} G$ γράφουμε ἐναλλακτικὰ $H \subseteq_{v\pi} G$, ἢ πιὸ ἁπλὰ $H \subseteq G$, καὶ λέμε ὅτι τὸ H εἶναι *ὑπογράφημα* τοῦ G.

2. Ἂν $\mathcal{A} = \{-v\}$, τότε ἀντὶ γιὰ $H \subseteq_{\mathcal{A}} G$ γράφουμε ἐναλλακτικὰ $H \subseteq_{\epsilon\nu} G$ καὶ λέμε ὅτι τὸ H εἶναι *ἐναγόμενο ὑπογράφημα* τοῦ G.

3. Ἂν $\mathcal{A} = \{-e\}$, τότε ἀντὶ γιὰ $H \subseteq_{\mathcal{A}} G$ γράφουμε ἐναλλακτικὰ $H \subseteq_{\pi\alpha} G$ καὶ λέμε ὅτι τὸ H εἶναι *παραγόμενο ὑπογράφημα* τοῦ G.

4. Ἂν $\mathcal{A} = \{-e, -v, /v\}$, τότε ἀντὶ γιὰ $H \subseteq_{\mathcal{A}} G$ γράφουμε ἐναλλακτικὰ $H \leq_{\tau\pi} G$ καὶ λέμε ὅτι τὸ H εἶναι *τοπολογικὸ ἔλασσον τοῦ* G.

5. Ἂν $\mathcal{A} = \{-e, -v, /e\}$, τότε ἀντὶ γιὰ $H \subseteq_{\mathcal{A}} G$ γράφουμε ἐναλλακτικὰ $H \leq_{\epsilon\lambda} G$, ἢ πιὸ ἁπλὰ $H \leq G$, καὶ λέμε ὅτι τὸ H εἶναι *ἔλασσον* τοῦ G.

Γιὰ ὅλες τὶς παραπάνω σχέσεις ὁρίζουμε τὴν γνήσιά τους μορφὴ $\subset$ καὶ $<$ ὅταν τὰ συγκρινόμενα γραφήματα δὲν εἶναι ἰσόμορφα.

Παρατήρηση 2.20. Ὁ τρισδιάστατος κύβος περιέχει τὸ $C_4 + C_4$ ὡς παραγόμενο ὑπογράφημα. Ἐπίσης τὸ γράφημα τοῦ Petersen περιέχει τὸ $C_5 + C_5$ ὡς παραγόμενο ὑπογράφημα.

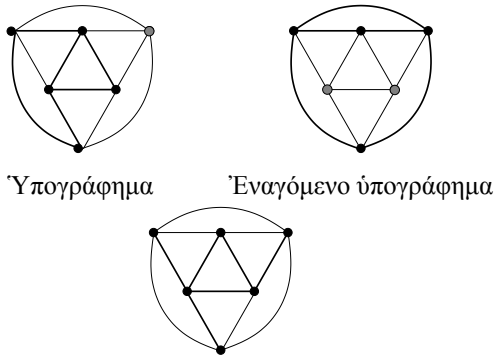
Ὁρισμός 2.21. Ἔστω G γράφημα καὶ ἔστω $S \subseteq V(G)$. Τότε ὁρίζουμε ὡς $G[S] = G - (V(G) \backslash S)$. Ἐναλλακτικὰ μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε

$$G[S] = (S, \{\{v, u\} \mid \{v, u\} \subseteq S \text{ καὶ } \{v, u\} \in E(G)\}).$$

Παρατηροῦμε ὅτι $G[S] \subseteq_{\epsilon\nu} G$ καὶ λέμε ὅτι τὸ $G[S]$ εἶναι τὸ ὑπογράφημα τοῦ G ποὺ *ἐνάγεται* ἀπὸ τὸ σύνολο κορυφῶν S. Ἂν $F \subseteq E(G)$, τότε ὁρίζουμε $G[F] = (V(F), F)$ καὶ λέμε ὅτι τὸ $G[F]$ εἶναι τὸ ὑπογράφημα τοῦ G ποὺ *ἐνάγεται* ἀπὸ τὸ σύνολο ἀκμῶν F.

Παρατήρηση 2.22. Ἂν G καὶ H εἶναι γραφήματα τότε $H \subseteq_{\epsilon\nu} G \Leftrightarrow \overline{H} \subseteq_{\epsilon\nu} \overline{G}$.

Παρατήρηση 2.23. Ἂν τὸ γράφημα H εἶναι ἐναγόμενο ἢ παραγόμενο ὑπογράφημα τοῦ γραφήματος G, τότε εἶναι καὶ ὑπογράφημά του (δηλαδή: $H \subseteq_{\pi\alpha} G \Rightarrow H \subseteq G$ καὶ $H \subseteq_{\epsilon\nu} G \Rightarrow H \subseteq G$). Ἐπίσης, ἂν $H \subseteq G$ τότε $H \leq_{\tau\pi} G$ καὶ $H \leq_{\epsilon\lambda} G$. Τὰ ἀντίστροφα τῶν παραπάνω συνεπαγωγῶν δὲν ἰσχύουν. Παρ' ὅλα αὐτά, ἰσχύει ὅτι $H \leq_{\tau\pi} G \Rightarrow H \leq_{\epsilon\lambda} G$.



Σχῆμα 2.6: Σχέσεις ὑπογραφήματος.

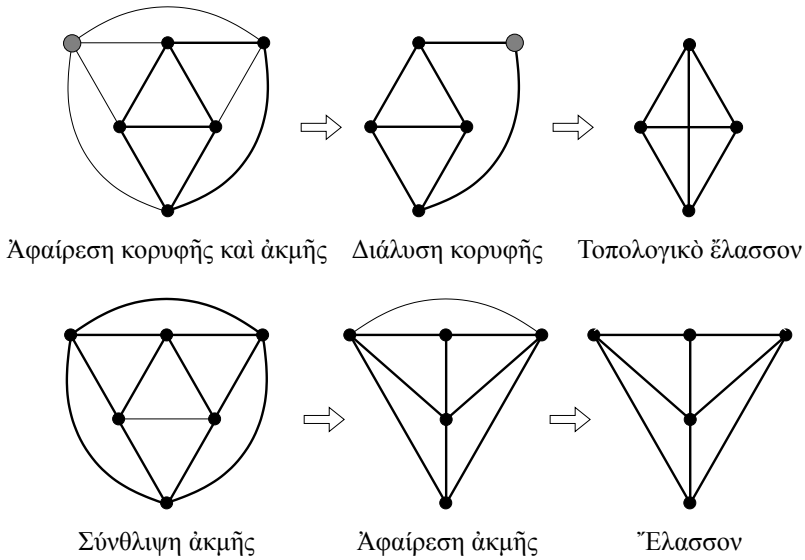
Οἱ σχέσεις γραφημάτων ποὺ ὁρίσαμε χωρίζονται σὲ δύο κατηγορίες: Τὶς σχέσεις ὑπογραφήματος ($\subseteq$, $\subseteq_{\epsilon\nu}$, $\subseteq_{\pi\alpha}$) καὶ τὶς τοπολογικὲς σχέσεις ($\leq_{\tau\pi}$, $\leq_{\epsilon\lambda}$). Οἱ σχέσεις αὐτὲς δὲν εἶναι οἱ μόνες ποὺ ἔχουν μελετηθεῖ. Θεωρώντας διαφορετικὰ ὑποσύνολα τοῦ $\mathcal{T} = \{-v, /v, -e, /e\}$ μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε κι ἄλλες. Τὸ ἴδιο μποροῦμε νὰ κάνουμε ἐμπλουτίζοντας τὸ σύνολο $\mathcal{T}$ μὲ περισσότερους μετασχηματισμούς.

Ὁρισμός 2.24. Ἔστω $\mathcal{C}$ μιὰ κλάση γραφημάτων καὶ ἔστω μιὰ μερικὴ διάταξη $\sqsubseteq \in \{\subseteq_{\upsilon\pi}, \subseteq_{\epsilon\nu}, \subseteq_{\pi\alpha}, \leq_{\tau\pi}, \leq_{\epsilon\lambda}\}$. Λέμε ὅτι ἡ $\mathcal{C}$ εἶναι *κλειστὴ ὡς πρὸς τήν* "$\sqsubseteq$" ἂν $G \in \mathcal{C}$ καὶ $G' \sqsubseteq G$ συνεπάγεται ὅτι $G' \in \mathcal{C}$. Ἐπιπλέον, ἂν ἡ $\mathcal{C}$ εἶναι κλειστὴ ὡς πρὸς τὴν $\subseteq$ τότε ἀποκαλεῖται *μονότονη*, ἐνῶ ἐὰν εἶναι κλειστὴ ὡς πρὸς τὴν $\subseteq_{\epsilon\nu}$ ἀποκαλεῖται *κληρονομική*.

Κλείνουμε τὴν ἑνότητα μὲ ἕνα παράδειγμα ἐμπλουτισμοῦ τοῦ $\mathcal{T}$ μὲ ἕναν πέμπτο μετασχηματισμό. Ὁ μετασχηματισμὸς αὐτός, σὲ ἀντίθεση μὲ τοὺς προηγούμενους, μπορεῖ νὰ δημιουργήσει πολλαπλὲς ἀκμές, ὁπότε ἀπὸ ἐδῶ καὶ στὸ τέλος τῆς ἑνότητας δουλεύουμε μὲ πολυγραφήματα χωρὶς θηλιές, δηλαδὴ ἐπιτρέπουμε στὸ πολυσύνολο τῶν ἀκμῶν νὰ ἐπαναλαμβάνει στοιχεῖα ἀλλὰ ὄχι νὰ περιέχει μονοσύνολα.

Ὁρισμός 2.25. Ἔστω G πολυγράφημα χωρὶς θηλιές, ἔστω $v \in V(G)$, καὶ ἔστω $e_1 = \{x, v\}$ καὶ $e_2 = \{v, y\}$ δύο διαφορετικὲς ἀκμὲς τοῦ $E_G(v)$ μὲ $x \neq y$. Λέμε ὅτι τὸ πολυγράφημα

$$G \uparrow (e_1, e_2) = (V(G), E(G) \backslash \{e_1, e_2\} \cup \{\{x, y\}\})$$



Σχῆμα 2.7: Τοπολογικὲς σχέσεις

προκύπτει ἀπὸ τὴν *ἀνύψωση τοῦ ζεύγους* (e_1, e_2) *στὴν* v, δηλαδὴ ἀφαιροῦμε τὶς δύο ἀκμὲς καὶ συνδέουμε τὰ δύο ἄλλα ἄκρα τους μὲ μιὰ νέα ἀκμή. Ἡ ἀφαίρεση καὶ ἡ πρόσθεση γίνονται στὸ πολυσύνολο τῶν ἀκμῶν, ὁπότε ἡ νέα ἀκμὴ προστίθεται ἀκόμη καὶ ἂν τὸ $\{x, y\}$ εἶναι ἤδη ἀκμὴ τοῦ G. Ἡ ἀπαίτηση $x \neq y$ ἐξασφαλίζει ὅτι δὲν δημιουργοῦνται θηλιές.

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀνύψωση διατηρεῖ τὸν βαθμὸ κάθε κορυφῆς ἐκτὸς ἀπὸ τὴν v, τῆς ὁποίας ὁ βαθμὸς μειώνεται κατὰ 2. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι ἡ διάλυση τῆς v εἶναι ἡ εἰδικὴ περίπτωση ὅπου $E_G(v) = \{e_1, e_2\}$ καὶ ἡ ἀνύψωση ἀκολουθεῖται ἀπὸ τὴν ἀφαίρεση τῆς v, ἡ ὁποία ἔχει πλέον γίνει ἀπομονωμένη.

Ὁρισμός 2.26. Ἔστω $\mathcal{A} = \{-e, -v, \uparrow (e_1, e_2)\}$ καὶ ἔστω G καὶ H πολυγραφήματα χωρὶς θηλιές. Ἀντὶ γιὰ $H \subseteq_{\mathcal{A}} G$ γράφουμε $H \leq_{\epsilon\mu} G$ καὶ λέμε ὅτι τὸ H *ἐμβυθίζεται* στὸ G, ἢ ὅτι τὸ H εἶναι *ἐμβύθιση* τοῦ G.

Ἡ σχέση αὐτὴ ἔχει καὶ ἕναν ἰσοδύναμο, πιὸ ἐποπτικὸ χαρακτηρισμό, ὁ ὁποῖος ἐξηγεῖ καὶ τὸ ὄνομά της: τὸ H ἐμβυθίζεται στὸ G ἂν καὶ μόνο ἂν ὑπάρχει μιὰ 1–1 ἀπεικόνιση $\phi : V(H) \to V(G)$ καὶ μιὰ οἰκογένεια $\{P_e \mid e \in E(H)\}$ ἀνὰ δύο ἀκμοξένων μονοπατιῶν τοῦ G, ὅπου γιὰ κάθε ἀκμὴ $e = \{u, w\}$ τοῦ H τὸ P_e ἔχει ἄκρα τὶς $\phi(u)$ καὶ $\phi(w)$. Δηλαδὴ τὸ H «ζωγραφίζεται» μέσα στὸ G μὲ τὶς κορυφές του σὲ διαφορετικὲς θέσεις καὶ τὶς ἀκμές του σὲ μονοπάτια ποὺ δὲν

μοιράζονται ἀκμές — μποροῦν ὅμως νὰ μοιράζονται κορυφές, καὶ ἐδῶ ἀκριβῶς διαφέρει ἡ ἐμβύθιση ἀπὸ τὴν σχέση τοπολογικοῦ ἐλάσσονος, ὅπου τὰ μονοπάτια ἀπαιτοῦνται ἐσωτερικῶς διακεκριμένα.

Παρατήρηση 2.27. Γιὰ κάθε δύο πολυγραφήματα χωρὶς θηλιὲς H καὶ G ἰσχύει ὅτι $H \leq_{\tau\pi} G \Rightarrow H \leq_{\epsilon\mu} G$. Τὸ ἀντίστροφο δὲν ἰσχύει.

Ἡ ἐμβύθιση δὲν εἶναι συγκρίσιμη μὲ τὴν σχέση ἐλάσσονος: ὑπάρχουν γραφήματα H καὶ G μὲ $H \leq_{\epsilon\mu} G$ καὶ $H \not\leq_{\epsilon\lambda} G$, καθὼς καὶ γραφήματα μὲ $H \leq_{\epsilon\lambda} G$ καὶ $H \not\leq_{\epsilon\mu} G$. Παρ' ὅλα αὐτὰ μοιράζεται μαζί της τὴν βαθύτερη ἰδιότητά της: ὅπως ἀπέδειξαν οἱ Robertson καὶ Seymour, τὰ γραφήματα εἶναι καλὰ μερικῶς διατεταγμένα καὶ ὡς πρὸς τὴν $\leq_{\epsilon\mu}$ [93], ἐπιβεβαιώνοντας μιὰ εἰκασία τοῦ Nash-Williams.

Ἀσκήσεις Κεφαλαίου

2.1 (★☆☆)**.** Γιὰ κάθε γράφημα G, $G \simeq \overline{G} \Rightarrow n(G) \equiv 0$ ἢ $1 \pmod 4$.

2.2 (☆☆☆)**.** Ἀποδεῖξτε (αὐστηρά) ὅτι γιὰ $n \geq 3$, τὸ γράφημα C_n εἶναι ἰσόμορφο μὲ τὸ γραμμικό του γράφημα $L(C_n)$.

2.3 (☆☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G, $m(L(G)) \leq \binom{m(G)}{2}$.

2.4 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι τὸ $L(K_{3,3})$ εἶναι αὐτοσυμπληρωματικό.

2.5 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι $\overline{K_{p,q} + K_{r,s}} \simeq (K_p + K_q) * (K_r + K_s)$.

2.6 (☆☆☆)**.** $\overline{K}_{p,q} \simeq K_p + K_q$, $K_r^{\langle m \rangle} \simeq K_{m \cdot r}$.

2.7 (☆☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι τὸ γράφημα $P_p \square P_q$ εἶναι μιὰ (p, q)-σχάρα.

2.8 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι $L(K_4) \simeq (2 \cdot K_1)^{\langle 3 \rangle}$.

2.9 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι $Q_r \simeq K_2^{[r]}$.

2.10 (☆☆☆)**.** Γιὰ κάθε γράφημα G, $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(\overline{G})$.

2.11 (★★☆)**.** Περιγράψτε πλήρως τὴν κλάση γραφημάτων $\mathcal{G} = \{G \mid G \simeq L(G)\}$.

2.12 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι ἂν τὸ γράφημα G εἶναι μεταβατικό, τότε , γιὰ κάθε $k \geq 1$, τὰ γραφήματα $k \cdot G, G^{[k]}$ καὶ $G^{\langle k \rangle}$ εἶναι ἐπίσης μεταβατικά.

2.13 (★★☆)**.** Ἐξετάστε τὴν ὀρθότητα τῆς πρότασης: *«ἂν τὸ γράφημα G εἶναι μεταβατικό, τότε καὶ τὸ γράφημα $L(G)$ θὰ εἶναι μεταβατικό»*.

2.14 (★☆☆)**.** Ἔστω τὸ γράφημα $G_{k,r}$ ὅπου τὸ $V(G_{k,r})$ περιέχει ὅλες τὶς λέξεις μήκους r μὲ σύμβολα ἀπὸ ἕνα ἀλφάβητο k συμβόλων καὶ $\{v, u\} \in E(G_{k,r})$ ἂν οἱ λέξεις v καὶ u διαφέρουνε σὲ μιὰ μόνο θέση. Ἀποδεῖξτε ὅτι $G_{k,r} \simeq K_k^{[r]}$.

2.15 (★★☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι $G \simeq L(G)$ ἂν καὶ μόνο ἂν $G \simeq C_{i_1} + \cdots + C_{i_r}$ ὅπου $i_j \geq 3$ γιὰ $1 \leq j \leq r$.

2.16 (★☆☆)**.** Μετασχηματίστε τὸ γράφημα G_1 τοῦ Σχήματος 2.4 στὸ γράφημα G_5 χρησιμοποιώντας μόνο πράξεις ἀπὸ τὸ σύνολο $\{-e, /v\}$ καὶ χρησιμοποιώντας μόνο δύο φορὲς διάλυση κορυφῆς.

2.17 (★☆☆)**.** Βρεῖτε ἕνα γράφημα G τὸ ὁποῖο νὰ περιέχει μιὰ ἀκμὴ e καὶ μιὰ κορυφὴ v τέτοιες ὥστε $G - v \simeq G/v$ καὶ $G - e \simeq G/e$.

2.18 (☆☆☆)**.** Ποιὸς εἶναι ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς συνθλίψεων, ἱκανὸς νὰ συρρικνώσει τὸ γράφημα G τοῦ Σχήματος 1.1 στὸ K_1;

2.19 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε $q \geq 2$, ὁ ὑπερκύβος Q_q περιέχει ὡς παραγόμενο ὑπογράφημα ἕνα κύκλο μὲ 2^q κορυφές.

2.20 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι τὸ γράφημα G_1 τοῦ Σχήματος 2.4 περιέχει τὸ K_5 ὡς ἔλασσον.

2.21 (★★☆)**.** Ποιὸ εἶναι τὸ μικρότερο k γιὰ τὸ ὁποῖο τὸ $K_{2,4}$ εἶναι τοπολογικὸ ἔλασσον τῆς $(k \times k)$-σχάρας;

2.22 (★☆☆)**.** Πόσες διαφορετικὲς σχέσεις διάταξης γραφημάτων μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε ἀπὸ τὰ ὑποσύνολα τοῦ $\mathcal{T}$;

2.23 (★★★)**.** Δεῖξτε ὅτι ὁ τροχὸς $W_r = K_1 * C_r$ εἶναι ἔλασσον τῆς $(n \times n)$-σχάρας γιὰ $r \geq 3(n-2) + 2\lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor (n-3)$.

2.24 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι $K_{1,3} + K_{1,3} \subseteq_{\pi\alpha} Q_3$ (γιὰ τὸ γράφημα Q_3, βλ. Σχῆμα 1.4).

2.25 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι $K_{1,4} \leq_{\epsilon\lambda} Q_3$ ἀλλὰ $K_{1,4} \not\leq_{\tau\pi} Q_3$.

2.26 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι τὸ γράφημα τοῦ Petersen (βλ. Σχῆμα 1.4) περιέχει ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον τὸ $K_{3,3}$ ἀλλὰ ὄχι τὸ K_5. Ἐπίσης δεῖξτε ὅτι τὸ ἴδιο γράφημα περιέχει ὡς ἔλασσον τὸ K_5.

2.27 (★★☆)**.** Ποιὸ εἶναι τὸ μικρότερο r γιὰ τὸ ὁποῖο ἡ (r, r)-σχάρα περιέχει τὸ Q_3 ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον;

2.28 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G ἰσχύει ὅτι $K_{1,r} \subseteq_{\upsilon\pi} G$ ἂν καὶ μόνο ἂν $K_{1,r} \leq_{\tau\pi} G$.

2.29 (★★☆)**.** Ποιὸ εἶναι τὸ μικρότερο r γιὰ τὸ ὁποῖο ἡ (r,r)-σχάρα περιέχει τὸ $L(K_4)$ ὡς ἔλασσον;

2.30 (★★★)**.** Η (r,r)-σχάρα περιέχει τὰ $K_{1,1+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor (r-1)}$ καὶ $K_{2,1+\lfloor \frac{r}{3} \rfloor (r-1)}$ ὡς ἐλάσσονα, ἀλλὰ δὲν περιέχει τὸ $K_{3,r}$ ὡς ἔλασσον γιὰ $r \geq 3$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΒΑΘΜΟΙ ΚΟΡΥΦΩΝ

Ὁ βαθμὸς μιᾶς κορυφῆς εἶναι ἡ ἁπλούστερη ἀριθμητικὴ πληροφορία ποὺ μπορεῖ νὰ κρατήσει κανεὶς γιὰ ἕνα γράφημα. Τὸ κεφάλαιο δείχνει πόσο μακριὰ φτάνει αὐτὴ ἡ πληροφορία. Ξεκινᾶμε ἀπὸ τὶς τρεῖς προφανεῖς συνόψεις τῶν βαθμῶν —τὸν ἐλάχιστο, τὸν μέσο, καὶ τὸν μέγιστο— καὶ προχωρᾶμε στὸν *ἐκφυλισμό*, ὁ ὁποῖος ἀποδεικνύεται πολὺ πιὸ εὔχρηστος ἀπὸ τὸν ἐλάχιστο βαθμὸ ἐπειδὴ εἶναι κληρονομικὸς ὡς πρὸς τὰ ὑπογραφήματα. Τὸ κεφάλαιο κλείνει μὲ τὸ ἀντίστροφο ἐρώτημα: ποιὲς ἀκολουθίες ἀριθμῶν μποροῦν πράγματι νὰ εἶναι οἱ βαθμοὶ κάποιου γραφήματος.

3.1 Ἐλάχιστος, μέσος καὶ μέγιστος βαθμός

Ὁρισμός 3.1. Ὁρίζουμε ὡς *βαθμὸ* μιᾶς κορυφῆς v ἑνὸς γραφήματος G τὴν ποσότητα

$$\deg_G(v) = |N_G(v)|.$$

Ὁ *ἐλάχιστος καὶ ὁ μέγιστος βαθμὸς* ἑνὸς γραφήματος G ὁρίζονται ὡς

$$\delta(G) = \min\{\deg_G(v) \mid v \in V(G)\} \quad \text{καὶ} \quad \Delta(G) = \max\{\deg_G(v) \mid v \in V(G)\}$$

ἀντίστοιχα. Ἡ ποσότητα

$$d(G) = \frac{1}{n(G)} \sum_{v \in V(G)} \deg_G(v)$$

καλεῖται *μέσος βαθμὸς* τοῦ G καὶ ἡ ποσότητα $\epsilon(G) = \frac{m(G)}{n(G)}$ καλεῖται *πυκνότητα* τοῦ G. Ἂν σὲ ἕνα γράφημα ὅλες οἱ κορυφὲς ἔχουν βαθμὸ r τότε καλοῦμε τὸ γράφημα αὐτὸ *r-κανονικὸ* ἢ ἁπλὰ *κανονικό*.

Παρατήρηση 3.2. Ἐναλλακτικὰ μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε

$$\Delta(G) = \max\{k \mid K_{1,k} \subseteq_{υπ} G\}.$$

Ἡ πρώτη σχέση τοῦ ἑπόμενου θεωρήματος εἶναι γνωστὴ ὡς *λῆμμα τῆς χειραψίας*: μετρώντας τὰ ζεύγη κορυφῆς-ἀκμῆς μὲ δύο τρόπους, συνδέουμε τοὺς βαθμοὺς μὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν.

Θεώρημα 3.3. Ἔστω G γράφημα. Τότε ἰσχύουν τὰ παρακάτω:

1. $\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2 \cdot m(G)$.
2. $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$.
3. $\epsilon(G) = \frac{d(G)}{2}$.

Ἀπόδειξη. Γιὰ τὴν πρώτη ἰσότητα, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι σὲ κάθε ἀκμὴ ἀντιστοιχοῦν δύο κορυφὲς καὶ σὲ κάθε κορυφὴ v ἀντιστοιχοῦν $\deg_G(v)$ ἀκμές. Οἱ ὑπόλοιπες δύο σχέσεις προκύπτουν ἄμεσα ἀπὸ τοὺς ὁρισμούς. □

Λῆμμα 3.4. Κάθε γράφημα περιέχει ἄρτιο ἀριθμὸ κορυφῶν περιττοῦ βαθμοῦ.

Ἀπόδειξη. Ἔστω V_1 (V_2) οἱ κορυφὲς τοῦ $V(G)$ μὲ περιττὸ (ἄρτιο) βαθμό. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 3.3, ἔχουμε ὅτι

$$2 \cdot m(G) = \sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = \sum_{v \in V_1} \deg_G(v) + \sum_{v \in V_2} \deg_G(v),$$

πρᾶγμα ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ $\sum_{v \in V_1} \deg_G(v)$ εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς καὶ ἄρα τὸ $|V_1|$ εἶναι ἀναγκαστικὰ ἄρτιο. □

Τὰ κανονικὰ γραφήματα εἶναι εὐκολότερα στὸν χειρισμό. Τὸ ἑπόμενο θεώρημα, ποὺ ὀφείλεται στὸν D. Kőnig (1936) [63], δείχνει ὅτι κάθε γράφημα μπορεῖ νὰ «συμπληρωθεῖ» ὥστε νὰ γίνει κανονικό.

Θεώρημα 3.5 (Kőnig, 1936 [63])**.** Κάθε γράφημα G εἶναι ἐναγόμενο ὑπογράφημα κάποιου $\Delta(G)$-κανονικοῦ γραφήματος.

Ἀπόδειξη. Ἡ ἰδέα εἶναι νὰ διπλασιάζουμε τὸ γράφημα καὶ νὰ συμπληρώνουμε βαθμούς, μειώνοντας κάθε φορὰ ἕνα μέτρο ἀπόκλισης ἀπὸ τὴν κανονικότητα. Γιὰ κάθε γράφημα G ὁρίζουμε τὴν ποσότητα

$$z(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} (\Delta(G) - \deg_G(v))}{n(G)}.$$

(Ἡ ποσότητα $z(G)$ ἀποτελεῖ μέτρο τοῦ πόσο ἀπέχει τὸ G ἀπὸ τὸ νὰ εἶναι $\Delta(G)$-κανονικό.) Ἔστω $r = \Delta(G)$ καὶ ἔστω ὅτι τὸ G δὲν εἶναι r-κανονικό. Θεωροῦμε τὸ γράφημα $G_1 = G + G'$, ὅπου G' ἕνα ξένο καὶ ἰσόμορφο ἀντίγραφο τοῦ G, καὶ προσθέτουμε γιὰ κάθε κορυφὴ $u \in V(G)$ τὴν ἀκμὴ $\{u, \sigma(u)\}$ ἂν $\deg_G(u) < r$ (σ ὁ ἰσομορφισμὸς τῶν G, G'). Παρατηροῦμε ὅτι $G \subseteq_{\epsilon\nu} G_1$ καὶ $z(G_1) < z(G)$. Ἐφαρμόζοντας διαδοχικὰ τὸν ἴδιο μετασχηματισμὸ καταλήγουμε σὲ ἕνα γράφημα G_t ὅπου $G \subseteq_{\epsilon\nu} G_t$ καὶ $z(G_t) = 0$ (γιὰ τὴν ἀκρίβεια $t = \Delta(G) - \delta(G)$, καθὼς μετὰ ἀπὸ κάθε μετασχηματισμὸ αὐξάνεται κατὰ ἕνα ὁ ἐλάχιστος βαθμὸς στὸ γράφημα ποὺ προκύπτει). Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ G_t εἶναι r-κανονικὸ καὶ ἄρα εἶναι τὸ γράφημα ποὺ ζητᾶμε. □

Παρατήρηση 3.6. Γιὰ κάθε γράφημα G ἰσχύει ὅτι: $\epsilon(G) \geq \frac{\delta(G)}{2}$. Παρ' ὅλα αὐτά, τὸ παρακάτω λῆμμα δείχνει ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ πυκνότητας καὶ ἐλάχιστου βαθμοῦ μπορεῖ νὰ εἶναι αὐθαίρετα μεγάλη.

Λῆμμα 3.7. Γιὰ κάθε ἀκέραιο $\delta \geq 0$ καὶ κάθε $\epsilon \geq 0$, ὑπάρχουν ἀπείρως πολλὰ γραφήματα γιὰ τὰ ὁποία ὁ ἐλάχιστος βαθμὸς εἶναι τὸ πολὺ δ καὶ ἡ πυκνότητα εἶναι τὸ λιγότερο ϵ.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τὸ γράφημα $G_n = K_{\delta+1} + K_{n-\delta-1}$. Παρατηροῦμε ὅτι $\delta(G_n) \leq \delta$ καὶ ὅτι $\epsilon(G_n) = \frac{\binom{\delta+1}{2} + \binom{n-\delta-1}{2}}{n}$. Ἀφοῦ, $\lim_{n\to\infty} \epsilon(G_n) = \infty$ θὰ ὑπάρχουν ἄπειρες τιμὲς τοῦ n γιὰ τὶς ὁποῖες $\epsilon(G_n) \geq \epsilon$. □

3.2 Ἐκφυλισμὸς καὶ πυκνότητα

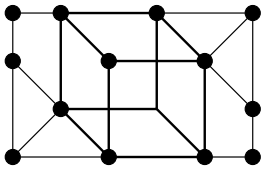
Παρὰ τὸ Λῆμμα 3.7, ἡ πυκνότητα ἑνὸς γραφήματος μπορεῖ νὰ ἐγγυηθεῖ τὴν ὕπαρξη ὑπογραφημάτων μὲ μεγάλο ἐλάχιστο βαθμό. Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸ θὰ χρειαστοῦμε τὸν παρακάτω ὁρισμό.

Ὁρισμός 3.8. Ὁ *ἐκφυλισμὸς* ἑνὸς γραφήματος G ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\delta^*(G) = \max\{k \mid \ G \text{ περιέχει ἕνα ὑπογράφημα } H \text{ μὲ } \delta(H) = k\ \}.$$

Ἡ ἔννοια τοῦ ἐκφυλισμοῦ ἐμφανίστηκε γιὰ πρώτη φορὰ στὶς [75] καὶ [98]. Ὁ ὅρος ἐμφανίστηκε γιὰ πρώτη φορὰ στὴν [65].

Παρατήρηση 3.9. Ἔστω G καὶ H γράφηματα. Τότε $H \subseteq_{υπ} G \Rightarrow \delta^*(H) \leq \delta^*(G)$.



Σχῆμα 3.1: Ἕνα γράφημα G μὲ $\delta^*(G) = 3$.

Λῆμμα 3.10. Γιὰ κάθε γράφημα G μὲ n κορυφές, $\delta^*(\overline{G}) \leq n - 1 - \delta^*(G)$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $A \subseteq V(G)$ ἕνα σύνολο κορυφῶν μὲ $\delta(G[A]) \geq \delta^*(G)$ καὶ $B \subseteq V(G)$ ἕνα σύνολο κορυφῶν μὲ $\delta(\overline{G}[B]) \geq \delta^*(\overline{G})$. Τέτοια σύνολα ὑπάρχουν: ἂν ἕνα ὑπογράφημα ἔχει ἐλάχιστο βαθμὸ k, τότε τὸ ἐναγόμενο ὑπογράφημα τῶν κορυφῶν του ἔχει ἐλάχιστο βαθμὸ τουλάχιστον k, ὁπότε ὁ ἐκφυλισμὸς πραγματοποιεῖται πάντοτε ἀπὸ ἐναγόμενο ὑπογράφημα. Προφανῶς $|A| \geq \delta^*(G) + 1$ καὶ $|B| \geq \delta^*(\overline{G}) + 1$.

Ἂν $A \cap B = \emptyset$, τότε $|A| + |B| \leq n$ καὶ ἄρα $\delta^*(G) + \delta^*(\overline{G}) \leq (|A| - 1) + (|B| - 1) \leq n - 2$, ὁπότε τὸ λῆμμα ἰσχύει. Ἔστω λοιπὸν $v \in A \cap B$. Τὸ σύνολο $N_{G[A]}(v)$ ἔχει τουλάχιστον $\delta^*(G)$ στοιχεῖα καὶ τὸ σύνολο $N_{\overline{G}[B]}(v)$ ἔχει τουλάχιστον $\delta^*(\overline{G})$ στοιχεῖα. Τὰ δύο αὐτὰ σύνολα εἶναι ξένα μεταξύ τους, ἀφοῦ τὸ πρῶτο ἀποτελεῖται ἀπὸ γείτονες τῆς v στὸ G καὶ τὸ δεύτερο ἀπὸ μὴ γείτονές της, καὶ ἀμφότερα περιέχονται στὸ $V(G)\backslash\{v\}$. Συνεπῶς $\delta^*(G) + \delta^*(\overline{G}) \leq n - 1$, ποὺ εἶναι τὸ ζητούμενο. □

Ἐρχόμαστε τώρα στὸ κεντρικὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἑνότητας: ἡ πυκνότητα, ποὺ εἶναι ἕνα καθολικὸ μέγεθος, ἐξασφαλίζει τὴν ὕπαρξη ἑνὸς τοπικὰ πυκνοῦ ὑπογραφήματος.

Θεώρημα 3.11. Κάθε γράφημα G περιέχει κάποιο ὑπογράφημα H ὅπου $\delta(H) \geq \epsilon(G)$.

Ἀπόδειξη. Οὐσιαστικὰ πρέπει νὰ ἀποδείξουμε ὅτι $\delta^*(G) \geq \epsilon(G)$. Ἡ στρατηγικὴ εἶναι ἐπαγωγή: ἀφαιροῦμε μιὰ κορυφὴ μικροῦ βαθμοῦ, ὥστε ἡ πυκνότητα νὰ μὴν πέσει πολύ, καὶ ἐφαρμόζουμε τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση. Θὰ χρησιμοποιήσουμε ἐπαγωγὴ στὸν ἀριθμὸ τῶν κορυφῶν τοῦ G. Προφανῶς, τὸ θεώρημα ἰσχύει ἂν $n(G) =$

1. Ὑποθέτουμε ὅτι ἰσχύει γιὰ κάθε γράφημα μὲ $< n$ κορυφές. Ἔστω γράφημα G μὲ $n(G) = n$. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ $\delta(G)$ ἔχουμε ὅτι $\delta(G) \leq \delta^*(G)$. Ἔστω v κορυφὴ τοῦ G μὲ βαθμὸ $\deg_G(v) \leq \delta^*(G)$ καὶ ἔστω $G' = G - v$. Παρατηροῦμε ὅτι $|E(G')| \geq m(G) - \delta^*(G)$ καὶ $|V(G')| = n(G) - 1$. Συνεπῶς, ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση,

$$\delta^*(G') \geq \epsilon(G') = \frac{|E(G')|}{|V(G')|} \geq \frac{m(G) - \delta^*(G)}{n(G) - 1}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι $G' \subseteq_{\upsilon\pi} G$ καὶ χρησιμοποιώντας τὴν Παρατήρηση 3.9, καταλήγουμε ὅτι

$$\delta^*(G) \geq \frac{m(G) - \delta^*(G)}{n(G) - 1}.$$

Πράγματι, ἡ τελευταία σχέση γράφεται $\delta^*(G) \cdot (n(G) - 1) \geq m(G) - \delta^*(G)$, δηλαδὴ $\delta^*(G) \cdot n(G) \geq m(G)$, δηλαδὴ $\delta^*(G) \geq \epsilon(G)$, ποὺ εἶναι ἀκριβῶς τὸ ζητούμενο. □

Ἡ παραπάνω ἐξάρτηση τοῦ ἐκφυλισμοῦ ἀπὸ τὴν πυκνότητα παρατηρήθηκε γιὰ πρώτη φορὰ ἀπὸ τὸν Erdős στὴν [33].

Πόρισμα 3.12. Γιὰ κάθε γράφημα G ἰσχύει ὅτι: $\delta^*(G) \geq \max\{\epsilon(G), \delta(G)\}$.

Ἀπόδειξη. Τὸ G εἶναι ὑπογράφημα τοῦ ἑαυτοῦ του μὲ ἐλάχιστο βαθμὸ $\delta(G)$, ὁπότε ἀπὸ τὸν Ὁρισμὸ 3.8 ἔχουμε ὅτι $\delta^*(G) \geq \delta(G)$. Ἐπίσης, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 3.11 τὸ G περιέχει ὑπογράφημα H μὲ $\delta(H) \geq \epsilon(G)$, ὁπότε πάλι ἀπὸ τὸν ἴδιο ὁρισμὸ $\delta^*(G) \geq \delta(H) \geq \epsilon(G)$. Συνδυάζοντας τὶς δύο ἀνισότητες παίρνουμε τὸ ζητούμενο. □

Στὴν [34] δόθηκε ἕνας ἐναλλακτικὸς ὁρισμὸς τοῦ ἐκφυλισμοῦ, παίρνοντας τὸ ἐλάχιστο κάποιας μεγιστικῆς παραμέτρου (σὲ ἀντίθεση μὲ τὸν Ὁρισμὸ 3.8 ὅπου παίρνουμε τὸ μέγιστο μίας ἐλαχιστικῆς παραμέτρου). Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς δόθηκε στὰ πλαίσια τοῦ *χρωματισμοῦ* τῶν κορυφῶν τοῦ γραφήματος ποὺ θὰ μελετήσουμε στὸ Κεφάλαιο 8. Στὸ Θεώρημα 3.15 διατυπώνεται ὁ ὁρισμὸς καὶ ἀποδεικνύεται ἡ ἰσοδυναμία του μὲ τὸν Ὁρισμὸ 3.8. Ξεκινᾶμε μὲ τὶς ἀκόλουθες ἔννοιες.

Ὁρισμός 3.13. Ἔστω γράφημα $G = (V, E)$. *Γραμμικὴ διάταξη* τῶν κορυφῶν τοῦ G καλεῖται κάθε ἀκολουθία $(v_1, \ldots, v_n)$, ὅπου $n = |V|$, στὴν ὁποία κάθε κορυφὴ τοῦ V ἐμφανίζεται ἀκριβῶς μία φορά. Τὸ σύνολο τῶν γραμμικῶν διατάξεων τοῦ G τὸ συμβολίζουμε μὲ $\mathcal{L}(G)$.

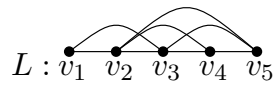
Ὁρισμός 3.14. Ἔστω γράφημα $G = (V, E)$ καὶ $L = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ γραμμικὴ διάταξη τῶν κορυφῶν του, ὅπου $n = |V(G)|$. Ὁ *ὀπισθόβαθμος* τῆς κορυφῆς $v_i \in V$ ὡς πρὸς τὴν L ἰσοῦται μέ:

$$\overleftarrow{\delta}_L(v_i) = \deg_{G[\{v_1,\ldots,v_i\}]}(v_i)$$

εἶναι δηλαδὴ τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν μὲ τὶς ὁποῖες ἡ v_i συνδέεται μὲ ἀκμὴ καὶ βρίσκονται πρὶν ἀπὸ τὴ v_i στὴν L. Θεωροῦμε ἐπίσης τὴν ποσότητα:

$$\overleftarrow{\delta}(L) = \max\{\overleftarrow{\delta}_L(v) \mid v \in V\}$$

τὴν ὁποία καλοῦμε *πλάτος* τῆς γραμμικῆς διάταξης L.



Σχῆμα 3.2: Μία γραμμικὴ διάταξη τῶν κορυφῶν ἑνὸς γραφήματος. Ὁ ὀπισθόβαθμος τῆς v_3 εἶναι 2 ἐνῶ τὸ πλάτος τῆς L εἶναι 3.

Τὸ παρακάτω θεώρημα ἐμφανίστηκε γιὰ πρώτη φορὰ στὴν [76].

Θεώρημα 3.15. Ἔστω γράφημα G μὲ n κορυφές. Ἰσχύει ὅτι:

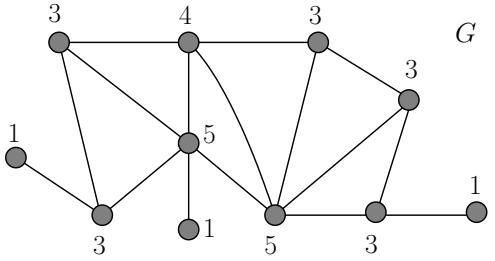
$$\delta^*(G) = \min\{k \mid \text{Ὑπάρχει } L \in \mathcal{L}(G) \text{ μὲ } \overleftarrow{\delta}(L) = k\}.$$

Ἀπόδειξη. Ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι, γιὰ κάθε ἀκέραιο $k \geq 0$, ὑπάρχει $L \in \mathcal{L}(G)$ μὲ $\overleftarrow{\delta}(L) \leq k$ ἂν καὶ μόνο ἂν $\delta^*(G) \leq k$. Ἔστω $L = (v_1, \ldots, v_n)$ διάταξη τῶν κορυφῶν τοῦ G τέτοια ὥστε $\overleftarrow{\delta}(L) \leq k$ καὶ ἔστω, πρὸς ἄτοπο, $H \subseteq_{υπ} G$ τέτοιο ὥστε $\delta(H) > k$. Ἂν v_i εἶναι ἡ τελευταία κορυφὴ τοῦ H στὴ διάταξη L τότε $H \subseteq_{υπ} G_i$, ὅπου $G_i = G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ καί $\deg_{G_i}(v_i) \geq \deg_H(v_i) \geq \delta(H) > k$, ἄτοπο. Ἀντίστροφα, ὑποθέτουμε τώρα ὅτι γιὰ κάθε διάταξη L τῶν κορυφῶν τοῦ G ὑπάρχει μιὰ κορυφὴ v_i γιὰ τὴν ὁποία $\overleftarrow{\delta}_L(v_i) > k$. Καλοῦμε κάθε τέτοια κορυφὴ *πλούσια*. Ἀπὸ ὅλες τὶς διατάξεις τῶν κορυφῶν τοῦ G ἔστω $L_0 = (v_1, \ldots, v_n)$ αὐτὴ γιὰ τὴν ὁποία ἡ τελευταία πλούσια κορυφὴ v_i ἐμφανίζεται τὸ νωρίτερο δυνατόν. Ἰσχυριζόμαστε ὅτι τότε ὅλες οἱ κορυφὲς ποὺ ἐμφανίζονται πρὶν τὴν v_i στὴν L_0 ἔχουν βαθμὸ αὐστηρὰ μεγαλύτερο τοῦ k στὸ γράφημα G_i. Πράγματι ἂν μιὰ κορυφὴ $v_j, j < i$, ἔχει βαθμὸ τὸ πολὺ k στὸ G_i, τότε μποροῦμε νὰ τὴν ἐπανατοποθετήσουμε ἀνάμεσα στὴν v_i καὶ στὴν v_{i+1} καὶ νὰ φτιάξουμε μιὰ νέα διάταξη στὴν ὁποία ἡ τελευταία πλούσια κορυφὴ νὰ ἐμφανίζεται νωρίτερα (καθὼς ἡ v_j στὴν νέα διάταξη δὲν θὰ εἶναι πλούσια), ἄτοπο. Καταλήγουμε ὅτι $\delta(G_i) > k$ καὶ ἄρα $\delta^*(G) > k$. □

3.3 Γραφικὲς ἀκολουθίες

Στὴν ἑνότητα αὐτὴ θὰ ἐξετάσουμε τὴν ἀλληλεξάρτηση τῶν βαθμῶν ἑνὸς γραφήματος. Γιὰ τὸν λόγο αὐτὸ θὰ θεωρήσουμε διατάξεις βαθμῶν σὲ φθίνουσες ἀκολουθίες. Ὅλες οἱ ἀκολουθίες σὲ αὐτὴ τὴν ἑνότητα εἶναι ἀκολουθίες μὴ ἀρνητικῶν ἀκέραιων.

Ὁρισμός 3.16. Καλοῦμε μιὰ ἀκολουθία $\alpha = [d_1, \ldots, d_n]$ *γραφικὴ* ἂν ὑπάρχει γράφημα G καὶ μιὰ 1–1 καὶ ἐπὶ ἀπεικόνιση $\sigma : V(G) \to \{1, \ldots, n\}$ τέτοια ὥστε $\deg_G(v) = d_{\sigma(v)}$. Λέμε ἐπίσης ὅτι ἕνα τέτοιο γράφημα *πραγματοποιεῖ* τὴν ἀκολουθία α.



Σχῆμα 3.3: Ἡ γραφικὴ ἀκολουθία ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ γράφημα G εἶναι ἡ $[5, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1]$.

Θεώρημα 3.17. Μιὰ φθίνουσα ἀκολουθία $\alpha = [d_1, \ldots, d_n]$ μὲ $n \geq 2$ καὶ $1 \leq d_1 \leq n - 1$ εἶναι *γραφικὴ* ἂν καὶ μόνο ἂν ἡ ἀκολουθία

$$\alpha' = [d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n]$$

εἶναι γραφική.

Σημειώνουμε ὅτι ἡ α' δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκη φθίνουσα (π.χ. γιὰ $\alpha = [2, 1, 1, 1, 1]$ παίρνουμε $\alpha' = [0, 0, 1, 1]$)· αὐτὸ δὲν μᾶς ἐνοχλεῖ, ἀφοῦ ὁ ὁρισμὸς τῆς γραφικῆς ἀκολουθίας δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν σειρὰ τῶν ὅρων της. Ἐπίσης, ἡ ὑπόθεση $d_1 \leq n - 1$ δὲν εἶναι περιοριστική: ἂν $d_1 \geq n$, ἡ α δὲν εἶναι γραφική, ἀφοῦ κάθε κορυφὴ γραφήματος μὲ n κορυφὲς ἔχει βαθμὸ τὸ πολὺ $n - 1$.

Ἀπόδειξη. Τὸ τέχνασμα εἶναι νὰ μὴ δουλέψουμε μὲ ἕνα ὁποιοδήποτε γράφημα ποὺ πραγματοποιεῖ τὴν α, ἀλλὰ μὲ ἕνα «βέλτιστο»: ἐκεῖνο στὸ ὁποῖο ἡ γειτονιὰ τῆς κορυφῆς μέγιστου βαθμοῦ εἶναι ὅσο τὸ δυνατὸν «βαρύτερη». Ἡ ἀνταλλαγὴ

δύο ἀκμῶν ποὺ ἀκολουθεῖ ἀφήνει ὅλους τοὺς βαθμοὺς ἀνέπαφους ἀλλὰ αὐξάνει αὐτὸ τὸ βάρος, ὁπότε στὸ βέλτιστο γράφημα δὲν μπορεῖ νὰ ἐφαρμοστεῖ. Ἔστω ὅτι ἡ $\alpha = [d_1, \ldots, d_n]$ εἶναι γραφικὴ ἀκολουθία. Μεταξὺ ὅλων τῶν γραφημάτων ποὺ τὴν πραγματοποιοῦν, ἔστω G μὲ $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ καὶ $\deg_G(v_i) = d_i$, $1 \leq i \leq n$, ἕνα γράφημα γιὰ τὸ ὁποῖο ἡ τιμὴ τῆς συνάρτησης $f(G) = \sum_{v \in N_G(v_1)} \deg(v)$ εἶναι ἡ μέγιστη δυνατή. Ἰσχυριζόμαστε ὅτι ἂν διατάξουμε κατὰ φθίνουσα σειρὰ τοὺς βαθμοὺς τῶν κορυφῶν τῆς γειτονιᾶς τοῦ v_1, παίρνουμε τὴν ἀκολουθία $(d_2, \ldots, d_{d_1+1})$· μὲ ἄλλα λόγια, ἡ v_1 εἶναι γειτονικὴ ἀκριβῶς μὲ τὶς κορυφὲς τῶν d_1 ἀμέσως μεγαλύτερων βαθμῶν. Ὑποθέτουμε ὅτι αὐτὸ δὲν εἶναι σωστὸ καὶ ἄρα ὑπάρχουν κορυφὲς $v_i, v_j \in V(G) \backslash \{v_1\}$ μὲ $d_i > d_j$ τέτοιες ὥστε $\{v_1, v_i\} \notin E(G)$ καὶ $\{v_1, v_j\} \in E(G)$. Ἀφοῦ ἡ v_1 δὲν εἶναι γειτονικὴ τῆς v_i, ἔχουμε ὅτι $|N_G(v_i) \setminus \{v_j\}| \geq d_i - 1 \geq d_j > d_j - 1 = |N_G(v_j) \setminus \{v_1\}|$. Ἄρα ὑπάρχει μιὰ κορυφὴ $v_h \in N_G(v_i) \setminus \{v_j\}$ ποὺ δὲν ἀνήκει στὸ $N_G(v_j)$. Προφανῶς $v_h \notin \{v_1, v_j\}$, $\{v_h, v_i\} \in E(G)$ καὶ $\{v_h, v_j\} \notin E(G)$. Κατασκευάζουμε τώρα τὸ γράφημα G' ἀπὸ τὸ G ἀφαιρώντας τὶς ἀκμὲς $\{v_1, v_j\}$ καὶ $\{v_h, v_i\}$ καὶ προσθέτοντας τὶς ἀκμὲς $\{v_1, v_i\}$ καὶ $\{v_h, v_j\}$. Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ κάθε κορυφὴ $v \in V(G)$, $\deg_G(v) = \deg_{G'}(v)$ καὶ ἄρα τὸ G' εἶναι ἕνα γράφημα ποὺ πραγματοποιεῖ τὴ γραφικὴ ἀκολουθία α καὶ $f(G') > f(G)$ ἀφοῦ $N_{G'}(v_1) = (N_G(v_1) \backslash \{v_j\}) \cup \{v_i\}$ καὶ $d_i > d_j$, ἄτοπο λόγῳ τῆς ἐπιλογῆς τοῦ G. Ἀφοῦ λοιπὸν οἱ βαθμοὶ τῆς γειτονιᾶς τοῦ v_1, διατεταγμένοι κατὰ φθίνουσα σειρά, σχηματίζουν τὴν ἀκολουθία $(d_2, \ldots, d_{d_1+1})$, μποροῦμε (ἐναλλάσσοντας, ἂν χρειαστεῖ, κορυφὲς ἴσου βαθμοῦ) νὰ ὑποθέσουμε ὅτι $N_G(v_1) = \{v_2, \ldots, v_{d_1+1}\}$. Τότε οἱ βαθμοὶ τῶν κορυφῶν $v_2, \ldots, v_n$ στὸ $G - v_1$ εἶναι, μὲ αὐτὴ τὴν σειρά, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας $\alpha' = [d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n]$: οἱ d_1 γείτονες τῆς v_1 χάνουν ἀπὸ ἕναν βαθμό, ἐνῶ οἱ βαθμοὶ τῶν ὑπόλοιπων κορυφῶν παραμένουν ἀναλλοίωτοι. Ἄρα ἡ ἀκολουθία α' πραγματοποιεῖται ἀπὸ τὸ γράφημα $G - v_1$ καὶ ἄρα εἶναι γραφική.

Ἔστω τώρα G' γράφημα ποὺ πραγματοποιεῖ τὴν ἀκολουθία $\alpha' = [d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n]$. Ἔστω S τὸ σύνολο τῶν d_1 κορυφῶν τοῦ G' στὶς ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν οἱ πρῶτοι d_1 ὅροι αὐτῆς τῆς ἀκολουθίας (ὑπάρχουν, ἀφοῦ $d_1 \leq n - 1 = n(G')$). Κατασκευάζουμε τὸ γράφημα G προσθέτοντας μιὰ καινούρια κορυφὴ καὶ συνδέοντάς την μὲ τὶς κορυφὲς τοῦ S. Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ νέο γράφημα G πραγματοποιεῖ τὴν ἀκολουθία $\alpha = [d_1, \ldots, d_n]$. □

Τὸ προηγούμενο κριτήριο ἀνάγεται στοὺς Havel [52] καὶ Hakimi [49].

Μιὰ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη γιὰ τὸ πότε μιὰ ἀκολουθία εἶναι γραφικὴ

ἀποδείχθηκε τὸ 1960 ἀπὸ τοὺς Erdős καὶ Gallai στὴν [30]. Ἀποδεικνύουμε παρακάτω τὴν ἀναγκαιότητα τῶν συνθηκῶν του· ἡ ἱκανότητά τους ἀποδεικνύεται στὴν ἀρχικὴ ἐργασία.

Θεώρημα 3.18 (Erdős καὶ Gallai, 1960)**.** Μιὰ φθίνουσα ἀκολουθία μὴ ἀρνητικῶν ἀκεραίων $(d_1, \dots, d_n)$ εἶναι γραφικὴ ἂν καὶ μόνο ἂν

$$\sum_{i\in[n]} d_i \equiv 0 \pmod 2 \text{ καὶ } \forall r \in [n] \sum_{i=1,\dots,r} d_i \leq r(r-1) + \sum_{i=r+1,\dots,n} \min(r, d_i).$$

Ἀπόδειξη. Ἀποδεικνύουμε τὴν ἀναγκαιότητα τῶν δύο συνθηκῶν· γιὰ τὴν ἱκανότητα, ἡ ὁποία εἶναι σημαντικὰ πιὸ ἀπαιτητική, παραπέμπουμε στὴν ἀρχικὴ ἐργασία [30].

Ἔστω γράφημα G μὲ $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ καὶ $\deg_G(v_i) = d_i$. Ἡ πρώτη συνθήκη εἶναι τὸ λῆμμα τῆς χειραψίας.

Γιὰ τὴ δεύτερη, ἔστω $r \in [n]$ καὶ $R = \{v_1, \dots, v_r\}$. Χωρίζουμε τὶς ἀκμὲς ποὺ προσπίπτουν στὸ R σὲ ἐκεῖνες ποὺ ἔχουν καὶ τὰ δύο ἄκρα τους στὸ R καὶ σὲ ἐκεῖνες ποὺ ἔχουν ἀκριβῶς ἕνα:

$$\sum_{i=1,\dots,r} d_i = 2 \cdot m(G[R]) + |E_R|,$$

ὅπου E_R τὸ σύνολο τῶν ἀκμῶν μὲ ἀκριβῶς ἕνα ἄκρο στὸ R.

Τὸ $G[R]$ ἔχει r κορυφές, ἄρα $m(G[R]) \leq \binom{r}{2}$, δηλαδὴ $2 \cdot m(G[R]) \leq r(r-1)$.

Γιὰ κάθε $i > r$, οἱ ἀκμὲς τοῦ E_R ποὺ προσπίπτουν στὴν v_i εἶναι τὸ πολὺ $\min(r, d_i)$: τὸ πολὺ r ἐπειδὴ τὸ ἄλλο τους ἄκρο ἀνήκει στὸ R, καὶ τὸ πολὺ d_i ἐπειδὴ προσπίπτουν ὅλες στὴν v_i. Ἀθροίζοντας, $|E_R| \leq \sum_{i=r+1,\dots,n} \min(r, d_i)$, καὶ τὸ ζητούμενο ἕπεται. □

Ἀσκήσεις Κεφαλαίου

3.1 (☆☆☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι σὲ κάθε ὁμάδα μὲ τὸ λιγότερο 2 ἄτομα, τουλάχιστον δύο ἀπὸ αὐτὰ ἔχουν τὸν ἴδιο ἀριθμὸ φίλων μέσα στὴν ὁμάδα (θεωροῦμε ὅτι ἡ σχέση φιλίας εἶναι συμμετρική).

3.2 (★★☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι σὲ κάθε ὁμάδα μὲ τὸ λιγότερο 2 ἄτομα, ὑπάρχουν δύο ἄτομα ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιο ἀριθμὸ φίλων μέσα στὴν ὁμάδα καὶ ἐπιπλέον εἶναι φίλοι ἢ ἔχουν κοινὸ φίλο.

3.3 (☆☆☆)**.** Ἕνα γράφημα εἶναι κανονικὸ ἂν καὶ μόνο ἂν $\epsilon(G) = \frac{\delta(G)}{2}$.

3.4 (☆☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι ἂν τὸ γράφημα G εἶναι κανονικὸ τότε καὶ τὸ γράφημα $L(G)$ θὰ εἶναι κανονικό.

3.5 (★☆☆)**.** Ἔστω n θετικὸ ἀκέραιος καὶ ἔστω r, s μὴ ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι γιὰ τοὺς ὁποίους $r + s = n$ καὶ $s \equiv 0 \pmod 2$. Τότε ὑπάρχει γράφημα G μὲ r κορυφὲς ἄρτιου βαθμοῦ καὶ s κορυφὲς περιττοῦ βαθμοῦ.

3.6 (☆☆☆)**.** Κάθε 2-κανονικὸ γράφημα περιέχει κάποιο κύκλο (μὲ ἄλλα λόγια, ἂν τὸ G εἶναι 2-κανονικό, τότε $K_3 \leq_{\epsilon\lambda} G$).

3.7 (★★☆)**.** Κάθε γράφημα G εἶναι ἔλασσον ἑνὸς 3-κανονικοῦ γραφήματος.

3.8 (★☆☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G μὲ n κορυφὲς καὶ m ἀκμές, ἰσχύει ὅτι

$$\delta(G) \geq m - \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2).$$

Ἐπίσης δεῖξτε ὅτι ἡ παραπάνω ἀνισότητα εἶναι βέλτιστη (δηλ. ὑπάρχουν γραφήματα γιὰ τὰ ὁποία ἰσχύει ἡ ἰσότητα).

3.9 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι ἡ ἀφαίρεση μιᾶς ἀκμῆς δὲν μπορεῖ νὰ μειώσει τὸν ἐκφυλισμὸ ἑνὸς γραφήματος πάνω ἀπὸ μιὰ μονάδα.

3.10 (★★☆)**.** Γιὰ $q, r \geq 1$, ὑπολογίστε τὴν τιμὴ τοῦ $\delta^*(\overline{K}_{1,q} * \overline{K}_{1,r})$.

3.11 (★★☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι

$$\delta^*(G) \geq \frac{1}{2}\left(2 \cdot n(G) - 1 - \sqrt{(2 \cdot n(G) - 1)^2 - 8 \cdot m(G)}\right).$$

Ἐπίσης ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ παραπάνω ἀνισότητα εἶναι σφιχτή.

3.12 (★☆☆)**.** Ἂν τὰ G καὶ H εἶναι γραφήματα μὲ $\delta^*(G), \delta^*(H) \geq k$ τότε $\delta^*(G * H) \geq 2k + 1$.

3.13 (★☆☆)**.** Γιὰ κάθε γράφημα G ἰσχύει ὅτι $\delta^*(\overline{G}) \geq \frac{1}{2}(n(G) - 1 - \Delta(G))$.

3.14 (★★★)**.** Βρεῖτε γιὰ ποιὲς τιμὲς τοῦ k τὰ παρακάτω σύνολα εἶναι φραγμένα καὶ γιὰ ποιὲς ὄχι. Στὶς περιπτώσεις ποὺ εἶναι, βρέστε τὰ καλύτερα δυνατὰ ἄνω φράγματα.

$$A = \{\delta^*(G) \mid \text{ τὸ } G \text{ εἶναι ἔλασσον τοῦ } P_n^{[k]} \text{ γιὰ κάποιο } n \geq 1\}$$

$$B = \{\delta^*(G) \mid \text{ τὸ } G \text{ εἶναι τοπολογικὸ ἔλασσον τοῦ } P_n^{[k]} \text{ γιὰ κάποιο } n \geq 1\}$$

3.15 (★☆☆). Δεῖξτε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha = (d_1, \ldots, d_n)$ εἶναι γραφικὴ ἂν καὶ μόνο ἂν ἡ ἀκολουθία $(n - d_1 - 1, n - d_2 - 1, \ldots, n - d_n - 1)$ εἶναι γραφική.

3.16 (★☆☆). Ἂν ἡ ἀκολουθία $\alpha = (d_1, \ldots, d_n)$ πραγματοποιεῖται ἀπὸ τὸ γράφημα G, περιγράψτε τὶς γραφικὲς ἀκολουθίες ποὺ πραγματοποιοῦν τὰ γραφήματα $k \cdot G$, $G^{[k]}$ καὶ $G^{\langle k \rangle}$ γιὰ κάθε $k \geq 0$.

3.17 (★★☆). Γιὰ κάθε γράφημα G, μὲ τουλάχιστον μία ἀκμή, ἂν ὁ μέσος βαθμὸς εἶναι d τότε ὑπάρχει μιὰ κορυφὴ τέτοια ὥστε ὁ μέσος βαθμὸς τῶν γειτόνων της νὰ εἶναι τουλάχιστον d.

3.18 (★☆☆). Ἔστω G γράφημα καὶ v κορυφὴ τοῦ G μὲ βαθμὸ $\leq d(G)/2$. Δεῖξτε ὅτι $d(G - v) \geq d(G)$.

3.19 (★★☆). Δεῖξτε ὅτι ἂν τὸ γράφημα G δὲν περιέχει ὑποδιαίρεση κύκλου μὲ 4 κορυφὲς ὡς ὑπογράφημα, τότε κάθε ὑπογράφημα του περιέχει κορυφὴ βαθμοῦ ≤ 2.

3.20 (★☆☆). Ἔστω r φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ G γράφημα τέτοιο ὥστε τὸ G νὰ εἶναι r-κανονικὸ καὶ τὸ συμπλήρωμά του νὰ εἶναι καὶ αὐτὸ r-κανονικό. Δεῖξτε ὅτι $n(G) = 2r + 1$. Μπορεῖτε νὰ βρεῖτε ἕνα τέτοιο γράφημα γιὰ κάποια τιμὴ τοῦ $r > 0$;

3.21 (★☆☆). Δεῖξτε ὅτι ἂν $n(G) \geq 3$, τότε $m(G) = \dfrac{\sum_{v \in V(G)} m(G - v)}{n(G) - 2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΙ

Ξεκινᾶμε ξεχωρίζοντας τὶς διαδρομὲς ποὺ ἐπιτρέπεται νὰ ἐπαναλαμβάνουν κορυφὲς ἀπὸ ἐκεῖνες ποὺ δὲν τὸ κάνουν. Ἡ διάκριση εἶναι λεπτὴ ἀλλὰ οὐσιώδης σὲ ὅλο τὸ κεφάλαιο.

Ὁρισμός 4.1. Ἔστω G γράφημα. Καλοῦμε *περίπατο* τοῦ G κάθε ἀκολουθία (ἐνδεχομένως ἐπαναλαμβανόμενων) κορυφῶν $W = [v_1, \ldots, v_r]$ ὅπου $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ γιὰ κάθε i, μὲ $1 \leq i < r$. Καλοῦμε ἐπίσης τὴν ἀκολουθία W (v_1, v_r)-*περίπατο* τοῦ G καὶ τὶς κορυφὲς v_1, v_r *ἄκρα* τοῦ W. Τὸ μῆκος τοῦ περιπάτου $W = [v_1, \ldots, v_r]$ εἶναι $r - 1$. Τέλος, ὁρίζουμε

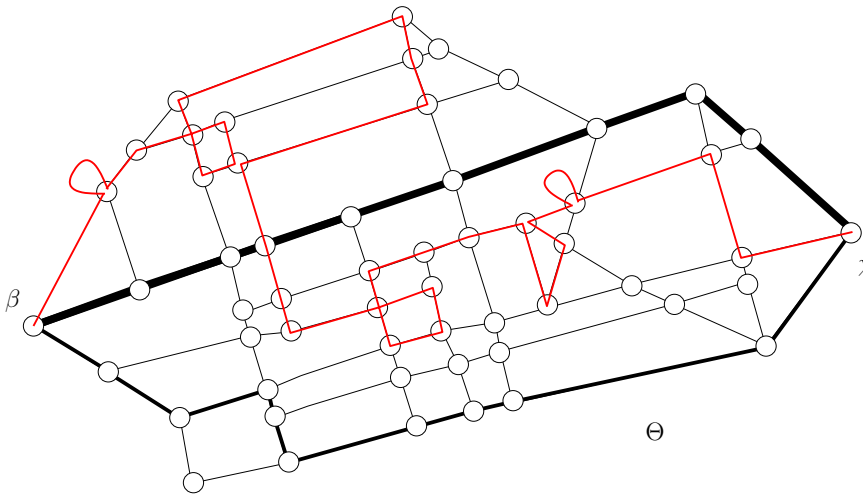
$$G[W] = (\{v_1, \ldots, v_r\}, \{\{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{r-1}, v_r\}\}).$$

Ἂν ἕνας περίπατος ἀρχίζει καὶ τελειώνει μὲ τὴν ἴδια κορυφὴ τότε καλεῖται *περιήγηση* καὶ συμβολίζεται ὡς μιὰ κυκλικὴ διάταξη $W = [v_1, \ldots, v_r, v_1]$ τῶν κορυφῶν τοῦ W.

Παρατήρηση 4.2. Οἱ κορυφὲς κάθε μονοπατιοῦ ὁρίζουν ἕναν περίπατο χωρὶς ἐπαναλαμβανόμενες κορυφές. Ἐπίσης οἱ κορυφὲς κάθε περιπάτου χωρὶς ἐπαναλαμβανόμενες κορυφὲς εἶναι οἱ κορυφὲς ἑνὸς μονοπατιοῦ. Ἕνας κύκλος μήκους n ὁρίζει $2n$ περιηγήσεις (μὲ ταυτιζόμενα ἄκρα) καὶ χωρὶς ἄλλες ἐπαναλήψεις κορυφῶν.

Γιὰ ἐρωτήματα ὕπαρξης διαδρομῆς, πάντως, οἱ δύο ἔννοιες εἶναι ἰσοδύναμες.

Λῆμμα 4.3. Τὸ γράφημα G περιέχει ἕναν (x, y)-περίπατο ἂν καὶ μόνο ἂν περιέχει ὡς ὑπογράφημα ἕνα (x, y)-μονοπάτι.



Σχῆμα 4.1: Ἕνας (β, χ)-περίπατος ἕνα (β, χ)-μονοπάτι καὶ ἕνα συντομότερο (β, χ)-μονοπάτι στὸ γράφημα Θ.

Ἀπόδειξη. Ἡ οὐσία εἶναι ὅτι ἕνας περίπατος ποὺ ξαναπερνάει ἀπὸ κορυφὴ μπορεῖ πάντα νὰ «συντομευθεῖ»: κόβοντας τὸν βρόχο ἀνάμεσα στὶς δύο ἐμφανίσεις της παίρνουμε γνησίως μικρότερο περίπατο μὲ τὰ ἴδια ἄκρα. Τὴν ἰδέα αὐτὴ τὴν ὑλοποιοῦμε θεωρώντας ἕνα ἐλάχιστο ἀντιπαράδειγμα. Ἡ κατεύθυνση ($\Leftarrow$) εἶναι προφανής. Γιὰ νὰ ἀποδείξουμε τὴν κατεύθυνση ($\Rightarrow$) θὰ ἀποδείξουμε τὴν ἑξῆς ἰσχυρότερη πρόταση: *Γιὰ κάθε $x, y \in V(G)$ ἂν τὸ γράφημα G περιέχει ἕναν (x, y)-περίπατο W τότε θὰ περιέχει ἕνα (x, y)-μονοπάτι μὲ κορυφὲς τοῦ W.* Ἔστω $W = [v_1, \ldots, v_r]$ ἕνας περίπατος ἐλαχίστου μήκους σὲ κάποιο γράφημα G μὲ $v_1 = x$ καὶ $v_r = y$ γιὰ τὸν ὁποῖο τὸ λῆμμα δὲν ἰσχύει. Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι ἡ κορυφὴ y ἐμφανίζεται μόνο μιὰ φορὰ στὸ W. Πράγματι, ἂν αὐτὸ δὲν ἰσχύει, ἀπὸ τὶς κορυφὲς τοῦ W ποὺ εἶναι ἴδιες μὲ τὴν y ἐπιλέγουμε αὐτὴ μὲ τὸν μικρότερο δείκτη i καὶ θεωροῦμε τὸν περίπατο $W' = [v_1, \ldots, v_i]$ ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος σὲ μῆκος ἀπὸ τὸν W καὶ ἄρα περιέχει ἕνα (x, y)-μονοπάτι μὲ κορυφὲς τοῦ W, ἄτοπο. Ἐπίσης $r \geq 2$, ἀφοῦ γιὰ $r = 1$ ὁ ἴδιος ὁ W εἶναι μονοπάτι. Θεωροῦμε στὴ συνέχεια τὸν περίπατο $W^* = [v_1, \ldots, v_{r-1}]$. Ἀφοῦ τὸ μῆκος τοῦ W^* εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ W, θὰ ὑπάρχει στὸ G ἕνα (v_1, v_{r-1})-μονοπάτι P μὲ κορυφὲς ἀπὸ τὸ W^*. Ἀφοῦ, ἀπὸ τὴν προηγούμενη παρατήρηση, οἱ κορυφὲς αὐτὲς εἶναι διαφορετικὲς ἀπὸ τὴν v_r μποροῦμε νὰ προσθέσουμε στὸ μονοπάτι P τὴν ἀκμὴ $\{v_{r-1}, v_r\}$ καὶ νὰ κατασκευάσουμε ἕνα (x, y)-μονοπάτι μὲ κορυφὲς τοῦ W, ἄτοπο. □

Θεώρημα 4.4. Ἔστω G γράφημα ὅπου $V(G) = [n]$ καὶ ἔστω $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[n]^2}$ ὁ πίνακας ἀναπαράστασης τοῦ G ὅπου ἡ κορυφὴ i ἀντιστοιχεῖ στὴν στήλη i καὶ στὴν γραμμὴ i, $i \in [n]$. Τότε γιὰ κάθε ἀκέραιο $r \geq 1$ ἡ τιμὴ $a^r_{i,j}$ τοῦ πίνακα $A^r = [a^r_{i,j}]_{(i,j)\in[n]^2}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν διαφορετικῶν περιπάτων μήκους r ποὺ συνδέουν τὶς κορυφὲς i καὶ j στὸ G.

Ἀπόδειξη. Ἡ οὐσία εἶναι ὅτι ἕνας περίπατος μήκους r ἀναλύεται μονοσήμαντα σὲ ἕναν περίπατο μήκους $r-1$ ἀκολουθούμενο ἀπὸ μία ἀκμή. Αὐτὴ ἀκριβῶς ἡ ἀνάλυση εἶναι ποὺ ἐκτελεῖ ὁ πολλαπλασιασμὸς πινάκων, καὶ γι' αὐτὸ ἡ ἐπαγωγὴ δουλεύει. Θὰ χρησιμοποιήσουμε ἐπαγωγὴ ὡς πρὸς τὸ r. Τὸ θεώρημα προκύπτει ἄμεσα ἂν $r = 1$ γιατὶ ὑπάρχει ἕνας περίπατος μήκους 1 (ἀκμή) μὲ ἄκρα δύο κορυφὲς v_i, v_j ἂν καὶ μόνο ἂν ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ πίνακα $A^1 = A$ εἶναι 1. Ἔστω $A^{r-1} = [a^{r-1}_{i,j}]_{(i,j)\in[n]^2}$ καὶ ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχουν $a^{r-1}_{i,j}$ διαφορετικοὶ περίπατοι μήκους $r-1$ μεταξὺ τοῦ v_i καὶ τοῦ v_j. Ἀφοῦ $A^r = A^{r-1}A$, ἔχουμε ὅτι

$$a^r_{i,j} = \sum_{h\in[n]} a^{r-1}_{i,h} a_{h,j}$$

Κάθε περίπατος μήκους r μεταξὺ τῶν v_i καὶ v_j ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕναν περίπατο μεταξὺ τῶν v_i καὶ v_h μήκους $r-1$ καὶ καταλήγει στὴν κορυφὴ v_j ἡ ὁποία εἶναι προφανῶς συνδεδεμένη μὲ τὴν v_h. Ἄρα τὸ ζητούμενο προκύπτει ἀπὸ τὴν παραπάνω σχέση καὶ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση. □

Ὡς παράδειγμα τοῦ Θεωρήματος 4.4, ὁ πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ εἶναι ὁ πίνακας ἀναπαράστασης τοῦ C_5. Κατὰ συνέπεια οἱ πίνακες

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ καὶ } A^4 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

ἀναπαριστοῦν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν περιπάτων μήκους 2, 3 καὶ 4 στὸ C_5.

4.1 Διάμετρος καὶ ἀκτῖνα

Ἡ ὕπαρξη μονοπατιῶν ἐπιτρέπει νὰ μετρήσουμε πόσο «μακριά» βρίσκονται δύο κορυφές. Ἀπὸ τὴν μέτρηση αὐτὴ προκύπτει μιὰ σειρὰ μεγεθῶν ποὺ περιγράφουν συνολικὰ τὸ σχῆμα ἑνὸς γραφήματος.

Ὁρισμός 4.5. Ἔστω x, y δύο κορυφὲς ἑνὸς γραφήματος G. Ἡ *ἀπόσταση* $\textbf{ἀπόσταση}_G(x, y)$ *μεταξὺ τῆς* x *καὶ τῆς* y στὸ G ὁρίζεται ὡς τὸ μῆκος τοῦ μικρότερου (συντομότερου) (x, y)-μονοπατιοῦ στὸ G. Ἂν τέτοιο μονοπάτι δὲν ὑπάρχει, λέμε ὅτι $\textbf{ἀπόσταση}_G(x, y) = \infty$. Ἡ *ἐκκεντρότητα* μιᾶς κορυφῆς στὸ γράφημα G ὁρίζεται ὡς

$$\textbf{ἐκκεντρότητα}_G(x) = \max_{y \in V(G)} \textbf{ἀπόσταση}_G(x, y).$$

Ἡ *διάμετρος* ἑνὸς γραφήματος ὁρίζεται ὡς

$$\textbf{διάμετρος}(G) = \max_{x \in V(G)} \textbf{ἐκκεντρότητα}_G(x).$$

Καλοῦμε δύο κορυφὲς x, y *ἀντιδιαμετρικές* ἂν $\textbf{ἀπόσταση}_G(x, y) = \textbf{διάμετρος}(G)$. Ἡ *ἀκτῖνα* ἑνὸς γραφήματος ὁρίζεται ὡς

$$\textbf{ἀκτῖνα}(G) = \min_{x \in V(G)} \textbf{ἐκκεντρότητα}_G(x).$$

Ἂν γιὰ κάποια κορυφὴ $x \in V(G)$, $\textbf{ἐκκεντρότητα}_G(x) = \textbf{ἀκτῖνα}(G)$ τότε καλοῦμε τὴν κορυφὴ x *κεντρικὴ κορυφὴ* τοῦ G καὶ συμβολίζουμε τὸ σύνολο τῶν κεντρικῶν κορυφῶν τοῦ G μὲ $\textbf{κέντρο}(G)$. Ἂν γιὰ κάποια κορυφὴ $x \in V(G)$, $\textbf{ἐκκεντρότητα}_G(x) = \textbf{διάμετρος}(G)$ τότε καλοῦμε τὴν κορυφὴ x *ἀπόκεντρη κορυφή*. Συμβολίζουμε τὸ σύνολο τῶν ἀπόκεντρων κορυφῶν τοῦ G μὲ $\textbf{ἀπόκεντρο}(G)$.

Ἡ ἑπόμενη παρατήρηση προκύπτει ἄμεσα ἀπὸ τοὺς ὁρισμούς.

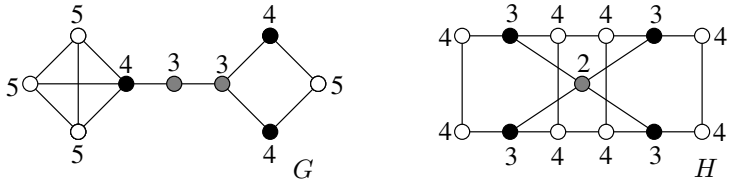
Παρατήρηση 4.6. Κάθε μὴ-κενὸ γράφημα G ἔχει τουλάχιστον μιὰ κεντρικὴ κορυφή. Ἂν $n(G) \geq 2$ τότε τὸ G περιέχει τουλάχιστον ἕνα ζεῦγος ἀντιδιαμετρικῶν κορυφῶν. Ἐπίσης ἂν οἱ κορυφὲς x καὶ y ἑνὸς γραφήματος εἶναι ἀντιδιαμετρικές, τότε θὰ εἶναι καὶ ἀπόκεντρες.

Παρατήρηση 4.7. Κάθε κορυφὴ τοῦ $K_k, k \geq 1$ εἶναι κεντρικὴ ἀλλὰ καὶ ἀπόκεντρη. Τὸ ἴδιο ἰσχύει γιὰ τὸ γράφημα $K_{p,q}, p, q \geq 2$ (ἀλλὰ ὄχι ἂν ἀκριβῶς ἕνα ἀπὸ τὰ p καὶ q εἶναι ἴσο μὲ 1). Ὁμοίως, γιὰ τὸ γράφημα Q_3 καὶ τὸ γράφημα τοῦ Petersen.

Παρατήρηση 4.8. Γιὰ κάθε γράφημα G, τὸ σύνολο $V(G)$, ἐφοδιασμένο μὲ τὴν συνάρτηση $\textbf{ἀπόσταση}_G$ εἶναι μετρικὸς χῶρος. Πράγματι οἱ παρακάτω ἰδιότητες ἰσχύουν:

- $\forall_{x,y \in V(G)} \textbf{ἀπόσταση}_G(x,y) \geq 0$ καὶ $\textbf{ἀπόσταση}_G(x,y) = 0$ ἂν καὶ μόνο ἂν $x = y$.
- $\forall_{x,y \in V(G)} \textbf{ἀπόσταση}_G(x,y) = \textbf{ἀπόσταση}_G(y,x)$, (συμμετρικὴ ἰδιότητα).
- $\forall_{x,y,z \in V(G)} \textbf{ἀπόσταση}_G(x,y) + \textbf{ἀπόσταση}_G(y,z) \geq \textbf{ἀπόσταση}_G(x,z)$ (τριγωνικὴ ἀνισότητα).

Θεώρημα 4.9. Γιὰ κάθε γράφημα G ποὺ δὲν περιέχει κορυφὲς μὲ ἀπόσταση ∞ ἰσχύει ὅτι $\textbf{ἀκτῖνα}(G) \leq \textbf{διάμετρος}(G) \leq 2 \cdot \textbf{ἀκτῖνα}(G)$.



Σχῆμα 4.2: Δύο γραφήματα G καὶ H. Ὁ ἀριθμὸς ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ κάθε κορυφὴ εἶναι ἡ ἐκκεντρότητά της. Οἱ κεντρικὲς κορυφὲς εἶναι οἱ γκρι κορυφὲς καὶ οἱ ἀπόκεντρες εἶναι οἱ ἄσπρες κορυφές.

Ἀπόδειξη. Ἡ πρώτη ἀνισότητα προκύπτει ἄμεσα ἀπὸ τοὺς ὁρισμούς: τὸ ἐλάχιστο μιᾶς συνάρτησης δὲν ὑπερβαίνει ποτὲ τὸ μέγιστό της. Γιὰ τὴν δεύτερη ἀνισότητα, ἔστω x, y ἀντιδιαμετρικὲς κορυφὲς τοῦ G καὶ ἔστω v κεντρικὴ κορυφὴ τοῦ G. Ἰσχύει ὅτι

$$\textbf{ἀπόσταση}_G(x,v) \leq \textbf{ἐκκεντρότητα}_G(v)$$
$$\textbf{ἀπόσταση}_G(v,y) \leq \textbf{ἐκκεντρότητα}_G(v)$$

καὶ ἀπὸ τὴν τριγωνικὴ ἀνισότητα ἔχουμε ὅτι

$$\begin{aligned} \textbf{διάμετρος}(G) &= \textbf{ἀπόσταση}_G(x,y) \\ &\leq \textbf{ἀπόσταση}_G(x,v) + \textbf{ἀπόσταση}_G(v,y) \\ &\leq 2 \cdot \textbf{ἐκκεντρότητα}_G(v) \\ &= 2 \cdot \textbf{ἀκτῖνα}(G). \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 4.10. Οἱ ἀνισότητες τοῦ Θεωρήματος 4.9 εἶναι βέλτιστες γιὰ ἄπειρο πλῆθος γραφημάτων. Πράγματι, $\textbf{ἀκτῖνα}(C_r) = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor = \textbf{διάμετρος}(C_r)$ γιὰ $r \geq 3$ καὶ $2 \cdot \textbf{ἀκτῖνα}(P_{2r+1}) = 2r = \textbf{διάμετρος}(P_{2r+1})$ γιὰ $r \geq 1$. Ἐπίσης, $\textbf{ἀπόκεντρο}(C_r) = \textbf{κέντρο}(C_r) = V(C_r)$ γιὰ $r \geq 3$ ἐνῶ $P_{r+1}[\textbf{ἀπόκεντρο}(P_{r+1})] \simeq 2 \cdot K_1$ γιὰ $r \geq 2$, $P_{2r+2}[\textbf{κέντρο}(P_{2r+2})] \simeq K_2$ καὶ $|\textbf{κέντρο}(P_{2r+1})| = 1$ γιὰ $r \geq 1$.

Τὸ παρακάτω θεώρημα ξεκαθαρίζει τὴν σχέση κέντρου καὶ ἀπόκεντρου γιὰ τὰ γραφήματα.

Θεώρημα 4.11. Γιὰ κάθε γράφημα G, εἴτε $\textbf{κέντρο}(G) = \textbf{ἀπόκεντρο}(G) = V(G)$ εἴτε τὰ σύνολα τῶν κεντρικῶν καὶ ἀπόκεντρων κορυφῶν δὲν περιέχουν κοινὰ στοιχεῖα.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι τὸ G περιέχει μιὰ κορυφὴ x ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἀπόκεντρη καὶ κεντρική. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι $\textbf{ἀκτῖνα}(G) = \textbf{ἐκκεντρότητα}_G(x) = \textbf{διάμετρος}(G)$. Ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς ἔχουμε ὅτι γιὰ κάθε κορυφὴ $v \in V(G)$

$$\textbf{ἀκτῖνα}(G) \leq \textbf{ἐκκεντρότητα}_G(v) \leq \textbf{διάμετρος}(G)$$

καὶ ἄρα $\textbf{ἐκκεντρότητα}_G(v) = \textbf{ἀκτῖνα}(G) = \textbf{διάμετρος}(G)$, συνεπῶς $\textbf{κέντρο}(G) = \textbf{ἀπόκεντρο}(G) = V(G)$. □

Τὸ παρακάτω λῆμμα θὰ μᾶς εἶναι χρήσιμο στὴν ἑπόμενη ἑνότητα.

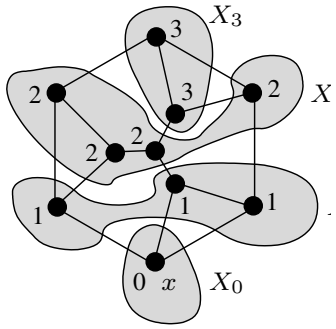
Λῆμμα 4.12. Ἔστω G γράφημα μὲ $\Delta(G) \leq d$. Τότε γιὰ κάθε κορυφὴ $v \in V(G)$ μὲ βαθμὸ q ὑπάρχουν τὸ πολὺ $q \cdot (d-1)^{l-1}$ μονοπάτια μήκους $l \geq 1$ μὲ ἕνα ἄκρο τὴν v.

Ἀπόδειξη. Μετρᾶμε τὰ μονοπάτια «κατὰ στρώματα»: κάθε μονοπάτι μήκους $i+1$ προκύπτει ἐπεκτείνοντας ἕνα μονοπάτι μήκους i, καὶ κάθε τέτοια ἐπέκταση ἔχει τὸ πολὺ $d-1$ ἐπιλογές, ἀφοῦ ἡ ἀκμὴ ἀπὸ τὴν ὁποία ἤρθαμε ἀποκλείεται. Γιὰ $i = 1, \ldots, l$, ἔστω $\mathcal{P}_v^i$ τὸ σύνολο τῶν μονοπατιῶν μήκους i μὲ τὸ ἕνα ἄκρο στὴν v. Σὲ κάθε μονοπάτι P στὸ ὁποῖο θὰ ἀναφερόμαστε θὰ ὀνομάζουμε τὸ ἄκρο του ποὺ εἶναι διαφορετικὸ τῆς v *τέλος* του καὶ θὰ τὸ συμβολίζουμε μὲ $\tau(P)$. Προφανῶς $|\mathcal{P}_v^1| = q$. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι γιὰ κάθε $i, 1 \leq i \leq l-1$, κάθε μονοπάτι $P' \in \mathcal{P}_v^{i+1}$ προκύπτει μὲ μοναδικὸ τρόπο ἀπὸ ἕνα μονοπάτι $P \in \mathcal{P}_v^i$, τὸ ἀρχικό του τμῆμα μὲ i ἀκμὲς ἀπὸ τὴν v, ἂν προσθέσουμε μιὰ ἀκμὴ ἀπὸ τὸ $\tau(P)$ πρὸς μιὰ γειτονική του κορυφὴ ποὺ δὲν ἀνήκει στὸ P. Μία ἀπὸ τὶς γειτονικὲς κορυφὲς τοῦ $\tau(P)$ εἶναι ἡ προηγούμενη κορυφή του στὸ P, ὁπότε κάθε $P \in \mathcal{P}_v^i$ ἐπεκτείνεται

μὲ τὸ πολὺ $\deg_G(\tau(P)) - 1$ τρόπους σὲ μονοπάτι τοῦ $\mathcal{P}_v^{i+1}$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι $|\mathcal{P}_v^{i+1}| \leq \sum_{P \in \mathcal{P}_v^i} (\deg_G(\tau(P)) - 1) \leq |\mathcal{P}_v^i| \cdot (d-1)$, γιὰ κάθε $i, 1 \leq i \leq l-1$. Ἡ τελευταία σχέση μᾶς δίνει ὅτι $|\mathcal{P}_v^l| \leq |\mathcal{P}_v^1| \cdot (d-1)^{l-1}$ ἀπὸ ὅπου προκύπτει τὸ ζητούμενο. □

4.2 Ἀποσυνθέσεις ἀπόστασης

Ὁρισμός 4.13. Ἔστω συνεκτικὸ γράφημα G, δηλαδὴ γράφημα στὸ ὁποῖο κάθε δύο κορυφὲς βρίσκονται σὲ πεπερασμένη ἀπόσταση (ἡ ἔννοια μελετᾶται ἀναλυτικὰ στὸ ἑπόμενο κεφάλαιο), καὶ ἔστω κορυφὴ τοῦ $v \in V(G)$. Καλοῦμε *ἀποσύνθεση ἀπόστασης τοῦ G ὡς πρὸς τὴν v* τὴν ἀκολουθία ἀνὰ δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων $\mathcal{A} = [X_0, \ldots, X_r]$ ὅπου $r = \textbf{ἐκκεντρότητα}_G(v)$, $X_0 = \{v\}$, καὶ $X_{i+1} = N_G(X_i) \setminus \bigcup_{j=0,\ldots,i} X_j$ γιὰ κάθε $i = 0, \ldots, r-1$.



Σχῆμα 4.3: Παράδειγμα ἀποσύνθεσης ἀπόστασης ὡς πρὸς τὴν κορυφὴ x.

Παρατήρηση 4.14. Ἂν $\mathcal{A} = [X_0, \ldots, X_r]$ εἶναι ἡ ἀποσύνθεση ἀπόστασης τοῦ G ὡς πρὸς μιὰ κορυφὴ τοῦ v, τότε $\bigcup_{i=0,\ldots,r} X_i = V(G)$.

Λῆμμα 4.15. Ἔστω συνεκτικὸ γράφημα G καὶ ἔστω $\mathcal{A} = [X_0, \ldots, X_r]$ ἡ ἀποσύνθεση ἀπόστασης τοῦ G ὡς πρὸς κάποια κορυφὴ τοῦ v. Τότε γιὰ κάθε $i, j, 0 \leq i \leq j \leq r$ καὶ κάθε ζεῦγος κορυφῶν x, y μὲ $x \in X_i$ καὶ $y \in X_j$, κάθε μονοπάτι P ποὺ συνδέει τὶς x καὶ y θὰ τέμνει ὅλα τὰ σύνολα $X_i, \ldots, X_j$.

Ἀπόδειξη. Τὸ κλειδὶ εἶναι ὅτι, κινούμενοι κατὰ μῆκος μιᾶς ἀκμῆς, ὁ δείκτης τοῦ στρώματος μεταβάλλεται τὸ πολὺ κατὰ ἕνα· μιὰ τέτοια ἀκολουθία δὲν μπορεῖ νὰ «πηδήξει» πάνω ἀπὸ ἐνδιάμεσες τιμές. Ἀφοῦ κάθε κορυφὴ τοῦ P ἀνήκει σὲ ἕνα καὶ μόνο σύνολο X_i, τὸ μονοπάτι P ἀντιστοιχεῖ σὲ μιὰ ἀκολουθία $[a_1, \ldots, a_q]$ ἀριθμῶν

στὸ $\{0,\dots,r\}$ ὅπου $a_1 = i$ καὶ $a_q = j$. Παρατηροῦμε ὅτι ἂν $a_h, a_{h+1}, 1 \leq h < q$ εἶναι δύο διαδοχικοὶ ὅροι αὐτῆς τῆς ἀκολουθίας, τότε $|a_h - a_{h+1}| \leq 1$, καὶ αὐτὸ γιατί, ἀπὸ τὴν κατασκευὴ τῆς $\mathcal{A}$, μιὰ κορυφὴ ποὺ ἀνήκει σὲ κάποιο σύνολο X_i ἔχει ὅλες τὶς γειτονικές της κορυφὲς στὸ $X_{i-1} \cup X_i \cup X_{i+1}$. Τὸ λῆμμα προκύπτει ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι μιὰ τέτοια ἀκολουθία θὰ περιέχει ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς στὸ σύνολο $\{i,\dots,j\}$. □

Τὸ ἑπόμενο θεώρημα δικαιολογεῖ τὸ ὄνομα τῆς ἀποσύνθεσης.

Θεώρημα 4.16. Ἔστω συνεκτικὸ γράφημα G καὶ ἔστω $\mathcal{A} = [X_0,\dots,X_r]$ ἡ ἀποσύνθεση ἀπόστασης τοῦ G ὡς πρὸς κάποια κορυφὴ τοῦ v. Τότε γιὰ κάθε $i = 0,\dots,r$, τὸ σύνολο X_i περιέχει ἀκριβῶς τὶς κορυφὲς τοῦ G ποὺ βρίσκονται σὲ ἀπόσταση i ἀπὸ τὸ v.

Ἀπόδειξη. Ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξουμε ὅτι γιὰ κάθε i, $u \in X_i \Leftrightarrow$ **ἀπόσταση**$_G(v,u) = i$. Θὰ δείξουμε πρῶτα τὴν κατεύθυνση ($\Rightarrow$) χρησιμοποιώντας ἐπαγωγὴ ὡς πρὸς i. Προφανῶς ὁ ἰσχυρισμὸς εἶναι σωστὸς ὅταν $i = 0$. Ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι σωστὸς γιὰ κάθε $i \leq j$ καὶ θὰ ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει καὶ γιὰ $i = j+1$. Ἔστω $u \in X_{j+1}$. Ἀπὸ τὴν κατασκευὴ τοῦ X_{j+1} ἡ κορυφὴ u ἔχει κάποια γειτονικὴ κορυφὴ u' στὸ X_j. Ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση, ὑπάρχει μονοπάτι μήκους j ποὺ νὰ συνδέει τὶς v καὶ u', ἄρα ὑπάρχει καὶ μονοπάτι P στὸ G ποὺ νὰ συνδέει τὴν v μὲ τὴν u καὶ μὲ μῆκος $j+1$. Μένει νὰ δείξουμε ὅτι δὲν ὑπάρχει συντομότερο. Ἔστω, πρὸς ἄτοπο, P' μονοπάτι τοῦ G μὲ ἄκρα τὶς v καὶ u καὶ μῆκος $\leq j$. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 4.15, τὸ P' τέμνει καθένα ἀπὸ τὰ $j+2$ σύνολα $X_0,\dots,X_{j+1}$, τὰ ὁποία εἶναι ἀνὰ δύο ξένα· ἄρα τὸ P' ἔχει τουλάχιστον $j+2$ κορυφές, δηλαδὴ μῆκος τουλάχιστον $j+1$, ἄτοπο. Γιὰ νὰ ἀποδείξουμε τὴν κατεύθυνση ($\Leftarrow$) παρατηροῦμε ὅτι ἂν **ἀπόσταση**$_G(v,u) = i$, τότε ἀπὸ τὴν κατεύθυνση ($\Rightarrow$) ἔχουμε ὅτι $u \notin X_h, h \in \{0,\dots,i-1,i+1,\dots,r\}$. Ἀφοῦ ὅμως ἡ $\mathcal{A} = [X_0,\dots,X_r]$ εἶναι μιὰ διαμέριση τοῦ συνόλου $V(G)$, ἔχουμε ὅτι $u \in V(G) \setminus \bigcup_{h\in\{0,\dots,i-1,i+1,\dots,r\}} X_h = X_i$. □

Συνδυάζοντας τὰ δύο προηγούμενα, φράσσουμε τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν ποὺ «βλέπει» κανεὶς μέσα σὲ δεδομένη ἀκτῖνα. Πρόκειται γιὰ τὴν κλασικὴ ἐκτίμηση ποὺ εἶναι γνωστὴ ὡς φράγμα Moore [56].

Λῆμμα 4.17. Ἔστω $d \geq 3$ καὶ ἔστω G γράφημα μὲ $\Delta(G) \leq d$. Τότε γιὰ κάθε κορυφὴ $v \in V(G)$ καὶ κάθε $l \geq 1$ ὑπάρχουν τὸ πολὺ $1 + \frac{d}{d-2}((d-1)^l - 1)$ κορυφὲς τοῦ G σὲ ἀπόσταση $\leq l$ ἀπὸ τὴν v.

Ἀπόδειξη. Φράσσουμε πρῶτα τὸ μέγεθος κάθε στρώματος χωριστὰ καὶ μετὰ ἀθροίζουμε μιὰ γεωμετρικὴ σειρά. Ἔστω H τὸ ὑπογράφημα τοῦ G ποὺ ἐνάγουν οἱ κορυφὲς ποὺ βρίσκονται σὲ πεπερασμένη ἀπόσταση ἀπὸ τὴν v. Τὸ H εἶναι συνεκτικό, $\Delta(H) \leq d$, καὶ κάθε μονοπάτι τοῦ G μὲ ἄκρο τὴν v περιέχεται στὸ H, ὁπότε οἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὴν v εἶναι ἴδιες στὸ H καὶ στὸ G. Ἔστω $\mathcal{A} = [X_0, \ldots, X_r]$ ἡ ἀποσύνθεση ἀπόστασης τοῦ H ὡς πρὸς τὴν v, καὶ θέτουμε $X_i = \emptyset$ γιὰ $i > r$. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 4.16, ἔχουμε ὅτι τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν τοῦ G σὲ ἀπόσταση i ἀπὸ τὴν v εἶναι ἀκριβῶς $|X_i|$ καὶ ἄρα ὑπάρχουν τουλάχιστον $|X_i|$ μονοπάτια μήκους i στὸ G μὲ τὸ ἕνα ἄκρο στὴν v καὶ τὸ ἄλλο ἄκρο στὸ X_i. Ἄρα τὸ Λῆμμα 4.12 μᾶς δίνει ὅτι $|X_i| \leq d \cdot (d-1)^{i-1}$, γιὰ $i \geq 1$. Πάλι ἀπὸ τὸ Θεώρημα 4.16, τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν τοῦ G σὲ ἀπόσταση $\leq l$ ἀπὸ τὴν v εἶναι ἀκριβῶς $\sum_{i=0,\ldots,l} |X_i|$. Ἀθροίζοντας, ἔχουμε ὅτι

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0,\ldots,l} |X_i| &\leq 1 + d + d(d-1) + \cdots + d(d-1)^{l-1} \\
&= 1 + d(\sum_{i=0,\ldots,l-1} (d-1)^i) \\
&= 1 + \frac{d}{d-2}((d-1)^l - 1)
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 4.18. Γιὰ κάθε γράφημα G μὲ **ἀκτῖνα**$(G) \leq \alpha$ καὶ $\Delta(G) \leq d$ $(d \geq 3)$ ἰσχύει ὅτι

$$n(G) \leq 1 + \frac{d}{d-2}((d-1)^\alpha - 1).$$

Ἀπόδειξη. Ἂν $\alpha = 0$, τὸ G ἔχει μία μόνο κορυφὴ καὶ τὸ ζητούμενο ἰσχύει. Διαφορετικά, τὸ θεώρημα προκύπτει ἐφαρμόζοντας τὸ Λῆμμα 4.17 μὲ v μιὰ ὁποιαδήποτε κεντρικὴ κορυφὴ καὶ θέτοντας $l = \alpha$, παρατηρώντας ὅτι ὅλες οἱ κορυφὲς τοῦ G βρίσκονται σὲ ἀπόσταση $\leq$ **ἀκτῖνα**$(G) \leq \alpha$ ἀπὸ τὴν v. □

Πόρισμα 4.19. Γιὰ κάθε γράφημα G μὲ **διάμετρος**$(G) \leq \beta$ καὶ $\Delta(G) \leq d$ $(d \geq 3)$ ἰσχύει ὅτι

$$n(G) \leq 1 + \frac{d}{d-2}((d-1)^\beta - 1).$$

Ἀπόδειξη. Ἡ ἀκτῖνα ἑνὸς γραφήματος δὲν ὑπερβαίνει ποτὲ τὴ διάμετρό του, ἀφοῦ ἡ ἀκτῖνα εἶναι τὸ ἐλάχιστο καὶ ἡ διάμετρος τὸ μέγιστο τῶν ἐκκεντροτήτων τῶν κορυφῶν του. Ἄρα **ἀκτῖνα**$(G) \leq$ **διάμετρος**$(G) \leq \beta$ καὶ τὸ ζητούμενο προκύπτει

ἀπὸ τὸ Θεώρημα 4.18 μὲ $\alpha = \textbf{ἀκτῖνα}(G)$, ἀφοῦ γιὰ $d \geq 3$ ἡ συνάρτηση $x \mapsto 1 + \frac{d}{d-2}((d-1)^x - 1)$ εἶναι αὔξουσα. □

Ὁρισμός 4.20. Ἂν $\mathcal{A} = [X_0, \ldots, X_r]$ εἶναι ἡ ἀποσύνθεση ἀπόστασης τοῦ G ὡς πρὸς μιὰ κορυφὴ τοῦ v, τότε καλοῦμε τὴν ποσότητα $\max\{|X_i| \mid 0 \leq i \leq r\}$ *πλάτος ἀπόστασης τοῦ G ὡς πρὸς τὴν κορυφὴ v (ἢ v-πλάτος ἀπόστασης)*. Τὸ ἐλάχιστο v-πλάτος ἀπόστασης ὡς πρὸς ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ G καλεῖται *πλάτος ἀπόστασης* τοῦ G καὶ τὸ συμβολίζουμε μὲ $\textbf{πα}(G)$.

Τὸ παρακάτω θεώρημα μᾶς λέει ὅτι σὲ γραφήματα μὲ μικρὴ διάμετρο, κάθε ἀποσύνθεση ἀπόστασης θὰ περιέχει κάποιο μεγάλο σὲ πλῆθος σύνολο.

Θεώρημα 4.21. Γιὰ κάθε συνεκτικὸ γράφημα G μὲ τουλάχιστον δύο κορυφές, ἰσχύει ὅτι $\textbf{πα}(G) \geq \frac{n(G)-1}{\textbf{διάμετρος}(G)}$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω v μιὰ κορυφὴ τοῦ G γιὰ τὴν ὁποία τὸ πλάτος ἀπόστασης τοῦ G εἶναι ἴσο μὲ τὸ πλάτος ἀπόστασης τοῦ G ὡς πρὸς τὴν v καὶ ἔστω $\mathcal{A} = [X_0, \ldots, X_r]$ εἶναι ἡ ἀποσύνθεση ἀπόστασης τοῦ G ὡς πρὸς τὴν v. Ἰσχύει ὅτι $n(G) \leq 1 + r \cdot \max_i |X_i| = 1 + r \cdot \textbf{πα}(G)$. Λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν ὅτι $r = \textbf{ἐκκεντρότητα}_G(v) \leq \textbf{διάμετρος}(G)$, καταλήγουμε ὅτι $n(G) \leq 1 + \textbf{διάμετρος}(G) \cdot \textbf{πα}(G)$. □

4.3 Γραφήματα μὲ μικρὸ μέγιστο βαθμὸ καὶ διάμετρο

Ἕνα γράφημα G μὲ n κορυφὲς ὅπου $\Delta(G) \leq d$ δὲν μπορεῖ νὰ ἔχει πάνω ἀπὸ $d \cdot n/2$ ἀκμές. Παρ' ὅλα αὐτὰ μπορεῖ νὰ ἔχει ὁσοδήποτε μικρὸ ἀριθμὸ ἀκμῶν. Τὸ παρακάτω Θεώρημα μᾶς λέει ὅτι αὐτὸ δὲν ἰσχύει ἂν ἐπιπλέον φράξουμε ἄνω καὶ τὴν διάμετρο. Ἡ ἀπόδειξη ποὺ παρουσιάζουμε δόθηκε ἀπὸ τοὺς Erdős καὶ Rényi τὸ 1962 [36].

Θεώρημα 4.22. Ἔστω $d \geq 3$ καὶ G γράφημα μὲ n κορυφές, ὅπου $\Delta(G) \leq d$ καὶ $\textbf{διάμετρος}(G) \leq \beta$. Τότε

$$m(G) \geq \frac{n(n-1)(d-2)}{2((d-1)^\beta - 1)}.$$

Ἀπόδειξη. Ἡ ἰδέα εἶναι διπλὴ καταμέτρηση: μετρᾶμε τὰ διατεταγμένα μονοπάτια μικροῦ μήκους δύο φορές, μιὰ φορὰ ἀνὰ ἀκμὴ καὶ μιὰ φορὰ ἀνὰ ζεῦγος κορυφῶν. Ἕνα μονοπάτι θὰ λέγεται διατεταγμένο ὅταν προσδιορίζουμε σὲ αὐτὸ ποιὸ ἄκρο του εἶναι ἡ ἀρχή του καὶ ποιὸ τὸ τέλος του. Παρατηροῦμε ὅτι σὲ κάθε μονοπάτι

ἀντιστοιχοῦν δύο διατεταγμένα μονοπάτια. Θὰ ἀποδείξουμε πρῶτα τὸν παρακάτω ἰσχυρισμό.

Ἰσχυρισμός: κάθε ἀκμὴ e τοῦ G περιέχεται σὲ τὸ πολὺ $2 \cdot l \cdot (d-1)^{l-1}$ διατεταγμένα μονοπάτια μήκους $l \geq 1$.

Ἀπόδειξη ἰσχυρισμοῦ: Ἔστω $\mathcal{P}_i^l$, γιὰ $i = 1, \ldots, l$, τὸ σύνολο τῶν διατεταγμένων μονοπατιῶν μήκους l στὰ ὁποία ἡ ἀκμὴ $e = \{x, y\}$ εἶναι ἡ i-οστὴ ἀκμή τους. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 4.12, ὑπάρχουν τὸ πολὺ $(d-1)(d-1)^{l-i-1} = (d-1)^{l-i}$ μονοπάτια μήκους $l - i$ μὲ τὸ ἕνα ἄκρο στὸ y στὸ γράφημα $G - e$. Παρομοίως ἔχουμε ὅτι ὑπάρχουν τὸ πολὺ $(d-1)(d-1)^{i-2} = (d-1)^{i-1}$ μονοπάτια μήκους $i-1$ μὲ τὸ ἕνα ἄκρο στὸ x στὸ γράφημα $G-e$. Ἄρα τὰ μονοπάτια τοῦ $\mathcal{P}_i^l$ στὰ ὁποία ἡ e ἐμφανίζεται μὲ κατεύθυνση ἀπὸ τὸ x στὸ y εἶναι τὸ πολὺ $(d-1)^{l-i}(d-1)^{i-1} = (d-1)^{l-1}$. Μετρώντας ἀναλόγως τὰ μονοπάτια στὰ ὁποία ἡ e ἐμφανίζεται μὲ τὴν ἀντίθετη κατεύθυνση καταλήγουμε ὅτι $|\mathcal{P}_i^l| \leq 2 \cdot (d-1)^{l-1}$. Μιὰ καὶ ἡ ἀκμὴ e μπορεῖ νὰ ἐμφανιστεῖ σὲ l διαφορετικὲς θέσεις σὲ ἕνα μονοπάτι ἔχουμε ὅτι ὁ ἰσχυρισμὸς εἶναι σωστός.

Ἄμεση συνέπεια τοῦ παραπάνω ἰσχυρισμοῦ εἶναι ὅτι τὸ πλῆθος τῶν διατεταγμένων μονοπατιῶν μήκους l στὸ G δὲν ὑπερβαίνει τὸ $2 \cdot m(G) \cdot (d-1)^{l-1}$ (κάθε τέτοιο μονοπάτι ἔχει l ἀκμές, ὁπότε μετριέται l φορές). Παρατηροῦμε ὅτι στὸ γράφημα G ὑπάρχουν $2 \cdot \binom{n}{2}$ διατεταγμένα ζεύγη κορυφῶν τὸ καθένα ἀπὸ τὰ ὁποία ἀντιστοιχεῖ σὲ ἕνα διατεταγμένο μονοπάτι τοῦ G μήκους τὸ πολὺ β. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι

$$2 \cdot \binom{n}{2} \leq 2 \cdot m(G) \cdot \sum_{i=1,\ldots,\beta} (d-1)^{i-1}$$

Λύνοντας τὴν παραπάνω ἀνισότητα ὡς πρὸς $m(G)$ ἔχουμε τὸ ζητούμενο. □

Παρατήρηση 4.23. Ὅπως ἀναφέραμε πρίν, γιὰ κάθε γράφημα G μὲ n κορυφὲς ὅπου $\Delta(G) \leq d$ καὶ **διάμετρος**$(G) \leq \beta$ ἰσχύει ὅτι $m(G) \leq d \cdot n/2$. Συνδυάζοντας τὴν ἀνισότητα αὐτὴ μὲ αὐτὴν τοῦ Θεωρήματος 4.22, ἔχουμε ὅτι

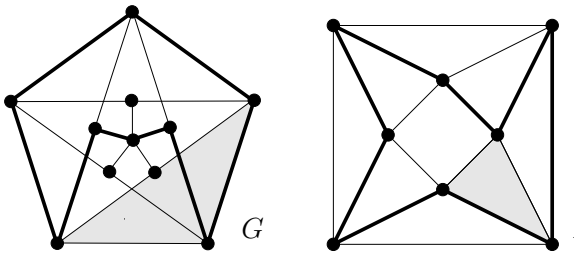
$$\frac{d \cdot n}{2} \geq \frac{n(n-1)(d-2)}{2((d-1)^{\beta} - 1)}.$$

Λύνοντας ὡς πρὸς τὸ n καταλήγουμε, μὲ διαφορετικὸ τρόπο, στὸ Πόρισμα 4.19.

4.4 Περίμετρος καὶ περιφέρεια

Ὁρισμός 4.24. Τὸ μέγιστο μῆκος ἑνὸς κύκλου στὸ G (ὡς ὑπογράφημα) καλεῖται *περίμετρος* τοῦ G καὶ τὸ συμβολίζουμε μὲ **περίμετρος**(G). Τὸ ἐλάχιστο μῆκος ἑνὸς

κύκλου στὸ G καλεῖται *περιφέρεια* τοῦ G καὶ τὸ συμβολίζουμε μὲ **περιφέρεια**(G). Ἂν τὸ γράφημα G δὲν περιέχει κύκλους, τότε ὁρίζουμε **περίμετρος**$(G) = 0$ καὶ **περιφέρεια**$(G) = \infty$.



Σχῆμα 4.4: Τὸ γράφημα G ἔχει περίμετρο 11 καὶ περιφέρεια 4 καὶ τὸ γράφημα H ἔχει περίμετρο 8 καὶ περιφέρεια 3. Οἱ σκιασμένες περιοχὲς ὑποδεικνύουν κύκλο ἐλάχιστου μήκους.

Ὁρισμός 4.25. Ἔστω C κύκλος ἑνὸς γραφήματος G. Μιὰ ἀκμὴ $\{z, y\} \in E(G)$ καλεῖται *χορδή* τοῦ C ἂν οἱ z καὶ y εἶναι μὴ διαδοχικὲς κορυφὲς τοῦ C. Ἂν ὁ κύκλος C δὲν ἔχει καμιὰ χορδὴ στὸ G, τότε καλεῖται *ἄχορδος*.

Ὁρισμός 4.26. Ἕνα ἐναγόμενο ὑπογράφημα ἑνὸς γραφήματος τὸ ὁποῖο εἶναι κύκλος καλεῖται *τρύπα*.

Παρατήρηση 4.27. Τὸ μέγεθος τῆς μικρότερης τρύπας ἑνὸς γραφήματος εἶναι ἴσο μὲ τὴν περιφέρειά του.

Ὁρισμός 4.28. Τὸ μέγεθος τῆς μεγαλύτερης τρύπας ἑνὸς γραφήματος G καλεῖται *χορδικότητα* καὶ συμβολίζεται ὡς **χορδικότητα**(G). Ἂν τὸ G δὲν περιέχει τρύπες (δηλαδή, ἰσοδύναμα, ἂν τὸ G εἶναι δάσος), τότε ὁρίζουμε **χορδικότητα**$(G) = 0$.

Λῆμμα 4.29. Γιὰ κάθε γράφημα G μὲ $\delta(G) \geq 2$ ἰσχύει ὅτι $\delta(G) \leq$ **περίμετρος**$(G) - 1$. Εἰδικότερα, κάθε γράφημα μὲ ἐλάχιστο βαθμὸ τουλάχιστον 2 περιέχει κύκλο.

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε μονοπάτι P τοῦ G μεγίστου μήκους. Ἔστω ὅτι τὰ ἄκρα τοῦ P εἶναι οἱ v_1, v_t καὶ ὅτι τὸ P ὁρίζει τὸν περίπατο $[v_1, \ldots, v_t]$. Παρατηρῆστε ὅτι ὅλοι οἱ γείτονες τῆς κορυφῆς v_1 πρέπει νὰ εἶναι κορυφὲς τοῦ μονοπατιοῦ καὶ ἄρα ἡ κορυφὴ v_1 θὰ πρέπει σίγουρα νὰ ἔχει στὴν γειτονιά της τὴν κορυφὴ v_i γιὰ κάποιο $i \geq \deg_G(v_1) + 1 \geq \delta(G) + 1$ πρᾶγμα ποὺ πιστοποιεῖ τὴν ὕπαρξη κύκλου μήκους τουλάχιστον $\delta(G) + 1$ στὸ G. □

Λῆμμα 4.30. Κάθε γράφημα G μὲ $\epsilon(G) \geq 1$ περιέχει κύκλο.

Ἀπόδειξη. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ λῆμμα ἰσχύει ὅταν $n(G) \leq 3$ (τότε $\epsilon(G) \geq 1$ ἐπιβάλλει $n(G) = 3$ καὶ $m(G) \geq 3$, δηλαδὴ τρίγωνο) καὶ ὑποθέτουμε ἐπίσης ὅτι τὸ λῆμμα ἰσχύει γιὰ κάθε γράφημα μὲ $< n$ κορυφές. Ἔστω $n = n(G)$. Ἂν $\delta(G) \geq 2$, τότε τὸ ζητούμενο προκύπτει ἀπὸ τὸ Λῆμμα 4.29. Ἄρα μένει νὰ ἐξετάσουμε τὴν περίπτωση ὅπου τὸ G περιέχει κορυφὴ v μὲ βαθμὸ ≤ 1. Τότε ὅμως $\epsilon(G-v) \geq 1$ καὶ τὸ ἀποτέλεσμα προκύπτει ἐφαρμόζοντας τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση γιὰ τὸ γράφημα $G - v$. □

Μιὰ πιὸ συμπαγὴς ἐπαναδιατύπωση τοῦ Λήμματος 4.30, εἶναι ἡ ἑξῆς: *Γιὰ κάθε γράφημα G, $\epsilon(G) \geq 1 \Rightarrow K_3 \leq_{\tau\pi} G$.* Μὲ ἄλλα λόγια, ἡ πυκνότητα τοῦ γραφήματος μπορεῖ νὰ ἐγγυηθεῖ τὴν ὕπαρξη τοῦ K_3 ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον στὸ G.

Μεγάλη περιφέρεια σημαίνει ὅτι οἱ πρῶτες στοιβάδες γύρω ἀπὸ κάθε κορυφὴ εἶναι δεντρικές, χωρὶς ἐπικαλύψεις. Ἀπὸ ἐκεῖ προκύπτει τὸ ἑξῆς κάτω φράγμα, δυϊκὸ τοῦ φράγματος Moore τῆς προηγούμενης ἑνότητας.

Θεώρημα 4.31. Γιὰ κάθε γράφημα G μὲ **περιφέρεια**$(G) \geq g$ καὶ $\delta(G) \geq d$ ἰσχύει ὅτι

$$n(G) \geq \begin{cases} 1 + d \cdot \sum_{i=0,\ldots,r-1}(d-1)^i & \text{ἂν } g = 2r+1 \text{ (g περιττός)} \\ 2 \cdot \sum_{i=0,\ldots,r-1}(d-1)^i & \text{ἂν } g = 2r \text{ (g ἄρτιος)} \end{cases}$$

Ἀπόδειξη. Ἐξετάζουμε πρῶτα τὴν περίπτωση ὅπου τὸ $g \bmod 2 = 1$. Ἔστω $S_i, 0 \leq i \leq r$ τὰ πρῶτα $r+1$ σύνολα τῆς ἀποσύνθεσης ἀπόστασης τοῦ G ὡς πρὸς μιὰ ὁποιαδήποτε κορυφὴ v_0 τοῦ G. Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ $i = 1, \ldots, r$, κάθε κορυφὴ v τοῦ S_i ἔχει ἀκριβῶς μία γειτονική της κορυφὴ στὸ S_{i-1} διαφορετικά, χρησιμοποιώντας τὸ Θεώρημα 4.16 μπορεῖ νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι τὸ G θὰ περιέχει δύο διαφορετικὰ μονοπάτια μὲ ἄκρα τὶς v καὶ v_0 μήκους i καὶ μὲ ὅλες τὶς κορυφὲς σὲ ἀπόσταση $\leq i$ ἀπὸ τὸ v_0, κατὰ συνέπεια ἕνα κύκλο μήκους $\leq 2r < g$, ἄτοπο. Ἐπιπλέον, γιὰ $i = 1, \ldots, r-1$, δὲν ὑπάρχει ἀκμὴ μεταξὺ δύο κορυφῶν u, w τοῦ S_i: διαφορετικά, ἡ ἀκμὴ $\{u, w\}$ μαζὶ μὲ ἕνα (u, v_0)-μονοπάτι καὶ ἕνα (w, v_0)-μονοπάτι μήκους i θὰ σχημάτιζε κλειστὸ περίπατο περιττοῦ μήκους $2i+1 \leq 2r-1$, ὁ ὁποῖος περιέχει κύκλο μήκους $\leq 2r - 1 < g$, ἄτοπο. Ἄρα, γιὰ $2 \leq i \leq r$, κάθε κορυφὴ τοῦ S_{i-1} ἔχει μία γειτονικὴ κορυφὴ στὸ S_{i-2}, καμία στὸ S_{i-1}, καὶ συνεπῶς τουλάχιστον $d-1$ γειτονικὲς κορυφὲς στὸ S_i· ἀφοῦ κάθε κορυφὴ τοῦ S_i ἔχει μοναδικὴ γειτονικὴ κορυφὴ στὸ S_{i-1}, οἱ γειτονικὲς αὐτὲς κορυφὲς εἶναι διαφορετικὲς γιὰ διαφορετικὲς κορυφὲς τοῦ S_{i-1}. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι $|S_i| \geq (d-1)|S_{i-1}|$ γιὰ $2 \leq i \leq r$ καὶ ἀφοῦ

$|S_0| = 1$ καὶ $|S_1| \geq d$ καταλήγουμε ὅτι

$$n(G) \geq \sum_{i=0,\ldots,r} |S_i| \geq 1 + d + d(d-1) + \cdots + d(d-1)^{r-1}$$

Ἔστω τώρα $g \bmod 2 = 0$. Ὑποδιαιροῦμε μιὰ ὁποιαδήποτε ἀκμὴ προσθέτοντας μιὰ νέα κορυφὴ v_0 καὶ ἐφαρμόζουμε τὴν ἴδια μέτρηση ὅπως κάναμε παραπάνω στὸ νέο γράφημα G', ξεκινώντας ἀπὸ τὴν v_0. Οἱ κύκλοι τοῦ G' ποὺ δὲν περνοῦν ἀπὸ τὴν v_0 εἶναι κύκλοι τοῦ G καὶ ἄρα ἔχουν μῆκος $\geq 2r$, ἐνῶ οἱ κύκλοι ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὴν v_0 ἔχουν μῆκος $\geq 2r+1$. Ἂν μιὰ κορυφὴ $v \in S_i$, $1 \leq i \leq r$, εἶχε δύο γειτονικὲς κορυφὲς στὸ S_{i-1}, τὰ δύο ἀντίστοιχα (v, v_0)-μονοπάτια μήκους i θὰ περιεῖχαν εἴτε κύκλο ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὴν v_0 μὲ μῆκος $\leq 2i \leq 2r$, εἴτε κύκλο ποὺ δὲν περνᾶ ἀπὸ τὴν v_0 μὲ μῆκος $\leq 2i-2 \leq 2r-2$, ἄτοπο. Ὁμοίως, μιὰ ἀκμὴ μεταξὺ δύο κορυφῶν τοῦ S_i, $1 \leq i \leq r-1$, θὰ ἔδινε κύκλο μήκους $\leq 2i+1 \leq 2r-1$, ἄτοπο. Ἀφοῦ $|S_1| = 2$ καὶ κάθε κορυφὴ τοῦ G' ἐκτὸς τῆς v_0 ἔχει βαθμὸ $\geq d$, ὅπως παραπάνω ἔχουμε ὅτι

$$n(G') \geq \sum_{i=0,\ldots,r} |S_i| \geq 1+2+2(d-1)+\cdots+2(d-1)^{r-1} = 1+2\cdot \sum_{i=0,\ldots,r-1} (d-1)^i$$

καὶ τὸ ζητούμενο προκύπτει ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι $n(G) = n(G') - 1$. □

Θεώρημα 4.32. Ἔστω G γράφημα μὲ n κορυφὲς καὶ τουλάχιστον $n+n^{1+\frac{1}{k}}$ ἀκμές. Τότε **περιφέρεια**$(G) \leq 2k$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\sqrt[k]{n} + 1 = d$. Ἀφοῦ $\delta^*(G) \geq \epsilon(G) \geq d$ (Θεώρημα 3.11), τὸ G περιέχει ἕνα ὑπογράφημα G' ὅπου $\delta(G') \geq d$. Μὲ σκοπὸ νὰ καταλήξουμε σὲ ἄτοπο, ὑποθέτουμε ὅτι **περιφέρεια**$(G) \geq 2k+1$ καὶ ἄρα **περιφέρεια**$(G') \geq 2k+1$. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 4.31 (ἡ ἀπόδειξη τοῦ ὁποίου ἰσχύει αὐτούσια καὶ γιὰ μὴ ἀκέραιο d), ἔχουμε ὅτι

$$n \geq n(G') \geq 1+d\cdot \sum_{i=0,\ldots,k-1} (d-1)^i = 1+\frac{d}{d-2}((d-1)^k-1) > (d-1)^k = n,$$

ἄτοπο (ἡ τελευταία ἀνισότητα ἰσχύει ἐπειδὴ $d > 2$). □

Ἀσκήσεις Κεφαλαίου

4.1 (★★☆). Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε $k \geq 1$, ἰσχύει ὅτι

$$\max(\{\textbf{διάμετρος}(H) \mid H \subseteq_{υπ} P_k \square P_k\} \cap \mathbb{N}) = k^2 - 1.$$

4.2 (☆☆☆)**.** Ἔστω γράφημα G ποὺ περιέχει μιὰ κορυφὴ ἡ ὁποία δὲν εἶναι οὔτε κεντρικὴ οὔτε ἀπόκεντρή του. Δεῖξτε ὅτι τὸ G δὲν εἶναι μεταβατικό.

4.3 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι οἱ ἀνισότητες τῶν Θεωρημάτων 4.18 καὶ 4.21 εἶναι βέλτιστες γιὰ ἄπειρο πλῆθος γραφημάτων.

4.4 (★☆☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχουν γραφήματα τέτοια ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν πλατῶν ἀπόστασης ὡς πρὸς δύο διαφορετικὲς κορυφὲς νὰ εἶναι αὐθαίρετα μεγάλη.

4.5 (★☆☆)**.** Βρεῖτε τὶς κεντρικὲς καὶ ἀπόκεντρες κορυφὲς τῆς (p, q)-σχάρας γιὰ κάθε $p, q \geq 1$.

4.6 (★☆☆)**.** Πόσα ζεύγη ἀντιδιαμετρικῶν κορυφῶν περιέχει ὁ r-διάστατος κύβος γιὰ $r \geq 1$; Σὲ ποιὲς δυαδικὲς συμβολοσειρὲς ἀντιστοιχοῦν;

4.7 (★★☆)**.** Γιὰ κάθε γράφημα G ὑπάρχει κάποιο γράφημα H τοῦ ὁποίου οἱ κεντρικὲς κορυφὲς ἐνάγουν γράφημα ἰσόμορφο μὲ τὸ G.

4.8 (★☆☆)**.** Ποιὲς εἶναι οἱ τιμὲς τοῦ **διάμετρος**$(G * H)$ καὶ γιὰ ποιὲς ἐπιλογὲς τῶν G καὶ H;

4.9 (☆☆☆)**.** Γιὰ κάθε μεταβατικὸ γράφημα G, **κέντρο**$(G) =$ **ἀπόκεντρο**$(G) = V(G)$.

4.10 (★★☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε ζεῦγος θετικῶν ἀκεραίων x, y τέτοιων ὥστε $x \leq y \leq 2x$, ὑπάρχουν ἀπείρως πολλὰ γραφήματα μὲ ἀκτῖνα x καὶ διάμετρο y.

4.11 (☆☆☆)**.** Γιὰ κάθε γράφημα G, ὅλες οἱ κορυφές του εἶναι κεντρικὲς ἂν καὶ μόνο ἂν **ἀκτῖνα**$(G) =$ **διάμετρος**(G).

4.12 (★★☆)**.** Γιὰ κάθε γράφημα G ἰσχύει ὅτι **διάμετρος**$(\overline{G}) > 3 \Rightarrow$ **διάμετρος**$(G) < 3$.

4.13 (★☆☆)**.** Κάθε γράφημα G περιέχει μονοπάτι μήκους $\delta(G)$.

4.14 (★★☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι ἂν **διάμετρος**$(G) \geq 2$, τότε οἱ ἀπόκεντρες κορυφὲς τοῦ G δὲν μπορεῖ νὰ ἐνάγουν κλίκα στὸ G.

4.15 (★★☆)**.** Ἂν ἕνα γράφημα G n κορυφῶν ἔχει **πα**$(G) \leq x$ τότε βρεῖτε τὸ καλύτερο δυνατὸ κάτω φράγμα γιὰ τὴν διάμετρό του ὡς συνάρτηση τοῦ n καὶ τοῦ x.

4.16 (★☆☆)**.** Γιὰ κάθε γράφημα G ποὺ περιέχει κύκλο ἰσχύει ὅτι **περιφέρεια**$(G) \leq 2 \cdot$ **διάμετρος**$(G) + 1$.

4.17 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι κάθε γράφημα G ὅπου $\Delta(G) + \delta(G) \geq n(G) - 1$, ἔχει διάμετρο τὸ πολὺ 4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

Ἡ συνεκτικότητα εἶναι ἡ πρώτη πραγματικὰ καθολικὴ ἰδιότητα ποὺ συναντᾶμε: δὲν ἀφορᾶ μεμονωμένες κορυφὲς ἀλλὰ τὸ γράφημα ὡς σύνολο.

Ὁρισμός 5.1. Ἕνα γράφημα G καλεῖται *συνεκτικό* (ἢ *1-συνεκτικό*) ὅταν γιὰ κάθε ζεῦγος κορυφῶν $x, y \in V(G)$ ὑπάρχει (x, y)-μονοπάτι.

Σύμβαση. Τὸ γράφημα K_1 θεωρεῖται συνεκτικό.

Παρατήρηση 5.2. Σὲ ἕνα συνεκτικὸ γράφημα ἡ διάμετρος εἶναι πεπερασμένη.

Λῆμμα 5.3. Ἕνα γράφημα εἶναι συνεκτικὸ ἂν καὶ μόνο ἂν περιέχει περίπατο ποὺ νὰ περνάει ἀπὸ ὅλες τὶς κορυφές του.

Ἀπόδειξη. Ἡ κατεύθυνση ($\Leftarrow$) εἶναι ἄμεση συνέπεια τοῦ Λήμματος 4.3. Γιὰ τὴν κατεύθυνση ($\Rightarrow$), παίρνουμε μιὰ ὁποιαδήποτε διάταξη $[v_1, \ldots, v_n]$ τῶν κορυφῶν τοῦ G καὶ γιὰ κάθε $i = 1, \ldots, n-1$ παίρνουμε ἕνα (v_i, v_{i+1})-μονοπάτι $P^{(i)}$ στὸ G (κάθε τέτοιο μονοπάτι ὑπάρχει λόγῳ τῆς συνεκτικότητας τοῦ G). Ἂν τὸ μονοπάτι $P^{(i)}$ ἀντιστοιχεῖ στὸν (v_i, v_{i+1})-περίπατο W_i, τότε ἡ ἐπικόλληση τῶν περιπάτων $W_1, \ldots, W_{n-1}$ μᾶς δίνει τὸν ζητούμενο περίπατο. □

Θεώρημα 5.4. Γιὰ κάθε γράφημα G, τὸ G ἢ τὸ συμπλήρωμά του $\overline{G}$ εἶναι συνεκτικό.

Ἀπόδειξη. Ἀφαιροῦμε μιὰ κορυφὴ καὶ ἐφαρμόζουμε τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση· ἡ κορυφὴ ποὺ ἀφαιρέσαμε ἐπανασυνδέεται εἴτε μέσα στὸ G εἴτε μέσα στὸ $\overline{G}$, ἀφοῦ

κάθε ζεῦγος κορυφῶν εἶναι συνδεδεμένο σὲ ἀκριβῶς ἕνα ἀπὸ τὰ δύο. Θὰ χρησιμοποιήσουμε ἐπαγωγὴ στὸ $n(G)$. Τὸ θεώρημα εἶναι προφανὲς στὴν περίπτωση ὅπου $n(G) = 1$. Ὑποθέτουμε ὅτι τὸ θεώρημα εἶναι σωστὸ γιὰ κάθε γράφημα μὲ $< n$ κορυφές. Ἔστω G ὅπου $n(G) = n$ καὶ ἔστω κορυφὴ $v \in V(G)$. Ἂν $N_G(v) = V(G)\backslash\{v\}$ ἢ $N_G(v) = \emptyset$, τότε τὸ θεώρημα προκύπτει ἄμεσα. Θεωροῦμε λοιπὸν ὅτι ὑπάρχουν κορυφὲς $x, y \in V(G)\backslash\{v\}$ ἔτσι ὥστε $\{v, x\} \in E(G)$ καὶ $\{v, y\} \in E(\overline{G})$. Ἐπειδὴ τὸ $H = G[V(G)\backslash\{v\}]$ ἔχει $< n$ κορυφές, εἴτε τὸ H, εἴτε τὸ $\overline{H}$ εἶναι συνεκτικό. Στὴν πρώτη περίπτωση, ἡ ὕπαρξη τῆς ἀκμῆς $\{v, x\}$ στὸ G συνεπάγεται τὴν συνεκτικότητα τοῦ G καὶ στὴν δεύτερη περίπτωση, ἡ ὕπαρξη τῆς ἀκμῆς $\{v, y\}$ στὸ $\overline{G}$ συνεπάγεται τὴν συνεκτικότητα τοῦ $\overline{G}$. □

Ἕνα μὴ συνεκτικὸ γράφημα διασπᾶται μὲ φυσικὸ τρόπο σὲ συνεκτικὰ κομμάτια, τὰ ὁποία μποροῦν στὴ συνέχεια νὰ μελετηθοῦν χωριστά.

Ὁρισμός 5.5. Ἔστω γράφημα G καὶ ἔστω $\mathcal{I}(G)$ τὸ σύνολο ὅλων τῶν συνεκτικῶν ὑπογραφημάτων τοῦ G. Καλοῦμε ἕνα μέλος H τοῦ $\mathcal{I}(G)$ *συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ* G (ἢ ἁπλὰ *συνιστῶσα*) ἂν εἶναι ἕνα μεγιστικὸ (maximal) στοιχεῖο τοῦ $\mathcal{I}(G)$ ὡς πρὸς τὴ μερικὴ διάταξη τοῦ ὑπογραφήματος.

Σύμβαση. Οἱ ἀπομονωμένες κορυφὲς ἑνὸς γραφήματος θεωροῦνται συνεκτικὲς συνιστῶσες του.

Παρατήρηση 5.6. Κάθε συνεκτικὴ συνιστῶσα H ἑνὸς γραφήματος G εἶναι ἐναγόμενο ὑπογράφημα τοῦ G.

Παρατήρηση 5.7. Κάθε κορυφὴ ἑνὸς γραφήματος G ἀνήκει σὲ μιὰ ἀκριβῶς ἀπὸ τὶς συνεκτικές του συνιστῶσες.

Παρατήρηση 5.8. Ἂν H εἶναι μιὰ συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ G, τότε $\delta(H) \geq \delta(G)$ καὶ $\Delta(H) \leq \Delta(G)$.

Θεώρημα 5.9. Ἂν τὸ G εἶναι γράφημα ὅπου $\delta(G) \geq \frac{n(G)}{2}$, τότε τὸ G εἶναι συνεκτικό.

Ἀπόδειξη. Ἡ ἰδέα εἶναι ἁπλή: ἂν τὸ γράφημα διασπᾶται, ἡ μικρότερη συνιστῶσα εἶναι πολὺ μικρὴ γιὰ νὰ στεγάσει κορυφὲς τόσο μεγάλου βαθμοῦ. Ἔστω μὴ-συνεκτικὸ γράφημα G καὶ ἔστω H ἡ μικρότερη (σὲ ἀριθμὸ κορυφῶν) ἀπὸ τὶς συνεκτικές του συνιστῶσες. Παρατηροῦμε ὅτι $n(H) \leq \frac{n(G)}{2}$ καὶ ἄρα $\delta(H) \leq n(H) - 1 < \frac{n(G)}{2}$. Τὸ θεώρημα τώρα προκύπτει λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν τὴν Παρατήρηση 5.8. □

Θεώρημα 5.10. Ἂν τὸ G εἶναι συνεκτικὸ γράφημα, τότε $m(G) \geq n(G) - 1$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω G ὑποτιθέμενο ἀντιπαράδειγμα μὲ ἐλάχιστο ἀριθμὸ κορυφῶν (δηλ. ὑποθέτουμε ὅτι τὸ G εἶναι συνεκτικό, $m(G) < n(G) - 1$ καὶ γιὰ κάθε συνεκτικὸ γράφημα H μὲ $n(H) < n(G)$ ἰσχύει ὅτι $m(H) \geq n(H) - 1$). Παρατηροῦμε ὅτι $\delta(G) \leq 1$ γιατί, διαφορετικά, ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 3.6, ἔχουμε $m(G) \geq n(G) \cdot \frac{\delta(G)}{2} \geq n(G)$. Ἔστω v κορυφὴ τοῦ G βαθμοῦ 1 (ἂν τὸ G εἶναι συνεκτικό, δὲν θὰ περιέχει κορυφὴ βαθμοῦ 0). Τὸ γράφημα $H = G - v$ εἶναι συνεκτικὸ (παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀφαίρεση κορυφῆς βαθμοῦ 1 δὲν πλήττει τὴν συνεκτικότητα ἑνὸς γραφήματος) καὶ περιέχει λιγότερες κορυφὲς ἀπὸ τὸ G. Ἄρα $m(H) \geq n(H) - 1$. Ἐπίσης ἔχουμε $m(G) = m(H) + 1$, $n(G) = n(H) + 1$ καὶ ἄρα $m(G) \geq n(G) - 1$, ἄτοπο. □

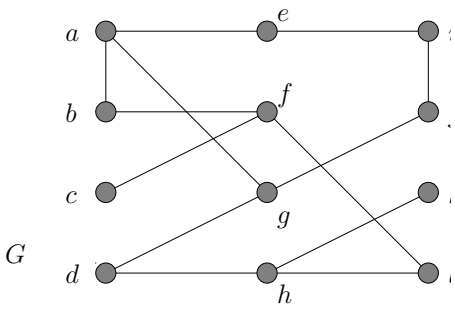
Ὁρισμός 5.11. Ἔστω γράφημα G καὶ ἔστω μὴ-κενὸ σύνολο $S \subseteq V(G)$. Λέμε ὅτι τὸ S εἶναι *διαχωριστής* τοῦ G ἂν τὸ γράφημα $G - S$ ἔχει περισσότερες συνεκτικὲς συνιστῶσες ἀπὸ τὸ G. Ἕνας διαχωριστὴς S καλεῖται *ἐλαχιστικός* (minimal) ἂν κανένα ἀπὸ τὰ ὑποσύνολά του δὲν εἶναι διαχωριστής. Ἕνας διαχωριστὴς S καλεῖται *ἐλάχιστος* (minimum) ἂν κανένας ἄλλος διαχωριστὴς τοῦ G δὲν ἔχει μικρότερο μέγεθος ἀπὸ τὸν S.

Ἕνας διαχωριστὴς S καλεῖται (a, b)-*διαχωριστὴς* ἂν οἱ κορυφὲς $a, b \in V(G)$ βρίσκονται σὲ διαφορετικὲς συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ γραφήματος $G - S$. Ἕνας (a, b)-διαχωριστὴς S καλεῖται *ἐλαχιστικὸς* (minimal) ἂν κανένα ἀπὸ τὰ ὑποσύνολά του δὲν εἶναι (a, b)-διαχωριστής. Ἕνας (a, b)-διαχωριστὴς S καλεῖται *ἐλάχιστος* (minimum) ἂν κανένας ἄλλος (a, b)-διαχωριστὴς τοῦ G δὲν ἔχει μικρότερο μέγεθος ἀπὸ τὸν S.

Τέλος, μιὰ κορυφὴ v τοῦ G λέγεται *ἀρθρική* ὅταν τὸ σύνολο $\{v\}$ εἶναι διαχωριστὴς τοῦ G.

Ὁρισμός 5.12. Καλοῦμε μιὰ ἀκμὴ e ἑνὸς γραφήματος G *γέφυρα* ὅταν τὸ γράφημα $G - e$ ἔχει περισσότερες συνεκτικὲς συνιστῶσες ἀπὸ τὸ G.

Παρατήρηση 5.13. Ἂν ἕνα γράφημα $G = (V, E)$ περιέχει γέφυρα $e \in E$ τῆς ὁποίας κάποιο ἄκρο, ἔστω $v \in V$, ἔχει βαθμὸ τουλάχιστον 2 στὸ G τότε ἡ v εἶναι ἀρθρικὴ κορυφὴ τοῦ G.



Σχῆμα 5.1: Τὸ σύνολο $\{e, f, g, h\}$ εἶναι διαχωριστὴς τοῦ G ἀλλὰ δὲν εἶναι οὔτε ἐλαχιστικὸς οὔτε ἐλάχιστος. Τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τὸ $\{e, f, h\}$. Τὸ σύνολο $\{e, g\}$ εἶναι ἐλαχιστικὸς διαχωριστὴς τοῦ G καὶ τὰ μονοσύνολα $\{f\}$ καὶ $\{h\}$ εἶναι ἐλάχιστοι διαχωριστὲς τοῦ G καὶ ἐπιπλέον ἀρθρικὲς κορυφές του. Τὸ $\{f, g\}$ εἶναι ἐλαχιστικὸς (a, k)-διαχωριστὴς καὶ τὸ μονοσύνολο $\{h\}$ εἶναι ἐλάχιστος (a, k)-διαχωριστὴς τοῦ G.

5.1 Δισυνεκτικότητα

Ἡ ἁπλὴ συνεκτικότητα εἶναι εὔθραυστη: ἡ ἀφαίρεση μίας καὶ μόνο κορυφῆς μπορεῖ νὰ τὴν καταστρέψει. Ἡ ἑπόμενη ἔννοια ἀπαιτεῖ ἀνθεκτικότητα σὲ τέτοιες ἀφαιρέσεις.

Ὁρισμός 5.14. Λέμε ὅτι ἕνα γράφημα εἶναι *2-συνεκτικὸ* (ἢ ἁπλὰ *δισυνεκτικό*) ἂν εἶναι συνεκτικό, ἔχει τουλάχιστον 3 κορυφὲς καὶ ὅλοι οἱ διαχωριστές του ἔχουν τουλάχιστον 2 κορυφές.

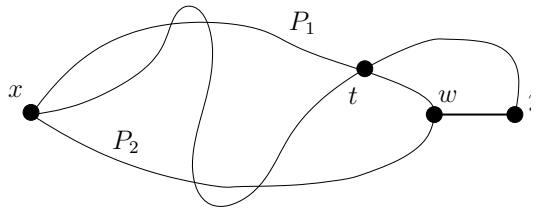
Παρατήρηση 5.15. Ἕνα συνεκτικὸ γράφημα εἶναι δισυνεκτικὸ ἂν καὶ μόνο ἂν δὲν περιέχει ἀρθρικὴ κορυφή.

Ὁρισμός 5.16. Καλοῦμε $k \geq 2$ μονοπάτια ἑνὸς γραφήματος G *ἐσωτερικῶς διακεκριμένα* ὅταν τὰ σύνολα τῶν ἐσωτερικῶν κορυφῶν τους εἶναι διακεκριμένα (δηλ. ἀνὰ δύο ξένα μεταξύ τους).

Τὸ ἑπόμενο θεώρημα δίνει ἕναν χαρακτηρισμὸ τῆς δισυνεκτικότητας μὲ ὅρους ὕπαρξης διαδρομῶν ἀντὶ γιὰ ἀπουσία διαχωριστῶν. Εἶναι ἡ ἀφετηρία μιᾶς σειρᾶς παρόμοιων χαρακτηρισμῶν ποὺ κορυφώνεται στὸ Θεώρημα τοῦ Menger.

Θεώρημα 5.17. Ἔστω G γράφημα μὲ τουλάχιστον 3 κορυφές. Τὸ G εἶναι δισυνεκτικὸ ἂν καὶ μόνο ἂν κάθε ζεῦγος κορυφῶν του συνδέεται μὲ δύο ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια.

Ἀπόδειξη. Οἱ δύο κατευθύνσεις ἀποδεικνύονται μὲ τελείως διαφορετικὸ τρόπο: ἡ μία μὲ μιὰ παρατήρηση μιᾶς γραμμῆς, ἡ ἄλλη μὲ ἐπαγωγὴ στὴν ἀπόσταση τῶν δύο κορυφῶν. Ὑποθέτουμε ὅτι τὸ G εἶναι συνεκτικὸ καὶ ὅτι περιέχει ἀρθρικὴ κορυφὴ v. Ἔστω x, y δύο κορυφὲς σὲ δύο ἀπὸ τὶς συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ $G-v$. Παρατηροῦμε ὅτι κάθε μονοπάτι ποὺ συνδέει τὴν x καὶ τὴν y θὰ περνάει ἀπὸ τὴν v ἄρα οἱ x καὶ y δὲν μποροῦν νὰ συνδεθοῦν μὲ δύο ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια. Αὐτὸ ἀποδεικνύει τὴν κατεύθυνση «ἄν».



Σχῆμα 5.2: Τὰ μονοπάτια P_1, P_2 στὴν ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 5.17.

Ἔστω G δισυνεκτικὸ γράφημα καὶ ἔστω $x, y \in V(G)$. Θὰ ἀποδείξουμε τὴν κατεύθυνση «μόνο ἄν» μὲ ἐπαγωγὴ ὡς πρὸς τὴν ἀπόσταση $\textbf{ἀπόσταση}_G(x, y)$ τῶν x καὶ y στὸ G. Ἂν $\textbf{ἀπόσταση}_G(x, y) = 1$, τότε ἡ $e = \{x, y\}$ εἶναι ἀκμὴ τοῦ G. Κανένα ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς e δὲν μπορεῖ νὰ ἔχει βαθμὸ 1 γιατὶ τότε τὸ ἄλλο ἄκρο θὰ ἦταν ἀρθρικὴ κορυφὴ δισυνεκτικοῦ γραφήματος G. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ γράφημα $G - e$ εἶναι συνεκτικό, διαφορετικὰ ἡ ἀκμὴ e θὰ ἀποτελοῦσε γέφυρα τοῦ G κάθε ἄκρο τῆς ὁποίας θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι ἀρθρικὴ κορυφὴ τοῦ G, σύμφωνα μὲ τὴν Παρατήρηση 5.13. Ἀπὸ τὴν συνεκτικότητα τοῦ $G - e$ συνάγουμε τὴν ὕπαρξη ἑνὸς μονοπατιοῦ στὸ $G - e$ μὲ ἄκρα τὰ x καὶ y τὸ ὁποῖο, μαζὶ μὲ τὴν $\{x, y\}$ ἀποτελοῦν δύο ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια στὸ G.

Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι ἡ κατεύθυνση «μόνο ἄν» ἰσχύει γιὰ κάθε ζεῦγος κορυφῶν x, y γιὰ τὶς ὁποῖες $\textbf{ἀπόσταση}(x, y) < k$. Ἔστω x, y κορυφὲς τοῦ G μὲ $\textbf{ἀπόσταση}(x, y) = k \geq 2$. Ἔστω w ἡ προτελευταία κορυφὴ ἑνὸς μονοπατιοῦ μήκους k στὸ G ποὺ ξεκινάει ἀπὸ τὸ x καὶ τελειώνει στὸ y. Ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση ὑπάρχουν δύο ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια P_1 καὶ P_2 στὸ G ποὺ συνδέουν τὴν x μὲ τὴν w. Ἂν κάποιο, ἔστω τὸ P_1, ἀπὸ τὰ P_1, P_2 περιέχει τὸ y τότε ὁρίζουμε P_1^* τὸ μέρος τοῦ P_1 ἀπὸ τὴ x μέχρι τὴ y καὶ κατασκευάζουμε τὸ μονοπάτι P_2^* ἀπὸ τὴν ἕνωση τοῦ P_2 μὲ τὴν ἀκμὴ $\{w, y\}$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι τὰ P_1^*, P_2^* εἶναι δύο ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια στὸ G. Ἔστω τώρα ὅτι κανένα ἀπὸ τὰ P_1, P_2 δὲν συναντᾶ τὸ y καὶ ἔστω R ἕνα μονοπάτι τοῦ G ποὺ ἑνώνει τὶς κορυφὲς x καὶ y ἀποφεύγοντας τὴν w (τέτοιο μονοπάτι ὑπάρχει γιατὶ τὸ G εἶναι

δισυνεκτικὸ καὶ ἄρα τὸ $G - w$ συνεκτικό). Ἂν τὸ R ἀποφεύγει ὅλες τὶς ἐσωτερικὲς κορυφὲς τῶν P_1 καὶ P_2, τότε τὸ R μαζὶ μὲ τὴν ἕνωση τοῦ P_1 καὶ τῆς ἀκμῆς $\{w, y\}$ εἶναι δύο ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια στὸ G. Ἔστω τώρα t ἡ τελευταία ἀπὸ τὶς ἐσωτερικὲς κορυφὲς τῶν P_1 καὶ P_2 ποὺ συναντάει τὸ R. Χωρὶς βλάβη τῆς γενικότητας ὑποθέτουμε ὅτι $t \in P_1$ καὶ κατασκευάζουμε τὸ μονοπάτι P_1^* ἀπὸ τὸ τμῆμα τοῦ P_1 ἀπὸ τὸ x στὸ t καὶ τὸ τμῆμα τοῦ R ἀπὸ τὸ t στὸ y. Ἐπίσης ὁρίζουμε τὸ μονοπάτι P_2^* προσθέτοντας στὸ τέλος τοῦ P_2 τὴν ἀκμὴ $\{w, y\}$. Τὰ μονοπάτια P_1^* καὶ P_2^* εἶναι δύο ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια στὸ G (βλ. Σχῆμα 5.2). □

Τὸ Θεώρημα 5.17 γενικεύεται γιὰ γραφήματα μεγαλύτερης συνεκτικότητας στὸ Θεώρημα 5.29.

Πόρισμα 5.18. Ἡ ὑποδιαίρεση, ἡ πρόσθεση μιᾶς ἀκμῆς ἢ ἡ διάλυση μιᾶς κορυφῆς σὲ ἕνα δισυνεκτικὸ γράφημα δὲν πλήττει τὴν δισυνεκτικότητά του (στὴν περίπτωση τῆς διάλυσης ὑποθέτουμε ὅτι ἔχουμε γράφημα μὲ τουλάχιστον 4 κορυφές).

Ἀπόδειξη. Ἔστω G δισυνεκτικὸ γράφημα. Θυμίζουμε ὅτι ἕνα γράφημα μὲ τουλάχιστον τρεῖς κορυφὲς εἶναι δισυνεκτικὸ ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι συνεκτικὸ καὶ καμία κορυφή του δὲν εἶναι ἀρθρική.
Πρόσθεση ἀκμῆς. Ἔστω $H = G + e$ γιὰ κάποια $e \notin E(G)$. Κάθε διαχωριστὴς S τοῦ H εἶναι καὶ διαχωριστὴς τοῦ G: τὸ $G - S$ εἶναι ὑπογράφημα τοῦ $H - S$ μὲ τὸ ἴδιο σύνολο κορυφῶν, ὁπότε ἂν τὸ $H - S$ εἶναι μὴ συνεκτικό, τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τὸ $G - S$. Ἄρα κάθε διαχωριστὴς τοῦ H ἔχει τουλάχιστον 2 κορυφές, ἀφοῦ τὸ G εἶναι δισυνεκτικό, καὶ τὸ H εἶναι δισυνεκτικό.
Ὑποδιαίρεση ἀκμῆς. Ἔστω $e = \{x, y\} \in E(G)$ καὶ ἔστω H τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει ἂν ἀντικαταστήσουμε τὴν e μὲ τὸ μονοπάτι $[x, w, y]$, ὅπου w νέα κορυφή. Τὸ H ἔχει $n(G) + 1 \geq 4$ κορυφές. Θὰ δείξουμε ὅτι καμία κορυφὴ τοῦ H δὲν εἶναι ἀρθρική.

Γιὰ τὴν w: τὸ $H - w$ εἶναι ἀκριβῶς τὸ $G - e$. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.17 οἱ x καὶ y συνδέονται στὸ G μὲ δύο ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια, ἕνα ἐκ τῶν ὁποίων μπορεῖ νὰ εἶναι ἡ ἴδια ἡ e· τὸ ἄλλο εἶναι (x, y)-μονοπάτι τοῦ $G - e$. Ἑπομένως κάθε διαδρομὴ τοῦ G ποὺ χρησιμοποιεῖ τὴν e μπορεῖ νὰ τὴν παρακάμψει, δηλαδὴ τὸ $G - e$ εἶναι συνεκτικό.

Γιὰ κορυφὴ $v \in V(G)$: ἂν $v \in \{x, y\}$, τότε τὸ $H - v$ προκύπτει ἀπὸ τὸ συνεκτικὸ γράφημα $G - v$ ἂν προσθέσουμε τὴν w ὡς γειτονικὴ τῆς ἄλλης ἀπὸ τὶς x, y. Ἂν $v \notin \{x, y\}$, τότε τὸ $H - v$ προκύπτει ἀπὸ τὸ συνεκτικὸ γράφημα $G - v$ ἂν ἀντικαταστήσουμε τὴν ἀκμὴ e μὲ τὸ μονοπάτι $[x, w, y]$. Καὶ στὶς δύο περιπτώσεις τὸ $H - v$ εἶναι συνεκτικό.

Διάλυση κορυφῆς. Ἔστω v κορυφὴ τοῦ G μὲ $\deg_G(v) = 2$ καὶ $N_G(v) = \{x, y\}$, καὶ ἔστω $H = G/v$. Ὑποθέτουμε $n(G) \geq 4$, ὁπότε $n(H) \geq 3$. Ἔστω $u \in V(H)$· θὰ δείξουμε ὅτι τὸ $H - u$ εἶναι συνεκτικό.

Ἂν $u \notin \{x, y\}$: τὸ $G - u$ εἶναι συνεκτικό, καὶ κάθε μονοπάτι τοῦ $G - u$ ποὺ περνάει ἀπὸ τὴν v τὴν χρησιμοποιεῖ ὡς ἐσωτερικὴ κορυφὴ μὲ γείτονες τὶς x καὶ y (ἡ v ἔχει βαθμὸ 2). Ἀντικαθιστώντας κάθε τέτοιο πέρασμα x, v, y μὲ τὴν ἀκμὴ $\{x, y\}$, ἡ ὁποία ἀνήκει στὸ H, παίρνουμε περίπατο στὸ $H - u$. Ἄρα τὸ $H - u$ εἶναι συνεκτικό.

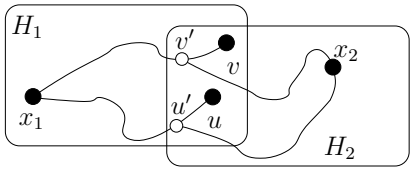
Ἂν $u = x$ (ἡ περίπτωση $u = y$ εἶναι συμμετρική): στὸ $G - x$ ἡ κορυφὴ v ἔχει βαθμὸ 1, ὁπότε δὲν εἶναι ἐσωτερικὴ κορυφὴ κανενὸς μονοπατιοῦ. Ἄρα τὸ $G - x - v$ εἶναι συνεκτικό, καὶ αὐτὸ εἶναι ἀκριβῶς τὸ $H - x$.

Τέλος, τὸ H εἶναι συνεκτικό: γιὰ δύο ὁποιεσδήποτε κορυφὲς a, b τοῦ H, ἀφοῦ $n(H) \geq 3$, ὑπάρχει κορυφὴ $u \notin \{a, b\}$, καὶ οἱ a, b συνδέονται στὸ συνεκτικὸ γράφημα $H - u$. Ἑπομένως τὸ H εἶναι δισυνεκτικό. □

Πόρισμα 5.19. Ἂν τὸ G εἶναι ἕνα δισυνεκτικὸ γράφημα τότε γιὰ κάθε τρεῖς ἀνὰ δύο διαφορετικὲς κορυφὲς $x, y, z \in V(G)$, ὑπάρχει μονοπάτι στὸ G ποὺ νὰ περνάει ἀπὸ τὴν κορυφὴ y καὶ νὰ ἔχει ἄκρα τὶς x καὶ z.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τὸ γράφημα G^+ ποὺ προκύπτει ἂν προσθέσουμε στὸ G μιὰ νέα κορυφὴ w καὶ τὴν συνδέσουμε μὲ τὶς κορυφὲς x καὶ z. Τὸ G^+ εἶναι ἐπίσης δισυνεκτικό: ἔχει τουλάχιστον 4 κορυφές, τὸ $G^+ - w = G$ εἶναι συνεκτικό, ἐνῶ γιὰ κάθε $a \in V(G)$ τὸ $G^+ - a$ εἶναι ἐπίσης συνεκτικό, ἀφοῦ τὸ $G - a$ εἶναι συνεκτικὸ (τὸ G εἶναι δισυνεκτικό) καὶ ἡ w παραμένει συνδεδεμένη μὲ τουλάχιστον μία ἀπὸ τὶς x καὶ z. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.17, ὑπάρχουν δύο ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια P_1, P_2 ποὺ νὰ συνδέουν τὰ w καὶ y καὶ ἄρα τὸ γράφημα $(P_1 \cup P_2) - w$ εἶναι τὸ ζητούμενο μονοπάτι. □

Πόρισμα 5.20. Ἂν τὰ H_1 καὶ H_2 εἶναι δισυνεκτικὰ γραφήματα ὅπου $|V(H_1) \cap V(H_2)| \geq 2$, τότε τὸ γράφημα $H_1 \cup H_2$ εἶναι ἐπίσης δισυνεκτικό.



Σχῆμα 5.3: Ἡ ἀπόδειξη τοῦ Πορίσματος 5.20.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\{v, u\} \subseteq S = V(H_1) \cap V(H_2)$. Σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 5.17, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι κάθε ζεῦγος κορυφῶν x_1, x_2 στὸ γράφημα $H = H_1 \cup H_2$ συνδέεται μὲ δύο ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια. Ὁ ἰσχυρισμὸς αὐτὸς εἶναι προφανὴς ἂν τὰ x_1 καὶ x_2 ἀνήκουν στὸ ἴδιο γράφημα H_1 ἢ H_2. Ἔστω λοιπὸν $x_1 \in V(H_1)\backslash S$ καὶ $x_2 \in V(H_2)\backslash S$. Σύμφωνα μὲ τὸ Πόρισμα 5.19, ὑπάρχει μονοπάτι P_1 στὸ H_1 ποὺ νὰ συνδέει τὰ v καὶ u καὶ νὰ περνάει ἀπὸ τὸ x_1. Ἔστω P_1' τὸ ἐλάχιστο ὑπομονοπάτι τοῦ P_1 ποὺ περιέχει τὴν x_1 καὶ ἔχει ἄκρα δύο κορυφὲς v', u' τοῦ S (οἱ ἐσωτερικές του κορυφὲς εἶναι ξένες μὲ τὸ S). Πάλι ἀπὸ τὸ Πόρισμα 5.19, ὑπάρχει μονοπάτι P_2' στὸ H_2 ποὺ νὰ συνδέει τὰ v' καὶ u' καὶ νὰ περνάει ἀπὸ τὸ x_2. Τότε τὸ γράφημα $P_1' \cup P_2'$ εἶναι ἡ ἕνωση τῶν δύο ζητούμενων μονοπατιῶν. □

Ὁ παρακάτω ὁρισμὸς ἀκολουθεῖ τὴ λογικὴ τοῦ Ὁρισμοῦ 5.5.

Ὁρισμός 5.21. Ἔστω γράφημα G καὶ ἔστω $\mathcal{I}_2(G)$ τὸ σύνολο ὅλων τῶν 2-συνεκτικῶν ὑπογραφημάτων τοῦ G. Καλοῦμε ἕνα μέλος H τοῦ $\mathcal{I}_2(G)$ *δισυνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ* G ἂν εἶναι ἕνα μεγιστικὸ (maximal) στοιχεῖο τοῦ $\mathcal{I}_2(G)$ ὡς πρὸς τὴν μερικὴ διάταξη τοῦ ὑπογραφήματος.

Παρατηρῆστε ὅτι, σὲ ἀντίθεση μὲ τὶς συνεκτικὲς συνιστῶσες ἑνὸς γραφήματος, δὲν ἰσχύει ὅτι μία κορυφὴ ἀνήκει ἀπαραίτητα σὲ μία δισυνεκτικὴ συνιστῶσα. Γιὰ τὸν λόγο αὐτὸν θὰ προσθέσουμε τὸν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός 5.22. *Τεμάχιο τοῦ* G καλεῖται μία δισυνεκτικὴ συνιστῶσα του ἢ μία γέφυρά του. Ἐπίσης τεμάχιο θὰ θεωρεῖται καὶ κάθε ἀπομονωμένη κορυφὴ τοῦ γραφήματος.

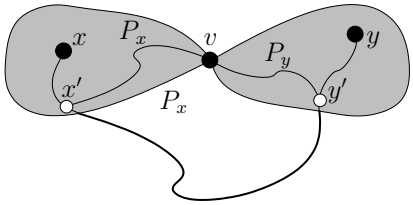
Σύμφωνα μὲ τὸν παραπάνω ὁρισμὸ κάθε ἀκμὴ ποὺ δὲν ἀνήκει σὲ δισυνεκτικὴ συνιστῶσα ἀποτελεῖ ξεχωριστὸ τεμάχιο τοῦ γραφήματος (ὡς γέφυρα), καὶ φυσικὰ κάθε κορυφὴ ἀνήκει σὲ κάποιο τεμάχιο.

Λῆμμα 5.23. Δύο διακεκριμένα τεμάχια H_1 καὶ H_2 ἑνὸς γραφήματος G μποροῦν νὰ ἔχουν τὸ πολὺ μιὰ κοινὴ κορυφὴ ἡ ὁποία πρέπει νὰ εἶναι ἀρθρική.

Ἀπόδειξη. Μιὰ ἀπομονωμένη κορυφὴ δὲν ἔχει κοινὴ κορυφὴ μὲ κανένα ἄλλο τεμάχιο, ὁπότε μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι καθένα ἀπὸ τὰ H_1, H_2 εἶναι δισυνεκτικὴ συνιστῶσα ἢ γέφυρα. Θὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν ἑξῆς παρατήρηση. Ἂν $e = \{a, b\}$ εἶναι γέφυρα τοῦ G, τότε οἱ a καὶ b ἀνήκουν σὲ διαφορετικὲς συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ $G - e$. Ἑπομένως ἡ e δὲν ἀνήκει σὲ κανέναν κύκλο τοῦ G, καὶ κανένα δισυνεκτικὸ ὑπογράφημα H τοῦ G δὲν περιέχει καὶ τὶς δύο κορυφὲς a, b: ἂν

$a, b \in V(H)$, ἔστω c μιὰ τρίτη κορυφὴ τοῦ H· ἀφοῦ τὰ $H - a$ καὶ $H - b$ εἶναι συνεκτικά, ὑπάρχουν ἕνα (c, b)-μονοπάτι στὸ $H - a$ καὶ ἕνα (c, a)-μονοπάτι στὸ $H - b$, κανένα ἀπὸ τὰ ὁποία δὲν περιέχει τὴν e, καὶ ἡ ἕνωσή τους συνδέει τὶς a καὶ b στὸ $G - e$, ἄτοπο.

Ἐξετάζουμε τώρα χωριστὰ δύο περιπτώσεις: ὅταν τὰ δύο τεμάχια μοιράζονται δύο ἢ περισσότερες κορυφές, καὶ ὅταν μοιράζονται ἀκριβῶς μία. Ἔστω ὅτι $|V(H_1) \cap V(H_2)| \geq 2$. Ἀπὸ τὴν παραπάνω παρατήρηση κανένα ἀπὸ τὰ H_1, H_2 δὲν εἶναι γέφυρα: δύο διαφορετικὲς γέφυρες δὲν ἔχουν καὶ τὰ δύο ἄκρα τους κοινά, ἐνῶ μιὰ δισυνεκτικὴ συνιστῶσα δὲν περιέχει καὶ τὰ δύο ἄκρα μιᾶς γέφυρας. Ἄρα τὰ H_1, H_2 εἶναι δισυνεκτικὲς συνιστῶσες καί, ἀπὸ τὸ Πόρισμα 5.20, τὸ γράφημα $H_1 \cup H_2$ εἶναι δισυνεκτικό, πρᾶγμα ποὺ ἀντιβαίνει στὸ γεγονὸς ὅτι τὰ H_1, H_2 εἶναι διαφορετικὰ μεγιστικὰ δισυνεκτικὰ ὑπογραφήματα τοῦ G.



Σχῆμα 5.4: Ἡ ἀπόδειξη τοῦ Λήμματος 5.23.

Ἔστω τώρα $V(H_1) \cap V(H_2) = \{v\}$. Ὑποθέτουμε, μὲ σκοπὸ νὰ καταλήξουμε σὲ ἄτοπο, ὅτι ἡ v δὲν εἶναι ἀρθρική. Ἔστω K ἡ συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ G ποὺ περιέχει τὴν v· τότε τὸ $K - v$ εἶναι συνεκτικό, ἀφοῦ διαφορετικὰ τὸ $G - v$ θὰ εἶχε περισσότερες συνεκτικὲς συνιστῶσες ἀπὸ τὸ G. Ἔστω x καὶ y κορυφὲς τῶν H_1 καὶ H_2 ἀντίστοιχα, διαφορετικὲς τῆς v· ἀφοῦ τὰ H_1, H_2 εἶναι συνεκτικὰ καὶ περιέχουν τὴν v, οἱ x, y ἀνήκουν στὸ $K - v$. Ἔστω P μονοπάτι ποὺ συνδέει τὶς x καὶ y στὸ $K - v$. Θέτουμε $H = H_1 \cup H_2$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι τὸ $H - v$ εἶναι ἡ διακεκριμένη ἕνωση δυὸ γραφημάτων ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα περιέχει τὸ x καὶ τὸ ἄλλο περιέχει τὸ y. Ἄρα, τὸ P δὲν μπορεῖ νὰ ἀνήκει ἐξ ὁλοκλήρου στὸ $H - v$ καὶ ἄρα περιέχει ἀκμὲς τοῦ $E(G) \backslash E(H)$. Διατρέχοντας τὸ P ἀπὸ τὴν x πρὸς τὴν y, ἔστω x' ἡ τελευταία κορυφή του ποὺ ἀνήκει στὸ $V(H_1)$ καὶ y' ἡ πρώτη κορυφή του μετὰ τὴν x' ποὺ ἀνήκει στὸ $V(H_2)$· ἡ y' ὑπάρχει, ἀφοῦ $y \in V(H_2) \backslash V(H_1)$. Ἔστω P' τὸ ὑπομονοπάτι τοῦ P ἀπὸ τὴν x' ὡς τὴν y'. Οἱ x' καὶ y' εἶναι διαφορετικὲς τῆς v, ἀφοῦ $v \notin V(P)$. Ἐπιπλέον, ἡ x' εἶναι ἡ μόνη κορυφὴ τοῦ P' στὸ $V(H_1)$ καὶ ἡ y' ἡ μόνη στὸ $V(H_2)$, ὁπότε καμία ἀκμὴ τοῦ P' δὲν ἀνήκει στὸ H_1 ἢ στὸ H_2. Ἔστω P_x (P_y) ἕνα μονοπάτι ποὺ συνδέει τὸ x' (y') μὲ τὸ v στὸ γράφημα H_1 (H_2).

Ἀφοῦ $V(H_1) \cap V(H_2) = \{v\}$, τὸ γράφημα $C = P' \cup P_x \cup P_y$ εἶναι κύκλος, ὁ ὁποῖος περιέχει τὶς κορυφὲς x', v τοῦ H_1 καὶ τὴν κορυφὴ $y' \notin V(H_1)$. Ἂν τὸ H_1 εἶναι γέφυρα, τότε τὸ P_x εἶναι αὐτὴ ἀκριβῶς ἡ γέφυρα, ἡ ὁποία ἀνήκει στὸν κύκλο C, ἄτοπο. Διαφορετικά, ὁ κύκλος C εἶναι δισυνεκτικὸ γράφημα καί, ἀπὸ τὸ Πόρισμα 5.20, ἔχουμε ὅτι τὸ γράφημα $H_1^+ = H_1 \cup C$ εἶναι ἐπίσης δισυνεκτικό, πρᾶγμα ποὺ ἀντιφάσκει στὸ ὅτι τὸ H_1 εἶναι τεμάχιο ἐνῶ $H_1 \subset H_1^+$.

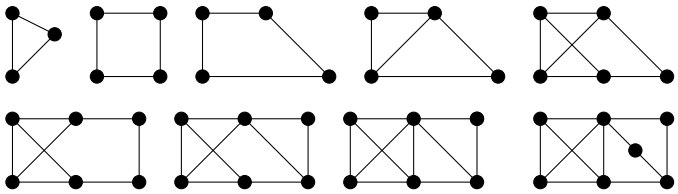
□

Τὸ παρακάτω Θεώρημα δίνει ἕναν πλήρη χαρακτηρισμὸ τῶν δισυνεκτικῶν γραφημάτων.

Θεώρημα 5.24. Ἕνα γράφημα εἶναι δισυνεκτικὸ ἂν καὶ μόνο ἂν μπορεῖ νὰ κατασκευαστεῖ ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ K_3 καὶ ἐφαρμόζοντας μιὰ ἀκολουθία μετασχηματισμῶν ποὺ μπορεῖ νὰ εἶναι:

- Ὑποδιαίρεση ἀκμῆς.
- Πρόσθεση ἀκμῆς.

Ἀπόδειξη. Τὸ γράφημα K_3 εἶναι δισυνεκτικὸ καὶ οἱ παραπάνω μετασχηματισμοὶ διατηροῦν τὴν δισυνεκτικότητα λόγῳ τοῦ Πορίσματος 5.18. Θὰ ἀναβάλουμε τὴν ἀπόδειξη τῆς κατεύθυνσης «μόνο ἄν» μιὰ κι αὐτὴ θὰ προκύψει εὔκολα ἀπὸ τὰ πολὺ γενικότερα ἀποτελέσματα τῆς ἑπόμενης ἑνότητας (Λῆμμα 5.40). □



Σχῆμα 5.5: Παράδειγμα τῆς κατασκευῆς τοῦ Θεωρήματος 5.24.

5.2 Συνεκτικότητα καὶ ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια

Ὁρισμός 5.25. Ἕνα συνεκτικὸ γράφημα G καλεῖται *k-συνεκτικό* ἂν ἔχει $> k$ κορυφὲς καὶ ὅλοι οἱ διαχωριστές του ἔχουν τουλάχιστον k κορυφές. Ὁρίζουμε τὴ *συ-*

νεκτικότητα ἑνὸς γραφήματος G ὡς ἑξῆς:

$$\kappa(G) = \max\{k \mid G \text{ εἶναι } k\text{-συνεκτικὸ }\}$$

Ἂν τὸ G δὲν εἶναι συνεκτικὸ τότε $\kappa(G) = 0$.

Παρατήρηση 5.26. Γιὰ κάθε γράφημα G, $\kappa(G) \leq \delta(G)$.

Σύμβαση. Θεωροῦμε ὅτι $\kappa(K_n) = n - 1$, παρόλο ποὺ ἂν ἀφαιρέσουμε $n - 1$ κορυφὲς ἀπὸ τὸ K_n θὰ πάρουμε τὸ K_1 ποὺ εἶναι συνεκτικό.

Ὁ λόγος ποὺ κάνουμε τὴν παραπάνω σύμβαση εἶναι γιὰ νὰ μὴν ὑπάρχει ἀναντιστοιχία τοῦ Ὁρισμοῦ 5.25 μὲ τὸ Θεώρημα 5.32.

Παρατήρηση 5.27. Γιὰ κάθε γράφημα G καὶ κάθε ἀκμὴ $e \in E(G)$ ἰσχύει ὅτι, $\kappa(G - e) \geq \kappa(G) - 1$. Ἐπίσης, γιὰ κάθε κορυφὴ $v \in V(G)$ ἰσχύει ὅτι, $\kappa(G - v) \geq \kappa(G) - 1$.

Ἡ ἑπόμενη ἔννοια εἶναι τὸ βασικὸ τεχνικὸ ἐργαλεῖο τῶν ἀποδείξεων ποὺ ἀκολουθοῦν.

Ὁρισμός 5.28. Ἔστω G γράφημα, $S \subset V(G)$, καὶ $x \in V(G) \backslash S$. Καλοῦμε (x, S)-*βεντάλια* κάθε σύνολο $|S|$ ἐσωτερικῶς διακεκριμένων μονοπατιῶν ποὺ ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ x καὶ τελειώνουν στὶς κορυφὲς τοῦ S.

Τὸ παρακάτω θεώρημα ἀποδείχτηκε ἀπὸ τὸν Menger τὸ 1927 στὴν [77]. Παρουσιάζουμε μιὰ ἀπόδειξη ποὺ προτάθηκε ἀπὸ τὸν Dirac τὸ 1966 στὴν [29].

Θεώρημα 5.29 (Menger, 1927 [77])**.** Γιὰ κάθε γράφημα G καὶ γιὰ κάθε ζεῦγος s, t μὴ γειτονικῶν κορυφῶν τοῦ G ποὺ ἀνήκουν στὴν ἴδια συνεκτικὴ συνιστῶσα του ἰσχύει ὅτι τὸ μέγεθος τοῦ ἐλάχιστου (s, t)-διαχωριστὴ τοῦ G εἶναι ἴσο μὲ τὸ μέγιστο ἀριθμὸ ἐσωτερικῶς διακεκριμένων (s, t)-μονοπατιῶν στὸ G.

Ἀπόδειξη. Ἡ εὔκολη κατεύθυνση εἶναι ἁπλὴ καταμέτρηση. Ἡ δύσκολη γίνεται μὲ διπλὴ ἐλαχιστότητα: παίρνουμε ἐλάχιστο k γιὰ τὸ ὁποῖο ἡ πρόταση ἀποτυγχάνει καί, ἀνάμεσα στὰ ἀντιπαραδείγματα, ἕνα μὲ τὶς λιγότερες κορυφές, ἀπὸ τὸ ὁποῖο ἀφαιροῦμε ὅσες ἀκμὲς μποροῦμε. Εἶναι φανερὸ ὅτι ἂν τὸ G περιέχει ἕναν (s, t)-διαχωριστὴ S μεγέθους k, τότε δὲν μπορεῖ νὰ ὑπάρχουν πάνω ἀπὸ k ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (s, t)-μονοπάτια στὸ G γιατὶ κάθε μονοπάτι πρέπει νὰ συναντᾶ κάποιο μέλος τοῦ S.

Θὰ ἀποδείξουμε τώρα ὅτι ἂν κάθε (s, t)-διαχωριστὴς S τοῦ G ἔχει μέγεθος τουλάχιστον k, τότε θὰ ὑπάρχουν τὸ λιγότερο k ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (s, t)-μονοπάτια στὸ G. Γιὰ τὸν σκοπὸ αὐτὸ θὰ χρησιμοποιήσουμε ἐπαγωγή. Προφανῶς

ἡ πρόταση αὐτὴ εἶναι σωστὴ γιὰ $k = 1$. Ὑποθέτουμε λοιπὸν ὅτι δὲν εἶναι σωστὴ γιὰ κάποιο $k > 1$ καὶ ὑποθέτουμε ὅτι τὸ k αὐτὸ εἶναι τὸ μικρότερο δυνατὸ γιὰ τὸ ὁποῖο ἡ πρόταση δὲν ἰσχύει. Μεταξὺ τῶν γραφημάτων γιὰ τὰ ὁποία ἡ πρόταση εἶναι λάθος γιὰ k, ἔστω H κάποιο μὲ τὸν μικρότερο δυνατὸ ἀριθμὸ κορυφῶν. Στὴν συνέχεια ἀφαιροῦμε ἀκμὲς ἀπὸ τὸ H ἐφόσον στὸ προκῦπτον γράφημα συνεχίζουν ὅλοι οἱ (s,t)-διαχωριστὲς νὰ εἶναι μεγέθους $\geq k$. Ὅταν αὐτὴ ἡ διαδικασία δὲν μπορεῖ νὰ συνεχιστεῖ ἄλλο, προκύπτει τὸ γράφημα G. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ G εἶναι παραγόμενο ὑπογράφημα τοῦ H καὶ ἄρα τὸ G ἐπίσης δὲν περιέχει k ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (s,t)-μονοπάτια.

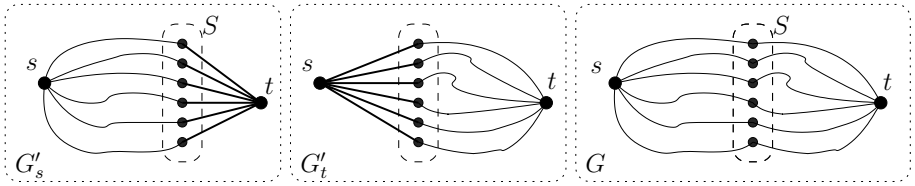
Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ G, ἔχουμε ὅτι γιὰ κάθε ἀκμὴ $e \in E(G)$ θὰ ὑπάρχει ἕνας (s,t)-διαχωριστὴς S_e μεγέθους $k-1$ στὸ $G - e$.

Ἰσχυρισμὸς α. $\forall_{e \in E(G)}\ e \cap S_e = \emptyset$ καὶ $\forall_{w \in e \setminus \{s,t\}}$ τὸ $S_e \cup \{w\}$ εἶναι ἕνας (s,t)-διαχωριστὴς τοῦ G μεγέθους k.

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ γράφημα $G - S_e$ περιέχει ἕνα (s,t)-μονοπάτι γιατὶ $|S_e| = k-1$ καὶ χρειάζονται k κορυφὲς γιὰ νὰ διαχωριστοῦν τὰ s καὶ t. Ἕνα τέτοιο μονοπάτι θὰ πρέπει νὰ περιέχει τὴν ἀκμὴ e γιατὶ δὲν εἶναι μονοπάτι τοῦ $G - e$. Ἄρα κανένα ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς e δὲν ἀνήκει στὸ S_e καὶ ἡ πρόσθεση στὸ S_e ὁποιουδήποτε ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς e (δεδομένου ὅτι τὸ ἄκρο αὐτὸ εἶναι διαφορετικὸ τῶν s καὶ t) σχηματίζει ἕναν (s,t)-διαχωριστὴ τοῦ G.

Ἰσχυρισμὸς β. $N_G(s) \cap N_G(t) = \emptyset$.

Ἔστω κάποια κορυφὴ x εἶναι γειτονικὴ στὴν t καὶ στὴν s καὶ ἔστω $G^- = G - x$. Παρατηροῦμε ὅτι κάθε (s,t)-διαχωριστὴς τοῦ G^- πρέπει νὰ ἔχει τουλάχιστον $k-1$ κορυφές, διαφορετικὰ τὸ G θὰ περιέχει ἕναν (s,t)-διαχωριστὴ (ποὺ προκύπτει μετὰ τὴν πρόσθεση τοῦ x) μὲ λιγότερες ἀπὸ k κορυφές. Λόγῳ τῆς ἐλάχιστης ἐπιλογῆς τοῦ k, ὑπάρχουν $k-1$ ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (s,t)-μονοπάτια στὸ $G - x$. Ἂν σὲ αὐτὰ προσθέσουμε καὶ τὸ μονοπάτι ποὺ ἐνάγουν οἱ κορυφὲς s, x, t, τότε ἔχουμε k ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (s,t)-μονοπάτια στὸ G, ἄτοπο.



Σχῆμα 5.6: Παράδειγμα τῆς κατασκευῆς τῆς ἀπόδειξης τοῦ Ἰσχυρισμοῦ γ. στὴν ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 5.29.

Ἰσχυρισμὸς γ. Γιὰ κάθε (s,t)-διαχωριστὴ S μεγέθους k τοῦ G ἰσχύει ὅτι $N_G(s) = S$ ἢ $N_G(t) = S$.

Ἔστω S (s,t)-διαχωριστὴς μεγέθους k τοῦ G. Καλοῦμε $\mathcal{P}_s$ τὴν συλλογὴ ὅλων τῶν μονοπατιῶν στὸ G ποὺ συνδέουν τὴν s μὲ κάποια κορυφὴ τοῦ S χωρὶς ὅμως νὰ περνοῦν ἀπὸ κάποια ἄλλη κορυφὴ τοῦ S. Ὁμοίως ὁρίζουμε τὴν $\mathcal{P}_t$. Τότε κάθε (s,t)-μονοπάτι τοῦ G, ἀπὸ τὴν στιγμὴ ποὺ θὰ περιέχει κάποια κορυφὴ τοῦ S, ἀρχίζει μὲ ἕνα μονοπάτι τῆς $\mathcal{P}_s$ καὶ τελειώνει μὲ ἕνα μονοπάτι τῆς $\mathcal{P}_t$. Ἐπίσης ἂν $P \in \mathcal{P}_s$ καὶ $P' \in \mathcal{P}_t$, τότε εἴτε $V(P) \cap V(P') = \emptyset$, εἴτε $V(P) \cap V(P') = \{q\}$ γιὰ κάποια κορυφὴ $q \in S$, διαφορετικὰ θὰ ὑπῆρχε ἕνα (s,t)-μονοπάτι ποὺ θὰ ἀπέφευγε τὶς κορυφὲς τοῦ S. Ἔστω $G_s = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_s} P$ καὶ $G_t = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_t} P$. Ὑποθέτουμε μὲ σκοπὸ τὸ ἄτοπο ὅτι $S \subsetneq V(G_s) \backslash \{s\}$ καὶ $S \subsetneq V(G_t) \backslash \{t\}$. Θεωροῦμε τὰ γραφήματα $G'_s = G_s \cup (S \cup \{t\}, \{\{x,t\} \mid x \in S\})$ καὶ $G'_t = G_t \cup (S \cup \{s\}, \{\{s,x\} \mid x \in S\})$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι $n(G'_t), n(G'_s) < n(G)$: γιὰ παράδειγμα, ἀφοῦ $S \subsetneq V(G_t) \backslash \{t\}$, τὸ G_t περιέχει κορυφὴ ἐκτὸς τοῦ $S \cup \{t\}$, ἡ ὁποία δὲν ἀνήκει στὸ G'_s. Ἐπιπλέον, κάθε (s,t)-διαχωριστὴς T τοῦ G'_s ἔχει τουλάχιστον k κορυφές. Πράγματι, κάθε (s,t)-μονοπάτι τοῦ G ἀρχίζει μὲ ἕνα μονοπάτι τῆς $\mathcal{P}_s$ ἀπὸ τὴν s σὲ κάποια κορυφὴ $q \in S$, τὸ ὁποῖο, μαζὶ μὲ τὴν ἀκμὴ $\{q,t\}$, σχηματίζει ἕνα (s,t)-μονοπάτι τοῦ G'_s καὶ ἄρα τέμνει τὸ T· ἐπομένως τὸ T εἶναι καὶ (s,t)-διαχωριστὴς τοῦ G. Ὁμοίως γιὰ τὸ G'_t. Ἀφοῦ $n(G) = n(H)$, ἀπὸ τὴν ἐπιλογὴ τοῦ H ὑπάρχουν k ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (s,t)-μονοπάτια $P_s^1, \ldots, P_s^k$ καὶ $P_t^1, \ldots, P_t^k$ στὰ G'_s καὶ G'_t ἀντίστοιχα. Ὁρίζουμε τὴν (s,S)-βεντάλια $\{Q_s^i \mid i = 1, \ldots, k\} = \{P_s^i - t, i = 1, \ldots, k\}$ καὶ τὴν (t,S)-βεντάλια $\{Q_t^i \mid i = 1, \ldots, k\} = \{P_t^i - s \mid i = 1, \ldots, k\}$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι τὰ $Q_s^1 \cup Q_t^1, \ldots, Q_s^k \cup Q_t^k$ εἶναι k ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (s,t)-μονοπάτια στὸ G, ἄτοπο (βλ. Σχῆμα 5.6).

Ἔστω τώρα P συντομότερο (s,t)-μονοπάτι στὸ G μὲ διάταξη κορυφῶν $[s, v_1, v_2, \ldots, t]$. Θέτουμε $e = \{v_1, v_2\}$ καὶ ἀπὸ τὸν Ἰσχυρισμὸ β), ἔχουμε ὅτι $v_2 \neq t$, $\{v_1, t\} \notin E(G)$ καὶ $|P| \geq 3$. Ἀπὸ τὸν Ἰσχυρισμὸ α) τὸ $\{v_1\} \cup S_e$ εἶναι (s,t)-διαχωριστὴς S μεγέθους k τοῦ G καὶ ἀφοῦ $\{v_1, t\} \notin E(G)$, ὁ Ἰσχυρισμὸς γ) μᾶς δίνει ὅτι $N_G(s) = \{v_1\} \cup S_e$. Ἀφοῦ τὸ P εἶναι συντομότερο μονοπάτι, ἰσχύει ὅτι $\{s, v_2\} \notin E(G)$. Ξανὰ ἀπὸ τὸν Ἰσχυρισμὸ α) τὸ $\{v_2\} \cup S_e$ εἶναι (s,t)-διαχωριστὴς S μεγέθους k τοῦ G καὶ ἀφοῦ $\{s, v_2\} \notin E(G)$, ὁ Ἰσχυρισμὸς γ) μᾶς δίνει ὅτι $N_G(t) = \{v_2\} \cup S_e$. Ἀφοῦ $k \geq 2$, καταλήγουμε ὅτι ὑπάρχει κορυφὴ τοῦ S_e ποὺ εἶναι γειτονικὴ τῶν s καὶ t, πρᾶγμα ποὺ ἀντιφάσκει στὸν Ἰσχυρισμὸ β). □

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ Θεώρημα τοῦ Menger εἶναι ἕνα *μεγιστοελάχιστο* θεώρημα: συνδέει μιὰ μέγιστη ποσότητα (ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (s,t)-μονοπάτια) μὲ μιὰ

ἐλάχιστη ποσότητα (μέγεθος (s,t)-διαχωριστή).

Ὁρισμός 5.30. Ὁρίζουμε τὴν *τοπικὴ συνεκτικότητα δύο μὴ γειτονικῶν κορυφῶν* x καὶ y (τῆς ἴδιας συνεκτικῆς συνιστώσας) ὡς τὸ μέγεθος ἑνὸς ἐλάχιστου (x,y)-διαχωριστὴ τοῦ G καὶ τὴν συμβολίζουμε μὲ $\kappa_G(x,y)$

Παρατήρηση 5.31. $\kappa(G) = \min\{\kappa_G(x,y) \mid x,y \in V(G), \{x,y\} \notin E(G)\}$.

Συνδυάζοντας τὸ Θεώρημα 5.29 καὶ τὶς παρατηρήσεις 5.27 καὶ 5.31, ἔχουμε τὸν παρακάτω χαρακτηρισμὸ τῆς συνεκτικότητας ἑνὸς γραφήματος.

Θεώρημα 5.32. Ἕνα γράφημα εἶναι k-συνεκτικὸ ἂν καὶ μόνο ἂν κάθε ζεῦγος κορυφῶν του συνδέεται ἀπὸ k ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια.

Ἀπόδειξη. ($\Rightarrow$) Ἔστω G k-συνεκτικὸ καὶ $x,y \in V(G)$ μὲ $x \neq y$.

Ἂν $\{x,y\} \notin E(G)$, τότε ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 5.31 ἔχουμε $\kappa_G(x,y) \geq \kappa(G) \geq k$, δηλαδὴ κάθε (x,y)-διαχωριστὴς τοῦ G ἔχει τουλάχιστον k κορυφές. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα τοῦ Menger (Θεώρημα 5.29) ὑπάρχουν k ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (x,y)-μονοπάτια.

Ἂν $e = \{x,y\} \in E(G)$, θεωροῦμε τὸ $G - e$. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 5.27, $\kappa(G-e) \geq \kappa(G) - 1 \geq k-1$, ὁπότε ἀπὸ τὴν προηγούμενη περίπτωση οἱ x καὶ y, ποὺ δὲν εἶναι πλέον γειτονικές, συνδέονται στὸ $G-e$ μὲ $k-1$ ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια. Προσθέτοντας σὲ αὐτὰ τὴν ἀκμὴ e παίρνουμε k ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (x,y)-μονοπάτια τοῦ G.

($\Leftarrow$) Ἔστω ὅτι κάθε ζεῦγος κορυφῶν τοῦ G συνδέεται μὲ k ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια καὶ ἔστω x,y δύο μὴ γειτονικὲς κορυφές. Κάθε (x,y)-διαχωριστὴς S ὀφείλει νὰ περιέχει τουλάχιστον μία ἐσωτερικὴ κορυφὴ ἀπὸ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ k μονοπάτια, καὶ οἱ κορυφὲς αὐτὲς εἶναι ἀνὰ δύο διαφορετικὲς ἀφοῦ τὰ μονοπάτια εἶναι ἐσωτερικῶς διακεκριμένα. Ἄρα $|S| \geq k$, δηλαδὴ $\kappa_G(x,y) \geq k$. Ἀφοῦ αὐτὸ ἰσχύει γιὰ κάθε ζεῦγος μὴ γειτονικῶν κορυφῶν, ἡ Παρατήρηση 5.31 δίνει $\kappa(G) \geq k$. □

Παρατήρηση 5.33. Ἂν S εἶναι ἕνας ἐλάχιστος (x,y)-διαχωριστὴς τοῦ G, τότε τὸ G θὰ περιέχει μιὰ (x,S)-βεντάλια $\mathcal{W}_x$ καὶ μιὰ (y,S)-βεντάλια $\mathcal{W}_y$. Ἐπίσης, ἂν C_x εἶναι ἡ συνιστῶσα τοῦ $G - S$ ποὺ περιέχει τὸ x, οἱ κορυφὲς τῶν μονοπατιῶν τῆς $\mathcal{W}_x$, ἐκτὸς ἀπὸ τὰ ἄκρα τους στὸ S, ἀνήκουν στὸ C_x· εἰδικότερα, εἶναι ξένες μὲ τὶς κορυφὲς κάθε ἄλλης συνιστώσας τοῦ $G - S$ (καὶ ὁμοίως γιὰ τὴ $\mathcal{W}_y$).

Πράγματι, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.29 ὑπάρχουν $|S|$ ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (x,y)-μονοπάτια. Καθένα ἀπὸ αὐτὰ τέμνει τὸ S, καὶ ἀφοῦ εἶναι $|S|$ τὸ πλῆθος καὶ

ἐσωτερικῶς διακεκριμένα, τὸ τέμνει σὲ ἀκριβῶς μία κορυφή. Τὰ τμήματά τους ἀπὸ τὴν x ὡς τὸ S σχηματίζουν τὴ $\mathcal{W}_x$ καὶ βρίσκονται, ἐκτὸς ἀπὸ τὰ ἄκρα τους, στὸ C_x· ὁμοίως τὰ τμήματά τους ἀπὸ τὸ S ὡς τὴν y σχηματίζουν τὴ $\mathcal{W}_y$.

Οἱ ἀκμὲς ἑνὸς k-συνεκτικοῦ γραφήματος δὲν εἶναι ὅλες ἐξίσου σημαντικὲς γιὰ τὴν συνεκτικότητά του.

Ὁρισμός 5.34. Καλοῦμε μιὰ ἀκμὴ e ἑνὸς k-συνεκτικοῦ γραφήματος G *κρίσιμη* ἂν $\kappa(G-e) = k-1$.

Λῆμμα 5.35. Ἔστω G γράφημα ὅπου $\kappa(G) = k$ καὶ ἔστω $e = \{x, y\} \in E(G)$. Τότε ἡ e εἶναι μιὰ κρίσιμη ἀκμὴ τοῦ G ἂν καὶ μόνο ἂν $\kappa_{G-e}(x, y) = k-1$.

Ἀπόδειξη. Οἱ δύο κατευθύνσεις ἀποδεικνύονται χωριστά· ἡ δεύτερη χρησιμοποιεῖ τὸ Θεώρημα τοῦ Menger. Θέτουμε $G^- = G - e$. Ἂν ἡ e εἶναι μιὰ κρίσιμη ἀκμὴ στὸ G τότε στὸ γράφημα G^- θὰ ὑπάρχει κάποιο σύνολο $R \subseteq V(G^-)$ μὲ $k-1$ κορυφὲς τέτοιο ὥστε τὸ $G^- - R$ νὰ μὴν εἶναι συνεκτικό. Παρατηροῦμε ὅτι τὰ x καὶ y θὰ πρέπει νὰ βρίσκονται σὲ διαφορετικὲς συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ $G^- - R$ διαφορετικὰ τὸ R θὰ εἶναι διαχωριστὴς καὶ τοῦ G, ἄτοπο γιατὶ $\kappa(G) = k$. Ἄρα τὸ R εἶναι ἕνας (x, y)-διαχωριστὴς τοῦ G^- μεγέθους $k-1$ καὶ αὐτὸ σημαίνει ὅτι $\kappa_{G^-}(x, y) \leq k-1$. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 5.27, ἔχουμε ὅτι $\kappa(G^-) \geq k-1$ καὶ ἄρα $\kappa_{G^-}(x, y) \geq k-1$. Καταλήγουμε ὅτι $\kappa_{G^-}(x, y) = k-1$.

Ἔστω τώρα e μιὰ μὴ-κρίσιμη ἀκμή. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ γράφημα G^- εἶναι k-συνεκτικὸ καὶ ἄρα, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.32, ὑπάρχουν k ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (x, y)-μονοπάτια στὸ G^- τὰ ὁποία προφανῶς ὑπάρχουν καὶ στὸ G. Συνέπεια αὐτοῦ εἶναι ὅτι κάθε (x, y)-διαχωριστὴς τοῦ G^- θὰ ἔχει τουλάχιστον k κορυφές, καὶ ἄρα $\kappa_{G-e}(x, y) \neq k-1$. □

Μιὰ ἐνδιαφέρουσα ἐφαρμογὴ τοῦ Θεωρήματος 5.29, εἶναι τὸ παρακάτω ἀποτέλεσμα τοῦ Halin ποὺ ἐμφανίστηκε στὴν [50].

Θεώρημα 5.36. Γιὰ κάθε γράφημα G μὲ $\delta(G) > \kappa(G)$ ὑπάρχει ἀκμὴ $e \in E(G)$ τέτοια ὥστε $\kappa(G-e) = \kappa(G)$.

Ἀπόδειξη. Λόγῳ τῶν Παρατηρήσεων 5.26 καὶ 5.27, εἶναι ἀρκετὸ νὰ δείξουμε ὅτι ἂν ὅλες οἱ ἀκμὲς τοῦ G εἶναι κρίσιμες, τότε τὸ G περιέχει κορυφὴ βαθμοῦ k, ὅπου $k = \kappa(G)$.

Ἀφοῦ $\kappa(G) = k$, τὸ G περιέχει τουλάχιστον ἕναν διαχωριστὴ μεγέθους k. Ἔστω S ἕνας τέτοιος διαχωριστὴς γιὰ τὸν ὁποῖο ἡ μικρότερη ἀπὸ τὶς συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ $G - S$ εἶναι ἡ μικρότερη δυνατή. Θὰ δείξουμε ὅτι ἡ συνιστῶσα

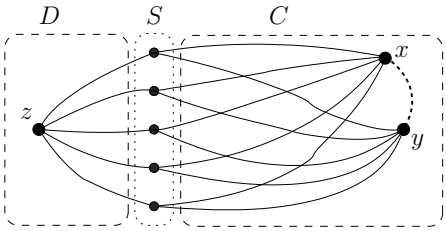
αὐτὴ ἔχει μόνο μιὰ κορυφὴ v, ἄρα $N_G(v) = S$, συνεπῶς $\deg_G(v) = k$. Καλοῦμε τὴν συνιστῶσα αὐτὴ C καὶ θέτουμε $D = G - S - V(C)$ (δηλ. τὸ D εἶναι ἡ ἕνωση ὅλων τῶν ἄλλων συνιστωσῶν τοῦ $G - S$). Παρατηροῦμε ὅτι $n(D) \geq n(C)$ καὶ ὑποθέτουμε, μὲ σκοπὸ τὸ ἄτοπο, ὅτι ὑπάρχει μιὰ ἀκμὴ $e = \{x, y\}$ μὲ $x, y \in V(C)$.

Θέτουμε $G^- = G - e$ καὶ ἀπὸ τὸ Λῆμμα 5.35 ἔχουμε ὅτι τὸ G^- θὰ περιέχει ἕναν (x, y)-διαχωριστὴ R μεγέθους $k - 1$.

Ἔστω v^* μιὰ νέα κορυφὴ ποὺ δὲν ἀνήκει στὸ G. Ὁρίζουμε

$$G^* = G^-[S \cup V(C)] \cup (\{v^*\} \cup S, \{\{v^*, w\} \mid w \in S\})$$

καὶ ἰσχυριζόμαστε ὅτι ὑπάρχουν k ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (v^*, x)-μονοπάτια στὸ G^*. Πράγματι, ἂν δὲν εἶναι ἔτσι, θὰ ὑπάρχει (Θεώρημα 5.29) ἕνας (v^*, x)-διαχωριστὴς S^* στὸ G^* μεγέθους $\leq k - 1$. Ἀφοῦ $S^* \subseteq S \cup V(C)$, τὸ S^* εἶναι καὶ (z, x)-διαχωριστὴς τοῦ G^- ὅπου z ὁποιαδήποτε κορυφὴ τοῦ D. Αὐτὸ ὅμως σημαίνει ὅτι τὸ $S^+ = S^* \cup \{y\}$ εἶναι (z, x)-διαχωριστὴς τοῦ G. Ὅμως τὸ ὅτι $S^+ \subseteq S \cup V(C)$ καὶ $S^+ \neq S$ σημαίνει ὅτι ἡ συνεκτικὴ συνιστῶσα C^+ τοῦ $G - S^+$ ποὺ περιέχει τὸ x ἔχει λιγότερες κορυφὲς ἀπὸ τὴν C, πρᾶγμα ποὺ ἀντιφάσκει στὴν ἐπιλογὴ τοῦ S. Καταλήγουμε ὅτι ὑπάρχει μιὰ (x, S)-βεντάλια $\mathcal{W}_x$ στὸ G^* ἡ ὁποία περιέχει μονοπάτια τοῦ G^-. Ἄρα ἡ $\mathcal{W}_x$ εἶναι μιὰ (x, S)-βεντάλια καὶ στὸ G^-. Ὁμοίως ἔχουμε τὴν ὕπαρξη μιᾶς (y, S)-βεντάλιας $\mathcal{W}_y$ στὸ G^-.



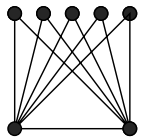
Σχῆμα 5.7: Παράδειγμα τῆς ἀπόδειξης τοῦ Θεωρήματος 5.36.

Προφανῶς τὸ S εἶναι ἐλάχιστος διαχωριστὴς τοῦ G. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι γιὰ κάθε κορυφὴ $z \in V(D)$ ὑπάρχουν k ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (z, x)-μονοπάτια στὸ G (Θεώρημα 5.29) πρᾶγμα ποὺ πιστοποιεῖ τὴν ὕπαρξη μιᾶς (z, S)-βεντάλιας $\mathcal{W}_z$ στὸ G καὶ ἄρα καὶ στὸ G^- (βλ. Παρατήρηση 5.33).

Θὰ δείξουμε τώρα ὅτι $V(D) \subseteq R$. Ἔστω, ἀντὶ γιὰ αὐτό, ὑπάρχει κορυφὴ $z \in V(D) \backslash R$. Ἡ ὕπαρξη στὸ G^- τῶν $\mathcal{W}_z$ καὶ $\mathcal{W}_x$ συνεπάγεται τὴν ὕπαρξη, στὸ G^-, k ἐσωτερικῶς διακεκριμένων (x, z)-μονοπατιῶν. Ὁμοίως ἡ ὕπαρξη στὸ G^- τῶν $\mathcal{W}_z$ καὶ $\mathcal{W}_y$ συνεπάγεται τὴν ὕπαρξη, στὸ G^-, k ἐσωτερικῶς διακεκριμένων

(z, y)-μονοπατιῶν. Ἄρα τὸ R, ἀπὸ τὴν στιγμὴ ποὺ δὲν περιέχει τὸ z, δὲν μπορεῖ νὰ διαχωρίσει τὸ x ἀπὸ τὸ z καὶ τὸ z ἀπὸ τὸ y ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ R δὲν μπορεῖ νὰ διαχωρίσει τὸ x ἀπὸ τὸ y, ἄτοπο (βλ. Σχῆμα 5.7).

Τὸ γεγονὸς ὅτι $V(D) \subseteq R$ ἤδη μᾶς ὑποδεικνύει ὅτι τὸ μέγεθος τοῦ $V(D)$ εἶναι ἀρκετὰ μικρό. Θὰ καταλήξουμε σὲ ἄτοπο δείχνοντας ὅτι $|V(D)| < |V(C)|$. Γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτό, διαμερίζουμε τὸ R σὲ τρία σύνολα, τὸ $R_1 = R \cap V(D) = V(D)$, τὸ $R_2 = R \cap S$ καὶ τὸ $R_3 = R \cap V(C)$. Μιὰ καὶ τὸ R εἶναι ἕνας (x, y)-διαχωριστὴς τοῦ G^-, θὰ ἰσχύει ὅτι γιὰ κάθε κορυφὴ w τοῦ $S \backslash R$ θὰ ὑπάρχει μιὰ κορυφὴ τοῦ R στὶς κορυφὲς τῶν μονοπατιῶν τοῦ $\mathcal{W}_x$ καὶ $\mathcal{W}_y$ ποὺ συνδέουν τὸ x μὲ τὸ w καὶ τὸ w μὲ τὸ y ἀντίστοιχα. Ἀπὸ τὴν ἄλλη μεριά, μιὰ κορυφὴ τοῦ R μπορεῖ νὰ ἀνήκει σὲ τὸ πολὺ δύο τέτοια μονοπάτια. Ἄρα $|R_3| \geq \frac{1}{2}|S \backslash R|$. Παρατηροῦμε ὅτι $|R_2| = |S| - |S \backslash R|$, ἄρα $|R_3| \geq \frac{1}{2}(|S| - |R_2|) = \frac{1}{2}(k - |R_2|)$. Συμπεραίνουμε ὅτι $|V(D)| = |R_1| = |R| - |R_3| - |R_2| = k - 1 - |R_3| - |R_2| \leq k - |R_2| - \frac{1}{2}(k - |R_2|) - 1 = \frac{1}{2}(k - |R_2|) - 1 < \frac{1}{2}(k - |R_2|) \leq |R_3| \leq |V(C)|$. □



Σχῆμα 5.8: Τὸ γράφημα $K^+_{2,5}$.

Ὁρισμός 5.37. Γιὰ $r \geq 0$, ὁρίζουμε $K^+_{2,r} = K_2 * (r \cdot K_1)$ καὶ καλοῦμε τὴν ἀκμὴ τοῦ K_2 στὸ $K^+_{2,r}$ *κέντρο* τοῦ $K^+_{2,r}$.

Λῆμμα 5.38. Ἔστω G k-συνεκτικὸ γράφημα μὲ τουλάχιστον $k + 2$ κορυφὲς ($k \geq 2$). Ἔστω ἐπίσης κορυφὴ $v \in V(G)$ βαθμοῦ k τέτοια ὥστε $K^+_{2,k-2} \subseteq_{\pi\alpha} G[N_G(v)]$. Τότε τὸ G περιέχει ἀκμὴ $e \in E(G)$ τέτοια ὥστε $\kappa(G - e) = k$.

Ἀπόδειξη. Ἡ στρατηγικὴ εἶναι νὰ δείξουμε ὅτι ἡ ἀκμὴ στὸ «κέντρο» τοῦ $K^+_{2,k-2}$ δὲν εἶναι κρίσιμη: οἱ $k-2$ κοινοὶ γείτονες τῶν x καὶ y, μαζὶ μὲ τὴν v καὶ ἕνα ἀκόμη μονοπάτι, δίνουν k ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (x, y)-μονοπάτια χωρὶς τὴν ἴδια τὴν ἀκμή. Ἔστω $e = \{x, y\}$ ἡ ἀκμὴ τοῦ $G[N_G(v)]$ ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ κέντρο τοῦ $K^+_{2,k-2}$. Ἔστω $S = \{v\} \cup (N_G(v) \backslash \{x, y\})$. Προφανῶς, $|S| = k - 1$ καί, ἀφοῦ τὸ G εἶναι k-συνεκτικό, τὸ S δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι διαχωριστής· ἄρα τὸ γράφημα $G - S$ εἶναι συνεκτικό. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ $G - S - e$ εἶναι συνεκτικό. Πράγματι, ἂν δὲν ἦταν, ἡ e θὰ ἦταν γέφυρα τοῦ $G - S$ καὶ τὸ $G - S - e$ θὰ εἶχε δύο συνεκτικὲς

συνιστῶσες, $A \ni x$ καὶ $B \ni y$. Ἀφοῦ $n(G-S) \geq (k+2)-(k-1) = 3$, μία ἀπὸ αὐτὲς ἔχει τουλάχιστον δύο κορυφές· λόγῳ συμμετρίας τῶν x καὶ y, ἔστω ἡ B. Θέτουμε $S' = (S \backslash \{v\}) \cup \{y\}$. Στὸ $G - S'$ ἡ μοναδικὴ γειτονικὴ κορυφὴ τῆς v εἶναι ἡ x, ἐνῶ ἡ μόνη ἀκμὴ τοῦ $G - S$ μεταξὺ τῶν A καὶ B εἶναι ἡ e. Ἄρα στὸ $G - S'$ δὲν ὑπάρχει ἀκμὴ μεταξὺ τοῦ $A \cup \{v\}$ καί του μὴ κενοῦ συνόλου $B \backslash \{y\}$, δηλαδὴ τὸ S' εἶναι διαχωριστὴς τοῦ G, πρᾶγμα ἀδύνατον γιατὶ $|S'| = k-1$. Ἄρα ὑπάρχει ἕνα (x,y)-μονοπάτι P στὸ $G - e$ τοῦ ὁποίου οἱ ἐσωτερικὲς κορυφὲς εἶναι ξένες μὲ τὸ S. Θεωροῦμε τώρα τὸ γράφημα $G - e$ ποὺ περιέχει $k-1$ ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (x,y)-μονοπάτια μήκους 2 μὲ ἐσωτερικὲς κορυφὲς αὐτὲς τοῦ S. Τὰ μονοπάτια αὐτά, μαζὶ μὲ τὸ P καὶ μὲ τὴν χρήση τοῦ Θεωρήματος 5.29 πιστοποιοῦν ὅτι $\kappa_{G-e}(x,y) = k$. Χρησιμοποιώντας τώρα τὸ Λῆμμα 5.35 ἔχουμε ὅτι ἡ e δὲν εἶναι κρίσιμη ἀκμὴ τοῦ G καὶ ἄρα μπορεῖ νὰ ἀφαιρεθεῖ ἀπὸ τὸ G χωρὶς νὰ μειώσει τὴν συνεκτικότητά του. □

Ὁρισμός 5.39. Μιὰ κορυφὴ v ἑνὸς γραφήματος G καλεῖται *ἁπλοειδής* (simplicial) ἂν ἡ γειτονιά της στὸ G ἐνάγει πλῆρες γράφημα.

Μιὰ ἄμεση ἐφαρμογὴ τοῦ Λήμματος 5.38 εἶναι ὁ ἀκόλουθος χαρακτηρισμὸς τῶν δισυνεκτικῶν γραφημάτων.

Λῆμμα 5.40. Ἂν ἕνα γράφημα G εἶναι δισυνεκτικὸ τότε εἴτε θὰ εἶναι ἰσόμορφο μὲ τὸ K_3 εἴτε θὰ περιέχει μιὰ μὴ-ἁπλοειδῆ κορυφὴ βαθμοῦ 2 τῆς ὁποίας ἡ διάλυση μᾶς δίνει ἕνα δισυνεκτικὸ γράφημα ἢ περιέχει μιὰ ἀκμὴ τῆς ὁποίας ἡ ἀφαίρεση μᾶς δίνει ἕνα δισυνεκτικὸ γράφημα.

Ἀπόδειξη. Ἡ ἀπόδειξη συνδυάζει δύο προηγούμενα ἀποτελέσματα: τὸ ἕνα ἐξασφαλίζει κορυφὴ βαθμοῦ 2 ὅταν ὅλες οἱ ἀκμὲς εἶναι κρίσιμες, καὶ τὸ ἄλλο ὅτι ἡ κορυφὴ αὐτὴ δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι ἁπλοειδής. Τὸ Λῆμμα εἶναι προφανὲς ἂν τὸ G περιέχει μὴ-κρίσιμες ἀκμές. Ἂν τώρα ὅλες οἱ ἀκμὲς τοῦ G εἶναι κρίσιμες τότε ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.36, τὸ G θὰ περιέχει κάποια κορυφὴ v βαθμοῦ 2. Ἂν τὸ G ἔχει τρεῖς κορυφές, τότε εἶναι ἰσόμορφο μὲ τὸ K_3. Διαφορετικὰ $n(G) \geq 4$, ὁπότε, ἀπὸ τὸ Λῆμμα 5.38 γιὰ $k = 2$, ἡ v δὲν εἶναι ἁπλοειδὴς (ἀλλιῶς θὰ ὑπῆρχε μὴ-κρίσιμη ἀκμή), καὶ ἀπὸ τὸ Πόρισμα 5.18 τὸ G/v εἶναι ἐπίσης 2-συνεκτικό. □

5.3 3-συνεκτικότητα

Λῆμμα 5.41. Κάθε 3-συνεκτικὸ γράφημα μὲ τουλάχιστον 5 κορυφὲς περιέχει ἀκμὴ e τέτοια ὥστε τὸ γράφημα G/e νὰ εἶναι 3-συνεκτικό.

Ἀπόδειξη. Ἡ ἀπόδειξη εἶναι μὲ ἄτοπο καὶ βασίζεται σὲ ἕνα ἐπιχείρημα ἀκρότητας: ἀνάμεσα σὲ ὅλους τοὺς 3-διαχωριστὲς ποὺ προκύπτουν, διαλέγουμε ἐκεῖνον ποὺ ἀφήνει τὴ μεγαλύτερη δυνατὴ συνιστῶσα, καὶ δείχνουμε ὅτι μποροῦμε πάντα νὰ φτιάξουμε ἀκόμη μεγαλύτερη. Ἔστω G ἕνα 3-συνεκτικὸ γράφημα μὲ τουλάχιστον 5 κορυφές. Γιὰ κάθε ἀκμὴ e τοῦ G καλοῦμε v_e τὴν κορυφὴ ποὺ προκύπτει μετὰ τὴν σύνθλιψή της καὶ G_e τὸ γράφημα G/e. Ὑποθέτουμε, πρὸς ἄτοπο, ὅτι γιὰ κάθε ἀκμὴ e τὸ γράφημα G_e δὲν εἶναι 3-συνεκτικὸ καὶ ἄρα περιέχει ἕναν 2-διαχωριστὴ S. Συνεπάγεται τότε ὅτι ἡ κορυφὴ v_e ἀνήκει στὸ S καθὼς μποροῦμε νὰ παρατηρήσουμε ὅτι κάθε διαχωριστὴς τοῦ G_e ποὺ δὲν περιέχει τὴν v_e εἶναι καὶ διαχωριστὴς τοῦ G.

Γιὰ κάθε $e \in E(G)$ θέτουμε $X_e = \{x \in V(G_e) \mid \{v_e, x\}$ διαχωριστὴς τοῦ $G_e\}$. Παρατηροῦμε τότε ὅτι γιὰ κάθε $e = \{a, b\}$ καὶ $x \in X_e$ τὸ $\{a, b, x\}$ ἀποτελεῖ 3-διαχωριστὴ τοῦ G. Καλοῦμε x_e τὸ στοιχεῖο τοῦ X_e γιὰ τὸ ὁποῖο ἡ συνιστῶσα τοῦ $G - \{a, b, x_e\}$ μὲ τὸ μέγιστο πλῆθος κορυφῶν, ἔστω C_{e,x_e}, ἔχει τὸ μεγαλύτερο δυνατὸ μέγεθος. Τέλος, ἔστω $e = \{a, b\}$ ἡ ἀκμὴ γιὰ τὴν ὁποία τὸ C_{e,x_e} ἔχει τὸ μέγιστο δυνατὸ μέγεθος, ἔστω $S_e = \{a, b, x_e\}$ καὶ ἔστω H κάποια ἄλλη συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ $G - S_e$.

Ἀφοῦ τὸ G εἶναι 3-συνεκτικὸ τὸ S_e εἶναι ἕνας ἐλάχιστος καὶ ἄρα καὶ ἐλαχιστικὸς διαχωριστής του. Παρατηροῦμε τότε ὅτι κάθε κορυφὴ τοῦ S_e ἔχει τουλάχιστον ἕναν γείτονα σὲ κάθε συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ $G - S_e$. Ἔστω z ὁ γείτονας τῆς x_e στὸ H. Τότε, γιὰ τὴν ἀκμὴ $f = \{x_e, z\}$ ὑπάρχει κορυφὴ $x_f \in X_f$ γιὰ τὴν ὁποία τὸ $S_f = \{x_e, z, x_f\}$ εἶναι διαχωριστὴς τοῦ G. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι τὸ γράφημα $J = G[V(C_{e,x_e}) \cup \{a, b\}]$ εἶναι συνεκτικὸ ὑπογράφημα τοῦ $G - \{x_e, z\}$.

Ἂν ἡ x_f δὲν εἶναι κορυφὴ τοῦ J τότε τὸ J εἶναι ἕνα συνεκτικὸ ὑπογράφημα τοῦ $G - \{x_e, z, x_f\}$ μὲ $|V(J)| = |V(C_{e,x_e})| + 2$, τὸ ὁποῖο εἶναι ἄτοπο λόγῳ τῆς ἐπιλογῆς τῆς ἀκμῆς e. Συνεπῶς $x_f \in V(J)$. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι ἂν $x_f \in \{a, b\}$ τότε τὸ γράφημα $J - x_f$ παραμένει συνεκτικὸ ὑπογράφημα τοῦ $G - S_f$ μὲ γνήσια περισσότερες κορυφὲς ἀπὸ τὴν C_{e,x_e}, τὸ ὁποῖο ὅπως πρὶν ἀντιφάσκει στὴν ἐπιλογὴ τῆς e. Ἄρα $x_f \in V(C_{e,x_e})$.

Θὰ ἀποδείξουμε τώρα ὅτι τὸ γράφημα $J - x_f$ εἶναι συνεκτικό. Ἔστω πρὸς ἄτοπο ὅτι ἡ κορυφὴ x_f εἶναι διαχωριστὴς τοῦ J καὶ D μία συνιστῶσα του ποὺ δὲν περιέχει καμία ἀπὸ τὶς a, b (οἱ a, b εἶναι συνδεδεμένες στὸ $J - x_f$). Παρατηροῦμε τότε ὅτι τὸ σύνολο $\{x_e, x_f\}$ διαχωρίζει τὶς κορυφὲς τοῦ D ἀπὸ τὶς ὑπόλοιπες κορυφὲς τοῦ γραφήματος (ἀφοῦ τὶς διαχωρίζει ἀπὸ τὸν διαχωριστὴ S_e), τὸ ὁποῖο εἶναι ἄτοπο λόγῳ τῆς 3-συνεκτικότητας τοῦ G. Συνεπῶς, ἰσχύει ὅτι τὸ $J - x_f$ εἶναι συνεκτικό. Ἐπιπλέον, παρατηροῦμε ὅτι τὸ $J - x_f$ εἶναι συνεκτικὸ ὑπογράφημα

τοῦ $G - S_f$ καὶ $|V(J - x_f)| = |V(C_{e,x_e})| + 1$ ἀφοῦ ἐπιπλέον τῶν κορυφῶν τοῦ $C_{e,x_e} - x_f$ περιέχει τὶς κορυφὲς a, b. Καταλήγουμε πάλι σὲ ἄτοπο, στὴν ἐπιλογὴ τῆς ἀκμῆς e καὶ ἄρα τὸ G περιέχει μία ἀκμὴ e τέτοια ὥστε τὸ γράφημα G/e νὰ εἶναι 3-συνεκτικό. □

Τὸ Λῆμμα 5.41 μᾶς δίνει τὰ παρακάτω πορίσματα.

Πόρισμα 5.42. Γιὰ κάθε 3-συνεκτικὸ γράφημα G ὑπάρχει μιὰ ἀκολουθία $m \geq 1$ 3-συνεκτικῶν γραφημάτων $G_1, \ldots, G_m$ τέτοια ὥστε $G_1 = G$, $G_m = K_4$ καὶ γιὰ κάθε $i = 1, \ldots, m-1$, τὸ G_{i+1} εἶναι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς σύνθλιψης μιᾶς ἀκμῆς τοῦ G_i.

Ἀπόδειξη. Ἐπαγωγὴ στὸ $n(G)$. Ἂν $n(G) = 4$, τότε τὸ μοναδικὸ 3-συνεκτικὸ γράφημα μὲ τέσσερις κορυφὲς εἶναι τὸ K_4 (χρειάζονται $\delta(G) \geq 3$ καὶ ἄρα ὅλες οἱ κορυφὲς ἀνὰ δύο γειτονικές), ὁπότε παίρνουμε $m = 1$ καὶ $G_1 = G = K_4$.

Ἔστω $n(G) \geq 5$ καὶ ἔστω ὅτι τὸ πόρισμα ἰσχύει γιὰ κάθε 3-συνεκτικὸ γράφημα μὲ λιγότερες κορυφές. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 5.41, ὑπάρχει ἀκμὴ e τοῦ G τέτοια ὥστε τὸ $G' = G/e$ νὰ εἶναι 3-συνεκτικό. Ἀφοῦ $n(G') = n(G) - 1$, ἡ ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση δίνει ἀκολουθία $G'_1, \ldots, G'_{m'}$ μὲ $G'_1 = G'$, $G'_{m'} = K_4$ καὶ κάθε ἑπόμενο γράφημα νὰ προκύπτει ἀπὸ τὸ προηγούμενο μὲ σύνθλιψη ἀκμῆς. Ἡ ἀκολουθία $G, G'_1, \ldots, G'_{m'}$ εἶναι ἡ ζητούμενη. □

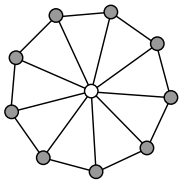
Πόρισμα 5.43. Γιὰ κάθε γράφημα G μὲ $n(G) \geq 4$, ἂν τὸ G εἶναι 3-συνεκτικὸ τότε $K_4 \leq_{\epsilon\lambda} G$.

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὸ προηγούμενο πόρισμα ὑπάρχει ἀκολουθία $G_1, \ldots, G_m$ μὲ $G_1 = G$, $G_m = K_4$ καὶ κάθε G_{i+1} νὰ προκύπτει ἀπὸ τὸ G_i μὲ σύνθλιψη μιᾶς ἀκμῆς. Ἄρα τὸ K_4 προκύπτει ἀπὸ τὸ G μὲ μιὰ ἀκολουθία συνθλίψεων ἀκμῶν, δηλαδὴ $K_4 \leq_{\epsilon\lambda} G$. □

Στὰ 3-συνεκτικὰ γραφήματα ἐμφανίζεται μιὰ οἰκογένεια ποὺ παίζει τὸν ρόλο τῶν ἐλαχιστικῶν παραδειγμάτων, μὲ τὴν ἔννοια ὅτι δὲν ἁπλοποιεῖται περαιτέρω.

Ὁρισμός 5.44. Καλοῦμε *τροχὸ μὲ r ἀκτῖνες* τὸ γράφημα $W_r = C_r * K_1$. Ἕνα γράφημα καλεῖται *τροχὸς* ἂν εἶναι ἰσόμορφο μὲ τὸ W_r γιὰ κάποιο $r \geq 3$.

Τὸ ἑπόμενο λῆμμα εἶναι ὁ πυρῆνας τοῦ θεωρήματος τοῦ Tutte: μὲ ἐξαίρεση τοὺς τροχούς, κάθε 3-συνεκτικὸ γράφημα ἁπλοποιεῖται κατὰ μία ἀκμὴ χωρὶς νὰ χάσει τὴν 3-συνεκτικότητά του.



Σχῆμα 5.9: Ὁ τροχὸς W_9.

Λῆμμα 5.45. Ἂν ἕνα γράφημα G εἶναι 3-συνεκτικὸ καὶ δὲν εἶναι τροχός, τότε ἢ ὑπάρχει μιὰ ἀκμὴ $e \in E(G)$ τέτοια ὥστε τὸ $G - e$ νὰ εἶναι 3-συνεκτικὸ ἢ ὑπάρχει μιὰ ἀκμὴ $e \in E(G)$, ποὺ δὲν περιέχεται σὲ κανένα τρίγωνο τοῦ G, τέτοια ὥστε τὸ G/e νὰ εἶναι 3-συνεκτικό.

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτουμε, πρὸς ἄτοπο, ὅτι καμία ἀκμὴ δὲν μπορεῖ οὔτε νὰ ἀφαιρεθεῖ οὔτε νὰ συνθλιβεῖ, καὶ δείχνουμε ὅτι τότε τὸ G εἶναι ἀναγκαστικὰ τροχός. Θὰ χρησιμοποιήσουμε ἐπαγωγὴ στὸν ἀριθμὸ τῶν κορυφῶν τοῦ G. Τὸ μοναδικὸ 3-συνεκτικὸ γράφημα μὲ 4 κορυφὲς εἶναι τὸ $K_4 \simeq W_3$, ὁπότε μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι $n(G) \geq 5$. Ὑποθέτουμε ὅτι τὸ λῆμμα ἰσχύει γιὰ κάθε γράφημα μὲ λιγότερο ἀπὸ n κορυφές. Ἔστω λοιπὸν $n(G) = n$. Γιὰ εὐκολία θὰ καλοῦμε *ἁπλὲς* τὶς ἀκμὲς τοῦ G ποὺ δὲν περιέχονται σὲ κανένα τρίγωνο τοῦ G. Μποροῦμε ἐπίσης νὰ ὑποθέσουμε ὅτι ἡ ἀφαίρεση μιᾶς ὁποιασδήποτε ἀκμῆς ἀπὸ τὸ G τὸ κάνει μὴ 3-συνεκτικό, δηλαδὴ ὅτι ὅλες οἱ ἀκμὲς τοῦ G εἶναι κρίσιμες. Ὑποθέτουμε ἐπιπλέον ὅτι ἡ σύνθλιψη κάθε ἁπλῆς ἀκμῆς στὸ G δίνει γράφημα ποὺ δὲν εἶναι 3-συνεκτικό. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι:

> (*) *Γιὰ κάθε ἁπλὴ ἀκμὴ $e = \{a, b\}$ τοῦ G ὑπάρχει μιὰ κορυφὴ v_e ἡ ὁποία εἶναι ἀρθρικὴ κορυφὴ τοῦ $G_e = G - a - b$.*

Πράγματι, τὸ G/e ἔχει τουλάχιστον 4 κορυφὲς καί, ἀφοῦ δὲν εἶναι 3-συνεκτικό, ἔχει διαχωριστὴ T μὲ $|T| \leq 2$. Ὁ T περιέχει τὴν κορυφὴ z ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴ σύνθλιψη, ἀφοῦ διαφορετικὰ θὰ ἦταν διαχωριστὴς καὶ τοῦ G. Ἂν $T = \{z\}$, τότε τὸ $\{a, b\}$ θὰ ἦταν διαχωριστὴς τοῦ G· ἄρα $T = \{z, v_e\}$ γιὰ κάποια κορυφὴ v_e, ἡ ὁποία εἶναι ἀρθρικὴ του (συνεκτικοῦ) γραφήματος G_e. Μὲ βάση τὶς ὑποθέσεις ποὺ κάναμε πρὶν ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξουμε ὅτι τὸ γράφημα G εἶναι ἰσόμορφο μὲ κάποιον τροχὸ W_r.

Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.36, ὑπάρχει κορυφὴ $v \in V(G)$ ποὺ νὰ ἔχει ἀκριβῶς τρεῖς γειτονικὲς κορυφές, ἔστω τὶς v_1, v_2, v_3. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 5.38 καὶ ἀφοῦ $K_3 \simeq K^+_{2,1}$, τὸ πολὺ δύο ζεύγη ἀπὸ τὶς κορυφὲς v_1, v_2, v_3 εἶναι ἀκμὲς τοῦ G. Θὰ ἀποδείξουμε

παρακάτω ὅτι ἀκριβῶς δύο ζεύγη ἀπὸ τὶς κορυφὲς v_1, v_2, v_3 εἶναι ἀκμὲς τοῦ G. Θὰ ἀποκλείσουμε λοιπὸν τὶς δύο ἄλλες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: κανένα ζεῦγος ἀπὸ τὶς κορυφὲς v_1, v_2, v_3 δὲν εἶναι ἀκμὴ τοῦ G.

Τότε καμία ἀπὸ τὶς ἀκμὲς $\{v, v_i\}$ δὲν ἀνήκει σὲ τρίγωνο, δηλαδὴ ὅλες εἶναι ἁπλές. Παρατηροῦμε ἐπίσης τὸ ἑξῆς:

> (**) *Ἂν $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$ καὶ τὸ $\{v, v_i, u\}$ εἶναι διαχωριστὴς τοῦ G, τότε $u \notin \{v_j, v_l\}$ καὶ τὸ $G - \{v, v_i, u\}$ ἔχει ἀκριβῶς δύο συνεκτικὲς συνιστῶσες, ἀπὸ τὶς ὁποῖες ἡ μία περιέχει τὴν v_j καὶ ἡ ἄλλη τὴν v_l.*

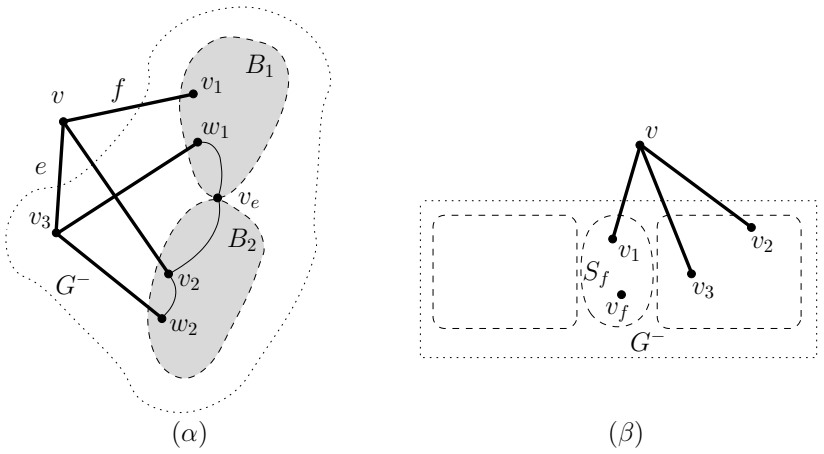
Πράγματι, μιὰ συνιστῶσα D τοῦ $G - \{v, v_i, u\}$ ποὺ δὲν περιέχει καμία ἀπὸ τὶς v_j, v_l δὲν περιέχει γειτονικὴ κορυφὴ τῆς v· ἄρα ὅλες οἱ γειτονικὲς κορυφὲς τῆς D ἐκτὸς αὐτῆς ἀνήκουν στὸ $\{v_i, u\}$, καὶ τὸ $\{v_i, u\}$ θὰ ἦταν διαχωριστὴς τοῦ G, ἄτοπο. Ἑπομένως κάθε συνιστῶσα περιέχει κάποια ἀπὸ τὶς v_j, v_l καί, ἀφοῦ οἱ συνιστῶσες εἶναι τουλάχιστον δύο, ἔπεται ἡ (**).

Ἔστω $e = \{v, v_3\}$ καὶ ἔστω v_e μιὰ ἀρθρικὴ κορυφὴ τοῦ G_e, ἡ ὁποία ὑπάρχει ἀπὸ τὴν (*). Ἀπὸ τὴν (**), τὸ $G_e - v_e = G - \{v, v_3, v_e\}$ ἔχει ἀκριβῶς δύο συνεκτικὲς συνιστῶσες, τὴν $B_1 \ni v_1$ καὶ τὴν $B_2 \ni v_2$ (βλ. Σχῆμα 5.10.(α)). Ἡ κορυφὴ v_3 ἔχει γειτονικὲς κορυφὲς $w_1 \in V(B_1)$ καὶ $w_2 \in V(B_2)$: ἄν, γιὰ παράδειγμα, ἡ v_3 δὲν εἶχε γειτονικὴ κορυφὴ στὸ B_2, τότε ὅλες οἱ γειτονικὲς κορυφὲς τοῦ B_2 ἐκτὸς αὐτοῦ θὰ ἀνῆκαν στὸ $\{v, v_e\}$ καὶ τὸ $\{v, v_e\}$ θὰ ἦταν διαχωριστὴς τοῦ G. Ἀφοῦ ἡ v_3 δὲν εἶναι γειτονικὴ τῶν v_1, v_2, ἔχουμε $w_1 \neq v_1$ καὶ $w_2 \neq v_2$.

Θεωροῦμε τώρα τὴν ἀκμὴ $f = \{v, v_1\}$, ἡ ὁποία εἶναι ἐπίσης ἁπλή. Ἀπὸ τὴν (*), ὑπάρχει κορυφὴ v_f τέτοια ὥστε τὸ $S_f = \{v_1, v_f\}$ νὰ εἶναι διαχωριστὴς τοῦ δισυνεκτικοῦ γραφήματος $G^- = G - v$ (βλ. Σχῆμα 5.10.(α)). Ἀπὸ τὴν (**), $v_f \notin \{v_2, v_3\}$ καὶ τὸ $G^- - S_f$ ἔχει ἀκριβῶς δύο συνεκτικὲς συνιστῶσες, τὴν $X_2 \ni v_2$ καὶ τὴν $X_3 \ni v_3$· πράγματι, ἂν οἱ v_2, v_3 βρίσκονταν στὴν ἴδια συνιστῶσα τοῦ $G^- - S_f$, τότε τὸ S_f θὰ ἦταν διαχωριστὴς τοῦ G (βλ. Σχῆμα 5.10.(β)).

Ἂν $v_f \notin V(B_2)$, τότε τὸ συνεκτικὸ γράφημα B_2 δὲν τέμνει τὸ S_f (ἀφοῦ $v_1 \in V(B_1)$) καὶ περιέχει τὶς v_2 καὶ w_2, ὅπου ἡ w_2 εἶναι γειτονικὴ τῆς v_3. Ἄρα οἱ v_2 καὶ v_3 συνδέονται στὸ $G^- - S_f$, ἄτοπο.

Ἂν $v_f \in V(B_2)$, τότε ἡ X_2 περιέχει κάποια γειτονικὴ κορυφὴ y τῆς v_1, διαφορετικὰ τὸ $\{v, v_f\}$ θὰ ἦταν διαχωριστὴς τοῦ G. Οἱ γειτονικὲς κορυφὲς τῆς v_1 ἀνήκουν στὸ $V(B_1) \cup \{v, v_3, v_e\}$ καὶ $v_3 \in V(X_3)$, ἄρα $y \in V(B_1) \cup \{v_e\}$. Ἂν $y \neq v_e$, ἕνα μονοπάτι τοῦ X_2 ἀπὸ τὴν $v_2 \in V(B_2)$ στὴν $y \in V(B_1)$ περνάει ἀπὸ τὸν διαχωριστὴ $\{v, v_3, v_e\}$, καὶ μάλιστα ἀπὸ τὴν v_e· σὲ κάθε περίπτωση λοιπὸν $v_e \in V(X_2)$. Ἀπὸ τὴν ἄλλη, $w_1 \in V(X_3)$, ἀφοῦ ἡ w_1 εἶναι γειτονικὴ τῆς v_3 καὶ δὲν ἀνήκει στὸ



Σχῆμα 5.10: (α) Μιὰ ἀναπαράσταση τοῦ γραφήματος G καὶ τῶν συνεκτικῶν συνιστωσῶν τοῦ G_e στὴν πρώτη περίπτωση τῆς ἀπόδειξης τοῦ Λήμματος 5.45. (β) τὸ σύνολο S_f ὡς διαχωριστὴς τοῦ G.

S_f. Ἔστω Y ἡ συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ γραφήματος $G[(V(B_1)\backslash\{v_1\}) \cup \{v_e\}]$ ποὺ περιέχει τὴν w_1. Τὸ γράφημα αὐτὸ εἶναι ὑπογράφημα τοῦ $G^- - S_f$, ὁπότε $v_e \notin V(Y)$ καὶ ἄρα $V(Y) \subseteq V(B_1)$. Ἑπομένως ὅλες οἱ γειτονικὲς κορυφὲς τῆς Y ἐκτὸς αὐτῆς ἀνήκουν στὸ $\{v_1, v, v_3\}$, καὶ μάλιστα στὸ $\{v_1, v_3\}$, ἀφοῦ ἡ μόνη γειτονικὴ κορυφὴ τῆς v στὸ B_1 εἶναι ἡ v_1. Ἔτσι τὸ $\{v_1, v_3\}$ εἶναι διαχωριστὴς τοῦ G, ἄτοπο.

Περίπτωση 2: μόνο ἕνα, ἔστω $\{v_1, v_2\}$, ζεῦγος ἀπὸ τὶς κορυφὲς v_1, v_2, v_3 εἶναι ἀκμὴ τοῦ G.

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ $e = \{v, v_3\}$ εἶναι ἁπλὴ ἀκμὴ τοῦ G. Θέτουμε $S = \{v, v_3, v_e\}$, ὅπου ἡ v_e δίνεται ἀπὸ τὴν (*), καὶ ἔστω C καὶ D διαφορετικὲς συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ $G - S$. Ἀφοῦ οἱ v_1, v_2 εἶναι γειτονικές, ὅσες ἀπὸ αὐτὲς δὲν ἀνήκουν στὸ S βρίσκονται στὴν ἴδια συνιστῶσα, ὁπότε μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι $\{v_1, v_2\}\backslash\{v_e\} \subseteq V(C)$. Τότε οἱ τρεῖς γειτονικὲς κορυφὲς τοῦ v στὸ G βρίσκονται εἴτε στὸ S εἴτε στὴν C καὶ ἄρα τὸ v δὲν ἔχει γειτονικὴ κορυφὴ στὴν D, ἄρα τὸ $\{v_3, v_e\}$ εἶναι διαχωριστὴς τοῦ G, ἄτοπο.

Καταλήγουμε ὅτι δύο ζεύγη, ἔστω οἱ $\{v_1, v_2\}$ καὶ $\{v_1, v_3\}$ ἀπὸ τὶς κορυφὲς v_1, v_2, v_3 εἶναι ἀκμὲς τοῦ G.

Ὁρίζουμε ὡς G' τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸ $G - v$ ἂν του προσθέσουμε τὴν ἀκμὴ $\{v_2, v_3\}$. Ἰσχυριζόμαστε ὅτι τὸ G' εἶναι 3-συνεκτικό. Πράγματι, ἂν αὐτὸ δὲν εἶναι σωστό, θὰ ὑπάρχει ἕνας διαχωριστὴς S τοῦ G' ὅπου $|S| \leq 2$. Ἀφοῦ οἱ

κορυφὲς v_1, v_2, v_3 ἐνάγουν κλίκα στὸ G' θὰ ἀνήκουν καὶ οἱ τρεῖς στὴν ἕνωση τοῦ S μὲ κάποια ἀπὸ τὶς συνεκτικὲς συνιστῶσες, ἔστω τὴν C, τοῦ $G' - S$. Τότε ὅμως τὸ S θὰ εἶναι διαχωριστὴς τοῦ G, ἄτοπο.

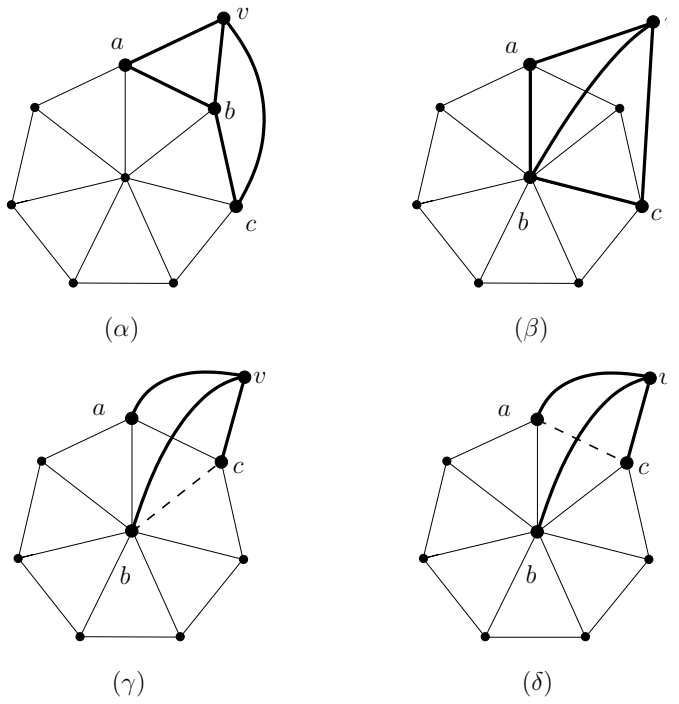
Ἰσχυριζόμαστε τώρα ὅτι ὅλες οἱ ἀκμὲς τοῦ G' ἐκτὸς ἴσως ἀπὸ τὴν $\hat{e} = \{v_2, v_3\}$ εἶναι κρίσιμες ἀκμὲς τοῦ G'. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 5.35 καὶ τὸ Θεώρημα 5.29, γιὰ κάθε μὴ-κρίσιμη ἀκμὴ $f = \{x, y\}$ τοῦ G' θὰ ὑπάρχουν 3 ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (x, y)-μονοπάτια στὸ $G' - f$. Παρατηροῦμε ὅτι τὰ ἴδια (x, y)-μονοπάτια θὰ ὑπάρχουν καὶ στὸ G μὲ τὴν διαφορὰ ὅτι ἂν κάποιο μονοπάτι χρησιμοποιεῖ τὴν ἀκμὴ $\{v_2, v_3\}$ στὴν θέση του θὰ χρησιμοποιεῖ τὶς ἀκμὲς $\{v_2, v\}$ καὶ $\{v, v_3\}$. Πάλι ἀπὸ τὸ Λῆμμα 5.35 καὶ τὸ Θεώρημα 5.29 ἔχουμε ὅτι ἡ f εἶναι μὴ κρίσιμη ἀκμὴ στὸ G, ἄτοπο.

Ἰσχυριζόμαστε ἐπίσης ὅτι καὶ ἡ $\hat{e} = \{v_2, v_3\}$ εἶναι κρίσιμη ἀκμὴ τοῦ G'. Πράγματι, ἔστω ὅτι τὸ $G' - \hat{e} = G - v$ εἶναι 3-συνεκτικό. Θὰ δείξουμε ὅτι τότε ἡ ἀκμὴ $e' = \{v_1, v_2\}$ εἶναι μὴ-κρίσιμη στὸ G, ἄτοπο. Ἔστω T διαχωριστὴς τοῦ $G - e'$ μὲ $|T| \leq 2$. Οἱ v_1, v_2 ἀνήκουν σὲ διαφορετικὲς συνιστῶσες τοῦ $(G - e') - T$, διαφορετικὰ τὸ T θὰ ἦταν διαχωριστὴς τοῦ G. Ἀφοῦ ἡ v εἶναι γειτονικὴ καὶ τῶν δύο, $v \in T$, δηλαδὴ $T = \{v, t\}$ γιὰ κάποια κορυφὴ t, καὶ ἡ e' εἶναι γέφυρα τοῦ γραφήματος $G - v - t$. Αὐτὸ ὅμως εἶναι ἀδύνατον, ἀφοῦ τὸ $G - v - t$ εἶναι δισυνεκτικὸ (τὸ $G - v$ εἶναι 3-συνεκτικό) καί, ὅπως εἴδαμε στὴν ἀπόδειξη τοῦ Λήμματος 5.23, ἕνα δισυνεκτικὸ γράφημα δὲν περιέχει καὶ τὰ δύο ἄκρα μιᾶς γέφυρας.

Θέτουμε λοιπὸν $H = G'$. Τὸ H εἶναι 3-συνεκτικὸ γράφημα ὅπου ὅλες οἱ ἀκμὲς εἶναι κρίσιμες καὶ $n(H) < n(G)$. Ἄρα μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση ποὺ μᾶς δίνει ὅτι τὸ H εἶναι εἴτε τροχὸς εἴτε περιέχει μιὰ ἁπλὴ ἀκμὴ f τέτοια ὥστε τὸ H/f νὰ εἶναι 3-συνεκτικό. Θὰ ἀποκλείσουμε πρῶτα τὴν δεύτερη περίπτωση. Ἀφοῦ ἡ f εἶναι ἁπλὴ στὸ H, δὲν εἶναι καμία ἀπὸ τὶς ἀκμὲς τοῦ τριγώνου $v_1v_2v_3$ τοῦ H, καὶ ἄρα εἶναι ἀκμὴ καὶ τοῦ G. Ἐπιπλέον, ἡ f εἶναι ἁπλὴ καὶ στὸ G: κάθε τρίγωνο τοῦ G ποὺ δὲν περιέχει τὴν v εἶναι τρίγωνο τοῦ $G - v \subseteq H$, ἐνῶ οἱ ἀκμὲς τῶν τριγώνων τοῦ G ποὺ περιέχουν τὴν v εἶναι ἀκμὲς τῆς μορφῆς $\{v, v_i\}$ ἢ οἱ $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$. Θὰ δείξουμε ὅτι τὸ G/f εἶναι 3-συνεκτικό, πρᾶγμα ποὺ ἀντιβαίνει στὴν ὑπόθεσή μας γιὰ τὶς ἁπλὲς ἀκμὲς τοῦ G. Ἀφοῦ ἡ f δὲν ἀνήκει σὲ τρίγωνο τοῦ H, ἡ σύνθλιψή της δὲν δημιουργεῖ παράλληλες ἀκμές· ἐπιπλέον ἡ f δὲν ἑνώνει δύο ἀπὸ τὶς v_1, v_2, v_3, ὁπότε αὐτὲς παραμένουν διακεκριμένες κορυφὲς τοῦ $K = H/f$ καὶ ἡ $\hat{e}$ παραμένει ἀκμή του. Τὸ G/f προκύπτει ἀπὸ τὸ K ἂν ὑποδιαιρέσουμε τὴν $\hat{e}$ μὲ τὴν κορυφὴ v καὶ συνδέσουμε τὴν v μὲ τὴν v_1. Ἔστω T σύνολο τὸ πολὺ δύο κορυφῶν τοῦ G/f. Ἂν $v \in T$, τότε τὸ $(G/f) - T$ εἶναι τὸ $(K - \hat{e}) - (T \backslash \{v\})$, ποὺ εἶναι συνεκτικό, ἀφοῦ γιὰ κάθε κορυφὴ t τὸ $K - t$ εἶναι δισυνεκτικὸ καὶ ἄρα ἡ $\hat{e}$ δὲν εἶναι γέφυρα του. Ἂν $v \notin T$, τότε τὸ $K - T$

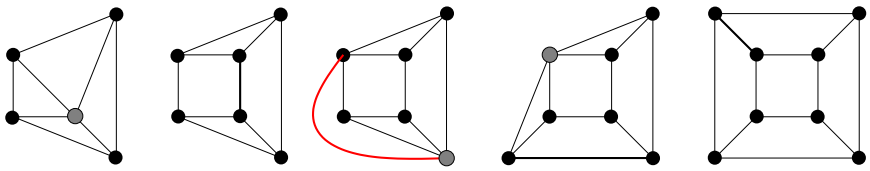
εἶναι συνεκτικό, καὶ τὸ ἴδιο ἰσχύει γιὰ τὸ $(G/f) - T$: κάθε χρήση τῆς ἀκμῆς $\hat{e}$ σὲ ἕνα μονοπάτι τοῦ $K - T$ ἀντικαθίσταται ἀπὸ τὸ μονοπάτι $[v_2, v, v_3]$, ἐνῶ ἡ v εἶναι γειτονικὴ μὲ κάποια ἀπὸ τὶς v_1, v_2, v_3 ποὺ δὲν ἀνήκει στὸ T. Ἄρα τὸ G/f εἶναι 3-συνεκτικό, ἄτοπο.

Ἑπομένως $H = G' \simeq W_r$ γιὰ κάποιο $r \geq 3$ καὶ ἄρα γράφημα ἰσόμορφο



Σχῆμα 5.11: Ἡ κατασκευὴ τοῦ W_{r+1} στὸ τέλος τῆς ἀπόδειξης τοῦ Λήμματος 5.45.

τοῦ G μπορεῖ νὰ κατασκευαστεῖ ἂν σὲ κάποιο W_r προσθέσουμε μιὰ νέα κορυφὴ v τὴν συνδέσουμε μὲ τὶς κορυφὲς κάποιου τριγώνου τοῦ W_r καὶ στὴν συνέχεια ἀφαιρέσουμε κάποια ἀπὸ τὶς ἀκμὲς αὐτοῦ τοῦ τριγώνου. Ἂν $r = 3$, κάθε κορυφὴ τοῦ $W_3 = K_4$ μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ κέντρο του, καὶ ἐπιλέγουμε ὡς κέντρο τὴν κορυφὴ τοῦ τριγώνου ποὺ δὲν εἶναι ἄκρο τῆς ἀκμῆς ποὺ ἀφαιροῦμε. Ἂν $r \geq 4$ καὶ ἡ ἀκμὴ τοῦ τριγώνου ποὺ ἀφαιροῦμε ἔχει τὸ «κέντρο» τοῦ W_r ὡς ἄκρο (βλ. Σχῆμα 5.11.(γ)) τότε ἡ ἄλλη ἀκμὴ τοῦ τριγώνου μὲ ἄκρο τὸ κέντρο τοῦ W_r εἶναι μὴ-κρίσιμη στὸ G, ἄτοπο. Καταλήγουμε ὅτι ἡ ἀκμὴ ποὺ ἀφαιροῦμε εἶναι «περιφερειακή» τοῦ W_r (βλ. Σχῆμα 5.11.(δ)) καὶ ἡ ἀφαίρεσή της δίνει ἕνα γράφημα ἰσόμορφο μὲ τὸ W_{r+1} καὶ τὸ λῆμμα ἀποδείχθηκε. □



Σχῆμα 5.12: Ὁ μετασχηματισμὸς τοῦ W_4 στὸ Q_3 σύμφωνα μὲ τὴν κατασκευὴ τοῦ Θεωρήματος 5.46.

Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 5.45 προκύπτει τὸ παρακάτω θεώρημα, ποὺ ἀποδείχθηκε ἀπὸ τὸν Tutte τὸ 1961 (βλ. [104]).

Θεώρημα 5.46 (Tutte, 1961 [104])**.** Ἕνα γράφημα εἶναι 3-συνεκτικὸ ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι τροχὸς ἢ μπορεῖ νὰ κατασκευαστεῖ ἀπὸ ἕναν τροχὸ μετὰ ἀπὸ μιὰ ἀκολουθία μετασχηματισμῶν οἱ ὁποῖοι μπορεῖ νὰ εἶναι

- ἡ σύνδεση δύο μὴ-γειτονικῶν κορυφῶν,
- ἡ ἀντικατάσταση μιᾶς κορυφῆς v βαθμοῦ ≥ 4 ἀπὸ δύο συνδεδεμένες κορυφὲς v_1 καὶ v_2 ἔτσι ὥστε κάθε κορυφὴ ποὺ πρὶν συνδεόταν μὲ τὴν v νὰ συνδέεται τώρα μὲ ἀκριβῶς μία ἀπὸ τὶς v_1 καὶ v_2 μὲ τέτοιο τρόπο ὥστε, στὸ προκῦπτον γράφημα, οἱ βαθμοὶ τῶν νέων κορυφῶν v_1 καὶ v_2 νὰ εἶναι τουλάχιστον 3.

Ἀπόδειξη. ($\Leftarrow$) Οἱ τροχοὶ εἶναι 3-συνεκτικοί, ὁπότε ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι οἱ δύο μετασχηματισμοὶ διατηροῦν τὴν 3-συνεκτικότητα. Γιὰ τὴ σύνδεση δύο μὴ-γειτονικῶν κορυφῶν αὐτὸ ἰσχύει, ἀφοῦ κάθε διαχωριστὴς τοῦ νέου γραφήματος εἶναι καὶ διαχωριστὴς τοῦ ἀρχικοῦ (βλ. τὴν ἀπόδειξη τοῦ Πορίσματος 5.18). Ἔστω τώρα ὅτι τὸ G' προκύπτει ἀπὸ τὸ 3-συνεκτικὸ γράφημα G μὲ ἀντικατάσταση τῆς κορυφῆς v ἀπὸ τὶς v_1, v_2, καὶ ἔστω N_i τὸ σύνολο τῶν γειτονικῶν κορυφῶν τῆς v_i στὸ G' ἐκτὸς τῆς v_{3-i}, $i = 1, 2$· ἀπὸ τὴν ὑπόθεση γιὰ τοὺς βαθμούς, $|N_1|, |N_2| \geq 2$. Ἔστω T σύνολο τὸ πολὺ δύο κορυφῶν τοῦ G'· θὰ δείξουμε ὅτι τὸ $G' - T$ εἶναι συνεκτικό. Ἂν $T \cap \{v_1, v_2\} = \emptyset$, τότε ἡ σύνθλιψη τῆς ἀκμῆς $\{v_1, v_2\}$ στὸ $G' - T$ δίνει τὸ συνεκτικὸ γράφημα $G - T$, ἄρα καὶ τὸ $G' - T$ εἶναι συνεκτικό. Ἂν $T = \{v_1, v_2\}$, τότε $G' - T = G - v$, ποὺ εἶναι συνεκτικό. Τέλος, ἂν $T \cap \{v_1, v_2\} = \{v_1\}$ (ἡ περίπτωση τῆς v_2 εἶναι συμμετρική), τότε τὸ $G' - T - v_2$ εἶναι τὸ συνεκτικὸ γράφημα $G - v - (T \backslash \{v_1\})$, στὸ ὁποῖο ἡ v_2 ἔχει γειτονικὴ κορυφή, ἀφοῦ $|N_2| \geq 2$ καὶ $|T \backslash \{v_1\}| \leq 1$. Ἀφοῦ ἐπιπλέον $n(G') = n(G) + 1 \geq 5$, τὸ G' εἶναι 3-συνεκτικό.

($\Rightarrow$) Μὲ ἐπαγωγὴ στὸ $n(G)+m(G)$. Ἔστω G 3-συνεκτικὸ γράφημα ποὺ δὲν εἶναι τροχός. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 5.45, εἴτε ὑπάρχει ἀκμὴ e τέτοια ὥστε τὸ $G-e$ νὰ εἶναι 3-συνεκτικό, ὁπότε τὸ G προκύπτει ἀπὸ τὸ $G-e$ μὲ σύνδεση δύο μὴ-γειτονικῶν κορυφῶν, εἴτε ὑπάρχει ἀκμὴ $e = \{x, y\}$, ποὺ δὲν ἀνήκει σὲ κανένα τρίγωνο, τέτοια ὥστε τὸ G/e νὰ εἶναι 3-συνεκτικό. Στὴ δεύτερη περίπτωση οἱ x καὶ y δὲν ἔχουν κοινὴ γειτονικὴ κορυφή, ὁπότε κάθε γειτονικὴ κορυφὴ τῆς νέας κορυφῆς z τοῦ G/e εἶναι γειτονικὴ ἀκριβῶς μίας ἀπὸ τὶς x, y στὸ G. Ἐπιπλέον $\deg_G(x), \deg_G(y) \geq \kappa(G) = 3$ (Παρατήρηση 5.26), ἄρα $\deg_{G/e}(z) = \deg_G(x) + \deg_G(y) - 2 \geq 4$, καὶ τὸ G προκύπτει ἀπὸ τὸ G/e μὲ τὸν δεύτερο μετασχηματισμό. Καὶ στὶς δύο περιπτώσεις τὸ G προκύπτει μὲ ἕναν μετασχηματισμὸ ἀπὸ ἕνα 3-συνεκτικὸ γράφημα μὲ μικρότερο ἄθροισμα πλήθους κορυφῶν καὶ ἀκμῶν, γιὰ τὸ ὁποῖο τὸ θεώρημα ἰσχύει ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση. □

Ἡ διατύπωση τοῦ παρακάτω λήμματος δὲν ἀναφέρεται στὴν συνεκτικότητα. Ἀντίθετα ἡ ἀπόδειξη του τὴν χρησιμοποιεῖ ἰσχυρὰ καὶ μὲ τρόπο παρόμοιο μὲ αὐτὴν τοῦ Θεωρήματος 5.36.

Λῆμμα 5.47. Γιὰ κάθε γράφημα G ἰσχύει ὅτι ἂν $\delta(G) \geq 3$, τότε τὸ G περιέχει ἕνα 3-συνεκτικὸ γράφημα ὡς ἔλασσον.

Ἀπόδειξη. Ἔστω G ἀντιπαράδειγμα μὲ ἐλάχιστο ἀριθμὸ κορυφῶν. Προφανῶς τὸ G εἶναι συνεκτικὸ καὶ $|V(G)| \geq 5$ γιατὶ τὸ μοναδικὸ γράφημα μὲ ἐλάχιστο βαθμὸ 3 καὶ < 5 κορυφὲς εἶναι τὸ K_4 γιὰ τὸ ὁποῖο ἰσχύει ὅτι $\kappa(K_4) = 3$. Ἐπίσης $\kappa(G) \leq 2$, ἀφοῦ διαφορετικὰ τὸ ἴδιο τὸ G θὰ ἦταν ἕνα 3-συνεκτικὸ ἔλασσον τοῦ G. Ἀνάμεσα σὲ ὅλους τοὺς ἐλαχιστικοὺς διαχωριστὲς τοῦ G (κανένα ὑποσύνολό τους δὲν εἶναι διαχωριστής) μὲ τὸ πολὺ δύο κορυφές, ποὺ ὑπάρχουν ἀφοῦ $\kappa(G) \leq 2$, ἐπιλέγουμε ἕναν, τὸν S, γιὰ τὸν ὁποῖο ἡ μικρότερη, τὴν συμβολίζουμε μὲ C, ἀπὸ τὶς συνιστῶσες τοῦ $G - S$ εἶναι ἡ μικρότερη δυνατή. Ἐπίσης θέτουμε $C^+ = G[S \cup V(C)]$. Παρατηροῦμε ὅτι ἂν $S = \{x\}$, τότε ὁ βαθμὸς τῆς x στὴν C^+ εἶναι τουλάχιστον 3, διαφορετικὰ τὸ $N_{C^+}(x)$ θὰ περιέχει ὡς ὑποσύνολο κάποιον ἐλαχιστικὸ διαχωριστὴ S' τοῦ G, μὲ $|S'| \leq 2$, καὶ ἀφοῦ κάθε συνιστῶσα τοῦ $G - S'$ ποὺ δὲν περιέχει τὴν x περιέχεται γνησίως στὸ C, ἡ μικρότερη συνιστῶσα τοῦ $G - S'$ ἔχει λιγότερες κορυφὲς ἀπὸ τὸ C πρᾶγμα ποὺ ἀντιφάσκει στὸν τρόπο ποὺ ὁρίσαμε τὸ C. Ἀφοῦ τώρα $\delta(C^+) \geq 3$, καὶ $n(C^+) < n(G)$, τὸ C^+ περιέχει ἕνα 3 συνεκτικὸ γράφημα ὡς ἔλασσον τὸ ὁποῖο θὰ εἶναι καὶ ἔλασσον τοῦ G, ἄτοπο. Ἔστω τώρα $S = \{x, y\}$. Ἀφοῦ ὁ S εἶναι ἐλαχιστικός, κάθε κορυφή του ἔχει γειτονικὴ κορυφὴ σὲ κάθε συνιστῶσα τοῦ $G - S$ (ἄν, γιὰ παράδειγμα, ἡ x δὲν εἶχε γειτονικὴ κορυφὴ σὲ μιὰ συνιστῶσα D, τὸ $\{y\}$ θὰ ἦταν διαχωριστὴς τοῦ G). Ἑπομένως, ἂν D εἶναι μιὰ

συνιστῶσα τοῦ $G - S$ διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν C, ὑπάρχει (x, y)-μονοπάτι P μὲ ἐσωτερικὲς κορυφὲς στὴ D, δηλαδὴ στὸ $G - V(C)$. Συμβολίζουμε μὲ C' τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸ C^+ ἂν προσθέσουμε σὲ αὐτὸ τὴν ἀκμὴ $\{x, y\}$ (ἂν ἡ ἀκμὴ αὐτὴ ὑπάρχει τότε δὲν προσθέτουμε τίποτε). Ἡ ὕπαρξη τοῦ (x, y)-μονοπατιοῦ P στὸ $G - V(C)$ συνεπάγεται ὅτι $C' \leq_{\epsilon\lambda} G$. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι κάθε κορυφὴ τοῦ S ἔχει βαθμὸ τουλάχιστον 3 στὸ C'. Διαφορετικά, ἔστω ὅτι $\deg_{C'}(x) \leq 2$· τότε ἡ x ἔχει μία μόνο γειτονικὴ κορυφὴ w στὴ C, καὶ τὸ $N_{C'}(x) = \{w, y\}$ χωρίζει τὸ μὴ κενὸ σύνολο $V(C)\backslash\{w\}$ ἀπὸ τὴν x (κάθε κορυφὴ τῆς C ἔχει τουλάχιστον τρεῖς γειτονικὲς κορυφὲς στὸ $V(C) \cup S$, ἄρα $|V(C)| \geq 2$). Ἑπομένως τὸ $\{w, y\}$ περιέχει ὡς ὑποσύνολο κάποιον ἐλαχιστικὸ διαχωριστὴ S' τοῦ G, διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ $\{y\}$, ἀφοῦ ὁ S εἶναι ἐλαχιστικός. Κάθε συνιστῶσα τοῦ $G - S'$ ποὺ δὲν περιέχει τὴν x περιέχεται γνησίως στὴ C (οἱ ὑπόλοιπες συνιστῶσες τοῦ $G - S$ συνδέονται μὲ τὴν x), ὁπότε, ὁμοίως μὲ πρίν, αὐτὸ ἀντιφάσκει στὸν τρόπο ποὺ ὁρίσαμε τὸ C. Τὸ ἴδιο ἰσχύει γιὰ τὴν y. Ἀφοῦ λοιπὸν $\delta(C') \geq 3$ καὶ $n(C') < n(G)$ τὸ C', ἄρα καὶ τὸ G θὰ περιέχει ἕνα 3-συνεκτικὸ γράφημα ὡς ἔλασσον, ἄτοπο. □

Τὸ Πόρισμα 5.43 καὶ τὸ Λῆμμα 5.47 μᾶς δίνουν τὸ ἑπόμενο θεώρημα τὸ ὁποῖο ἀποδείχθηκε γιὰ πρώτη φορὰ στὴν [28].

Θεώρημα 5.48 (Dirac, 1960 [28])**.** Γιὰ κάθε γράφημα G, $\delta(G) \geq 3 \Rightarrow K_4 \leq_{\epsilon\lambda} G$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\delta(G) \geq 3$. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 5.47, τὸ G περιέχει ὡς ἔλασσον κάποιο 3-συνεκτικὸ γράφημα H. Κάθε 3-συνεκτικὸ γράφημα ἔχει τουλάχιστον τέσσερις κορυφές, ὁπότε τὸ Πόρισμα 5.43 δίνει $K_4 \leq_{\epsilon\lambda} H$. Ἡ σχέση $\leq_{\epsilon\lambda}$ εἶναι μεταβατική, ἄρα $K_4 \leq_{\epsilon\lambda} G$. □

5.4 k-συνεκτικὰ ὑπογραφήματα

Ἔστω $\kappa^*(G) = \max\{k \mid$ G περιέχει ἕνα k-συνεκτικὸ ὑπογράφημα $\}$.

Στὸ πνεῦμα τοῦ Θεωρήματος 3.11, ἀρκετὰ μεγάλη πυκνότητα ἐξασφαλίζει ὄχι ἁπλῶς μεγάλο ἐλάχιστο βαθμὸ ἀλλὰ καὶ ὑψηλὴ συνεκτικότητα σὲ κάποιο ὑπογράφημα. Τὸ ἀποτέλεσμα ὀφείλεται στὸν Mader (1972) [71].

Θεώρημα 5.49. Ἔστω $k \geq 1$. Κάθε γράφημα G μὲ $\epsilon(G) \geq 2k$ περιέχει ἕνα $(k+1)$-συνεκτικὸ ὑπογράφημα.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\gamma = \epsilon(G) \geq 2k$. Θεωροῦμε τὰ ὑπογραφήματα G' τοῦ G γιὰ τὰ ὁποία

$$n(G') \geq 2k \quad \text{καὶ} \quad m(G') > \gamma\,(n(G') - k). \qquad (*)$$

Τὸ ἴδιο τὸ G ἱκανοποιεῖ τὴν $(*)$: πράγματι, $m(G) = \gamma\, n(G) > \gamma(n(G) - k)$ καί, ἀφοῦ $2k\, n(G) \leq m(G) \leq n(G)(n(G)-1)/2$, ἔχουμε ὅτι $n(G) \geq 4k+1$. Ἔστω H ἕνα ὑπογράφημα τοῦ G ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν $(*)$ καὶ ἔχει τὸ ἐλάχιστο δυνατὸ πλῆθος κορυφῶν.

Κανένα γράφημα ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν $(*)$ δὲν ἔχει ἀκριβῶς $2k$ κορυφές, ἀφοῦ τότε θὰ εἶχε περισσότερες ἀπὸ $\gamma k \geq 2k^2 > \binom{2k}{2}$ ἀκμές. Ἄρα $n(H) \geq 2k + 1$. Ἰσχυριζόμαστε ὅτι $\delta(H) > \gamma$. Πράγματι, ἂν ὑπῆρχε $v \in V(H)$ μὲ $\deg_H(v) \leq \gamma$, τότε τὸ $H' = H - v$ θὰ εἶχε $n(H') = n(H) - 1 \geq 2k$ καὶ

$$m(H') \geq m(H) - \gamma > \gamma(n(H) - k) - \gamma = \gamma(n(H') - k),$$

δηλαδὴ θὰ ἱκανοποιοῦσε τὴν $(*)$ ἔχοντας λιγότερες κορυφὲς ἀπὸ τὸ H, ἄτοπο. Εἰδικότερα, $n(H) \geq \delta(H) + 1 > \gamma + 1 > k + 1$.

Ἔστω, μὲ σκοπὸ νὰ καταλήξουμε σὲ ἄτοπο, ὅτι τὸ H δὲν εἶναι $(k+1)$-συνεκτικό. Ἀφοῦ $n(H) > k + 1$, ὑπάρχει σύνολο $S \subseteq V(H)$ μὲ $|S| \leq k$ τέτοιο ὥστε τὸ $H - S$ νὰ μὴν εἶναι συνεκτικὸ (ἂν τὸ H δὲν εἶναι συνεκτικὸ παίρνουμε $S = \emptyset$, διαφορετικὰ τὸ S εἶναι ἕνας διαχωριστὴς τοῦ H μὲ τὸ πολὺ k κορυφές). Ἔστω C_1 μιὰ ἀπὸ τὶς συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ $H - S$, $H_1 = H[V(C_1) \cup S]$ καὶ $H_2 = H - V(C_1)$ (εἶναι φανερὸ ὅτι $S = V(H_1) \cap V(H_2)$). Ἀπὸ τὴν κατασκευὴ τῶν H_1, H_2, ἔχουμε ὅτι

$$m(H) \leq m(H_1) + m(H_2) \quad \text{καὶ} \quad n(H_1) + n(H_2) = n(H) + |S|.$$

Μιὰ κορυφὴ v τῆς C_1 ἔχει ὅλες τὶς γειτονικές της κορυφὲς στὸ H_1, ἄρα $n(H_1) \geq \deg_H(v) + 1 > \gamma \geq 2k$. Ὁμοίως, μιὰ κορυφὴ κάποιας ἄλλης συνεκτικῆς συνιστώσας τοῦ $H - S$ ἔχει ὅλες τὶς γειτονικές της κορυφὲς στὸ H_2, ἄρα $n(H_2) > 2k$. Ἀφοῦ τὰ H_1 καὶ H_2 ἔχουν λιγότερες κορυφὲς ἀπὸ τὸ H, λόγῳ τῆς ἐπιλογῆς τοῦ H κανένα ἀπὸ τὰ δύο δὲν ἱκανοποιεῖ τὴν $(*)$, δηλαδὴ $m(H_i) \leq \gamma(n(H_i) - k)$, $i = 1, 2$. Ἑπομένως

$$\begin{aligned} m(H) &\leq m(H_1) + m(H_2) \\ &\leq \gamma(n(H_1) + n(H_2) - 2k) \\ &= \gamma(n(H) + |S| - 2k) \\ &\leq \gamma(n(H) - k), \end{aligned}$$

τὸ ὁποῖο ἀντιφάσκει μὲ τὸ ὅτι τὸ H ἱκανοποιεῖ τὴν $(*)$. Ἄρα τὸ H εἶναι ἕνα $(k+1)$-συνεκτικὸ ὑπογράφημα τοῦ G. □

Ἡ ἰδέα τῆς διάσπασης ἑνὸς γραφήματος κατὰ μῆκος ἑνὸς μικροῦ διαχωριστὴ ἐμφανίζεται καὶ στὴν [59]· ἡ μορφὴ τῆς ἀπόδειξης ποὺ δώσαμε ἐδῶ ἀκολουθεῖ τὸ [25].

Πόρισμα 5.50. Κάθε γράφημα G περιέχει ὑπογράφημα H γιὰ τὸ ὁποῖο $\kappa(H) \geq \frac{\epsilon(G)}{2}$ (ἢ ἀλλιῶς, $\kappa^*(G) \geq \frac{\epsilon(G)}{2}$).

Ἀπόδειξη. Ἂν $\epsilon(G) = 0$, δὲν ἔχουμε τίποτα νὰ ἀποδείξουμε. Ἂν $0 < \epsilon(G) < 2$, τότε τὸ G ἔχει μιὰ ἀκμή, ἡ ὁποία σχηματίζει ἕνα ὑπογράφημα $H \simeq K_2$ μὲ $\kappa(H) = 1 > \frac{\epsilon(G)}{2}$. Ἂν $\epsilon(G) \geq 2$, ἔστω $k = \lfloor \frac{\epsilon(G)}{2} \rfloor \geq 1$. Ἀφοῦ $\epsilon(G) \geq 2k$, σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα 5.49, τὸ G περιέχει ἕνα $(k+1)$-συνεκτικὸ ὑπογράφημα H, γιὰ τὸ ὁποῖο $\kappa(H) \geq k+1 > \frac{\epsilon(G)}{2}$. □

5.5 Συνεκτικότητα ἀκμῶν

Ἡ ἀντίστοιχη ἔννοια γιὰ ἀκμὲς ὁρίζεται μὲ τὸν προφανῆ τρόπο.

Ὁρισμός 5.51. Ἔστω G γράφημα. Η *συνεκτικότητα ἀκμῶν* τοῦ G, $\lambda(G)$, εἶναι τὸ ἐλάχιστο πλῆθος ἀκμῶν ποὺ ἂν ἀφαιρεθεῖ ἀπὸ τὸ γράφημα G θὰ δημιουργήσει ἕνα μὴ-συνεκτικὸ γράφημα. Μὲ ἄλλα λόγια,

$$\lambda(G) = \min\{|F| \mid F \subseteq E(G) \text{ καὶ τὸ } G - F \text{ δὲν εἶναι συνεκτικὸ}\}.$$

Ἀσκήσεις Κεφαλαίου

5.1 (☆☆☆)**.** Ἂν τὸ γράφημα G ἔχει k συνεκτικὲς συνιστῶσες, τότε $K_k \subseteq \overline{G}$.

5.2 (★☆☆)**.** Γιὰ κάθε συνεκτικὸ γράφημα G μὲ n κορυφὲς ὑπάρχει μιὰ ἀπαρίθμηση $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ τῶν κορυφῶν του τέτοια ὥστε τὸ γράφημα $G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ νὰ εἶναι συνεκτικὸ γιὰ κάθε $i = 1, \ldots, n$.

5.3 (★☆☆)**.** Κάθε δύο μέγιστα μονοπάτια σὲ ἕνα συνεκτικὸ γράφημα ἔχουν κάποια κοινὴ κορυφή.

5.4 (★★☆)**.** Ἕνα συνεκτικὸ γράφημα μὲ τουλάχιστον δύο κορυφὲς εἶναι μονοπάτι ἂν καὶ μόνο ἂν περιέχει *ἀκριβῶς* δύο μὴ-ἀρθρικὲς κορυφές.

5.5 (☆☆☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι ἂν ἀφαιρέσουμε μία ἀκμὴ κύκλου σὲ ἕνα συνεκτικὸ γράφημα G, τὸ G θὰ παραμείνει συνεκτικό.

5.6 (★★★)**.** Ἔστω δισυνεκτικὸ γράφημα G ὅπου $K_{2,3} \not\leq_{\epsilon\lambda} G$. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι γιὰ κάθε τρεῖς κορυφὲς τοῦ G, ὑπάρχει κύκλος ποὺ νὰ περνάει καὶ ἀπὸ τὶς τρεῖς.

5.7 (★☆☆)**.** Κάθε γράφημα μὲ τουλάχιστον δύο κορυφὲς ἔχει τουλάχιστον δύο κορυφὲς ποὺ δὲν εἶναι ἀρθρικές.

5.8 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι ἕνα γράφημα δὲν περιέχει κύκλους ἄρτιου μήκους ἂν καὶ μόνο ἂν κάθε τεμάχιό του εἶναι εἴτε τὸ K_1, εἴτε τὸ K_2, εἴτε κύκλος περιττοῦ μήκους.

5.9 (★★☆)**.** Ἀποδεῖξτε ἄμεσα τὸ Θεώρημα 5.24 χωρὶς τὴν χρήση τοῦ Λήμματος 5.38 .

5.10 (★☆☆)**.** Κάθε συνεκτικὸ γράφημα μὲ τουλάχιστον μία ἀρθρικὴ κορυφὴ περιέχει δύο τεμάχια τὸ καθένα ἀπὸ τὰ ὁποία περιέχει ἀκριβῶς μιὰ ἀρθρικὴ κορυφή.

5.11 (★★☆)**.** Ἔστω G γράφημα μὲ a συνεκτικὲς συνιστῶσες καὶ b τεμάχια. Τότε,

$$b - a = \sum_{v \in V(G)} (t(v) - 1)$$

ὅπου $t(v)$ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν τεμαχίων ποὺ περιέχουν τὴν κορυφὴ v.

5.12 (★★☆)**.** Ἂν τὰ ἄκρα μιᾶς ἀκμῆς ἑνὸς δισυνεκτικοῦ γραφήματος εἶναι διαχωριστής του τότε ἡ ἀφαίρεση αὐτῆς τῆς ἀκμῆς δὲν πλήττει τὴν δισυνεκτικότητά του.

5.13 (★★☆)**.** Ἕνα συνεκτικὸ 4-κανονικὸ γράφημα μὲ n τεμάχια ἔχει $n-1$ ἀρθρικὲς κορυφές.

5.14 (★★☆)**.** Ἕνα δισυνεκτικὸ γράφημα περιέχει τουλάχιστον τρεῖς ἀκμὲς τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα δὲν εἶναι διαχωριστές του.

5.15 (★☆☆)**.** Βρεῖτε μιὰ ἀκολουθία γραφημάτων σύμφωνη μὲ τὸ Λῆμμα 5.41 ἡ ὁποία νὰ μετασχηματίζει τὸ Q_3 στὸ K_4 (ἡ ἀντίστροφη ἀκολουθία τοῦ Σχήματος 5.12 δὲν εἶναι ἡ ἀπάντηση ἀφοῦ περιλαμβάνει ἀφαίρεση μιᾶς ἀκμῆς).

5.16 (★★☆)**.** Γιὰ κάθε γράφημα G ἰσχύει ὅτι: $2\kappa^*(G) \geq \epsilon(G) \geq \frac{\kappa(G)}{2}$.

5.17 (★★☆)**.** Ἂν $n(G) \geq k+1$ καὶ $\delta(G) \geq (n(G)+k-2)/2$, τότε $\kappa(G) \geq k$.

5.18 (★☆☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε $k \geq 2$ ὑπάρχουν γραφήματα G μὲ πυκνότητα $\epsilon(G)$ ὁσοδήποτε κοντὰ στὸ $k-1$ τὰ ὁποία δὲν περιέχουν κανένα k-συνεκτικὸ ὑπογράφημα. Συμπεράνετε ὅτι ἡ πυκνότητα ποὺ ἀπαιτεῖ τὸ Θεώρημα 5.49 δὲν μπορεῖ νὰ μειωθεῖ περισσότερο ἀπὸ ἕναν σταθερὸ παράγοντα.

5.19 (★☆☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι δὲν ὑπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοια ὥστε γιὰ κάθε $k \in \mathbb{N}$, κάθε γράφημα G ὅπου $\delta(G) \geq f(k)$ εἶναι k-συνεκτικό.

5.20 (★★★)**.** Ἔστω $\epsilon^*(G) = \max\{k \mid \exists H \subseteq_{\upsilon\pi} G : \epsilon(H) \geq k\}$. Ἀποδεῖξτε τὶς τρεῖς παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{array}{rcrcl} \epsilon^*(G) & \leq & \delta^*(G) & \leq & 2 \cdot \epsilon^*(G) \\ \kappa^*(G) & \leq & \delta^*(G) & \leq & 4 \cdot \kappa^*(G) \\ \epsilon^*(G) & \leq & 2 \cdot \kappa^*(G) & \leq & 4 \cdot \epsilon^*(G) \end{array}$$

5.21 (★★☆)**.** Ἔστω γράφημα G χωρὶς ἀπομονωμένες κορυφὲς τοῦ ὁποίου κάθε ἐναγόμενο ὑπογράφημα ἔχει πλῆθος ἀκμῶν διαφορετικὸ τοῦ 2. Δεῖξτε ὅτι τὸ G εἶναι πλῆρες.

5.22 (★☆☆)**.** Ἕνα δισυνεκτικὸ γράφημα ἔχει ἴσο ἀριθμὸ κορυφῶν καὶ ἀκμῶν ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι κύκλος.

5.23 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι κάθε δισυνεκτικὸ γράφημα ἔχει τουλάχιστον τόσες ἀκμὲς ὅσο καὶ κορυφές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΔΕΝΤΡΑ

Τὰ δέντρα εἶναι τὰ ἐλάχιστα συνεκτικὰ γραφήματα: ἂν ἀφαιρέσουμε ὁποιαδήποτε ἀκμή τους παύουν νὰ εἶναι συνεκτικά, ἐνῶ ἂν προσθέσουμε ὁποιαδήποτε ἀκμὴ ἀποκτοῦν κύκλο. Αὐτὴ ἡ ὁριακὴ θέση τὰ κάνει ταυτόχρονα τὸ ἁπλούστερο μὴ τετριμμένο εἶδος γραφήματος καὶ τὸ πιὸ χρήσιμο ἐργαλεῖο: πλῆθος ἀποδείξεων σὲ αὐτὲς τὶς σημειώσεις περνάει ἀπὸ ἕνα παραγόμενο δέντρο τοῦ γραφήματος.

6.1 Δάση καὶ δέντρα

Τὰ δέντρα εἶναι τὰ ἐλαχιστικὰ συνεκτικὰ γραφήματα: ἀρκετὰ φτωχὰ ὥστε νὰ τὰ κατανοοῦμε πλήρως, καὶ ἀρκετὰ πλούσια ὥστε νὰ ἐμφανίζονται σχεδὸν παντοῦ.

Ὁρισμός 6.1. Ἂν ἕνα γράφημα δὲν περιέχει κύκλους, τότε καλεῖται *ἄκυκλο* ἢ ἀλλιῶς *δάσος*. Ἂν ἕνα γράφημα εἶναι ἄκυκλο καὶ συνεκτικὸ τότε καλεῖται *δέντρο*. Μιὰ κορυφὴ βαθμοῦ τὸ πολὺ 1 σὲ ἕνα δέντρο (ἢ δάσος) καλεῖται *φύλλο* τοῦ δέντρου (ἢ τοῦ δάσους).

Ὁ ὁρισμὸς μέσῳ τῆς ἀπουσίας κύκλων ἰσοδυναμεῖ μὲ μιὰ θετικὴ διατύπωση, ἡ ὁποία εἶναι συχνὰ εὐκολότερη στὴ χρήση.

Θεώρημα 6.2. Ἕνα γράφημα G εἶναι δέντρο ἂν καὶ μόνο ἂν κάθε ζεῦγος κορυφῶν του συνδέεται μὲ ἕνα μοναδικὸ μονοπάτι.

Ἀπόδειξη. Ἂν δύο κορυφὲς $u, v \in V(G)$ συνδέονται μὲ διαφορετικὰ μονοπάτια P_1 καὶ P_2 τότε κάποια ἀκμὴ $e = \{a, b\}$ τοῦ P_1 δὲν θὰ εἶναι ἀκμὴ τοῦ P_2. Παρατηροῦμε

ὅτι τὸ $H = (P_1 \cup P_2) - e$ εἶναι συνεκτικὸ ὑπογράφημα τοῦ G καὶ ἄρα τὸ H περιέχει μονοπάτι P ποὺ συνδέει τὶς κορυφὲς a καὶ b στὸ H. Παρατηροῦμε ὅτι $P \subseteq G - e$ καὶ ὅτι $P \cup (\{a, b\}, \{\{a, b\}\})$ εἶναι ἕνας κύκλος στὸ G.

Ἔστω τώρα γράφημα G ὅπου κάθε ζεῦγος κορυφῶν του συνδέεται μὲ ἕνα μοναδικὸ μονοπάτι. Προφανῶς τὸ γράφημα εἶναι συνεκτικό. Χρησιμοποιώντας ἐπαγωγή, ὑποθέτουμε ὅτι τὸ G εἶναι δέντρο ἂν ἔχει $< n$ κορυφές. Θὰ ἀποδείξουμε ὅτι τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ ἂν τὸ G ἔχει n κορυφές. Ἂν $n = 1$, τὸ G εἶναι προφανῶς δέντρο. Ἔστω $n \geq 2$ καὶ ἔστω P ἕνα μέγιστο σὲ μῆκος μονοπάτι τοῦ G, μὲ ἄκρα x καὶ y· ἀφοῦ τὸ G εἶναι συνεκτικό, τὸ P ἔχει τουλάχιστον μία ἀκμή. Ἔστω x' ἡ γειτονικὴ κορυφὴ τῆς x στὸ P. Ἰσχυριζόμαστε ὅτι $\deg_G(x) = 1$. Πράγματι, ἔστω $z \neq x'$ γειτονικὴ κορυφὴ τῆς x. Ἂν $z \notin V(P)$, ἡ προσθήκη τῆς ἀκμῆς $\{z, x\}$ στὸ P δίνει μακρύτερο μονοπάτι, ἄτοπο. Ἂν $z \in V(P)$, ἡ ἀκμὴ $\{x, z\}$ καὶ τὸ ὑπομονοπάτι τοῦ P ἀπὸ τὴν x ὡς τὴν z εἶναι δύο διαφορετικὰ (x, z)-μονοπάτια, ἄτοπο. Ἀφοῦ ἡ x ἔχει βαθμὸ 1, κανένα μονοπάτι μεταξὺ δύο ἄλλων κορυφῶν τοῦ G δὲν περνάει ἀπὸ αὐτήν· ἑπομένως καὶ στὸ $G - x$ κάθε ζεῦγος κορυφῶν συνδέεται μὲ μοναδικὸ μονοπάτι, καὶ ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση τὸ $G - x$ εἶναι δέντρο. Τέλος, τὸ G προκύπτει ἀπὸ τὸ δέντρο $G - x$ ἂν προσθέσουμε τὴν x ὡς φύλλο· ἄρα εἶναι συνεκτικὸ καὶ δὲν περιέχει κύκλο, ἀφοῦ μιὰ κορυφὴ βαθμοῦ 1 δὲν ἀνήκει σὲ κανέναν κύκλο. Ἑπομένως τὸ G εἶναι δέντρο. □

Παρατήρηση 6.3. Τὸ δεύτερο μέρος τῆς ἀπόδειξης τοῦ Θεωρήματος 6.2 μπορεῖ ἐπίσης νὰ ἀποδειχτεῖ παρατηρώντας ὅτι ἂν τὸ G δὲν εἶναι δέντρο (ἐνῶ εἶναι συνεκτικό), θὰ πρέπει νὰ περιέχει κύκλο πρᾶγμα ποὺ σημαίνει ὅτι θὰ ὑπάρχουν δύο κορυφὲς ποὺ νὰ συνδέονται μὲ διαφορετικὰ μονοπάτια.

Θεώρημα 6.4. Ἂν ἕνα γράφημα G εἶναι δέντρο, τότε $m(G) = n(G) - 1$.

Ἀπόδειξη. Ἀποδεικνύουμε τὶς δύο ἀνισότητες χωριστά: ἡ μία ἀπὸ τὴν συνεκτικότητα, ἡ ἄλλη ἀπὸ τὴν ἀπουσία κύκλων. Ἂν τὸ γράφημα G εἶναι δέντρο, τότε εἶναι συνεκτικὸ καὶ ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.10, ἔχουμε ὅτι $m(G) \geq n(G) - 1$. Θὰ ἀποδείξουμε τώρα ὅτι $m(G) \leq n(G) - 1$. Πράγματι ἂν $m(G) \geq n(G)$, τότε $\epsilon(G) \geq 1$ καὶ ἀπὸ τὸ Λῆμμα 4.30 τὸ G περιέχει κύκλο, ἄτοπο. □

Πόρισμα 6.5. Κάθε δέντρο T μὲ $n(T) \geq 2$ περιέχει τουλάχιστον δύο φύλλα.

Ἀπόδειξη. Παρατηροῦμε ὅτι διαφορετικά, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 3.3.(1), $2 \cdot m(T) \geq 1 + 2(n(T) - 1) \Rightarrow m(T) \geq n(T) - \frac{1}{2}$ καὶ ἄρα, $m(T) > n(T) - 1$, πρᾶγμα ποὺ ἀντιβαίνει στὸ Θεώρημα 6.4. □

Ὁ ἐλάχιστος βαθμὸς ἐξασφαλίζει τὴν ὕπαρξη κάθε μικροῦ δέντρου ὡς ὑπογραφήματος. Σημειώνουμε ὅτι τὸ ἀντίστοιχο δὲν ἰσχύει γιὰ αὐθαίρετα μικρὰ ὑπογραφήματα.

Λῆμμα 6.6. Κάθε γράφημα G μὲ τουλάχιστον μιὰ κορυφὴ περιέχει ὡς ὑπογράφημα κάθε δέντρο μὲ τὸ πολὺ $\delta(G)+1$ κορυφές.

Ἀπόδειξη. Ἀφαιροῦμε ἕνα φύλλο ἀπὸ τὸ δέντρο, ἐντοπίζουμε τὸ μικρότερο δέντρο στὸ γράφημα, καὶ στὸ τέλος βρίσκουμε θέση γιὰ τὸ φύλλο ποὺ ἀφαιρέσαμε. Θὰ δείξουμε μὲ ἐπαγωγὴ στὸ $n(T)$ ὅτι κάθε δέντρο T μὲ $n(T) \leq \delta(G)+1$ εἶναι ὑπογράφημα τοῦ G. Ἂν $n(T)=1$, τὸ ζητούμενο ἰσχύει, ἀφοῦ τὸ G ἔχει τουλάχιστον μιὰ κορυφή. Ἔστω τώρα δέντρο T μὲ $n(T)=t+1 \leq \delta(G)+1$, ὅπου $t \geq 1$, καὶ ὑποθέτουμε ὅτι τὸ λῆμμα ἰσχύει γιὰ δέντρα μὲ t κορυφές. Ἔστω $T^- = T - v$ ὅπου v ὁποιοδήποτε φύλλο τοῦ T. Ἀφοῦ $n(T^-) = t \leq \delta(G)+1$, ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση τὸ T^- εἶναι ὑπογράφημα τοῦ G, δηλαδὴ ὑπάρχει μιὰ 1–1 ἀπεικόνιση $\sigma : V(T^-) \to V(G)$ ποὺ νὰ ἀπεικονίζει ἀκμὲς τοῦ T^- σὲ ἀκμὲς τοῦ G. Ἔστω u ἡ μοναδικὴ κορυφὴ τοῦ T ποὺ συνδέεται μὲ τὴν v καὶ ἔστω $u' = \sigma(u)$. Γιὰ νὰ ἐντοπίσουμε τὸ T ὡς ὑπογράφημα τοῦ G πρέπει νὰ «ἐπιστρέψουμε» στὸ T^- τὴν «χαμένη» της κορυφὴ ἐμπλουτίζοντας τὴν ἀπεικόνιση σ μὲ τὴν εἰκόνα τοῦ v. Ἡ u' ἔχει τουλάχιστον $\delta(G) \geq t$ γειτονικὲς κορυφὲς στὸ G, ἐνῶ οἱ εἰκόνες τῶν κορυφῶν τοῦ T^- ἐκτὸς τῆς u εἶναι μόνο $t-1$. Ἄρα ἡ u' εἶναι συνδεδεμένη μὲ κάποια κορυφὴ x τοῦ G ποὺ δὲν εἶναι ἡ εἰκόνα καμίας κορυφῆς τοῦ T^-. Ἐπεκτείνουμε τότε τὴν σ θέτοντας $\sigma(v)=x$ καὶ ἔχουμε ὅτι τὸ T εἶναι ὑπογράφημα τοῦ G. □

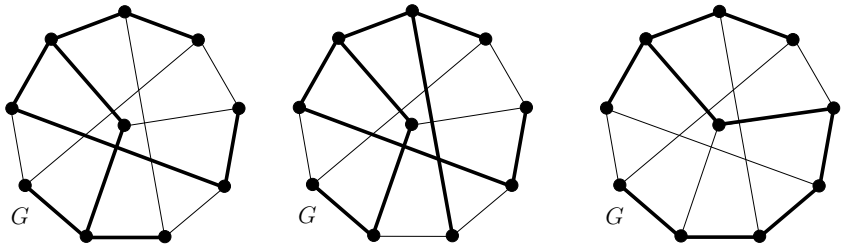
6.2 Παραγόμενα ὑποδέντρα

Ἕνα συνεκτικὸ γράφημα μπορεῖ νὰ ἀπογυμνωθεῖ ἀπὸ τὶς περιττές του ἀκμὲς μέχρι νὰ μείνει δέντρο. Τὰ δέντρα ποὺ προκύπτουν ἔτσι εἶναι κεντρικὰ σὲ πλῆθος ἀλγορίθμων.

Ὁρισμός 6.7. Ἔστω γράφημα G. Κάθε παραγόμενο ὑπογράφημα τοῦ G ποὺ εἶναι δέντρο καλεῖται *παραγόμενο δέντρο τοῦ* G.

Θεώρημα 6.8. Ἕνα γράφημα G εἶναι συνεκτικὸ ἂν καὶ μόνο ἂν περιέχει κάποιο παραγόμενο δέντρο.

Ἀπόδειξη. Παίρνουμε ἕνα δέντρο μὲ ὅσο τὸ δυνατὸν περισσότερες κορυφὲς καὶ δείχνουμε ὅτι, ἂν δὲν τὶς πιάνει ὅλες, μπορεῖ νὰ μεγαλώσει. Ἔστω G ἕνα συνεκτικὸ γράφημα. Μεταξὺ τῶν ὑπογραφημάτων τοῦ G ποὺ εἶναι δέντρα ἔστω T ἕνα



Σχῆμα 6.1: Τὸ γράφημα G καὶ ἕνα ἀπὸ τὰ παραγόμενα δέντρα του.

μὲ τὸν μεγαλύτερο ἀριθμὸ κορυφῶν. Ὑποθέτουμε, μὲ σκοπὸ νὰ καταλήξουμε σὲ ἄτοπο, ὅτι $V(T) \subsetneq V(G)$ καὶ ἔστω $v \in V(G) \backslash V(T)$. Ἰσχύει ὅτι $|V(T)| \geq 1$ (κάθε κορυφὴ τοῦ G εἶναι ἀπὸ μόνη της δέντρο), συνεπῶς ὑπάρχει $u \in V(T)$. Ἔστω P (v, u)-μονοπάτι στὸ G μὲ ἀκολουθία κορυφῶν $x_0 = v, x_1, \ldots, x_r = u$ (τὸ μονοπάτι ὑπάρχει ἐπειδὴ τὸ G εἶναι συνεκτικό). Ἀφοῦ $v \notin V(T)$, ἔχουμε ὅτι ἡ ἀκμὴ $\{x_0, x_1\}$ δὲν εἶναι ἀκμὴ τοῦ T. Ἔστω x_{i+1} ἡ πρώτη κορυφὴ τοῦ P ποὺ ἀνήκει στὸ $V(T)$ (τέτοια κορυφὴ ὑπάρχει ἀφοῦ $x_r = u \in V(T)$) καὶ ἔστω $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$. Ἀπὸ τὴν ἐπιλογὴ τῆς x_{i+1} ἔχουμε ὅτι $x_i \notin V(T)$. Παρατηροῦμε ὅτι ἂν προσθέσουμε στὸ T τὴν κορυφὴ x_i καὶ τὴν ἀκμὴ e_i, παίρνουμε ἕνα νέο δέντρο, ποὺ εἶναι ὑπογράφημα τοῦ G καὶ ἔχει περισσότερες κορυφὲς ἀπὸ τὸ T, ἄτοπο. Συνεπῶς τὸ G περιέχει ὡς ὑπογράφημα δέντρο T μὲ $V(T) = V(G)$. Ἕπεται ὅτι $T \subseteq_{\pi\alpha} G$.

Ἂν τώρα τὸ G ἔχει κάποιο παραγόμενο δέντρο, τότε κάθε ζεῦγος κορυφῶν του συνδέεται, μέσῳ τοῦ T, μὲ κάποιο μονοπάτι ποὺ εἶναι καὶ μονοπάτι τοῦ G. Ἄρα τὸ G εἶναι συνεκτικό. □

Λῆμμα 6.9. Κάθε συνεκτικὸ γράφημα G ὅπου $n(G) = m(G) + 1$ εἶναι δέντρο.

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 6.8, τὸ G περιέχει κάποιο παραγόμενο δέντρο T, τὸ ὁποῖο πρέπει νὰ περιέχει $n(T) - 1$ ἀκμὲς (Θεώρημα 6.4). Αὐτὸ σημαίνει ὅτι κάθε ἀκμὴ τοῦ G εἶναι ἀκμὴ τοῦ T, ἄρα $G = T$. □

6.3 Δέντρα μὲ ἐτικέτες

Εἶναι ἐνδιαφέρον νὰ μετρήσει κανεὶς τὸ πλῆθος τῶν διαφορετικῶν (ὡς πρὸς τοὺς ἰσομορφισμούς τους) δέντρων μὲ n κορυφές. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι δύσκολο. Μποροῦμε ὅμως νὰ βροῦμε ἕνα ἄνω φράγμα σὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμὸ μετρώντας ὅλα τὰ διαφορετικὰ δέντρα μὲ n κορυφὲς τὰ ὁποία φέρουν ἐτικέτες ἀπὸ τὸ σύνολο $\{1, \ldots, n\}$.

Ὁρισμός 6.10. Ἕνα *δέντρο μὲ ἐτικέτες* εἶναι ἕνα ζεῦγος (T, τ) ὅπου T δέντρο καὶ $\tau : V(T) \to \{1, \ldots, n(T)\}$ μιὰ 1-1 καὶ ἐπὶ ἀντιστοιχία τοῦ $V(T)$ μὲ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 1 μέχρι $n(T)$ (μὲ ἄλλα λόγια κάθε κορυφὴ λαμβάνει μιὰ ἀπὸ $n(T)$ διαθέσιμες ἐτικέτες). Ἐπεκτείνοντας τὴν ἔννοια τοῦ ἰσομορφισμοῦ θὰ λέμε ὅτι δύο δέντρα μὲ ἐτικέτες (T, τ) καὶ (T', τ') εἶναι *ἰσόμορφα* ἂν ὑπάρχει ἰσομορφισμὸς $\sigma : V(T) \to V(T')$ ἀπὸ τὸ T στὸ T' τέτοιος ὥστε $\forall v \in V(T), \tau(v) = \tau'(\sigma(v))$.

Τὸ κλειδὶ γιὰ τὴν καταμέτρηση εἶναι μιὰ κωδικοποίηση κάθε δέντρου μὲ ἐτικέτες σὲ μιὰ ἀκολουθία ἀριθμῶν, μὲ τρόπο ἀντιστρεπτό.

Ὁρισμός 6.11. Καλοῦμε ἀκολουθία *Prüfer τάξης* n κάθε ἀκολουθία $n-2$ ὅρων μὲ φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τὸ 1 ἕως τὸ n (ἐπιτρέπεται ἡ ἐπανάληψη ὅρων).

Οἱ ἀκολουθίες Prüfer προτάθηκαν γιὰ πρώτη φορὰ ἀπὸ τὸν Prüfer στὴν [84].

Παρατήρηση 6.12. Γιὰ κάθε $n \geq 2$ ὑπάρχουν συνολικὰ n^{n-2} ἀκολουθίες *PrüferPrüfer* τάξης n.

Θεώρημα 6.13 (Τύπος τοῦ CayleyCayley [18])**.** Τὸ πλῆθος τῶν διαφορετικῶν δέντρων μὲ ἐτικέτες μὲ n κορυφὲς εἶναι ἀκριβῶς n^{n-2}.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\mathcal{P}_n$ τὸ σύνολο τῶν ἀκολουθιῶν Prüfer τάξης n καὶ $\mathcal{T}_n$ τὸ σύνολο τῶν μὴ-ἰσόμορφων δέντρων μὲ ἐτικέτες καὶ n κορυφές. Θὰ δείξουμε ὅτι γιὰ κάθε $n \geq 2$ ἰσχύει ὅτι $|\mathcal{P}_n| = |\mathcal{T}_n|$.

Ἔστω $A = (a_1, \ldots, a_{n-2})$ μιὰ ἀκολουθία Prüfer τάξης n. Θὰ κατασκευάσουμε ἀπὸ αὐτὴν ἕνα δέντρο μὲ ἐτικέτες χρησιμοποιώντας τὴν παρακάτω διαδικασία:

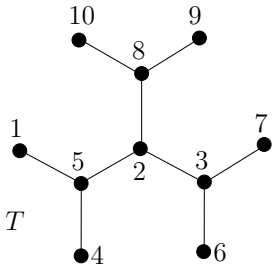
1. Ἔστω $S = \{1, \ldots, n\}$.
2. Ἔστω $T = (V, E)$ ὅπου V εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σύνολο n κορυφῶν καὶ $E = \emptyset$
3. Ἔστω $\tau : V \to S$ μιὰ ὁποιαδήποτε 1–1 καὶ ἐπὶ ἀντιστοιχία ἀπὸ τὸ V στὸ S.
4. Ἐνῶ $|S| > 2$,
   Ἔστω x ὁ μικρότερος ὅρος στὸ σύνολο S ὁ ὁποῖος δὲν ὑπάρχει στὴν A.
   Ἀφαίρεσε τὸ x ἀπὸ τὸ S,
   Ἔστω y ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ἀκολουθίας A,
   Πρόσθεσε στὸ E τὴν ἀκμὴ $\{\tau^{-1}(x), \tau^{-1}(y)\}$,
   Ἀφαίρεσε ἀπὸ τὴν A τὸν πρῶτο ὅρο.
5. Πρόσθεσε στὸ E τὴν ἀκμὴ μὲ ἄκρα τὰ στοιχεῖα τοῦ S.
6. Ἐπίστρεψε τὸ δέντρο μὲ ἐτικέτες (T, τ).

Τὸ γράφημα T προφανῶς περιέχει $n-1$ ἀκμές. Ἐπαγωγικὰ μποροῦμε νὰ δείξουμε ὅτι θὰ εἶναι καὶ συνεκτικό, συνεπῶς ἀπὸ τὸ Λῆμμα 6.9 τὸ T εἶναι δέντρο.

Θὰ δείξουμε ὅτι ἡ διαδικασία αὐτὴ ὁρίζει μιὰ 1–1 καὶ ἐπὶ ἀντιστοιχία ἀπὸ τὸ $\mathcal{P}_n$ στὸ $\mathcal{T}_n$. Γιὰ τὸν σκοπὸ αὐτὸ ὁρίζουμε τὴν ἀντίστροφη διαδικασία, ἡ ὁποία μετασχηματίζει ἕνα δέντρο μὲ ἐτικέτες σὲ ἀκολουθία Prüfer.

Ἔστω (T,τ) δέντρο μὲ ἐτικέτες. Θὰ κατασκευάσουμε ἀπὸ αὐτὸ ἀκολουθία Prüfer τάξης $n(T)$ χρησιμοποιώντας τὴν παρακάτω διαδικασία:

1. Ἔστω A ἡ κενὴ ἀκολουθία.
2. Ἐνῶ $|V(T)|>2$,
   Ἔστω v τὸ φύλλο τοῦ T μὲ τὴν μικρότερη ἐτικέτα,
   Ἔστω w ἡ (μοναδική) γειτονικὴ κορυφὴ τοῦ v στὸ T,
   Πρόσθεσε στὸ τέλος τῆς A τὸν ἀριθμὸ $\tau(w)$,
   Ἔστω T τὸ δέντρο μὲ ἐτικέτες ποὺ προκύπτει
   ἂν ἀφαιρέσουμε τὴν κορυφὴ v ἀπὸ τὸ T.
3. Ἐπίστρεψε τὴν ἀκολουθία A.



Σχῆμα 6.2: Ἡ ἀκολουθία $[5,5,2,3,3,2,8,8]$ καὶ τὸ δέντρο μὲ ἐτικέτες πού της ἀντιστοιχεῖ.

Θὰ δείξουμε ὅτι οἱ δύο παραπάνω διαδικασίες εἶναι ἡ μία ἀντίστροφη τῆς ἄλλης. Ἂν ἡ δεύτερη διαδικασία μετασχηματίζει τὸ (T,τ) στὴν ἀκολουθία A, τότε κάθε ἐτικέτα $\tau(u)$ ἐμφανίζεται στὴν A ἀκριβῶς $\deg_T(u)-1$ φορές: ἡ $\tau(u)$ γράφεται μία φορὰ γιὰ κάθε γειτονικὴ κορυφὴ τῆς u ποὺ ἀφαιρεῖται πρὶν ἀπὸ αὐτήν, δηλαδὴ γιὰ ὅλες τὶς γειτονικές της ἐκτὸς ἀπὸ μία. Εἰδικότερα, τὰ φύλλα τοῦ T εἶναι ἀκριβῶς οἱ κορυφὲς τῶν ὁποίων οἱ ἐτικέτες δὲν ἐμφανίζονται στὴν A. Ἄρα τὸ πρῶτο φύλλο v ποὺ ἀφαιρεῖ ἡ δεύτερη διαδικασία ἔχει ὡς ἐτικέτα τὸν μικρότερο

ἀριθμὸ τοῦ $\{1, \ldots, n\}$ ποὺ δὲν ἐμφανίζεται στὴν A, ἐνῶ ἡ γειτονικὴ τοῦ w ἔχει ὡς ἐτικέτα τὸν πρῶτο ὅρο τῆς A· αὐτὴ εἶναι ἀκριβῶς ἡ πρώτη ἀκμὴ ποὺ προσθέτει ἡ πρώτη διαδικασία ὅταν ἐφαρμοστεῖ στὴν A. Οἱ ὑπόλοιπες ἐπαναλήψεις καὶ τῶν δύο διαδικασιῶν λειτουργοῦν μὲ τὸν ἴδιο τρόπο στὸ δέντρο $T - v$, μὲ σύνολο ἐτικετῶν $\{1, \ldots, n\}\backslash\{\tau(v)\}$ καὶ ἀκολουθία $(a_2, \ldots, a_{n-2})$. Μὲ ἐπαγωγὴ στὸ n προκύπτει ὅτι ἡ πρώτη διαδικασία, ἐφαρμοσμένη στὴν A, ἐπιστρέφει τὸ (T, τ)· ἄρα ἡ δεύτερη διαδικασία εἶναι 1–1 καὶ $|\mathcal{T}_n| \leq |\mathcal{P}_n|$. Ἀντίστροφα, στὸ δέντρο ποὺ κατασκευάζει ἡ πρώτη διαδικασία ἀπὸ μιὰ ἀκολουθία A κάθε ἐτικέτα ἔχει βαθμὸ κατὰ ἕνα μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν ἐμφανίσεών της στὴν A, ὁπότε μὲ τὸ ἴδιο ἐπιχείρημα ἡ δεύτερη διαδικασία, ἐφαρμοσμένη στὸ δέντρο αὐτό, ἐπιστρέφει τὴν A. Ἄρα καὶ ἡ πρώτη διαδικασία εἶναι 1–1 καὶ $|\mathcal{P}_n| \leq |\mathcal{T}_n|$. Συνεπῶς $|\mathcal{P}_n| = |\mathcal{T}_n|$ καὶ τὸ θεώρημα ἕπεται ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 6.12. □

Παρατήρηση 6.14. Ἄμεση συνέπεια τοῦ προηγούμενου θεωρήματος εἶναι ὅτι ὑπάρχουν τὸ πολὺ n^{n-2} διαφορετικὰ δέντρα μὲ n κορυφές.

Ἀσκήσεις Κεφαλαίου

6.1 (☆☆☆)**.** Κάθε δέντρο μὲ τουλάχιστον 3 φύλλα περιέχει τουλάχιστον μιὰ κορυφὴ βαθμοῦ τουλάχιστον 3.

6.2 (★☆☆)**.** Ἀποδεῖξτε, μὲ δύο τρόπους, ὅτι οἱ κορυφὲς ἑνὸς δέντρου ποὺ εἶναι φύλλα εἶναι περισσότερες ἀπὸ αὐτὲς ποὺ ἔχουν βαθμὸ μεγαλύτερο τοῦ 2 (ὁ πρῶτος τρόπος χρησιμοποιεῖ ἐπαγωγὴ καὶ ὁ δεύτερος χρησιμοποιεῖ τὸ μέσο βαθμὸ τοῦ δέντρου).

6.3 (★☆☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι ἂν τὰ T_1 καὶ T_2 εἶναι δέντρα, τότε $\delta^*(T_1 \cup T_2) \leq 3$.

6.4 (★★☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι ὑπάρχουν ἀκριβῶς 3 δέντρα μὲ διάμετρο 3 καὶ 2007 διαφορετικὰ ζεύγη ἀντιδιαμετρικῶν κορυφῶν.

6.5 (☆☆☆)**.** Κάθε δέντρο T ἔχει τουλάχιστον $\Delta(T)$ φύλλα.

6.6 (☆☆☆)**.** Κάθε συνεκτικὴ συνιστῶσα ἑνὸς δάσους εἶναι δέντρο.

6.7 (★☆☆)**.** Ἕνα γράφημα G εἶναι δάσος ἂν καὶ μόνο ἂν ἔχει $n(G) - m(G)$ συνεκτικὲς συνιστῶσες.

6.8 (★☆☆)**.** Ἂν τὸ γράφημα T εἶναι δέντρο καὶ τὸ G εἶναι γράφημα τέτοιο ὥστε $\delta(G) \geq n(T) - 1$, τότε $T \subseteq G$.

6.9 (★★☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε δέντρο ἔχει τὸ πολὺ 2 κεντρικὲς κορυφές.

6.10 (★☆☆)**.** Ἕνα γράφημα εἶναι δέντρο ἂν καὶ μόνο ἂν περιέχει μόνο ἕνα παραγόμενο δέντρο.

6.11 (☆☆☆)**.** Πόσες κορυφὲς ἔχει ἕνα πλῆρες δυαδικὸ δέντρο ὕψους k;

6.12 (★★☆)**.** Ἔστω γράφημα G, n κορυφῶν, τὸ ὁποῖο περιέχει ὡς ἐναγόμενο ὑπογράφημα ἕνα δέντρο T μὲ περισσότερες ἀπὸ $n-k$ κορυφὲς γιὰ $k \geq 1$. Δεῖξτε ὅτι τὸ G δὲν περιέχει ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον τὴ διακεκριμένη ἕνωση k τριγώνων.

6.13 (★★☆)**.** Καλοῦμε *κῦρος* κορυφῆς v σὲ ἕνα γράφημα G τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ G ἀπὸ τὴν v τὸ συμβολίζουμε μὲ **κῦρος**(G, v). Ἂν τὸ T εἶναι δέντρο καὶ $e = \{x, y\}$ εἶναι ἀκμὴ τοῦ T, τότε καλοῦμε $T(e, x)$ καὶ $T(e, y)$ τὶς δύο συνεκτικὲς συνιστῶσες ποὺ προκύπτουν ἂν ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸ T τὴν ἀκμὴ $\{x, y\}$. Ὁρίζουμε ὡς ἰσοζύγιο μιᾶς ἀκμῆς $e = \{x, y\}$ τοῦ T τὴν ποσότητα **ἰσοζύγιο**$(e) = |n(T(e, x)) - n(T(e, y))|$ ὅπου $n(T(e, x))$ καὶ $n(T(e, y))$ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν τῶν δέντρων $T(e, x)$ καὶ $T(e, y)$ ἀντίστοιχα. Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε δέντρο T καὶ γιὰ κάθε ἀκμὴ $e = \{x, y\}$ τοῦ T, ἰσχύει ὅτι **ἰσοζύγιο**$(e) =$ $|$**κῦρος**$(T, x) -$ **κῦρος**$(T, y)|$.

6.14 (★★☆)**.** Κάθε συνεκτικὸ γράφημα περιέχει μονοπάτι μήκους $\min\{2\delta(G), n(G)-1\}$.

6.15 (★☆☆)**.** Ἔστω $G = P_1 \cup \cdots \cup P_r$ ὅπου $P_1, \ldots, P_r$ μονοπάτια μὲ ἀνὰ δύο ξένα σύνολα ἀκμῶν (δηλ. $\forall_{i,j,i\neq j} E(P_i) \cap E(P_j) = \emptyset$). Δεῖξτε ὅτι τὸ G ἔχει τὸ πολὺ $2r$ κορυφὲς περιττοῦ βαθμοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ἐπίπεδα γραφήματα

7.1 Ἐνεπίπεδα γραφήματα

Στὴν ἑνότητα αὐτή, θὰ χρησιμοποιήσουμε βασικὲς ἔννοιες ἀπὸ τὴν τοπολογία καὶ συγκεκριμένα ἀπὸ τὴν τοπολογία τοῦ $\mathbb{R}^2$. Δεδομένου ἑνὸς συνόλου σημείων $S \subseteq \mathbb{R}^2$ θὰ χρησιμοποιοῦμε τὸν συμβολισμὸ ∂S γιὰ τὸ σύνορο τοῦ S (δηλ. τὸ σύνολο ποὺ προκύπτει ἂν ἀπὸ τὸ κάλυμμα τοῦ S ἀφαιρέσουμε τὸ σύνολο τῶν ἐσωτερικῶν του σημείων). Οἱ περισσότερες παρατηρήσεις τῆς ἑνότητας αὐτῆς ἀποδεικνύονται μὲ χρήση ἐννοιῶν καὶ θεωρημάτων τῆς τοπολογίας. Ἐπειδὴ σκοπός μας εἶναι νὰ ἐξετάσουμε τὰ γραφήματα ἀπὸ τὴ συνδυαστική τους πλευρά, θὰ παραλείψουμε τὶς ἀποδείξεις ποὺ χρησιμοποιοῦν στοιχεῖα τοπολογίας καὶ θὰ περιορίσουμε τὴ χρήση τοπολογικῶν ἐννοιῶν στοὺς ὁρισμούς. Ἐπίσης, σὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιο θὰ θεωρήσουμε πολυγραφήματα (δηλ. γραφήματα μὲ πολλαπλὲς ἀκμὲς καὶ θηλιές – βλ. Ὁρισμὸ 1.19). Ἐπειδὴ ὅλες οἱ ἔννοιες ποὺ ὁρίσαμε στὰ προηγούμενα κεφάλαια μεταφέρονται μὲ φυσικὸ τρόπο στὴν εὐρύτερη αὐτὴ οἰκογένεια γραφημάτων θὰ δίνουμε διευκρινίσεις σχετικὰ μὲ τὴ γενίκευση τῶν ὁρισμῶν μόνο ὅταν αὐτὸ εἶναι ἀπολύτως ἀπαραίτητο.

Ὁ ὁρισμὸς ποὺ ἀκολουθεῖ εἶναι τοπολογικὸς καὶ ὄχι συνδυαστικός: δὲν περιγράφει ἕνα γράφημα, ἀλλὰ ἕνα γράφημα μαζὶ μὲ ἕναν συγκεκριμένο τρόπο σχεδίασής του στὸ ἐπίπεδο.

Ὁρισμός 7.1. Ἕνα *ἐνεπίπεδο πολυγράφημα* εἶναι ἕνα ζεῦγος $\Gamma = (V, A)$ ἀπὸ πεπερασμένα σύνολα ποὺ ἱκανοποιοῦν τὶς ἑξῆς ἰδιότητες:

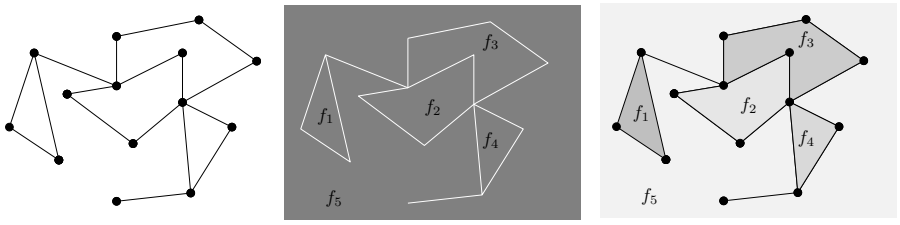
1. Κάθε στοιχεῖο v τοῦ V εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ $\mathbb{R}^2$ καὶ τὸ καλοῦμε *κορυφὴ* τοῦ Γ.

2. Κάθε στοιχεῖο e τοῦ A εἶναι ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$, ὁμοιομορφικὸ μὲ τὸ ἀνοικτὸ διάστημα $(0,1)$. Τὰ σημεῖα ποὺ ἀποτελοῦν τὸ σύνορο ∂e μιᾶς ἀκμῆς e καλοῦνται *ἄκρα* τῆς e καὶ εἶναι στοιχεῖα τοῦ V.

3. Διαφορετικὲς ἀκμὲς ἔχουν κενὴ τομή.

4. $V \cap (\bigcup_{e\in A} e) = \emptyset$.

Θὰ χρησιμοποιοῦμε τὸν συμβολισμὸ $\tilde{\Gamma} = V \cup (\bigcup_{e\in A} e)$ γιὰ τὸ σύνολο τῶν σημείων ποὺ εἶναι κορυφὲς ἢ ἀνήκουν σὲ ἀκμὲς τοῦ A. Τέλος, σὲ ἀντιστοιχία μὲ τοὺς ἀντίστοιχους ὁρισμοὺς γιὰ γραφήματα, ὁρίζουμε $V(\Gamma) = V$ καὶ $E(\Gamma) = A$. Καλοῦμε ἕνα ἐνεπίπεδο πολυγράφημα *ἐνεπίπεδο γράφημα* ὅταν ὅλες οἱ ἀκμές του ἔχουν δύο ἀκριβῶς ἄκρα (δὲν ἔχει θηλιές) καὶ δὲν ὑπάρχει ζεῦγος ἀκμῶν μὲ τὰ ἴδια ἄκρα (δὲν ἔχει πολλαπλὲς ἀκμές).



Γ $\qquad$ $\mathbb{R}^2 - \tilde{\Gamma}$ $\qquad$ $F(\Gamma)$

Σχῆμα 7.1: Τὸ ἐνεπίπεδο γράφημα Γ καὶ οἱ ὄψεις του.

Ὁρισμός 7.2. Ἔστω ἐνεπίπεδο πολυγράφημα $\Gamma = (V, E)$. Καλοῦμε τὸ ζεῦγος $\Gamma' = (V', E')$ *ἐνεπίπεδο ὑπογράφημα* τοῦ Γ ἂν $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ καὶ τὸ (V', E') εἶναι ἐνεπίπεδο πολυγράφημα.

Παρατήρηση 7.3. Τὸ σύνολο $\mathbb{R}^2 \backslash \tilde{\Gamma}$ εἶναι ἀνοικτό.

Τὸ σχέδιο ἑνὸς γραφήματος τεμαχίζει τὸ ἐπίπεδο σὲ περιοχές. Οἱ περιοχὲς αὐτὲς εἶναι τὸ νέο στοιχεῖο ποὺ δὲν ὑπάρχει στὸ ἀφηρημένο γράφημα, καὶ σὲ αὐτὲς ὀφείλεται σχεδὸν κάθε ἀποτέλεσμα τοῦ κεφαλαίου.

Ὁρισμός 7.4. Ἂν τὸ $\Gamma = (V, E)$ εἶναι ἐνεπίπεδο πολυγράφημα τότε καλοῦμε τὶς συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ συνόλου $\mathbb{R}^2 \backslash \tilde{\Gamma}$ *ὄψεις* τοῦ Γ. Χρησιμοποιοῦμε τὸν συμβολισμὸ $F(\Gamma)$ γιὰ τὸ σύνολο τῶν ὄψεων τοῦ Γ. Καλοῦμε δύο παράλληλες ἀκμὲς

όμοτοπικές ὅταν ἡ ἕνωσή τους μαζὶ μὲ τὰ κοινά τους ἄκρα εἶναι τὸ σύνορο κάποιας ὄψης τοῦ Γ.

Παρατήρηση 7.5. Ἂν τὸ $\Gamma = (V, E)$ εἶναι ἐνεπίπεδο πολυγράφημα, τότε θὰ ὑπάρχει κάποιος δίσκος $D \subset \mathbb{R}^2$ ἔτσι ὥστε $\tilde{\Gamma} \subseteq D$ (ὁρίζουμε ὡς *δίσκο* τοῦ $\mathbb{R}^2$ κάθε σύνολο ὁμοιομορφικὸ τοῦ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$). Ἐπίσης ὑπάρχει ἀκριβῶς μιὰ ὄψη τοῦ Γ ἡ ὁποία νὰ εἶναι ὑπερσύνολο τοῦ συμπληρώματος κάθε τέτοιου δίσκου D.

Ὁρισμός 7.6. Ἂν τὸ $\Gamma = (V, E)$ εἶναι ἕνα ἐνεπίπεδο πολυγράφημα, ἡ (μοναδική) ὄψη $f \in F(\Gamma)$ τοῦ Γ ἡ ὁποία περιέχει ὡς ὑποσύνολο τὸ συμπλήρωμα κάθε δίσκου σὰν κι αὐτὸν τῆς Παρατήρησης 7.5 καλεῖται *ἐξωτερικὴ ὄψη* τοῦ Γ. Ὅλες οἱ ἄλλες ὄψεις τοῦ Γ καλοῦνται *ἐσωτερικές*.

Ὁρισμός 7.7. Κάθε ἐνεπίπεδο (πολυ)γράφημα $\Gamma = (V, E)$ *ἀντιστοιχεῖ στὸ* (πολυ) γράφημα

$$G_\Gamma = (V, \{\partial e \mid e \in E(\Gamma)\}).$$

(σὲ συμφωνία μὲ τὸν Ὁρισμὸ 1.19, ἂν τὸ Γ ἔχει πολλαπλὲς ἀκμὲς τότε ἀντιμετωπίζουμε τὸ σύνολο τῶν ἀκμῶν τοῦ G_Γ ὡς πολυσύνολο).

Παρατήρηση 7.8. Ὑπάρχουν γραφήματα τὰ ὁποία δὲν ἀντιστοιχοῦν σὲ ἐνεπίπεδα γραφήματα. Ἀπὸ αὐτά, τὸ K_5 (δὲν ἱκανοποιεῖ τὸ Πόρισμα 7.47) εἶναι αὐτὸ ποὺ ἔχει τὸν μικρότερο ἀριθμὸ κορυφῶν καὶ τὸ $K_{3,3}$ (δὲν ἱκανοποιεῖ τὸ φράγμα $m(G) \leq 2n(G) - 4$, τὸ ὁποῖο προκύπτει ἀπὸ τὸν τύπο τοῦ Euler γιὰ κάθε ἐπίπεδο γράφημα χωρὶς τρίγωνα μὲ $n(G) \geq 3$, βλ. Ἄσκηση 7.34) αὐτὸ ποὺ ἔχει τὸν μικρότερο ἀριθμὸ ἀκμῶν.

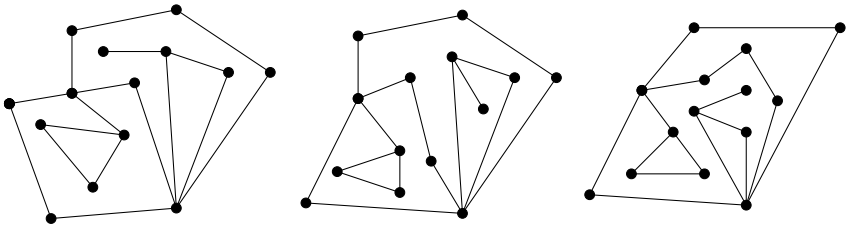
Ὁρισμός 7.9. Ἔστω Γ ἐνεπίπεδο πολυγράφημα καὶ ἔστω $f \in F(\Gamma)$. Ὁρίζουμε ὡς $\Gamma[f]$ τὸ ἐνεπίπεδο ὑπογράφημα τοῦ Γ ποὺ περιέχει ὡς σύνολο κορυφῶν τὸ $V(\Gamma) \cap \partial f$ καὶ ὡς σύνολο ἀκμῶν τὶς συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ $\partial f \backslash V(\Gamma)$. Μιὰ ὄψη $f \in F(\Gamma)$ καλεῖται *τριγωνική* ἂν $G_{\Gamma[f]} \simeq K_3$.

Παρατήρηση 7.10. Τὸ ἐνεπίπεδο γράφημα Γ τοῦ σχήματος 7.1 ἔχει δύο τριγωνικὲς ὄψεις, τὶς f_1 καὶ f_4.

Εἶναι οὐσιῶδες νὰ ξεχωρίσουμε τὸ σχέδιο ἀπὸ τὸ γράφημα ποὺ σχεδιάζεται: τὸ πρῶτο ζεῖ στὸ ἐπίπεδο, τὸ δεύτερο εἶναι καθαρὰ συνδυαστικὸ ἀντικείμενο.

Ὁρισμός 7.11. Καλοῦμε ἕνα πολυγράφημα G *ἐπίπεδο* ἂν ὑπάρχει ἐνεπίπεδο πολυγράφημα Γ ποὺ νὰ ἀντιστοιχεῖ σὲ πολυγράφημα ἰσόμορφο τοῦ G (δηλ. $G_\Gamma \simeq G$).

Ἂν τὸ G εἶναι ἕνα ἐπίπεδο πολυγράφημα καὶ Γ ἕνα ἐνεπίπεδο πολυγράφημα τέτοιο ὥστε $G_\Gamma \simeq G$, τότε λέμε ὅτι τὸ Γ εἶναι μιὰ *ἐπίπεδη ἐμβάπτιση τοῦ* G.



Σχῆμα 7.2: Διαφορετικὲς ἐμβαπτίσεις τοῦ ἐνεπίπεδου γραφήματος G_Γ ὅπου Γ τὸ ἐνεπίπεδο γράφημα τοῦ Σχήματος 7.1.

Παρατήρηση 7.12. Ἕνα ἐπίπεδο πολυγράφημα μπορεῖ νὰ ἔχει ἀρκετὰ διαφορετικὲς ἐπίπεδες ἐμβαπτίσεις (βλ. Σχῆμα 7.2).

Παρατήρηση 7.13. Ἡ κλάση τῶν ἐπίπεδων γραφημάτων εἶναι κλειστὴ ὡς πρὸς τὶς σχέσεις $\subseteq_{\upsilon\pi}, \subseteq_{\epsilon\nu}, \subseteq_{\pi\alpha}, \leq_{\tau\pi}$ καὶ $\leq_{\epsilon\lambda}$.

Ὁρισμός 7.14 (Σύμβαση). Ὁ ὁρισμὸς τοῦ G_Γ μᾶς δίνει τὸ δικαίωμα νὰ χρησιμοποιοῦμε σὲ ἐνεπίπεδα γραφήματα, ὁποιαδήποτε ἰδιότητα ποὺ ὁρίσαμε ὡς τώρα σὲ γραφήματα. Ἂν λοιπὸν ἡ Π εἶναι μιὰ ἰδιότητα γραφημάτων, τότε λέμε ὅτι ἕνα ἐνεπίπεδο γράφημα Γ *ἔχει τὴν ἰδιότητα* Π ἂν τὸ G_Γ ἔχει τὴν ἰδιότητα Π.

Ἐπίσης, μιὰ καὶ ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν ἀκμῶν ἑνὸς ἁπλοῦ ἐνεπίπεδου πολυγραφήματος Γ καὶ τῶν ἀκμῶν τοῦ G_Γ, θὰ χρησιμοποιοῦμε τὸν ἴδιο συμβολισμὸ καὶ γιὰ τοὺς δύο τύπους ἀκμῶν.

Παρατήρηση 7.15. Ἔστω G καὶ H ἐπίπεδα γραφήματα ὅπου $G \cap H \simeq K_r, r \leq 2$. Τότε τὸ γράφημα $G \cup H$ εἶναι ἐπίσης ἐπίπεδο.

Παρατήρηση 7.16. Ἔστω ἐνεπίπεδο πολυγράφημα Γ καὶ ἔστω e ἀκμὴ κύκλου[1] τοῦ Γ. Τότε ὑπάρχουν διαφορετικὲς ὄψεις $f_1, f_2 \in F(\Gamma)$ τέτοιες ὥστε $e \subseteq \partial f_1 \cap \partial f_2$.

Παρατήρηση 7.17. Κάθε ἐπίπεδη ἐμβάπτιση ἑνὸς δέντρου ἔχει μόνο μιὰ ὄψη ἡ ὁποία εἶναι ἐξωτερική.

Παρατήρηση 7.18. Ἕνα ἐνεπίπεδο γράφημα Γ εἶναι δισυνεκτικὸ ἂν καὶ μόνο ἂν γιὰ κάθε $f \in F(\Gamma)$, τὸ $\Gamma[f]$ εἶναι κύκλος.

[1] Σὲ πολυγραφήματα ἐπεκτείνουμε τὸν ὁρισμὸ τοῦ κύκλου ὥστε νὰ περιλαμβάνει κύκλους μεγέθους 1 καὶ 2 (θηλιὲς καὶ ζεύγη παράλληλων ἀκμῶν ἀντίστοιχα).

Παρατήρηση 7.19. Ἔστω Γ ἐνεπίπεδο πολυγράφημα καὶ ἔστω Λ κύκλος τοῦ Γ (δηλ. ὑπογράφημα τοῦ Γ ποὺ εἶναι κύκλος). Τότε κάθε μονοπάτι τοῦ Γ (δηλ. ὑπογράφημα τοῦ Γ ποὺ εἶναι μονοπάτι) ποὺ ἑνώνει κορυφὲς ποὺ βρίσκονται σὲ διαφορετικὲς συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ $\mathbb{R}^2\backslash\tilde{\Lambda}$, θὰ περιέχει κάποια κορυφὴ τοῦ Λ.

Σχόλιο 7.20. Ἡ παρατήρηση 7.19 βασίζεται σὲ ἕνα σημαντικὸ Θεώρημα τῆς τοπολογίας γνωστὸ καὶ ὡς θεώρημα τοῦ Jordan.

7.2 Τοπολογικῶς ἰσόμορφα ἐνεπίπεδα πολυγραφήματα

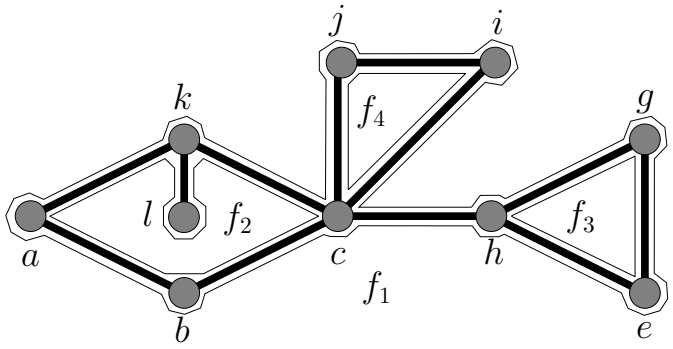
Δύο σχέδια τοῦ ἴδιου γραφήματος μπορεῖ νὰ διαφέρουν οὐσιωδῶς ὡς πρὸς τὶς ὄψεις τους. Χρειαζόμαστε λοιπὸν μιὰ ἔννοια ἰσοδυναμίας ποὺ νὰ τὶς λαμβάνει ὑπ' ὄψιν.

Ὁρισμός 7.21. Ἔστω W_1 καὶ W_2 περιηγήσεις ἑνὸς πολυγραφήματος G. Θὰ λέμε ὅτι οἱ W_1 καὶ W_2 εἶναι *συμμετρικές* ἂν ἡ μιὰ μπορεῖ νὰ προκύψει ἀπὸ τὴν ἄλλη μετὰ ἀπὸ ὀλίσθηση ἢ/καὶ ἀντιστροφή. Ἡ σχέση συμμετρίας μεταξὺ περιηγήσεων εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας. Καλοῦμε κάθε κλάση τῆς *κυκλικὴ παράθεση* καὶ τὴν συμβολίζουμε ἐπιλέγοντας ἕνα ὁποιοδήποτε μέλος τῆς κλάσης. Γιὰ παράδειγμα στὸ ἐνεπίπεδο γράφημα τοῦ Σχήματος 7.3, οἱ κυκλικὲς παραθέσεις $[e, h, c, b, a, k, c, j, i, c, h, g, e]$ καὶ $[g, h, c, i, j, c, k, a, b, c, h, e, g]$ εἶναι ἰσοδύναμες, ἐνῶ ἡ κυκλικὴ παράθεση $[c, i, j, c, b, a, k, c, h, g, e, h, c]$ εἶναι διαφορετικὴ ἀπὸ τὶς δύο προηγούμενες.

Παρατήρηση 7.22. Ἔστω $\Gamma = (V, A)$ συνεκτικὸ ἐνεπίπεδο πολυγράφημα καὶ ἔστω ὄψη τοῦ $f \in F(\Gamma)$. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ σύνορο τῆς f ὁρίζει μιὰ περιήγηση τοῦ Γ ἡ ὁποία ἔχει ὡς κορυφὲς τὸ σύνολο $V \cap \partial f$ καὶ ὡς ἀκμὲς τὶς συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ $\partial f\backslash V$. Θὰ ἀντιμετωπίσουμε τὶς περιηγήσεις αὐτὲς ὡς κυκλικὲς παραθέσεις ἀγνοώντας τὴν διεύθυνσή τους ἢ τὸ ποιὰ εἶναι ἡ πρώτη κορυφὴ στὸν τρόπο ποὺ τὶς συμβολίζουμε.

Ὁρισμός 7.23. Ἔστω $\Gamma = (V, E)$ συνεκτικὸ ἐνεπίπεδο πολυγράφημα. Γιὰ κάθε ὄψη $f \in F(\Gamma)$ θὰ χρησιμοποιοῦμε τὸν συμβολισμὸ $\pi(f)$ γιὰ τὴν κυκλικὴ παράθεση ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν f σύμφωνα μὲ τὴν Παρατήρηση 7.22.

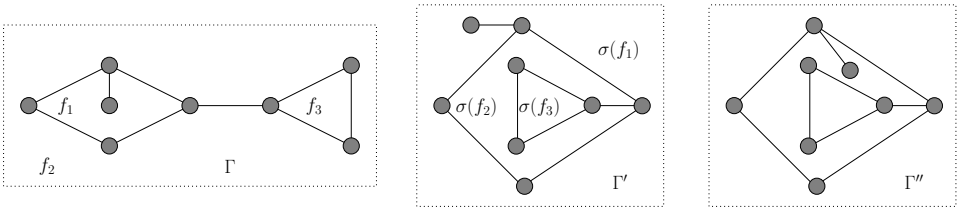
Ὁρισμός 7.24. Ἔστω Γ, Γ' συνεκτικὰ ἐνεπίπεδα πολυγραφήματα. Λέμε ὅτι τὰ Γ καὶ Γ' εἶναι *τοπολογικῶς ἰσόμορφα* ἂν τὰ G_Γ καὶ $G_{\Gamma'}$ εἶναι ἰσόμορφα μέσῳ μιὰ συνάρτησης $\rho : V(\Gamma) \to V(\Gamma')$ καὶ ἐπιπλέον ὑπάρχει 1–1 καὶ ἐπὶ συνάρτηση



Σχῆμα 7.3: Οἱ κυκλικὲς παραθέσεις ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς ὄψεις τοῦ συνεκτικοῦ γραφήματος G εἶναι $\pi(f_1) = [e, h, c, b, a, k, c, j, i, c, h, g, e], \pi(f_2) = [b, a, k, l, k, c, b], \pi(f_3) = [g, e, h, g]$, καὶ $\pi(f_4) = [i, c, j, i]$.

$\sigma : F(\Gamma) \to F(\Gamma')$, ἔτσι ὥστε γιὰ κάθε $f \in F(\Gamma)$, $\rho(\pi(f)) = \pi(\sigma(f))$. Δύο μὴ-συνεκτικὰ ἐνεπίπεδα πολυγραφήματα εἶναι *τοπολογικῶς ἰσόμορφα* ἂν οἱ συνεκτικές τους συνιστῶσες μποροῦν νὰ σχηματίσουν μεταξύ τους τοπολογικῶς ἰσόμορφα ζευγάρια.

Παρατήρηση 7.25. Παρατηροῦμε ὅτι ἂν δύο ἐνεπίπεδα πολυγραφήματα Γ καὶ Γ' εἶναι τοπολογικῶς ἰσόμορφα, τότε τὰ G_Γ καὶ $G_{\Gamma'}$ εἶναι ἰσόμορφα. Τὸ ἀντίθετο δὲν ἰσχύει γενικά. Παρόλα αὐτὰ ἰσχύει γιὰ μιὰ ἀρκετὰ εὐρεῖα κλάση πολυγραφημάτων ὅπως καταδεικνύει τὸ παρακάτω θεώρημα.

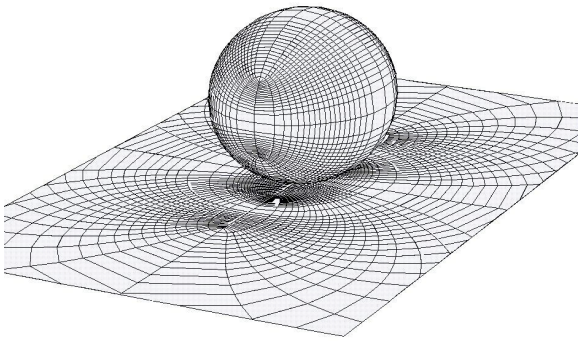


Σχῆμα 7.4: Τὰ ἐνεπίπεδα γραφήματα Γ καὶ Γ' εἶναι τοπολογικῶς ἰσόμορφα. Ἂν καὶ τὰ G_Γ καὶ $G_{\Gamma''}$ εἶναι ἰσόμορφα, τὰ Γ καὶ Γ'' δὲν εἶναι τοπολογικῶς ἰσόμορφα.

Γιὰ τὰ 3-συνεκτικὰ γραφήματα ἡ ἀμφισημία ἐξαφανίζεται: τὸ σχέδιο καθορίζεται πλήρως ἀπὸ τὸ ἴδιο τὸ γράφημα. Τὸ ἀποτέλεσμα ὀφείλεται στὸν Whitney (1932) [108].

Θεώρημα 7.26 (Whitney, 1932 [108])**.** Ἔστω G καὶ G' ἰσόμορφα ἐπίπεδα 3-συνεκτικὰ πολυγραφήματα καὶ ἔστω Γ, Γ' ἐμβαπτίσεις τῶν G καὶ G'. Τότε τὰ ἐνεπίπεδα πολυγραφήματα Γ καὶ Γ' εἶναι τοπολογικῶς ἰσόμορφα.

Παρατήρηση 7.27. Παρατηροῦμε ὅτι σὲ δύο τοπολογικῶς ἰσόμορφα ἐνεπίπεδα πολυγραφήματα ἡ ἐξωτερικὴ ὄψη τοῦ ἑνὸς μπορεῖ νὰ ἀντιστοιχεῖ σὲ μιὰ ἐσωτερικὴ ὄψη τοῦ ἄλλου (βλ. Σχῆμα 7.4). Ἕνας ἐναλλακτικὸς τρόπος νὰ ὁρίσουμε τὰ ἐπίπεδα πολυγραφήματα εἶναι νὰ τὰ ἐμβαπτίσουμε, ἀντὶ γιὰ τὸ ἐπίπεδο $\mathbb{R}^2$ στὴν μοναδιαία σφαῖρα $\mathbb{S}_0 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$. Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπο, ἀποφεύγουμε τὴν διάκριση μεταξὺ ἐσωτερικῶν καὶ ἐξωτερικῆς ὄψης. Μποροῦμε νὰ μετασχηματίσουμε μιὰ ἐμβάπτιση στὴν μοναδιαία σφαῖρα σὲ μιὰ ἐμβάπτιση στὸ ἐπίπεδο χρησιμοποιώντας τὸν μετασχηματισμὸ γνωστὸ ὡς στερεογραφικὴ προβολή, δεδομένου ὅτι τὸ σημεῖο $(0, 0, 2)$ (ὁ «βόρειος πόλος») δὲν εἶναι σημεῖο τοῦ πολυγραφήματος.



Σχῆμα 7.5: Παράδειγμα στερεογραφικῆς προβολῆς.

Ὁρισμός 7.28. Ἡ *στερεογραφικὴ προβολή* ἑνὸς σημείου (x, y, z) τῆς μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}_0 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$ σὲ ἕνα σημεῖο (χ, ψ) τοῦ ἐπιπέδου $\mathbb{R}^2$ (τὸ ὁποῖο ταυτίζουμε μὲ τὸ ἐπίπεδο $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$ τοῦ ἰσημερινοῦ) δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο:

$$(\chi, \psi) \quad = \quad \left(\frac{x}{2-z}, \frac{y}{2-z} \right) \tag{7.1}$$

Ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμὸς δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο:

$$(x, y, z) = \left(\frac{2\chi}{\chi^2 + \psi^2 + 1}, \frac{2\psi}{\chi^2 + \psi^2 + 1}, \frac{2\chi^2 + 2\psi^2}{\chi^2 + \psi^2 + 1} \right) \tag{7.2}$$

Παρατήρηση 7.29. Ἔστω f μιὰ ὁποιαδήποτε ὄψη ἑνὸς ἐνεπίπεδου πολυγραφήματος Γ καὶ ἔστω $s = (x_0, y_0)$ ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς f. Ἐφαρμόζουμε τοὺς ἑξῆς μετασχηματισμοὺς στὸ Γ:

1) Τὸν μετασχηματισμὸ $(x, y) \leftarrow (x - x_0, y - y_0)$. Ἔτσι μετατοπίζουμε τὸ σημεῖο $s = (x_0, y_0)$ στὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων.

2) Τὸν ἀντίστροφο στερεογραφικὸ μετασχηματισμό. Ἔτσι ἐμβαπτίζουμε τὸ πολυγράφημα G_Γ στὴν σφαῖρα $\mathbb{S}_0$ μὲ τρόπο ποὺ ἡ εἰκόνα τοῦ s εἶναι στὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων.

3) Τὸν μετασχηματισμὸ $(x, y, z) \leftarrow (x, y, 2 - z)$. Ἔτσι παίρνουμε τὴν συμμετρικὴ ἐμβάπτιση ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδο $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$ (τὸ ἐπίπεδο τοῦ ἰσημερινοῦ). Ἡ εἰκόνα τοῦ s εἶναι τώρα στὸ σημεῖο $(0, 0, 2)$, δηλ. στὸ βόρειο πόλο.

4) Τὸ στερεογραφικὸ μετασχηματισμό. Ἡ εἰκόνα τοῦ s δὲν ἀντιστοιχεῖ τώρα σὲ κανένα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου.

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ νέα ἐμβάπτιση τοῦ G_Γ στὸ ἐπίπεδο εἶναι ἐνεπίπεδο πολυγράφημα Γ' τοπολογικὰ ἰσόμορφο μὲ τὸ Γ καὶ τέτοιο ὥστε ἡ ἀντίστοιχη στὴν f ὄψη νὰ εἶναι τώρα ἡ ἐξωτερικὴ ὄψη τοῦ Γ'. Συνοψίζουμε τὶς παρατηρήσεις μας στὸ ἑξῆς θεώρημα.

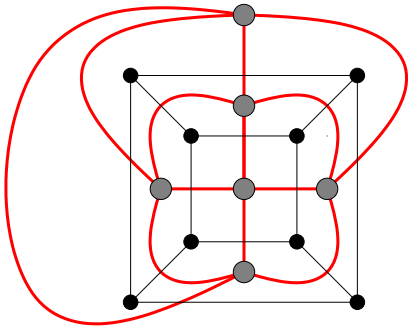
Θεώρημα 7.30. Γιὰ κάθε ἐνεπίπεδο πολυγράφημα Γ καὶ γιὰ κάθε ὄψη f τοῦ Γ ὑπάρχει τοπολογικῶς ἰσόμορφο πολυγράφημα Γ' (μέσῳ συναρτήσεων ρ καὶ σ) στὸ ὁποῖο ἡ ὄψη ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν f (δηλ. ἡ ὄψη $\sigma(f)$) νὰ εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὄψη τοῦ Γ'.

7.3 Δυϊκὰ γραφήματα

Ἡ δυϊκότητα ἀνταλλάσσει τοὺς ρόλους ὄψεων καὶ κορυφῶν. Μεταφράζει ἔτσι προτάσεις γιὰ ἕνα ἐπίπεδο γράφημα σὲ προτάσεις γιὰ ἕνα ἄλλο.

Ὁρισμός 7.31. Ἔστω $\Gamma = (V, A)$ ἐνεπίπεδο πολυγράφημα μὲ σύνολο ὄψεων τὸ $F = F(\Gamma)$. Λέμε ὅτι ἕνα ἐνεπίπεδο πολυγράφημα $\Gamma^* = (V^*, A^*)$ εἶναι *δυϊκό* τοῦ Γ ἂν ἱκανοποιεῖ τὰ παρακάτω:

- Κάθε κορυφὴ τοῦ Γ^* εἶναι σημεῖο κάποιας ὄψης τοῦ Γ.
- Γιὰ κάθε ὄψη τοῦ Γ, ὑπάρχει μιὰ καὶ μοναδικὴ κορυφὴ τοῦ Γ^* ποὺ νὰ περιέχεται σὲ αὐτὴ τὴν ὄψη.
- Κάθε ἀκμὴ τοῦ Γ^* ἔχει ἕνα καὶ μόνο σημεῖο κοινὸ μὲ τὸ Γ καὶ τὸ σημεῖο αὐτὸ ἀνήκει σὲ μιὰ ἀκμὴ τοῦ Γ.
- Κάθε ἀκμὴ τοῦ Γ ἔχει ἕνα καὶ μόνο σημεῖο κοινὸ μὲ τὸ Γ^* καὶ τὸ σημεῖο αὐτὸ ἀνήκει σὲ μιὰ ἀκμὴ τοῦ Γ^*.



Σχῆμα 7.6: Μιὰ ἐνεπίπεδη ἐμβάπτιση τοῦ τρισδιάστατου κύβου Q_3 καὶ ἡ δυϊκή της ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ ὀκτάεδρο $K_{2,2,2}$.

Παρατήρηση 7.32. Γιὰ κάθε ἐνεπίπεδο πολυγράφημα ἰσχύει ὅτι ὅλα τὰ δυϊκά του εἶναι μεταξύ τους τοπολογικῶς ἰσόμορφα.

Παρατήρηση 7.33. Τὸ δυϊκὸ ἑνὸς 3-συνεκτικοῦ ἐπίπεδου πολυγραφήματος εἶναι ἐπίσης 3-συνεκτικό. (Ἡ ἀπόδειξη, τὴν ὁποία παραλείπουμε, ὀφείλεται στὸν Whitney [108].)

Λῆμμα 7.34. Ἔστω G ἕνα 3-συνεκτικὸ ἐπίπεδο πολυγράφημα, Γ_1, Γ_2 δύο ἐνεπίπεδες ἐμβαπτίσεις του καὶ Γ_1^*, Γ_2^* δυϊκά τους. Τότε τὰ Γ_1^* καὶ Γ_2^* εἶναι τοπολογικῶς ἰσόμορφα.

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 7.26, τὰ Γ_1 καὶ Γ_2 εἶναι τοπολογικῶς ἰσόμορφα, δηλαδὴ ὑπάρχει ἰσομορφισμὸς ρ τῶν G_{Γ_1} καὶ G_{Γ_2} καὶ μιὰ ἀντιστοιχία σ τῶν ὄψεών

τους ποὺ διατηρεῖ τὰ σύνορα τῶν ὄψεων. Οἱ κορυφὲς τοῦ Γ_i^* ἀντιστοιχοῦν στὶς ὄψεις τοῦ Γ_i, καὶ κάθε ἀκμὴ τοῦ Γ_i^* ἀντιστοιχεῖ σὲ μιὰ ἀκμὴ τοῦ Γ_i καὶ ἑνώνει τὶς κορυφὲς τῶν δύο ὄψεων ποὺ αὐτὴ συνορεύει. Ἑπομένως οἱ ρ καὶ σ ἐπάγουν ἕναν ἰσομορφισμὸ τῶν πολυγραφημάτων $G_{\Gamma_1^*}$ καὶ $G_{\Gamma_2^*}$. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 7.33, τὰ πολυγραφήματα αὐτὰ εἶναι 3-συνεκτικά, ὁπότε, ἐφαρμόζοντας ξανὰ τὸ Θεώρημα 7.26, παίρνουμε ὅτι τὰ Γ_1^* καὶ Γ_2^* εἶναι τοπολογικῶς ἰσόμορφα. □

Παρατήρηση 7.35. Ἂν ἡ Γ^* εἶναι μιὰ δυϊκὴ ἐνεπίπεδη ἐμβάπτιση τοῦ ἐνεπίπεδου πολυγραφήματος Γ, τότε καὶ ἡ Γ εἶναι μιὰ δυϊκὴ ἐνεπίπεδη ἐμβάπτιση τοῦ ἐνεπίπεδου πολυγραφήματος Γ^*.

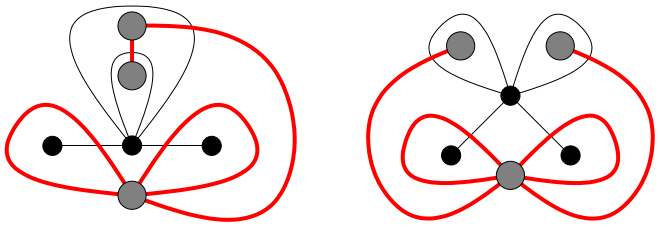
Ὁρισμός 7.36. Λέμε ὅτι ἕνα ἐπίπεδο πολυγράφημα G εἶναι *δυϊκὸ* ἑνὸς ἐπίπεδου γραφήματος H ὅταν ὑπάρχει ἐνεπίπεδη ἐμβάπτιση τοῦ H τῆς ὁποίας ἡ δυϊκὴ εἶναι τοπολογικὰ ἰσόμορφη μὲ κάποια ἐπίπεδη ἐμβάπτιση τοῦ G.

Παράδειγμα 7.37. Τὰ γραφήματα $K_{2,2,2}$ καὶ $K_2^{[3]}$ εἶναι μεταξύ τους δυϊκὰ (βλ. Σχῆμα 7.6).

Τὸ παρακάτω θεώρημα εἶναι ἄμεση συνέπεια τοῦ Λήμματος 7.34 καὶ τοῦ Ὁρισμοῦ 7.36.

Θεώρημα 7.38. Κάθε 3-συνεκτικὸ ἐπίπεδο πολυγράφημα ἔχει ἕνα καὶ μοναδικὸ δυϊκό.

Παρατήρηση 7.39. Τὸ Θεώρημα 7.38 δὲν ἰσχύει γιὰ ὅλα τὰ πολυγραφήματα (βλ. Σχῆμα 7.7).



Σχῆμα 7.7: Δύο διαφορετικὲς (μὴ τοπολογικὰ ἰσόμορφες) ἐμβαπτίσεις τοῦ ἰδίου γραφήματος μὲ θηλιές. Ἡ δεύτερη πιστοποιεῖ τὴν αὐτοδυϊκότητά του.

Ὁρισμός 7.40. Καλοῦμε ἕνα πολυγράφημα G *αὐτοδυϊκό* ὅταν εἶναι ἰσόμορφο μὲ κάποιο δυϊκό του.

Παράδειγμα 7.41. Τὸ γράφημα K_4 εἶναι αὐτοδυϊκό.

7.4 Πυκνότητα καὶ ἐπιπεδότητα

Ὁ τύπος τοῦ Euler εἶναι ἡ βασικὴ ἀριθμητικὴ ταυτότητα τῶν ἐπίπεδων γραφημάτων καὶ ἡ ἀφετηρία ὅλων τῶν φραγμάτων ποὺ ἀκολουθοῦν.

Θεώρημα 7.42 (Τύπος τοῦ Euler [39])**.** Ἔστω Γ συνεκτικὸ ἐνεπίπεδο πολυγράφημα μὲ n κορυφές, m ἀκμὲς καὶ r ὄψεις. Τότε $m + 2 = r + n$.

Ἀπόδειξη. Ἂν τὸ γράφημα εἶναι δέντρο ἔχουμε μία μόνο ὄψη, ἀλλιῶς ἀφαιροῦμε μιὰ ἀκμὴ κύκλου, ὁπότε χάνονται ταυτόχρονα μία ἀκμὴ καὶ μία ὄψη καὶ τὸ $m - r$ μένει ἀμετάβλητο. Θὰ ἀποδείξουμε τὸ θεώρημα κάνοντας ἐπαγωγὴ στὸν ἀριθμὸ τῶν ἀκμῶν τοῦ Γ. Μιὰ καὶ τὸ πολυγράφημα εἶναι συνεκτικό, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.10 ἔχουμε ὅτι $m \geq n - 1$. Ἄρα ἡ βάση τῆς ἐπαγωγῆς εἶναι $m = n - 1$ ὅπου τὸ θεώρημα ἰσχύει γιατὶ τότε ἀπὸ τὸ Θεώρημα 6.9 τὸ G_Γ θὰ εἶναι δέντρο καὶ ἄρα, ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 7.17, $r = 1$. Ἔστω τώρα ὅτι τὸ θεώρημα ἰσχύει γιὰ κάθε συνεκτικὸ ἐνεπίπεδο πολυγράφημα μὲ $< m$ ἀκμὲς (ὅπου $m \geq n$) καὶ ἔστω Γ συνεκτικὸ ἐνεπίπεδο πολυγράφημα μὲ n κορυφές, m ἀκμὲς καὶ r ὄψεις. Ἀφοῦ $m \geq n$, ἀπὸ τὸ Λῆμμα 4.30, τὸ G_Γ περιέχει κάποιο κύκλο. Ἔστω e μιὰ ἀκμὴ τοῦ κύκλου αὐτοῦ. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 7.16, στὸ Γ, ἡ ἀκμὴ e εἶναι ἡ τομὴ τῶν συνόρων δύο ὄψεων f, f' τοῦ Γ. Ἡ ἀφαίρεση τῆς ἀκμῆς e ἀπὸ τὸ Γ δημιουργεῖ ἕνα ἐνεπίπεδο πολυγράφημα (τὸ πολυγράφημα $\Gamma' = (V(\Gamma), E(\Gamma)\backslash\{e\})$) μὲ μιὰ ἀκμὴ λιγότερη καὶ μὲ μιὰ ὄψη λιγότερη (οἱ ὄψεις f καὶ f' ἀντικαθίστανται ἀπὸ τὴν νέα ὄψη $f \cup f' \cup e$). Ἐφαρμόζοντας τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση στὸ Γ' ἔχουμε $(m-1)+2 = (r-1)+n$ ἀπὸ ὅπου προκύπτει ἡ ζητούμενη ἰσότητα. □

Γιὰ νὰ ἐξαντλήσουμε τὴν χωρητικότητα τοῦ ἐπιπέδου, προσθέτουμε ἀκμὲς ὅσο αὐτὸ εἶναι δυνατόν.

Ὁρισμός 7.43. Καλοῦμε ἕνα ἐνεπίπεδο γράφημα Γ *ἐπίπεδη τριγωνοποίηση* ἂν $|V(\Gamma)| \geq 3$ καὶ τὸ Γ ἔχει μεγιστικὸ ἀριθμὸ ἀκμῶν, δηλαδὴ ἂν ἡ πρόσθεση μιᾶς ὁποιασδήποτε ἐπιπλέον ἀκμῆς στὸ $E(\Gamma)$, ἡ ὁποία δὲν εἶναι θηλιὰ οὔτε παράλληλη μὲ κάποια ἀκμὴ τοῦ Γ, παραβιάζει κάποια ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τοῦ Ὁρισμοῦ 7.1 (καὶ συγκεκριμένα κάποια ἀπὸ τὶς ἰδιότητες 2, 3, ἢ 4).

Παρατήρηση 7.44. Γιὰ κάθε ἐπίπεδη τριγωνοποίηση ἑνὸς γραφήματος Γ, ὅλες οἱ ὄψεις τοῦ Γ εἶναι τριγωνικές.

Παρατήρηση 7.45. Κάθε ἐνεπίπεδο γράφημα Γ μὲ $|V(\Gamma)| \geq 3$ εἶναι παραγόμενο ὑπογράφημα κάποιας ἐπίπεδης τριγωνοποίησης Γ'.

Λῆμμα 7.46. Κάθε ἐπίπεδη τριγωνοποίηση Γ μὲ $n \geq 3$ κορυφὲς ἔχει ἀκριβῶς $3n - 6$ ἀκμές.

Ἀπόδειξη. Μετρᾶμε μὲ δύο τρόπους τὰ ζεύγη (ἀκμή, ὄψη ποὺ τὴν ἔχει στὸ σύνορό της). Παρατηροῦμε ὅτι σὲ κάθε ἀκμὴ ἀντιστοιχοῦν ἀκριβῶς 2 ὄψεις καὶ ὅτι σὲ κάθε ὄψη ἀντιστοιχοῦν 3 ἀκμές. Ἄρα τὸ Γ ἔχει ἀκριβῶς $\frac{2}{3}|E(\Gamma)|$ ὄψεις. Θέτοντας $r = \frac{2}{3}m$ στὸν τύπο τοῦ Euler (Θεώρημα 7.42), παίρνουμε τὸ ζητούμενο. □

Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 7.45 καὶ τὸ Λῆμμα 7.46 ἔχουμε τὸ παρακάτω ἄνω φράγμα.

Πόρισμα 7.47. Κάθε ἐπίπεδο γράφημα G μὲ $n \geq 3$ κορυφὲς ἔχει τὸ πολὺ $3n - 6$ ἀκμές.

Ἀπόδειξη. Ἔστω Γ μιὰ ἐπίπεδη ἐμβάπτιση τοῦ G. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 7.45, τὸ Γ εἶναι παραγόμενο ὑπογράφημα κάποιας ἐπίπεδης τριγωνοποίησης Γ', ἡ ὁποία ἔχει τὶς ἴδιες n κορυφές. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 7.46, τὸ Γ' ἔχει ἀκριβῶς $3n - 6$ ἀκμές, ὁπότε $m(G) = m(\Gamma) \leq m(\Gamma') = 3n - 6$. □

Λῆμμα 7.48. Γιὰ κάθε ἐπίπεδο γράφημα G, $\delta(G) \leq 5$.

Ἀπόδειξη. Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἄμεση σύγκριση τοῦ φράγματος $3n - 6$ μὲ τὸ πλῆθος ἀκμῶν ποὺ ἐπιβάλλει ἕνας μεγάλος ἐλάχιστος βαθμός. Ἔστω $m = m(G)$ καὶ $n = n(G)$. Ἂν ὅλες οἱ κορυφὲς τοῦ G ἔχουν βαθμὸ ≥ 6, τότε $m \geq \frac{6}{2} \cdot n = 3 \cdot n$. Αὐτὸ ὅμως ἀντιβαίνει στὸ Πόρισμα 7.47. □

Χρησιμοποιώντας τὴν Παρατήρηση 7.13, ἔχουμε τὸ ἑξῆς πόρισμα.

Πόρισμα 7.49. Γιὰ κάθε ἐπίπεδο γράφημα G, $\delta^*(G) \leq 5$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω H ὑπογράφημα τοῦ G. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 7.13 ἡ κλάση τῶν ἐπίπεδων γραφημάτων εἶναι κλειστὴ ὡς πρὸς τὴ σχέση $\subseteq_{\upsilon\pi}$, ὁπότε τὸ H εἶναι ἐπίσης ἐπίπεδο καὶ ἀπὸ τὸ Λῆμμα 7.48 ἰσχύει $\delta(H) \leq 5$. Ἀφοῦ αὐτὸ ἰσχύει γιὰ κάθε ὑπογράφημα τοῦ G, ἀπὸ τὸν Ὁρισμὸ 3.8 παίρνουμε $\delta^*(G) \leq 5$. □

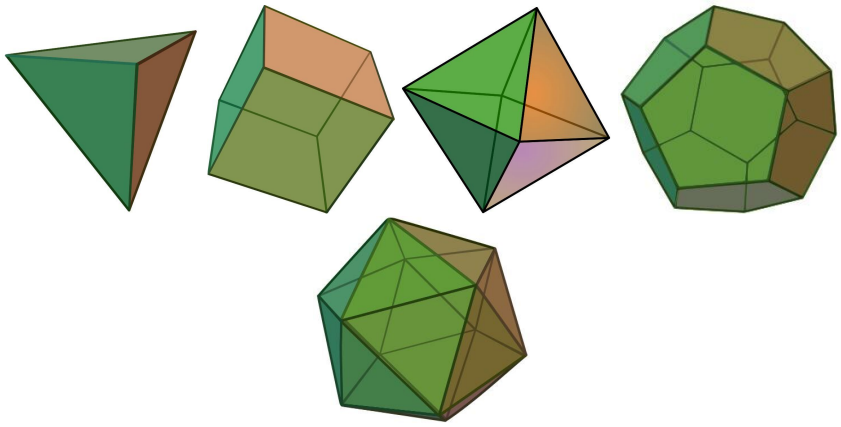
7.5 Πλατωνικὰ γραφήματα

Παρατήρηση 7.50. Κάθε κυρτὸ πολύεδρο τριῶν διαστάσεων[2] ἀντιστοιχεῖ σὲ ἕνα 3-συνεκτικὸ ἐπίπεδο γράφημα τοῦ ὁποίου οἱ κορυφὲς καὶ οἱ ἀκμὲς εἶναι ἀκριβῶς

[2]Ἕνα κυρτὸ πολύεδρο τριῶν διαστάσεων ὁρίζεται αὐστηρὰ ὡς τὸ σύνολο τῶν λύσεων τοῦ συστήματος ἀνισοτήτων $\mathbf{Mx} \leq \mathbf{b}$, ἐφόσον τὸ σύνολο αὐτὸ εἶναι φραγμένο καὶ ἔχει μὴ κενὸ ἐσωτερικό, ὅπου $\mathbf{M}$ εἶναι ἕνας πραγματικὸς $n \times 3$ πίνακας καὶ τὸ $\mathbf{b}$ εἶναι πραγματικὸ διάνυσμα μὲ n στοιχεῖα.

οἱ κορυφὲς καὶ οἱ ἀκμὲς τοῦ πολυέδρου. Ἀντιστρόφως, μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε 3-συνεκτικὸ ἐπίπεδο γράφημα ἀντιστοιχεῖ σὲ ἕνα κυρτὸ πολύεδρο τριῶν διαστάσεων (βλ. [47]).

Ὁρισμός 7.51. Ἕνα τρισδιάστατο πολύεδρο εἶναι *κανονικό* ὅταν ὅλες οἱ ὄψεις του εἶναι ἰσομετρικὰ κανονικὰ πολύγωνα καὶ σὲ κάθε κορυφή του συναντᾶται ὁ ἴδιος ἀριθμὸς ὄψεων. Ἕνα πολύεδρο καλεῖται *Πλατωνικό* ὅταν εἶναι κανονικό, τρισδιάστατο, καὶ κυρτό. Καλοῦμε ἕνα γράφημα *Πλατωνικό* ὅταν ἀντιστοιχεῖ σὲ ἕνα Πλατωνικὸ πολύεδρο. Ἀφοῦ σὲ κάθε κορυφὴ ἑνὸς κυρτοῦ πολυέδρου ὁ ἀριθμὸς τῶν ὄψεων ποὺ συναντῶνται ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν ἀκμῶν ποὺ προσπίπτουν σὲ αὐτήν, κάθε ἐνεπίπεδο γράφημα ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ ἕνα Πλατωνικὸ πολύεδρο εἶναι κανονικὸ (δηλ. ὅλες οἱ κορυφές του ἔχουν τὸν ἴδιο βαθμό). Προφανῶς ἰσχύει ἐπίσης ὅτι καὶ ὅλες οἱ ὄψεις του ἔχουν τὸν ἴδιο ἀριθμὸ ἀκμῶν στὸ σύνορό τους.



Σχῆμα 7.8: Τὰ πέντε Πλατωνικὰ γραφήματα: τὸ τετράεδρο, ὁ κύβος, τὸ ὀκτάεδρο, τὸ δωδεκάεδρο καὶ τὸ εἰκοσάεδρο.

Παρατήρηση 7.52. Ἂν ἕνα ἐπίπεδο γράφημα εἶναι Πλατωνικὸ τότε αὐτὸ καὶ τὸ δυϊκό του εἶναι κανονικὰ γραφήματα. Ἐπίσης, τὸ δυϊκὸ ἑνὸς Πλατωνικοῦ γραφήματος εἶναι Πλατωνικό.

Θεώρημα 7.53. Ὑπάρχουν ἀκριβῶς πέντε Πλατωνικὰ γραφήματα: τὸ τετράεδρο, ὁ κύβος, τὸ ὀκτάεδρο, τὸ δωδεκάεδρο καὶ τὸ εἰκοσάεδρο (βλ. Σχῆμα 7.8).

Ἀπόδειξη. Ἡ ἀπόδειξη εἶναι καθαρὰ ἀριθμητική: ὁ τύπος τοῦ Euler μαζὶ μὲ τὴν κανονικότητα ἀφήνει μόνο πέντε ἀκέραιες λύσεις. Εἶναι εὔκολο νὰ διαπιστώσουμε ὅτι

ὅλα τὰ πολύεδρα τοῦ Σχήματος 7.8 εἶναι Πλατωνικά. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 7.52, ἂν ἕνα γράφημα G εἶναι Πλατωνικό, τότε τὸ G θὰ εἶναι x-κανονικὸ καὶ τὸ G^* θὰ εἶναι y-κανονικὸ γιὰ κάποιους φυσικοὺς ἀριθμοὺς $x, y \geq 3$. Ἔστω $n = n(G)$ καὶ $r = n(G^*)$. Ἀπὸ τὰ Θεωρήματα 3.3 καὶ 7.42, τὰ n, r, x, καὶ y εἶναι ἀκέραιοι ποὺ ἱκανοποιοῦν τὶς παρακάτω ἐξισώσεις:

$$\begin{aligned} n + r &= \frac{xn}{2} + 2, \quad \text{(Θεωρήματα 3.3 καὶ 7.42)} \\ n + r &= \frac{yr}{2} + 2, \quad \text{(Θεωρήματα 3.3 καὶ 7.42)} \\ x, y &\geq 3, \qquad \text{(Παρατήρηση 5.26)} \\ x, y &\leq 5, \qquad \text{(Λῆμμα 7.48)} \end{aligned}$$

Οἱ δύο πρῶτες ἐξισώσεις δίνουν:

$$n = \frac{4y}{2(x+y) - xy}$$

- Ἂν $x = 3$ καὶ $y = 3$, ἔχουμε ὅτι $n = 4$, ἄρα $r = 4$ καὶ τὸ G εἶναι τὸ τετράεδρο.
- Ἂν $x = 3$ καὶ $y = 4$, ἔχουμε ὅτι $n = 8$, ἄρα $r = 6$ καὶ τὸ G εἶναι ὁ κύβος.
- Ἂν $x = 4$ καὶ $y = 3$, ἔχουμε ὅτι $n = 6$, ἄρα $r = 8$ καὶ τὸ G εἶναι τὸ ὀκτάεδρο.
- Ἂν $x = 3$ καὶ $y = 5$, ἔχουμε ὅτι $n = 20$, ἄρα $r = 12$ καὶ τὸ G εἶναι τὸ δωδεκάεδρο.
- Ἂν $x = 5$ καὶ $y = 3$, ἔχουμε ὅτι $n = 12$, ἄρα $r = 20$ καὶ τὸ G εἶναι τὸ εἰκοσάεδρο.

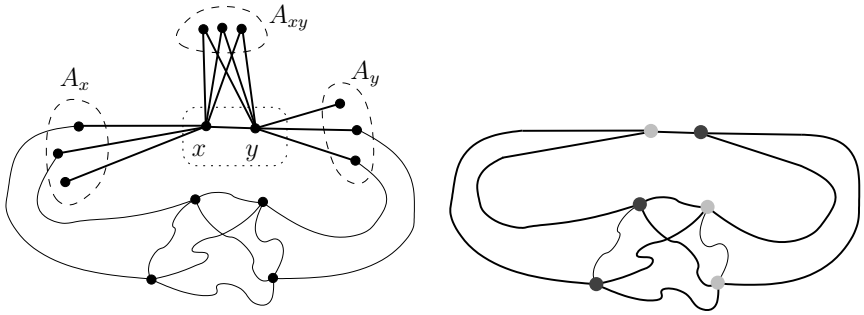
Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ $x, y \geq 4$ ἰσχύει ὅτι $(x-4)(y-4) \geq 0 \Rightarrow xy-4x-4y+16 \geq 0 \Rightarrow xy - 2(x+y) \geq 2(x-4) + 2(y-4) \geq 0$ καὶ ἄρα δὲν ὑπάρχουν ἄλλα Πλατωνικὰ πολύεδρα. □

7.6 Πλήρεις χαρακτηρισμοὶ γιὰ ἐπίπεδα γραφήματα

Τὰ K_5 καὶ $K_{3,3}$ δὲν εἶναι ἁπλῶς δύο μὴ ἐπίπεδα γραφήματα: εἶναι τὰ μοναδικὰ ἐλαχιστικὰ ἐμπόδια στὴν ἐπιπεδότητα. Ἡ ἑνότητα αὐτὴ ἀποδεικνύει αὐτὸ ἀκριβῶς, ξεκινώντας ἀπὸ τὴν 3-συνεκτικὴ περίπτωση.

Χρειαζόμαστε πρῶτα δύο βοηθητικὰ ἀποτελέσματα, ποὺ συνδέουν τὰ ἐλάσσονα μὲ τὰ τοπολογικὰ ἐλάσσονα.

Λῆμμα 7.54. Ἔστω γράφημα G καὶ ἀκμὴ $e \in E(G)$. Ἂν $K_5 \leq_{\tau\pi} G/e$, τότε εἴτε $K_5 \leq_{\tau\pi} G$ ἢ $K_{3,3} \leq_{\tau\pi} G$.



Σχῆμα 7.9: Τὸ γράφημα $K_{3,3}$ ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον στὴν εἰδικὴ περίπτωση τῆς ἀπόδειξης τοῦ Λήμματος 7.54.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $e = \{x, y\}$ καὶ ἔστω v_e ἡ κορυφὴ τοῦ $G' = G/e$ ποὺ προκύπτει μετὰ ἀπὸ τὴν σύνθλιψη τῆς e. Ὁρίζουμε $A_{xy} = N_G(x) \cap N_G(y)$, $A_x = N_G(x) \backslash \{y\} \backslash A_{xy}$, $A_y = N_G(y) \backslash \{x\} \backslash A_{xy}$. Ἔστω ὅτι ὑπάρχει ὑπογράφημα H τοῦ G' τὸ ὁποῖο περιέχει ὑποσύνολο $D \subseteq V(G')$ κορυφῶν οἱ ὁποῖες ἂν διαλυθοῦν θὰ προκύψει κλίκα 5 κορυφῶν. Ἂν $v_e \in D$ τότε εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ὅτι $K_5 \leq_{\tau\pi} G$. Ἔστω $v_e \in V(H) \backslash D$ καὶ ἔστω $N = N_H(v_e)$. Παρατηροῦμε ὅτι $|N| = 4$ καὶ ξεχωρίζουμε περιπτώσεις ἀνάλογα μὲ τὸ πῶς κατανέμονται οἱ κορυφὲς τοῦ N στὰ A_x, A_y, καὶ A_{xy}. Στὴν εἰδικὴ περίπτωση ποὺ δύο μέλη τοῦ N ἀνήκουν στὸ A_x καὶ τὰ ὑπόλοιπα δυὸ ἀνήκουν στὸ A_y τότε $K_{3,3} \leq_{\tau\pi} G$ (βλ. Σχῆμα 7.9). Σὲ κάθε ἄλλη περίπτωση εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ὅτι $K_5 \leq_{\tau\pi} G$. □

Πόρισμα 7.55. Ἂν ἕνα γράφημα G περιέχει εἴτε τὸ K_5 εἴτε τὸ $K_{3,3}$ ὡς ἔλασσον, τότε θὰ περιέχει εἴτε τὸ K_5 εἴτε τὸ $K_{3,3}$ ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον.

Ἀπόδειξη. Ἀποδεικνύουμε πρῶτα ἕνα βοηθητικὸ ἀποτέλεσμα.

Ἰσχυρισμός 7.56. Ἂν $\Delta(H) \leq 3$ καὶ $H \leq_{\epsilon\lambda} G$, τότε $H \leq_{\tau\pi} G$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω G' ὑπογράφημα τοῦ G καὶ $\{B_v \mid v \in V(H)\}$ μιὰ οἰκογένεια ἀνὰ δύο ξένων συνόλων κορυφῶν τοῦ G', καθένα ἀπὸ τὰ ὁποία ἐνάγει συνεκτικὸ

ὑπογράφημα, τέτοια ὥστε γιὰ κάθε $\{u, v\} \in E(H)$ νὰ ὑπάρχει ἀκμὴ τοῦ G' μὲ τὸ ἕνα ἄκρο στὸ B_u καὶ τὸ ἄλλο στὸ B_v. Γιὰ κάθε $v \in V(H)$ ἔστω T_v ἕνα παραγόμενο δέντρο τοῦ $G'[B_v]$ καὶ ἔστω $x_1, \ldots, x_d$ ($d = \deg_H(v) \leq 3$) τὰ ἄκρα, μέσα στὸ B_v, τῶν ἀκμῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς προσκείμενες τῆς v ἀκμὲς τοῦ H. Ἔστω T'_v τὸ ἐλάχιστο ὑποδέντρο τοῦ T_v ποὺ περιέχει τὶς $x_1, \ldots, x_d$.

Ἀφοῦ $d \leq 3$, τὸ T'_v ἔχει τὸ πολὺ τρία φύλλα, τὰ ὁποία ἀνήκουν στὸ $\{x_1, \ldots, x_d\}$, ὁπότε ἀπὸ τὴν Ἄσκηση 6.1 ἔχει τὸ πολὺ μία κορυφὴ βαθμοῦ 3 καὶ καμία κορυφὴ βαθμοῦ μεγαλύτερου. Ἑπομένως τὸ T'_v εἶναι ὑποδιαίρεση τοῦ $K_{1,d}$ (ἢ τοῦ K_2, ἢ τοῦ K_1, ἂν $d \leq 1$). Ἀντιστοιχίζοντας στὴν v τὴν κορυφὴ διακλάδωσης τοῦ T'_v καὶ ἑνώνοντας τὰ T'_v μὲ τὶς ἀκμὲς ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς ἀκμὲς τοῦ H, παίρνουμε ὑποδιαίρεση τοῦ H μέσα στὸ G', δηλαδὴ $H \leq_{\tau\pi} G$. □

Ἔστω τώρα ὅτι τὸ G περιέχει τὸ K_5 ἢ τὸ $K_{3,3}$ ὡς ἔλασσον. Ἀφοῦ $\Delta(K_{3,3}) = 3$, στὴν περίπτωση τοῦ $K_{3,3}$ ὁ Ἰσχυρισμὸς δίνει ἀμέσως $K_{3,3} \leq_{\tau\pi} G$.

Ἔστω λοιπὸν $K_5 \leq_{\epsilon\lambda} G$, δηλαδὴ ὑπάρχει ὑπογράφημα G' τοῦ G καὶ ἀκολουθία r συνθλίψεων ἀκμῶν ποὺ τὸ μετατρέπει στὸ K_5. Χρησιμοποιοῦμε ἐπαγωγὴ στὸ r. Ἂν $r = 0$, τότε $K_5 \subseteq_{\upsilon\pi} G'$ καὶ ἄρα $K_5 \leq_{\tau\pi} G$. Ἔστω $r \geq 1$ καὶ ἔστω e ἡ πρώτη ἀκμὴ ποὺ συνθλίβεται. Τότε $K_5 \leq_{\epsilon\lambda} G'/e$ μὲ $r - 1$ συνθλίψεις, ὁπότε ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση $K_5 \leq_{\tau\pi} G'/e$ ἢ $K_{3,3} \leq_{\tau\pi} G'/e$. Στὴν πρώτη περίπτωση τὸ Λῆμμα 7.54 δίνει $K_5 \leq_{\tau\pi} G'$ ἢ $K_{3,3} \leq_{\tau\pi} G'$. Στὴ δεύτερη, ἔχουμε $K_{3,3} \leq_{\epsilon\lambda} G'/e$ καὶ ἄρα $K_{3,3} \leq_{\epsilon\lambda} G'$, ὁπότε ὁ Ἰσχυρισμὸς δίνει $K_{3,3} \leq_{\tau\pi} G'$. Καὶ στὶς δύο περιπτώσεις τὸ ζητούμενο ἰσχύει γιὰ τὸ G', ἄρα καὶ γιὰ τὸ G. □

Λῆμμα 7.57. Κάθε μὴ ἐπίπεδο 3-συνεκτικὸ γράφημα περιέχει εἴτε τὸ K_5 εἴτε τὸ $K_{3,3}$ ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον.

Ἀπόδειξη. Θὰ χρησιμοποιήσουμε ἐπαγωγὴ στὸν ἀριθμὸ τῶν κορυφῶν τοῦ G. Τὸ μοναδικὸ 3-συνεκτικὸ γράφημα μὲ τὸ πολὺ 4 κορυφὲς εἶναι τὸ K_4, ποὺ εἶναι ἐπίπεδο, ὁπότε μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι $n(G) \geq 5$ καὶ ὅτι τὸ λῆμμα ἰσχύει γιὰ κάθε μὴ ἐπίπεδο 3-συνεκτικὸ γράφημα μὲ λιγότερες κορυφές.

Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 5.41, τὸ G περιέχει μιὰ ἀκμὴ $e = \{x, y\}$ τέτοια ὥστε τὸ γράφημα $G' = G/e$ νὰ εἶναι 3-συνεκτικό· συμβολίζουμε μὲ v_e τὴν κορυφὴ ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴ σύνθλιψη τῆς e. Ἂν τὸ G' δὲν εἶναι ἐπίπεδο, τότε, ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση, τὸ G' περιέχει τὸ K_5 ἢ τὸ $K_{3,3}$ ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον, ἄρα καὶ ὡς ἔλασσον. Ἀφοῦ $G' \leq_{\epsilon\lambda} G$, τὸ ἴδιο ἰσχύει γιὰ τὸ G, καὶ ἀπὸ τὸ Πόρισμα 7.55 τὸ G περιέχει τὸ K_5 ἢ τὸ $K_{3,3}$ ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον.

Ἔστω λοιπὸν ὅτι ὑπάρχει μιὰ ἐπίπεδη ἐμβάπτιση Γ τοῦ G'. Ἀφοῦ τὸ G' εἶναι 3-συνεκτικό, τὸ $\Gamma^- = \Gamma - v_e$ εἶναι δισυνεκτικό. Ἔστω $f \in F(\Gamma^-)$ ἡ μοναδικὴ

ὄψη τοῦ Γ^- ποὺ περιέχει τὸ σημεῖο v_e. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 7.18, τὸ $\Gamma^-[f]$ εἶναι κύκλος C, καὶ ἔστω $M = [x_1, \ldots, x_r, x_1]$ ἡ κυκλικὴ διάταξη τῶν κορυφῶν τοῦ C. Ὅλες οἱ γειτονικὲς κορυφὲς τῆς v_e στὸ G' βρίσκονται πάνω στὸν C. Θέτουμε $X = N_G(x)\backslash\{y\}$ καὶ $Y = N_G(y)\backslash\{x\}$· τότε $X \cup Y = N_{G'}(v_e) \subseteq V(C)$ καί, ἀφοῦ $\delta(G) \geq 3$, $|X|, |Y| \geq 2$. Οἱ κορυφὲς τοῦ X χωρίζουν τὸν C σὲ $|X|$ *τμήματα*, δηλαδὴ μονοπάτια τοῦ C ποὺ ἑνώνουν δύο διαδοχικὲς (στὴ M) κορυφὲς τοῦ X καὶ δὲν ἔχουν ἄλλες κορυφὲς τοῦ X.

Ἂν τὸ Y περιέχεται στὸ σύνολο κορυφῶν κάποιου τμήματος Q μὲ ἄκρα a, a', τότε μποροῦμε νὰ ἐμβαπτίσουμε τὸ G στὸ ἐπίπεδο: τοποθετοῦμε τὴν x στὴν ὄψη f τοῦ Γ^- καὶ τὴ συνδέουμε μὲ τὶς κορυφὲς τοῦ X, καὶ στὴ συνέχεια τοποθετοῦμε τὴν y στὴν ὄψη ποὺ φράσσεται ἀπὸ τὶς ἀκμὲς $\{x, a\}$, $\{x, a'\}$ καὶ τὸ Q, καὶ τὴ συνδέουμε μὲ τὴν x καὶ μὲ τὶς κορυφὲς τοῦ Y. Αὐτὸ εἶναι ἄτοπο, ἀφοῦ τὸ G δὲν εἶναι ἐπίπεδο. Ἄρα τὸ Y δὲν περιέχεται σὲ κανένα τμῆμα.

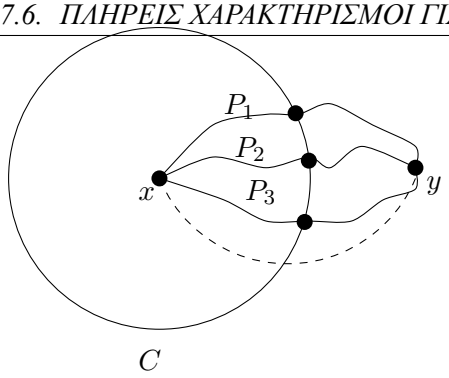
Λέμε ὅτι τὰ X καὶ Y *ἐναλλάσσονται* ἂν ὑπάρχουν δεῖκτες $1 \leq i < j < k < l \leq r$ τέτοιοι ὥστε οἱ x_i, x_k νὰ ἀνήκουν στὸ ἕνα ἀπὸ τὰ X, Y καὶ οἱ x_j, x_l στὸ ἄλλο. Σὲ αὐτὴ τὴν περίπτωση $K_{3,3} \leq_{\tau\pi} G$: ἄν, γιὰ παράδειγμα, $x_j, x_l \in X$ καὶ $x_i, x_k \in Y$, τότε τὰ σύνολα $\{x, x_i, x_k\}$ καὶ $\{y, x_j, x_l\}$ συνδέονται ἀνὰ ζεύγη μὲ τὶς ἀκμὲς $\{x, y\}$, $\{x, x_j\}$, $\{x, x_l\}$, $\{y, x_i\}$, $\{y, x_k\}$ καὶ μὲ τὰ τέσσερα τμήματα τοῦ C μεταξὺ διαδοχικῶν κορυφῶν ἀπὸ τὶς x_i, x_j, x_k, x_l (βλ. Σχῆμα 7.11). Διακρίνουμε τρεῖς περιπτώσεις.

- Ὑπάρχει $u \in Y\backslash X$. Τότε ἡ u εἶναι ἐσωτερικὴ κορυφὴ κάποιου τμήματος Q μὲ ἄκρα $a, a' \in X$ καί, ἀφοῦ τὸ Y δὲν περιέχεται στὸ $V(Q)$, ὑπάρχει $w \in Y\backslash V(Q)$. Οἱ κορυφὲς a, u, a', w ἐμφανίζονται μὲ αὐτὴ τὴν κυκλικὴ σειρὰ στὴ M, ὁπότε τὰ X καὶ Y ἐναλλάσσονται καὶ $K_{3,3} \leq_{\tau\pi} G$.

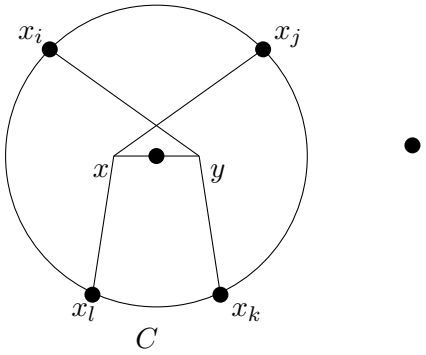
- $Y \subseteq X$ καὶ $|Y| \geq 3$. Ἔστω $a, b, c \in Y$. Τὰ μονοπάτια $P_1 = [x, a, y]$, $P_2 = [x, b, y]$, $P_3 = [x, c, y]$, ὁ κύκλος C καὶ ἡ ἀκμὴ $\{x, y\}$ περιέχουν μιὰ ὑποδιαίρεση τοῦ K_5 μὲ κορυφὲς τὶς x, y, a, b, c, ὅπου οἱ a, b, c συνδέονται ἀνὰ δύο μὲ τὰ τμήματα τοῦ C μεταξύ τους. Ἄρα $K_5 \leq_{\tau\pi} G$ (βλ. Σχῆμα 7.10).

- $Y \subseteq X$ καὶ $|Y| = 2$, ἔστω $Y = \{b, b'\}$. Ἀφοῦ τὸ Y δὲν περιέχεται σὲ κανένα τμῆμα, καθένα ἀπὸ τὰ δύο μονοπάτια τοῦ C μεταξὺ τῶν b καὶ b' ἔχει στὸ ἐσωτερικό του κάποια κορυφὴ τοῦ X, ἔστω τὶς a καὶ a' ἀντίστοιχα. Οἱ κορυφὲς b, a, b', a' ἐμφανίζονται μὲ αὐτὴ τὴν κυκλικὴ σειρὰ στὴ M, ὁπότε τὰ X καὶ Y ἐναλλάσσονται καὶ $K_{3,3} \leq_{\tau\pi} G$.

□



Σχῆμα 7.10: Ὑποδιαίρεση τοῦ K_5 ποὺ σχηματίζουν ὁ κύκλος C, τὰ μονοπάτια P_1, P_2, P_3 ἀπὸ τὴν x στὴν y καὶ ἡ ἀκμὴ $\{x, y\}$.



Σχῆμα 7.11: Οἱ κορυφὲς x_j καὶ x_l ἀνήκουν στὸ X καὶ οἱ κορυφὲς x_i καὶ x_k στὸ Y, μὲ $1 \leq i < j < k < l \leq r$.

Τὸ παρακάτω θεώρημα εἶναι γνωστὸ ὡς θεώρημα τοῦ Wagner (βλ. [106]).

Θεώρημα 7.58. Ἕνα γράφημα εἶναι ἐπίπεδο ἂν καὶ μόνο ἂν δὲν περιέχει κανένα ἀπὸ τὰ K_5, $K_{3,3}$ ὡς ἔλασσον.

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὶς Παρατηρήσεις 7.8 καὶ 7.13, ἕνα γράφημα ποὺ περιέχει κάποιο ἀπὸ τὰ K_5 καὶ $K_{3,3}$ ὡς ἔλασσον δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι ἐπίπεδο. Ἔστω τώρα G μὴ-ἐπίπεδο γράφημα ἐλαχίστου ἀριθμοῦ κορυφῶν ποὺ νὰ μὴν περιέχει κανένα ἀπὸ τὰ K_5 καὶ $K_{3,3}$ ὡς ἐλάσσονα. Τὸ G εἶναι συνεκτικό, ἀφοῦ διαφορετικὰ κάθε συνεκτική του συνιστῶσα, ὡς γράφημα μὲ λιγότερες κορυφές, θὰ ἦταν ἐπίπεδη, καὶ ἄρα τὸ G θὰ ἦταν ἐπίπεδο. Ἐπίσης $n(G) \geq 5$, ἀφοῦ κάθε γράφημα μὲ τὸ πολὺ 4 κορυφὲς εἶναι ὑπογράφημα τοῦ ἐπίπεδου γραφήματος K_4. Τέλος, τὸ G δὲν εἶναι 3-συνεκτικό, ἀφοῦ διαφορετικά, ἀπὸ τὸ Λῆμμα 7.57, θὰ περιεῖχε τὸ K_5 ἢ τὸ $K_{3,3}$ ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον, ἄρα καὶ ὡς ἔλασσον. Ἑπομένως τὸ G περιέχει ἕναν δια-

χωριστὴ S ὅπου $|S| = 1$ ἢ 2. Ἔστω $C_i, i = 1, \ldots, r$ οἱ συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ $G - S$. Μποροῦμε ἐπιπλέον νὰ ὑποθέσουμε ὅτι ὁ S εἶναι ἐλαχιστικὸς διαχωριστὴς τοῦ G, ὁπότε ὑπάρχουν τουλάχιστον δύο συνιστῶσες C τοῦ $G - S$ μὲ $N_G(V(C)) = S$. Γιὰ $i = 1, \ldots, r$, ὁρίζουμε τὸ G_i ὡς τὸ γράφημα $G[V(C_i) \cup S]$ στὸ ὁποῖο προσθέτουμε, ἂν χρειάζεται, τὴν ἀκμὴ ποὺ ἑνώνει τὶς δύο κορυφὲς τοῦ S (στὴν περίπτωση ὅπου $|S| = 2$), ὥστε τὸ S νὰ ἐνάγει κλίκα στὸ G_i. Παρατηροῦμε ὅτι $G_i \leq_{\epsilon\lambda} G$: ἂν τὸ S ἐνάγει ἤδη κλίκα στὸ G, τότε τὸ G_i εἶναι ἐναγόμενο ὑπογράφημα τοῦ G, ἐνῶ διαφορετικὰ ἡ ἀκμὴ ποὺ προσθέσαμε προκύπτει συνθλίβοντας τὶς ἀκμὲς ἑνὸς μονοπατιοῦ ποὺ ἑνώνει τὶς δύο κορυφὲς τοῦ S καὶ ἔχει ὅλες τὶς ἐσωτερικές του κορυφὲς σὲ κάποια συνιστῶσα C_j μὲ $j \neq i$ καὶ $N_G(V(C_j)) = S$. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι $n(G_i) < n(G)$. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ G, τὸ G_i εἴτε θὰ περιέχει τὸ K_5 εἴτε τὸ $K_{3,3}$ ὡς ἔλασσον εἴτε θὰ εἶναι ἐπίπεδο. Ἡ πρώτη περίπτωση ἀποκλείεται γιατὶ τότε καὶ τὸ G θὰ περιέχει εἴτε τὸ K_5 εἴτε τὸ $K_{3,3}$ ὡς ἔλασσον. Ἄρα ὅλα τὰ γραφήματα $G_i, i = 1, \ldots, r$ εἶναι ἐπίπεδα. Ἐπίσης, γιὰ κάθε i, j μὲ $1 \leq i < j \leq r$ ἰσχύει ὅτι $G_i \cap G_j \simeq K_{|S|}$. Ἄρα ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 7.15, τὸ γράφημα $\bigcup_{i=1,\ldots,r} G_i$ θὰ εἶναι ἐπίσης ἐπίπεδο. Τὸ G ὅμως εἶναι ὑπογράφημά του, ἄρα καὶ τὸ G εἶναι ἐπίπεδο, ἄτοπο. □

Συνδυάζοντας τὸ Θεώρημα 7.58 καὶ τὸ Πόρισμα 7.55 ἔχουμε τὸ παρακάτω θεώρημα τὸ ὁποῖο ἀποδείχτηκε ἀπὸ τὸν Kazimierz Kuratowski τὸ 1930 στὴν [64] ἀφοῦ προηγουμένως ἀποδείχθηκε (χωρὶς νὰ δημοσιευτεῖ) ἀπὸ τὸν Лев Семёнович Понтрягин.

Θεώρημα 7.59 (Kuratowski-Понтрягин, 1930 [64])**.** Ἕνα γράφημα εἶναι ἐπίπεδο ἂν καὶ μόνο ἂν δὲν περιέχει κανένα ἀπὸ τὰ K_5, $K_{3,3}$ ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον.

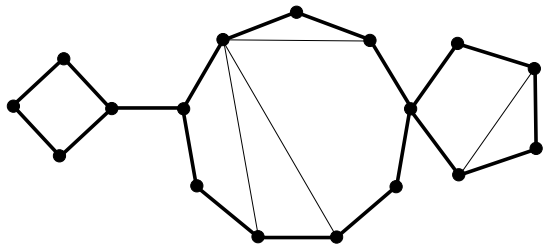
Ἀπόδειξη. ($\Rightarrow$) Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 7.13 ἡ κλάση τῶν ἐπίπεδων γραφημάτων εἶναι κλειστὴ ὡς πρὸς τὴ σχέση $\leq_{\tau\pi}$, ὁπότε ἂν ἕνα ἐπίπεδο γράφημα περιεῖχε τὸ K_5 ἢ τὸ $K_{3,3}$ ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον, τότε τὸ K_5 ἢ τὸ $K_{3,3}$ θὰ ἦταν ἐπίπεδο, ποὺ ἀντιβαίνει στὴν Παρατήρηση 7.8.

($\Leftarrow$) Ἔστω G μὴ ἐπίπεδο γράφημα. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 7.58, τὸ G περιέχει τὸ K_5 ἢ τὸ $K_{3,3}$ ὡς ἔλασσον, ὁπότε ἀπὸ τὸ Πόρισμα 7.55 τὸ περιέχει καὶ ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον. □

7.7 Ἐξωεπίπεδα γραφήματα

Ζητᾶμε τώρα κάτι αὐστηρότερο ἀπὸ τὴν ἐπιπεδότητα: ὅλες οἱ κορυφὲς νὰ εἶναι προσιτὲς «ἀπὸ ἔξω».

Ὁρισμός 7.60. Καλοῦμε ἕνα γράφημα *ἐξωεπίπεδο* ἂν ἔχει ἐπίπεδη ἐμβάπτιση Γ τέτοια ὥστε ὅλες οἱ κορυφές της νὰ ἀνήκουν στὸ σύνορο τῆς ἐξωτερικῆς τῆς ὄψης (καλοῦμε μιὰ τέτοια ἐμβάπτιση ἑνὸς γραφήματος *ἐξωεπίπεδη ἐμβάπτιση*).



Σχῆμα 7.12: Παράδειγμα ἐξωεπίπεδου γραφήματος.

Παρατήρηση 7.61. Ἡ κλάση τῶν ἐξωεπίπεδων γραφημάτων εἶναι κλειστὴ ὡς πρὸς τὶς σχέσεις $\subseteq_{\upsilon\pi}, \subseteq_{\epsilon\nu}, \subseteq_{\pi\alpha}, \leq_{\tau\pi}$ καὶ $\leq_{\epsilon\lambda}$.

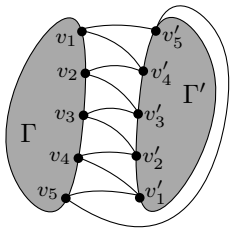
Θεώρημα 7.62. Ἕνα γράφημα εἶναι ἐξωεπίπεδο ἂν καὶ μόνο ἂν δὲν περιέχει κανένα ἀπὸ τὰ K_4, $K_{2,3}$ ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον.

Ἀπόδειξη. Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι κανένα ἀπὸ τὰ K_4, $K_{2,3}$ δὲν εἶναι ἐξωεπίπεδο, διαφορετικά, τὸ K_5 ἢ τὸ $K_{3,3}$ θὰ ἦταν ἐπίπεδο. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 7.61, ἕνα γράφημα ποὺ περιέχει ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον κάποιο ἀπὸ τὰ K_4 καὶ $K_{2,3}$ δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι ἐξωεπίπεδο.

Ἔστω τώρα μὴ-ἐξωεπίπεδο γράφημα G καὶ ἔστω $G^+ = G * K_1$ (προσθέτουμε μιὰ νέα κορυφὴ στὸ G καὶ τὴν συνδέουμε μὲ ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ G). Ἰσχυριζόμαστε ὅτι τὸ G^+ εἶναι μὴ-ἐπίπεδο. Πράγματι, ἂν τὸ G^+ εἶναι ἐπίπεδο καὶ Γ μιὰ ἐπίπεδη ἐμβάπτισή του, τότε ἡ πρόσθετη κορυφὴ ἀνήκει σὲ μιὰ ὄψη τοῦ $\Gamma - w$ (ὅπου w ἡ πρόσθετη κορυφή) τῆς ὁποίας τὸ σύνορο περιέχει ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ G καὶ ἄρα τὸ G εἶναι ἐξωεπίπεδο, ἄτοπο. Ἀφοῦ λοιπὸν τὸ G^+ εἶναι μὴ-ἐπίπεδο, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 7.59, τὸ G^+ θὰ περιέχει εἴτε τὸ K_5 εἴτε τὸ $K_{3,3}$ ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀφαίρεση μιᾶς κορυφῆς μπορεῖ νὰ πλήξει εἴτε μιὰ κορυφὴ εἴτε μιὰν ἀκμὴ μιᾶς ὑποδιαίρεσης ἑνὸς γραφήματος. Σὲ κάθε περίπτωση, αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ G θὰ περιέχει εἴτε τὸ K_4 εἴτε τὸ $K_{2,3}$ ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον. □

Παρατήρηση 7.63. Ὅλα τὰ ἐξωεπίπεδα γραφήματα, ἐκτὸς ἀπὸ τὸ K_1 καὶ τὸ K_2, εἶναι παραγόμενα ὑπογραφήματα ἑνὸς δισυνεκτικοῦ ἐξωεπίπεδου γραφήματος.

Λῆμμα 7.64. Κάθε ἐξωεπίπεδο γράφημα G μὲ $n \geq 2$ κορυφὲς ἔχει τὸ πολὺ $2n-3$ ἀκμές.



Σχῆμα 7.13: Ἡ κατασκευὴ τῆς ἀπόδειξης τοῦ Λήμματος 7.64.

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 7.63, μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι τὸ G εἶναι δισυνεκτικό. Ἔστω Γ μιὰ ἐξωεπίπεδη ἐμβάπτιση τοῦ G καὶ ἔστω f ἡ ἐξωτερική της ὄψη. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 7.18, ἀφοῦ τὸ Γ εἶναι δισυνεκτικό, τὸ γράφημα $\Gamma[f]$ εἶναι κύκλος. Χρησιμοποιοῦμε τὸν συμβολισμὸ $[v_1, \ldots, v_n, v_1]$ γιὰ τὴν κυκλικὴ διάταξη ποὺ ὁρίζει αὐτὸς ὁ κύκλος. Ἔστω τώρα Γ^+ ἡ ἐπίπεδη ἐμβάπτιση ποὺ προκύπτει ἂν ἐμβαπτίσουμε μέσα στὴν f ἕνα ἀντίγραφο Γ' τοῦ Γ καὶ ἔστω $[v'_1, \ldots, v'_n, v'_1]$ ἡ ἀντίστοιχη κυκλικὴ διάταξη τῶν κορυφῶν τοῦ Γ'. Προσθέτουμε στὸ Γ^+ τὶς ἀκμὲς $\{v_i, v'_{n-i+1}\}$ γιὰ $i = 1, \ldots, n$, τὶς ἀκμὲς $\{v_i, v'_{n-i}\}$ γιὰ $i = 1, \ldots, n-1$ καθὼς καὶ τὴν ἀκμὴ $\{v_n, v'_n\}$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι αὐτὸ μπορεῖ νὰ γίνει ἔτσι ὥστε τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει νὰ εἶναι μιὰ ἐπίπεδη ἐμβάπτιση ἑνὸς γραφήματος G^* (βλ. Σχῆμα 7.13). Ἀπὸ τὴν κατασκευή, $n(G^*) = 2 \cdot n(G)$ καὶ $m(G^*) = 2 \cdot n(G) + 2 \cdot m(G)$. Ἀπὸ τὸ Πόρισμα 7.47, $m(G^*) \leq 3 \cdot n(G^*) - 6 \Rightarrow 2 \cdot n(G) + 2 \cdot m(G) \leq 6 \cdot n(G) - 6 \Rightarrow m(G) \leq 2 \cdot n(G) - 3$. □

Ἀσκήσεις Κεφαλαίου

7.1 (★☆☆)**.** Ἂν ἕνα γράφημα G δὲν εἶναι ἐπίπεδο, τότε $\Delta(G) \geq 3$. Δεῖξτε ἐπίσης ὅτι τὸ ἀντίστροφο δὲν ἰσχύει.

7.2 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι ἂν τὰ γραφήματα G καὶ H ἔχουν διάμετρο μεγαλύτερη τοῦ 1, τότε τὸ γράφημα $G * H$ δὲν εἶναι ἐπίπεδο. Δεῖξτε ἐπίσης ὅτι τὸ ἀντίστροφο δὲν ἰσχύει.

7.3 (★★☆)**.** Ἂν τὸ G εἶναι μὴ-ἐπίπεδο, τότε $\boldsymbol{\pi\alpha}(G) \geq 3$

7.4 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι ἡ Παρατήρηση 7.15 δὲν ἰσχύει γενικὰ γιὰ $r \geq 3$. Ποιὰ πρόσθετη ἰδιότητα πρέπει νὰ ἱκανοποιεῖται ὥστε νὰ ἰσχύει γιὰ $r = 3$; Ὑπάρχουν περιπτώσεις γιὰ τὶς ὁποῖες νὰ ἰσχύει καὶ γιὰ $r = 4$;

7.5 (★★☆)**.** Κάθε ἐπίπεδο γράφημα προκύπτει ἀπὸ τὴν ἕνωση τὸ πολὺ 5 δασῶν.

7.6 (★☆☆)**.** Γενικεῦστε τὸν ὁρισμὸ τῆς περιήγησης ἑνὸς γραφήματος σὲ πολυγραφήματα (βλ. Ὁρισμὸ 4.1) ὥστε νὰ ἐξασφαλιστεῖ ἡ πληρότητα τοῦ Ὁρισμοῦ 7.21 .

7.7 (★★☆)**.** Ἡ ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 7.30 στηρίζεται στὴν διαδοχικὴ ἐφαρμογὴ τῶν μετασχηματισμῶν 1-4 τῆς Παρατήρησης 7.29. Βρέστε μετασχηματισμὸ ἐναλλακτικὸ τοῦ 3ου (συμμετρία ὡς πρὸς τὸν ἰσημερινό) ποὺ νὰ μὴν πλήττει τὴν ὀρθότητα τῆς ἀπόδειξης.

7.8 (★★☆)**.** Ἔστω ξ ὁ μετασχηματισμὸς ἑνὸς πολυγραφήματος ἐμβαπτισμένου στὸ ἐπίπεδο $P_{X,Y} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$ ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν περιστροφή, στὸ $\mathbb{R}^3$, κατὰ 180 μοῖρες ὡς πρὸς μιὰ ὁποιαδήποτε εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου $P_{X,Y}$. Σὲ ποιὸ μετασχηματισμὸ τῆς ἀντίστοιχης ἐμβάπτισης στὴν σφαῖρα $\mathbb{S}_0$ ἀντιστοιχεῖ ὁ μετασχηματισμὸς ξ;

7.9 (★☆☆)**.** Ὑπάρχει κάποιο ζεῦγος ἐνεπίπεδων γραφημάτων τοῦ Σχήματος 7.2 ποὺ νὰ εἶναι τοπολογικὰ ἰσόμορφα; Γιὰ κάθε ἕνα ἀπὸ 3 ὑποψήφια ζεύγη, δικαιολογῆστε τὴν ἀπάντησή σας.

7.10 (★★☆)**.** Ἂν ἕνα ἐνεπίπεδο πολυγράφημα εἶναι 2-συνεκτικό, τότε καὶ τὸ δυϊκὸ τοῦ G^* εἶναι 2-συνεκτικό.

7.11 (★☆☆)**.** Ἂν τὰ ἐπίπεδα γραφήματα G καὶ H εἶναι μεταξύ τους δυϊκά, τότε τουλάχιστον ἕνα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι συνεκτικό.

7.12 (★★☆)**.** Χαρακτηρίστε τὸ σύνολο ὅλων τῶν δυϊκῶν γραφημάτων τοῦ μοναδικοῦ πολυγραφήματος μὲ μιὰ κορυφὴ καὶ m ἀκμές.

7.13 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι κάθε αὐτοδυϊκὸ πολυγράφημα μὲ n κορυφὲς ἔχει $2(n-1)$ ἀκμές.

7.14 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι δὲν ὑπάρχει ἐπίπεδο γράφημα ποὺ νὰ εἶναι 6-συνεκτικό.

7.15 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι δὲν ὑπάρχει διμερὲς ἐπίπεδο γράφημα ποὺ νὰ εἶναι 4-συνεκτικό.

7.16 (★☆☆)**.** Ἂν ἕνα γράφημα G εἶναι ἐπίπεδο καὶ $K_3 \not\subseteq_{\upsilon\pi} G$, τότε $\delta^*(G) \leq 3$.

7.17 (★☆☆)**.** Γιὰ κάθε ἐνεπίπεδο πολυγράφημα Γ μὲ κ συνεκτικὲς συνιστῶσες, r ὄψεις, n κορυφὲς καὶ m ἀκμὲς ἰσχύει ὅτι $m + \kappa + 1 = n + r$.

7.18 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε ἐπίπεδο γράφημα, τὸ ποσοστὸ τῶν κορυφῶν μὲ βαθμὸ τὸ πολὺ 6 ὑπερβαίνει τὸ 14%. Βρεῖτε μιὰ γενικὴ φόρμουλα γιὰ τὸ ποσοστὸ αὐτὸ ἂν τὸ 6 ἀντικατασταθεῖ μὲ x.

7.19 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι κάθε Πλατωνικὸ γράφημα εἶναι μεταβατικό.

7.20 (☆☆☆)**.** Βρεῖτε ἐπίπεδες ἐμβαπτίσεις γιὰ τὸ καθένα ἀπὸ τὰ πέντε πλατωνικὰ πολύεδρα.

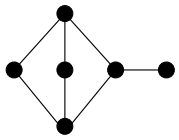
7.21 (★★☆)**.** Διατυπῶστε καὶ ἀποδεῖξτε τὰ Θεωρήματα 7.59 καὶ 7.58 γιὰ πολυγραφήματα.

7.22 (★★☆)**.** Ἂν $\delta(G) \geq 2$ καὶ $\delta(H) \geq 2$, τότε τὸ γράφημα $G * H$ δὲν εἶναι ἐπίπεδο. Δεῖξτε ὅτι τὸ ἀντίστροφο δὲν ἰσχύει.

7.23 (★★★)**.** Ἔστω H τὸ γράφημα τοῦ Σχήματος 7.14. Δεῖξτε ὅτι κάθε συνεκτικὸ γράφημα G μὲ τουλάχιστον 6 κορυφὲς ποὺ δὲν περιέχει τὸ H ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον εἶναι ἐπίπεδο.

7.24 (★★☆)**.** Χρησιμοποιῆστε τὸ Θεώρημα τοῦ Kuratowski γιὰ νὰ δείξετε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G, $\delta^*(G) \geq 6 \Rightarrow K_4 \leq_{\tau\pi} G$.

7.25 (★★☆)**.** Κάθε γράφημα μὲ περισσότερες ἀπὸ $\frac{3}{2}(n-1)$ ἀκμὲς περιέχει ἕνα κύκλο μήκους τουλάχιστον 4 (ἢ ἰσοδύναμα: $C_4 \not\subseteq_{\tau\pi} G \Rightarrow m(G) \leq \frac{3}{2}(n-1)$).



Σχῆμα 7.14: Τὸ γράφημα H τῆς Ἄσκησης 7.23.

7.26 (★★☆)**.** Πῶς μποροῦμε νὰ συνάγουμε τὸ Θεώρημα 7.59 ἀπὸ τὸ Θεώρημα 7.58;

7.27 (★★☆)**.** Γιὰ κάθε $n \geq 6$ ὑπάρχει ἕνα μὴ-ἐπίπεδο γράφημα μὲ n κορυφὲς ποὺ νὰ εἶναι ἡ ἕνωση δύο δέντρων.

7.28 (★☆☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι ἂν ἕνα γράφημα εἶναι ἐπίπεδο καὶ ἔχει μέγιστο βαθμὸ 3, τότε καὶ τὸ γραμμικό του γράφημα θὰ εἶναι ἐπίπεδο.

7.29 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι δὲν ὑπάρχει ἐξωεπίπεδο γράφημα ποὺ νὰ εἶναι 3-συνεκτικό.

7.30 (★★★)**.** Ἕνα ἐνεπίπεδο γράφημα ἔχει διάσταση δίσκου 2 ἂν περιέχει τὸ πολὺ δύο ὄψεις τὰ σύνορα τῶν ὁποίων νὰ περιέχουν ὅλες τὶς κορυφές του. Ποιὸς εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς ἀκμῶν ποὺ μπορεῖ νὰ ἔχει ἕνα γράφημα μὲ διάσταση δίσκου 2 καὶ n κορυφές;

7.31 (★★☆)**.** Ἔστω K_4^- τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει ἂν ἀφαιρέσουμε μιὰ ἀκμὴ ἀπὸ τὸ K_4. Βρεῖτε τὸ καλύτερο δυνατὸ ἄνω φράγμα γιὰ τὴν πυκνότητα τῶν γραφημάτων τῆς κλάσης $\mathcal{G} = \{G \mid K_4^- \not\leq_{\epsilon\lambda} G\}$.

7.32 (★★★)**.** Γιὰ κάθε ἐπίπεδο γράφημα ὑπάρχει μιὰ διαμέριση $\{V_1, V_2\}$ τοῦ $V(G)$ τέτοια ὥστε τὰ γραφήματα $G[V_1], G[V_2]$ νὰ εἶναι ἐξωεπίπεδα.

7.33 (★☆☆)**.** Ζωγραφίστε ἕνα 4-κανονικὸ ἐπίπεδο γράφημα γιὰ τὸ ὁποῖο ἡ διάμετρος εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα. Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχουν ἀπείρως πολλὰ γραφήματα μὲ αὐτὴ τὴν ἰδιότητα.

7.34 (★☆☆)**.** Ἂν τὸ G εἶναι ἐπίπεδο γράφημα μὲ περιφέρεια $k \geq 3$, τότε $m(G) \leq \frac{k(n(G)-2)}{k-2}$. Χρησιμοποιῆστε τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ γιὰ νὰ ἀποδείξετε ὅτι τὸ γράφημα τοῦ Petersen δὲν εἶναι ἐπίπεδο.

7.35 (★☆☆)**.** Ἔστω G τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει ἂν σὲ ἕνα (4×4)-πλέγμα ἑνώσουμε μὲ ἀκμὲς κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ δύο ζεύγη μὴ συνδεδεμένων κορυφῶν βαθμοῦ 4. Δεῖξτε ὅτι τὸ G δὲν εἶναι ἐπίπεδο.

7.36 (★★☆)**.** Ἂν ἕνα γράφημα G ἔχει περισσότερες ἀπὸ 10 κορυφές, τότε κάποιο ἀπὸ τὰ G, $\overline{G}$ εἶναι μὴ-ἐπίπεδο.

7.37 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι τὸ συμπλήρωμα τοῦ εἰκοσαέδρου δὲν εἶναι ἐπίπεδο γράφημα. Δεῖξτε ὅτι τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τὸ δωδεκάεδρο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΟΡΥΦΩΝ

8.1 k-μερῆ γραφήματα καὶ χρωματικοὶ ἀριθμοί

Ὁρισμός 8.1. Καλοῦμε *k-χρωματισμὸ κορυφῶν* (ἢ ἁπλὰ *k-χρωματισμὸ* ἂν δὲν γίνεται σαφὲς ὅτι πρόκειται γιὰ ἄλλου εἴδους χρωματισμό) ἑνὸς γραφήματος G κάθε συνάρτηση $\chi : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ γιὰ τὴν ὁποία γιὰ κάθε $u, v \in V(G)$ μὲ $\{u, v\} \in E(G)$ ἰσχύει ὅτι $\chi(u) \neq \chi(v)$. Μὲ ἄλλα λόγια ἕνας k-χρωματισμὸς εἶναι ἡ ἀνάθεση ἑνὸς «χρώματος» σὲ κάθε κορυφὴ τοῦ G ἔτσι ὥστε γειτονικὲς κορυφὲς νὰ μὴ φέρουν τὸ ἴδιο χρῶμα. Λέμε ὅτι ἕνα γράφημα G εἶναι *k-χρωματίσιμο* ἂν ὑπάρχει ἕνας k-χρωματισμός του. Τὰ σύνολα $\chi^{-1}(i)$, γιὰ $i = 1, \ldots, k$, καλοῦνται *χρωματικὲς κλάσεις* τοῦ χ. Ἂν $S \subseteq V(G)$, τότε ὁρίζουμε $\chi(S) = \{\chi(v) \mid v \in S\}$ καὶ ἂν $X \subseteq \{1, \ldots, k\}$, ὁρίζουμε $\chi^{-1}(X) = \bigcup_{i \in X} \chi^{-1}(i)$.

Παρατήρηση 8.2. Ἂν ἡ συνάρτηση χ εἶναι ἕνας k-χρωματισμὸς ἑνὸς γραφήματος τότε ὁ περιορισμός της σὲ κάθε ὑπογράφημα τοῦ G εἶναι k-χρωματισμὸς τοῦ ὑπογραφήματος αὐτοῦ.

Ὁρισμός 8.3. Ὁ *χρωματικὸς ἀριθμός* ἑνὸς γραφήματος G εἶναι ὁ μικρότερος μὴ-ἀρνητικὸς ἀκέραιος k γιὰ τὸν ὁποῖο τὸ G εἶναι k-χρωματίσιμο καὶ τὸν συμβολίζουμε μὲ $\chi(G)$.

Παρατήρηση 8.4. Γιὰ κάθε $k \geq 2$, ἰσχύει ὅτι $\chi(C_{2k-1}) = 3$ καὶ $\chi(C_{2k}) = 2$.

Ἕνας χρωματισμὸς δὲν εἶναι παρὰ μιὰ διαμέριση τῶν κορυφῶν σὲ ἀνεξάρτητα

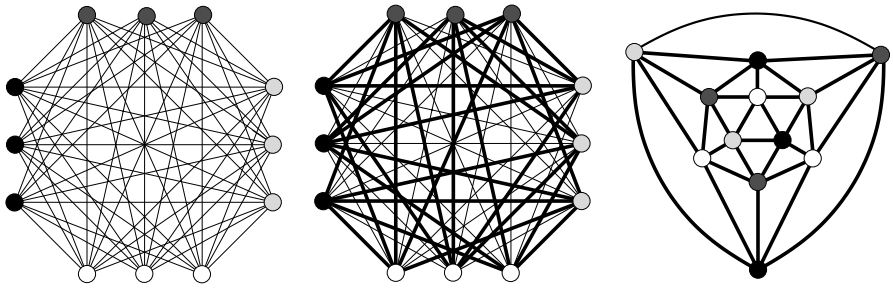
σύνολα. Ὁ ἑπόμενος ὁρισμὸς δίνει τὰ μέγιστα γραφήματα μὲ δεδομένο πλῆθος τέτοιων μερῶν.

Ὁρισμός 8.5. Ἔστω $l_1, \ldots, l_k$ μὴ ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι. Ὁρίζουμε τὸ γράφημα

$$K_{l_1,\ldots,l_k} = \overline{K_{l_1} + \cdots + K_{l_k}}$$

καὶ καλοῦμε *μέρη του* τὰ σύνολα $V_i(K_{l_1,\ldots,l_k}) = V(K_{l_i}), i = 1, \ldots, k$. Ἐπίσης καλοῦμε κάθε γράφημα ἰσόμορφο μὲ τὸ $K_{l_1,\ldots,l_k}$ *πλήρως k-μερές* ἢ ἁπλὰ *πλήρως πολυμερές*.

Ὁρισμός 8.6. Καλοῦμε *k-μερές* κάθε γράφημα ποὺ εἶναι ἰσόμορφο μὲ κάποιο παραγόμενο ὑπογράφημα τοῦ $K_{l_1,\ldots,l_k}$ γιὰ κάποιο σύνολο μὴ ἀρνητικῶν ἀκεραίων $l_1, \ldots, l_k$. Τὰ *μέρη* $V_i(G), i = 1, \ldots, k$ ἑνὸς k-μεροῦς γραφήματος G εἶναι τὰ σύνολα κορυφῶν του ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ μέρη τοῦ πλήρως k-μεροῦς γραφήματος ποὺ τὸ παράγει.



Σχῆμα 8.1: τὸ γράφημα $K_{3,3,3,3}$ καὶ τὸ *εἰκοσάεδρο* ὡς παραγόμενο ὑπογράφημά του.

Παρατήρηση 8.7. Ἂν ἕνα γράφημα εἶναι k-μερὲς τότε εἶναι καὶ k'-μερὲς γιὰ κάθε $k' \geq k$.

Παρατήρηση 8.8. Ἕνα γράφημα εἶναι k-χρωματίσιμο ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι k-μερές.

Ἀπόδειξη. Οἱ δύο ἔννοιες εἶναι οὐσιαστικὰ ἡ ἴδια, διατυπωμένη μιὰ φορὰ μὲ χρώματα καὶ μιὰ μὲ μέρη. Παρατηροῦμε ὅτι ἂν $\chi : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ εἶναι ἕνας k-χρωματισμὸς τοῦ G τότε τὸ G εἶναι παραγόμενο ὑπογράφημα τοῦ $K_{|\chi^{-1}(1)|,\ldots,|\chi^{-1}(k)|}$. Ἀπὸ τὴν ἄλλη μεριά, ἂν ὁρίσουμε τὴν $\chi : V(K_{l_1,\ldots,l_k}) \to \{1, \ldots, k\}$ ἔτσι ὥστε $\chi(v)$ νὰ εἶναι ὁ δείκτης τοῦ μέρους τοῦ $K_{l_1,\ldots,l_k}$ στὸ ὁποῖο ἀνήκει ἡ v, τότε ἡ χ εἶναι ἕνας χρωματισμὸς τοῦ $K_{l_1,\ldots,l_k}$ καὶ ἄρα καὶ κάθε ὑπογραφήματός του (Παρατήρηση 8.2). □

Λῆμμα 8.9. Ἕνα γράφημα G εἶναι k-χρωματίσιμο ἂν καὶ μόνο ἂν οἱ κορυφὲς τοῦ συμπληρωματικοῦ τοῦ $\overline{G}$ μποροῦν νὰ διαμεριστοῦν σὲ k σύνολα τὸ καθένα ἀπὸ τὰ ὁποία ἐνάγει κλίκα στὸ $\overline{G}$.

Ἀπόδειξη. Ἕνα σύνολο $S \subseteq V(G)$ εἶναι ἀνεξάρτητο στὸ G ἂν καὶ μόνο ἂν ἐνάγει κλίκα στὸ $\overline{G}$: καὶ οἱ δύο συνθῆκες λένε ὅτι κανένα ζεῦγος διαφορετικῶν κορυφῶν τοῦ S δὲν εἶναι ἀκμὴ τοῦ G.

Τὸ G εἶναι k-χρωματίσιμο ἂν καὶ μόνο ἂν ὑπάρχει διαμέριση τοῦ $V(G)$ σὲ k χρωματικὲς κλάσεις, καθεμία ἀπὸ τὶς ὁποῖες εἶναι ἀνεξάρτητο σύνολο τοῦ G. Ἀφοῦ $V(G) = V(\overline{G})$, ἡ παραπάνω ἰσοδυναμία μετατρέπει τὴν τελευταία συνθήκη ἀκριβῶς στὴν ὕπαρξη διαμέρισης τοῦ $V(\overline{G})$ σὲ k σύνολα, τὸ καθένα ἀπὸ τὰ ὁποία ἐνάγει κλίκα στὸ $\overline{G}$. □

Λῆμμα 8.10. Κάθε k-χρωματίσιμο γράφημα G μὲ n κορυφὲς ἔχει τὸ πολὺ $n^2(\frac{k-1}{2k})$ ἀκμές.

Ἀπόδειξη. Τὸ μέγιστο πλῆθος ἀκμῶν ἐπιτυγχάνεται ὅταν τὰ k μέρη εἶναι ὅσο τὸ δυνατὸν πιὸ ἰσομεγέθη· αὐτὸ ἀκριβῶς ἐκφράζει ἡ ἀνισότητα Cauchy–Schwarz ποὺ χρησιμοποιοῦμε στὸ τέλος. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 8.8, τὸ G εἶναι ἰσόμορφο μὲ κάποιο παραγόμενο ὑπογράφημα τοῦ $K_{l_1,\ldots,l_k}$ γιὰ κάποιο σύνολο μὴ ἀρνητικῶν ἀκεραίων $l_1, \ldots, l_k$ ὅπου $\sum_{i=1,\ldots,k} l_i = n$. Ἄρα, $m(G) \leq m(K_{l_1,\ldots,l_k})$. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ $K_{l_1,\ldots,l_k}$ ἔχουμε ὅτι

$$\begin{aligned} m(K_{l_1,\ldots,l_k}) &\leq \binom{n}{2} - \sum_{i=1,\ldots,k} \binom{l_i}{2} \\ &= \frac{1}{2}(n^2 - n - \sum_{i=1,\ldots,k} (l_i^2 - l_i)) \\ &= \frac{1}{2}(n^2 - \sum_{i=1,\ldots,k} l_i^2) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(n^2 - \frac{n^2}{k}\right) \\ &= n^2\left(\frac{k-1}{2k}\right) \end{aligned}$$

(Χρησιμοποιήσαμε τὴν γνωστὴ ἀνισότητα $\sum_{i=1,\ldots,k} l_i^2 \geq \frac{1}{k}(\sum_{i=1,\ldots,k} l_i)^2$.) □

Λύνοντας τὴν ἀνίσωση τοῦ Λήμματος 8.10 ὡς πρὸς k ἔχουμε τὸ παρακάτω.

Πόρισμα 8.11. Γιὰ κάθε γράφημα G μὲ n κορυφὲς καὶ m ἀκμές, $\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2-2m}$.

Ἀπόδειξη. Θέτουμε $k = \chi(G)$. Τὸ G εἶναι k-χρωματίσιμο, ὁπότε ἀπὸ τὸ Λῆμμα 8.10 ἰσχύει ὅτι $m \leq n^2\left(\frac{k-1}{2k}\right)$, δηλαδὴ $2mk \leq n^2(k-1) = n^2k - n^2$, δηλαδὴ $n^2 \leq k(n^2-2m)$.

Παρατηροῦμε ὅτι $n^2 - 2m > 0$: πράγματι, $m \leq \binom{n}{2} < \frac{n^2}{2}$. Διαιρώντας λοιπὸν μὲ $n^2 - 2m$ παίρνουμε $k \geq \frac{n^2}{n^2-2m}$. □

Ὁρισμός 8.12. Καλοῦμε ἕνα γράφημα G *διμερές* ἂν εἶναι 2-χρωματίσιμο. Καλοῦμε τὶς χρωματικὲς κλάσεις τοῦ G *μέρη* τοῦ G.

Παρατήρηση 8.13. Ἂν τὸ G εἶναι διμερὲς καὶ r-κανονικὸ μὲ $r \geq 1$, τότε τὰ μέρη του ἔχουν τὸν ἴδιο πληθάριθμο (ἀφοῦ $r|A| = m(G) = r|B|$ γιὰ τὰ μέρη A, B τοῦ G).

Τὰ διμερῆ γραφήματα, ποὺ εἶναι ἡ ἁπλούστερη μὴ τετριμμένη περίπτωση, ἀναγνωρίζονται ἀπὸ ἕνα ἁπλὸ κριτήριο ἀπαγορευμένων ὑπογραφημάτων.

Λῆμμα 8.14. Ἕνα γράφημα εἶναι διμερὲς ἂν καὶ μόνο ἂν δὲν περιέχει κύκλους περιττοῦ μήκους.

Ἀπόδειξη. Ἡ μία κατεύθυνση εἶναι ἄμεση. Γιὰ τὴν ἄλλη, χρωματίζουμε σύμφωνα μὲ τὴν ἰσοτιμία τῆς ἀπόστασης ἀπὸ μιὰ ἀφετηρία καὶ δείχνουμε ὅτι καμία ἀκμὴ δὲν μένει μονόχρωμη. Ἔστω G διμερὲς γράφημα. Προφανῶς, κάθε ὑπογράφημα ἑνὸς διμεροῦς γραφήματος εἶναι ἐπίσης διμερές. Ἄρα ἕνα ὑπογράφημα τοῦ G δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι περιττὸς κύκλος, ὁ ὁποῖος ἔχει χρωματικὸ ἀριθμὸ 3. Ἔστω τώρα γράφημα G χωρὶς περιττοὺς κύκλους. Χωρὶς βλάβη τῆς γενικότητας, μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι τὸ G εἶναι συνεκτικὸ (διαφορετικὰ ἐφαρμόζουμε τὸ παρακάτω ἐπιχείρημα σὲ κάθε συνεκτικὴ συνιστῶσα του). Ἔστω $\mathcal{A} = [X_0, \ldots, X_r]$ μιὰ ἀποσύνθεση ἀπόστασης τοῦ G ὡς πρὸς μιὰ ὁποιαδήποτε κορυφὴ v τοῦ G. Ἰσχυριζόμαστε ὅτι καμιὰ ἀκμὴ τοῦ G δὲν μπορεῖ νὰ ἔχει καὶ τὰ δύο ἄκρα της στὸ ἴδιο σύνολο X_i. Ἔστω ὅτι αὐτὸ συμβαίνει γιὰ κάποια ἀκμὴ $\{x, y\} \subseteq X_i$. Ἔστω P_x ἕνα συντομότερο μονοπάτι ποὺ συνδέει τὴν v μὲ τὴν x καὶ P_y ἕνα συντομότερο μονοπάτι ποὺ συνδέει τὴν v μὲ τὴν y. Ἀφοῦ $x, y \in X_i$, καὶ τὰ δύο μονοπάτια ἔχουν μῆκος i, καὶ γιὰ κάθε $t \in \{0, \ldots, i\}$ ἡ t-ὁστὴ κορυφὴ καθενὸς ἀπὸ αὐτὰ (μετρώντας τὴν v ὡς 0-ὁστή) βρίσκεται σὲ ἀπόσταση t ἀπὸ τὴν v, δηλαδὴ ἀνήκει στὸ X_t. Ἔστω w ἡ τελευταία κοινὴ κορυφὴ τῶν P_x καὶ P_y (ἡ πρώτη τους κοινὴ κορυφὴ εἶναι ἡ v) καὶ ἔστω P'_x καὶ P'_y τὰ μέρη τῶν P_x καὶ P_y ἀπὸ τὴν w καὶ μετά. Ἂν $w \in X_j$, τότε τὰ P'_x καὶ P'_y ἔχουν τὸ καθένα μῆκος $i - j \geq 1$ καί, ἐκτὸς ἀπὸ τὴν w, δὲν ἔχουν κοινὲς

κορυφές. Ἄρα μαζὶ μὲ τὴν ἀκμὴ $\{x, y\}$ σχηματίζουν κύκλο μήκους $2(i-j)+1$, δηλαδὴ περιττοῦ μήκους, ἄτοπο.

Μὲ βάση τὸν παραπάνω ἰσχυρισμό, ἂν χρωματίσουμε τὶς κορυφὲς τῶν X_i μὲ περιττὸ δείκτη μὲ κάποιο χρῶμα καὶ τὶς κορυφὲς τῶν X_i μὲ ἄρτιο δείκτη μὲ ἕνα ἄλλο, ἔχουμε ἕναν 2-χρωματισμὸ τοῦ G. □

Σύμφωνα μὲ τὸ Λῆμμα 8.10, ἕνα διμερὲς γράφημα μὲ n κορυφὲς ἔχει τὸ πολὺ $\frac{n^2}{4}$ ἀκμές. Τὸ 1907 ὁ Mantel [73] ἀπέδειξε ὅτι τὸ ἴδιο ἄνω φράγμα ἰσχύει ἀκόμη καὶ ἂν ἀντὶ γιὰ ὅλους τοὺς περιττοὺς κύκλους ἀποκλείσουμε μόνο τὰ τρίγωνα (βλ. Ἄσκηση 9.4).

Ὁρισμός 8.15. Ἔστω G k-χρωματίσιμο γράφημα. Καλοῦμε ἕνα ὑποσύνολο k κορυφῶν $S \subseteq V(G)$, *πάνχρωμο* ἂν γιὰ κάθε χρωματισμὸ $\chi : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ τοῦ G, $\chi(S) = \{1, \ldots, k\}$ (δηλ. γιὰ κάθε k-χρωματισμὸ τοῦ G ὅλα τὰ διαθέσιμα χρώματα πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν γιὰ τὸν χρωματισμὸ τῶν κορυφῶν τοῦ S).

Λῆμμα 8.16. Ἔστω S πάνχρωμο σύνολο κορυφῶν ἑνὸς k-χρωματίσιμου γραφήματος G μὲ $|S| = k$ καὶ ἔστω χ χρωματισμὸς τοῦ G μὲ k χρώματα. Τότε οἱ δύο κορυφὲς $v, u \in S$ ποὺ εἶναι χρωματισμένες μὲ τὰ χρώματα i καὶ j (δηλαδὴ $\chi(v) = i$ καὶ $\chi(u) = j$), ἀνήκουν στὴν ἴδια συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ $G[\chi^{-1}(i) \cup \chi^{-1}(j)]$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω S ἕνα ἀντιπαράδειγμα τοῦ παραπάνω ἰσχυρισμοῦ καὶ $v, u \in S$ τέτοιες ὥστε, ἂν V_v εἶναι τὸ σύνολο κορυφῶν τῆς συνεκτικῆς συνιστώσας τοῦ $G[\chi^{-1}(i) \cup \chi^{-1}(j)]$ στὴν ὁποία ἀνήκει ἡ v, νὰ ἰσχύει ὅτι $u \notin V_v$. Παρατηροῦμε ὅτι μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε ἕναν νέο χρωματισμὸ χ' γιὰ τὸ G ἐναλλάσσοντας στὸν χ τὰ χρώματα i καὶ j ποὺ ἔχουν ἀνατεθεῖ στὶς κορυφὲς τοῦ V_v. Πιὸ αὐστηρὰ ὁρίζουμε,

$$\hat{\chi} = \chi \backslash \{(x, \chi(x)) \mid x \in V_v\} \cup \{(x, i + j - \chi(x)) \mid x \in V_v\}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ $\hat{\chi}$ εἶναι ἕνας k-χρωματισμὸς τοῦ G μὲ $\hat{\chi}(v) = \hat{\chi}(u) = j$. Συνεπάγεται ὅτι $\hat{\chi}(S) \neq \{1, \ldots, k\}$, τὸ ὁποῖο εἶναι ἄτοπο καθὼς τὸ S εἶναι πάνχρωμο. □

8.2 Χρωματικότητα καὶ ἐκφυλισμός

Ἡ ἁπλὴστη στρατηγικὴ —χρωματίζουμε τὶς κορυφὲς μία-μία μὲ τὸ μικρότερο διαθέσιμο χρῶμα— δίνει ἕνα φράγμα ποὺ, παρὰ τὴν ἁπλότητά του, ἀποδεικνύεται ἐξαιρετικὰ χρήσιμο.

Θεώρημα 8.17. Γιὰ κάθε γράφημα G, $\chi(G) \leq \delta^*(G) + 1$.

Ἀπόδειξη. Πρόκειται γιὰ τὸν ἄπληστο ἀλγόριθμο: ἀφαιροῦμε μιὰ κορυφὴ μικροῦ βαθμοῦ, χρωματίζουμε ἐπαγωγικὰ ὅ,τι ἀπομένει, καὶ στὸ τέλος βρίσκουμε ἐλεύθερο χρῶμα γιὰ τὴν κορυφὴ ποὺ ἀφαιρέσαμε. Θὰ δείξουμε ὅτι τὸ G μπορεῖ νὰ χρωματιστεῖ μὲ $\leq \delta^*(G) + 1$ χρώματα χρησιμοποιώντας ἐπαγωγὴ στὸ $n(G)$. Προφανῶς τὸ θεώρημα ἰσχύει ἂν $n(G) = 1$. Ὑποθέτουμε λοιπὸν ὅτι κάθε γράφημα G μὲ $< n$ κορυφὲς μπορεῖ νὰ χρωματιστεῖ μὲ $\leq \delta^*(G)+1$ χρώματα. Ἔστω τώρα γράφημα G μὲ $n(G) = n$. Ἔστω v μιὰ κορυφὴ τοῦ G μὲ βαθμὸ $\leq \delta^*(G)$ (τὴν ὕπαρξη αὐτῆς τῆς κορυφῆς τὴν ἐγγυᾶται ὁ ὁρισμὸς τῆς δ^*). Ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση, τὸ γράφημα $G - v$ μπορεῖ νὰ χρωματιστεῖ μὲ $\leq \delta^*(G - v) + 1 \leq \delta^*(G) + 1$ χρώματα. Ἔστω $\chi : V(G - v) \to \{1, \ldots, \delta^*(G) + 1\}$ ἕνας τέτοιος χρωματισμὸς καὶ ἔστω $X = \chi(N_G(v))$. Ἀφοῦ $|X| \leq \delta^*(G)$, τὸ σύνολο $R = \{1, \ldots, \delta^*(G)+1\}\backslash X$ εἶναι μὴ κενό. Ἔστω $i \in R$. Θέτουμε $\chi' = \chi \cup \{(v, i)\}$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι ἡ χ' εἶναι ἕνας χρωματισμὸς τοῦ G μὲ $\leq \delta^*(G) + 1$ χρώματα. □

Τὸ Θεώρημα 8.17 ἔχει πολλὲς ἐφαρμογές. Στὴν παροῦσα ἑνότητα, θὰ δοῦμε μόνο μερικὲς ἀπὸ αὐτές.

Θεώρημα 8.18. Ἂν ἕνα γράφημα G δὲν περιέχει μονοπάτι μήκους μεγαλύτερου ἀπὸ l, τότε τὸ γράφημα εἶναι $(l + 1)$-χρωματίσιμο.

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 8.17 ἔχουμε ὅτι ἂν $\chi(G) \geq l + 2$, τότε $\delta^*(G) \geq l + 1$ καὶ ἄρα τὸ G περιέχει ὑπογράφημα H ὅπου $\delta(H) \geq l + 1$. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 6.6, τὸ H περιέχει κάθε δέντρο μὲ $l + 2$ κορυφὲς ἄρα καὶ ἕνα μονοπάτι μήκους $l + 1$. □

Θεώρημα 8.19. Γιὰ κάθε γράφημα G μὲ n κορυφὲς ἰσχύουν οἱ παρακάτω ἀνισότητες.

(1) $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$

(2) $n \leq \chi(G) \cdot \chi(\overline{G})$

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 8.17, $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq \delta^*(G) + 1 + \delta^*(\overline{G}) + 1$. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 3.10 ἔχουμε ὅτι $\delta^*(\overline{G}) \leq n - \delta^*(G) - 1$. Ἀντικαθιστώντας, προκύπτει ἡ σχέση (1). Γιὰ τὴν σχέση (2) παρατηροῦμε ὅτι τὸ G εἶναι παραγόμενο ὑπογράφημα ἑνὸς $\chi(G)$-μεροῦς γραφήματος $K_{l_1,\ldots,l_{\chi(G)}}$. Ἔστω $l_i = \max\{l_1, \ldots, l_{\chi(G)}\}$. Προφανῶς, $l_i \geq \frac{n}{\chi(G)}$. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι τὸ μέρος $V_i(G)$ τοῦ G (ὅπως καὶ κάθε ἄλλο μέρος) ἐνάγει κλίκα στὸ $\overline{G}$ καὶ ἄρα τὸ $\overline{G}$ χρειάζεται τουλάχιστον $\frac{n}{\chi(G)}$ χρώματα γιὰ νὰ χρωματιστεῖ καὶ ἡ σχέση (2) ἰσχύει. □

8.3 Χρωματισμοὶ καὶ ἐπίπεδα γραφήματα

Ἀπὸ τὸ Πόρισμα 7.49 καὶ τὸ Θεώρημα 8.17 ἔχουμε τὸ ἑξῆς:

Πόρισμα 8.20. Κάθε ἐπίπεδο γράφημα εἶναι 6-χρωματίσιμο.

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὸ Πόρισμα 7.49, κάθε ἐπίπεδο γράφημα G ἱκανοποιεῖ $\delta^*(G) \leq 5$, ὁπότε ἀπὸ τὸ Θεώρημα 8.17 ἔχουμε $\chi(G) \leq \delta^*(G) + 1 \leq 6$. □

Τὸ παρακάτω θεώρημα ἀποδείχθηκε ἀπὸ τὸν Percy John Heawood τὸ 1890 (βλ. [54]) καὶ ὑπῆρξε ἕνα ἀπὸ τὰ πρῶτα βήματα στὴν προσπάθεια τῆς ἀπόδειξης τῆς *Εἰκασίας τῶν τεσσάρων χρωμάτων* (Θεώρημα 8.22).

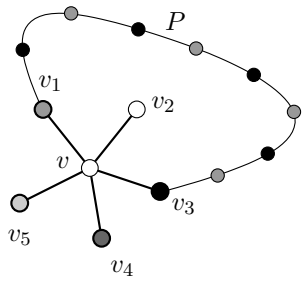
Θεώρημα 8.21 (Heawood, 1890 [54])**.** Κάθε ἐπίπεδο γράφημα εἶναι 5-χρωματίσιμο.

Ἀπόδειξη. Ἔστω G ἐπίπεδο γράφημα ἐλάχιστου ἀριθμοῦ κορυφῶν τὸ ὁποῖο νὰ μὴν εἶναι 5-χρωματίσιμο. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 7.48, τὸ G ἔχει μιὰ κορυφὴ v βαθμοῦ ≤ 5. Ἀπὸ τὸν τρόπο ποὺ ἐπιλέξαμε τὸ G ἔχουμε ὅτι τὸ $G' = G - v$ εἶναι 5-χρωματίσιμο. Ἰσχυριζόμαστε ἐπιπλέον ὅτι τὸ σύνολο $S = N_G(v)$ εἶναι πάνχρωμο. Πράγματι, ἂν ὄχι, τότε ὑπάρχει ἕνας 5-χρωματισμὸς χ τοῦ G' γιὰ τὸν ὁποῖο τὸ σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \chi(S)$ εἶναι μὴ κενὸ καὶ ἄρα περιέχει κάποιο χρῶμα i. Τότε ὅμως, ἡ συνάρτηση $\chi \cup \{(v, i)\}$ εἶναι ἕνας 5-χρωματισμὸς τοῦ G, ἄτοπο καὶ ὁ ἰσχυρισμὸς εἶναι σωστός.

Ἔστω τώρα Γ μιὰ ἐπίπεδη ἐμβάπτιση τοῦ G. Παρατηροῦμε ὅτι στὴν Γ οἱ κορυφὲς τοῦ $N_G(v)$ διατάσσονται κυκλικὰ γύρω ἀπὸ τὸ v. Ἔστω λοιπὸν $[v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1]$ ἡ κυκλικὴ αὐτὴ διάταξη καί, χωρὶς βλάβη τῆς γενικότητας, ὑποθέτουμε ὅτι $\chi(v_i) = i$ γιὰ $i = 1, \ldots, 5$. Γιὰ κάθε $i, j, 1 \leq i < j \leq 5$ ὁρίζουμε $G_{i,j} = G[\chi^{-1}(i) \cup \chi^{-1}(j)]$ (τὸ $G_{i,j}$ ἐνάγεται ἀπὸ τὶς κορυφὲς τοῦ G ποὺ φέρουν τὰ χρώματα i καὶ j). Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 8.16, παρατηροῦμε ὅτι:

> Οἱ κορυφὲς v_i καὶ v_j ἀνήκουν στὴν ἴδια συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ $G_{i,j}$ γιὰ κάθε ἐπιλογὴ τῶν $i, j, 1 \leq i < j \leq 5$.

Ἔχουμε λοιπὸν ὅτι οἱ κορυφὲς v_1 καὶ v_3 συνδέονται μὲ ἕνα μονοπάτι P στὸ γράφημα $G_{1,3}$ (ἀπὸ τὸ S πάνχρωμο, $\deg_G(v) = 5$). Βλέπουμε ὅτι τὸ μονοπάτι P μαζὶ μὲ τὴν κορυφὴ v καὶ τὶς ἀκμὲς $\{v, v_1\}$, $\{v, v_3\}$ σχηματίζουν ἕναν κύκλο L στὸ G ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ σὲ κάποιον κύκλο Λ τοῦ Γ (πιὸ αὐστηρά, $G_\Lambda = L$). Ὁ κύκλος Λ χωρίζει τὸ $\mathbb{R}^2$ σὲ δύο περιοχὲς R_1, R_2 (οἱ συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{\Lambda}$) κάθε μιὰ ἐκ τῶν ὁποίων περιέχει ἀκριβῶς μιὰ ἀπὸ τὶς κορυφὲς v_2, v_4



Σχῆμα 8.2: Ἡ ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 8.21.

(βλ. Σχῆμα 8.2). Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 7.19, κάθε μονοπάτι τοῦ Γ ποὺ συνδέει τὶς κορυφὲς v_2 καὶ v_4 θὰ συναντάει μιὰ κορυφὴ τοῦ Λ, δηλαδὴ μιὰ κορυφὴ ποὺ νὰ μὴν ἀνήκει στὸ $G_{2,4}$. Ἄρα οἱ v_2 καὶ v_4 δὲν ἀνήκουν στὴν ἴδια συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ $G_{2,4}$, πρᾶγμα ποὺ ἀντιβαίνει στὴν παραπάνω παρατήρηση γιὰ $i = 2$ καὶ $j = 4$. □

Τὸ παρακάτω θεώρημα ἀποδείχθηκε τὸ 1977 ἀπὸ τοὺς Appel καὶ Haken μὲ τὴν χρήση ὑπολογιστὴ (βλ. [5]). Πρὶν ἀποδειχθεῖ, ἀποτέλεσε ἕνα ἀπὸ τὰ σημαντικότερα ἀνοικτὰ προβλήματα τῆς γραφοθεωρίας κατὰ τὸν προηγούμενο αἰῶνα.

Θεώρημα 8.22 (Appel & Haken, 1977 [5])**.** Κάθε ἐπίπεδο γράφημα εἶναι 4-χρωματίσιμο.

Μιὰ σχετικὰ πιὸ ἁπλὴ ἀπόδειξη (πάλι μὲ χρήση ὑπολογιστή) τοῦ ἴδιου θεωρήματος προτάθηκε τὸ 1996 ἀπὸ τοὺς Robertson, Sanders, Seymour καὶ Thomas (βλ. [88]).

8.4 Χρωματισμοὶ καὶ μέγιστος βαθμός

Τὸ γεγονὸς ὅτι $\delta^*(G) \leq \Delta(G)$ καὶ τὸ Θεώρημα 8.17 στηρίζουν τὸ παρακάτω.

Λῆμμα 8.23. Κάθε γράφημα G εἶναι $(\Delta(G) + 1)$-χρωματίσιμο.

Ἀπόδειξη. Γιὰ κάθε ὑπογράφημα H τοῦ G ἰσχύει $\delta(H) \leq \Delta(H) \leq \Delta(G)$, ὁπότε $\delta^*(G) \leq \Delta(G)$. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 8.17 παίρνουμε $\chi(G) \leq \delta^*(G) + 1 \leq \Delta(G) + 1$. □

Παρ' ὅλα αὐτά, ἐκτὸς ἐλαχίστων ἐξαιρέσεων, $\Delta(G)$ χρώματα ἀρκοῦν. Στὸ ἑπόμενο λῆμμα ἀναπτύσσουμε παραπέρα τὶς ἰδέες τῆς ἀπόδειξης τοῦ Θεωρήματος 8.21.

Λῆμμα 8.24. Ἔστω $d \geq 3$ καὶ ἔστω G γράφημα τέτοιο ὥστε $\Delta(G) \leq d$ καὶ $K_{d+1} \not\subseteq_{\upsilon\pi} G$. Τότε τὸ G εἶναι d-χρωματίσιμο.

Ἀπόδειξη. Ἔστω G ἀντιπαράδειγμα ἐλάχιστου ἀριθμοῦ κορυφῶν. Ἄρα ἂν v εἶναι μιὰ ὁποιαδήποτε κορυφὴ τοῦ G τότε τὸ $G' = G - v$ εἶναι d-χρωματίσιμο. Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι τὸ $S = N_G(v)$ εἶναι πάνχρωμο γιὰ κάθε d-χρωματισμὸ τοῦ G'. Πράγματι, ἂν δὲν εἶναι ἔτσι, θὰ ὑπάρχει ἕνας d-χρωματισμὸς χ τοῦ G' γιὰ τὸν ὁποῖο τὸ σύνολο $\{1, \ldots, d\} \backslash \chi(S)$ περιέχει κάποιο χρῶμα i τέτοιο ὥστε ἡ συνάρτηση $\chi \cup \{(v, i)\}$ εἶναι ἕνας d-χρωματισμὸς τοῦ G (τὸ ἴδιο ἐπιχείρημα χρησιμοποιήσαμε στὴν ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 8.21). Μιὰ καὶ τὸ S εἶναι πάνχρωμο μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι $S = \{v_1, \ldots, v_d\}$ καὶ ὅτι $\chi(v_i) = i$. Ἐπίσης, τὸ S δὲν εἶναι κλίκα τοῦ G, διαφορετικὰ τὸ $G[\{v\} \cup S]$ θὰ ἦταν ἕνα K_{d+1}. Ἄρα μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι τὰ v_1 καὶ v_2 δὲν εἶναι συνδεδεμένες κορυφὲς στὸ G, καὶ προφανῶς οὔτε καὶ στὸ G'.

Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ κάθε $i = 1, \ldots, d$, τὸ σύνολο $S_i = \{v_i\} \cup N_{G'}(v_i)$ εἶναι ἐπίσης πάνχρωμο γιὰ κάθε d-χρωματισμὸ τοῦ G', διαφορετικὰ ἐπιλέγουμε κάποιο $h \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d\} \backslash \chi(S_i) \neq \emptyset$ καὶ τότε ἡ $\chi' = \chi \backslash \{(v_i, \chi(v_i))\} \cup \{(v_i, h)\}$ θὰ εἶναι ἕνας χρωματισμὸς τοῦ G' ποὺ πλήττει τὴν πανχρωμία τοῦ S στὸ G, ἄτοπο.

Ὁμοίως μὲ τὴν ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 8.21, ὁρίζουμε $G_{i,j} = G[\chi^{-1}(i) \cup \chi^{-1}(j)]$. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 8.16, τὰ v_i καὶ v_j ἀνήκουν στὴν ἴδια συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ $G_{i,j}$, καὶ ἄρα ὑπάρχει ἕνα $P_{i,j}$ (v_i, v_j)-μονοπάτι στὸ $G_{i,j}$ γιὰ κάθε i, j ὅπου $1 \leq i < j \leq d$.

Θὰ δείξουμε πρῶτα ὅτι $P_{i,j}$ εἶναι συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ $G_{i,j}$ γιὰ κάθε i, j ὅπου $1 \leq i < j \leq d$. Ἔστω $D = [v_i, a_1, \ldots, a_p, v_j]$ οἱ κορυφὲς τοῦ $P_{i,j}$ διατεταγμένες σύμφωνα μὲ τὴν σειρὰ ποὺ αὐτὲς ἐμφανίζονται στὸ $P_{i,j}$. Πρῶτα ἀπ΄ ὅλα ἡ v_i δὲν μπορεῖ νὰ ἔχει κάποια κορυφὴ b στὴν γειτονιά της διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν a_1 ὅπου $\chi(b) = j$, διαφορετικὰ θὰ πληττόταν ἡ πανχρωμία τοῦ S_i. Ἄρα $\deg_{G_{i,j}}(v_i) = 1$ καὶ συμμετρικὰ ἔχουμε ὅτι $\deg_{G_{i,j}}(v_j) = 1$. Ἔστω τώρα a_s ἡ πρώτη κορυφὴ τοῦ D γιὰ τὴν ὁποία $\deg_{G_{i,j}}(a_s) > 2$. Χωρὶς βλάβη τῆς γενικότητας, ὑποθέτουμε ὅτι $\chi(a_s) = i$ καὶ ἔστω b μιὰ κορυφὴ γειτονικὴ τῆς a_s ἐκτὸς τοῦ $P_{i,j}$, γιὰ τὴν ὁποία $\chi(b) = j$. Τότε ὅμως ἔχουμε τρεῖς κορυφὲς γειτονικὲς τῆς a_s χρωματισμένες μὲ j δηλαδὴ τὶς κορυφὲς πρὶν καὶ μετὰ τὴν a_s στὸ μονοπάτι $P_{i,j}$ καὶ τὴν κορυφὴ b. Ἡ a_s δὲν ἀνήκει στὸ S (οἱ μόνες κορυφὲς τοῦ S μὲ χρῶμα i ἢ j εἶναι τὰ ἄκρα v_i, v_j τοῦ $P_{i,j}$), ἄρα δὲν εἶναι γειτονικὴ τῆς v καὶ ἔχει τὸ πολὺ d γείτονες στὸ G', οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦν τὸ πολὺ $d-2$ χρώματα. Συνεπῶς, τὸ $\{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d\} \backslash \chi(N_{G'}(a_s))$ περιέχει κάποιο χρῶμα h τέτοιο

ὥστε ἡ $\chi' = \chi\backslash\{(a_s, i)\} \cup \{(a_s, h)\}$ νὰ εἶναι ἐπίσης d-χρωματισμὸς τοῦ G'. Στὸν νέο αὐτὸν d-χρωματισμό, λόγῳ τοῦ τρόπου ποὺ ἐπιλέχθηκε ἡ a_s, στὸ ὑπογράφημα $G'_{i,j} = G_{i,j} - a_s$ ποὺ ἐνάγουν οἱ κορυφὲς ποὺ εἶναι χρωματισμένες μὲ i καὶ j οἱ v_i καὶ v_j ἀνήκουν σὲ διαφορετικὲς συνεκτικὲς συνιστῶσες: πράγματι, οἱ $a_1, \ldots, a_{s-1}$ ἔχουν βαθμὸ 2 καὶ ἡ v_i βαθμὸ 1 στὸ $G_{i,j}$, ὁπότε ἡ συνιστῶσα τῆς v_i στὸ $G'_{i,j}$ εἶναι τὸ μονοπάτι $[v_i, a_1, \ldots, a_{s-1}]$. Ἄρα, ἀπὸ τὸ Λῆμμα 8.16, τὸ S δὲν εἶναι πάνχρωμο, ἄτοπο.

Τὸ ἑπόμενο βῆμα εἶναι νὰ δείξουμε ὅτι γιὰ διαφορετικὰ $i, j, k \in \{1, \ldots, d\}$, ἰσχύει ὅτι $V(P_{i,k}) \cap V(P_{k,j}) = \{v_k\}$. Πράγματι, ἔστω $c \in V(P_{i,k}) \cap V(P_{k,j})\backslash\{v_k\}$. Παρατηροῦμε ὅτι $\chi(c) = k$, ἄρα $c \notin S$ καὶ ἡ c εἶναι ἐσωτερικὴ κορυφὴ καὶ τῶν δύο μονοπατιῶν. Ἑπομένως ἡ κορυφὴ c ἔχει δύο γείτονες χρωματισμένους μὲ i καὶ δύο γείτονες χρωματισμένους μὲ j, ἐνῶ, ἀφοῦ δὲν εἶναι γειτονικὴ τῆς v, ἔχει τὸ πολὺ d γείτονες στὸ G'. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ σύνολο $\{1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, d\}\backslash\chi(N_{G'}(c))$ περιέχει κάποιο χρῶμα h τέτοιο ὥστε τὸ $\chi' = \chi\backslash\{(c, k)\} \cup \{(c, h)\}$ νὰ εἶναι ἕνας d-χρωματισμὸς τοῦ G'. Ξανὰ ὅμως παρατηροῦμε ὅτι στὸν νέο αὐτὸν d-χρωματισμό, στὸ ὑπογράφημα $G'_{i,k} = G_{i,k} - c$ ποὺ ἐνάγουν οἱ κορυφὲς ποὺ εἶναι χρωματισμένες μὲ i καὶ k οἱ v_i καὶ v_k ἀνήκουν σὲ διαφορετικὲς συνεκτικὲς συνιστῶσες, ἀφοῦ ἡ συνιστῶσα $P_{i,k}$ τοῦ $G_{i,k}$ ποὺ τὶς περιεῖχε χωρίζεται στὰ δύο μὲ τὴν ἀφαίρεση τῆς c. Ἄρα, ἀπὸ τὸ Λῆμμα 8.16, τὸ S δὲν εἶναι πάνχρωμο, ἄτοπο.

Ἔστω z ἡ κορυφὴ τοῦ μονοπατιοῦ $P_{1,2}$ ποὺ εἶναι ἡ γειτονικὴ τοῦ v_1. Προφανῶς, $\chi(z) = 2$ καί, ἀφοῦ οἱ v_1 καὶ v_2 δὲν εἶναι γειτονικές, $z \neq v_2$, ἄρα $z \notin S$. Ἐναλλάσσουμε τώρα τὰ χρώματα 1 καὶ 3 στὶς κορυφὲς τοῦ $P_{1,3}$, τὸ ὁποῖο, ὅπως δείξαμε, εἶναι συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ $G_{1,3}$. Παίρνουμε ἔτσι ἕναν νέο d-χρωματισμὸ χ' τοῦ G' μὲ $\chi'(v_1) = 3$ καὶ $\chi'(v_3) = 1$, ἐνῶ οἱ ὑπόλοιπες κορυφὲς τοῦ S διατηροῦν τὸ χρῶμα τους. Οἱ ἰσχυρισμοὶ ποὺ ἀποδείξαμε παραπάνω ἰσχύουν γιὰ κάθε d-χρωματισμὸ τοῦ G', ἄρα καὶ γιὰ τὸν χ', ἀρκεῖ σὲ κάθε χρῶμα νὰ ἀντιστοιχίσουμε τὴν κορυφὴ τοῦ S ποὺ τὸ φέρει. Συμβολίζουμε μὲ $G^*_{i,j}$ καὶ $P^*_{i,j}$ τὰ ἀντίστοιχα ὑπογραφήματα καὶ μονοπάτια γιὰ τὸν χ'· ἔτσι τὸ $P^*_{2,3}$ ἑνώνει τὶς v_2 καὶ v_1, ἐνῶ τὸ $P^*_{1,2}$ ἑνώνει τὶς v_3 καὶ v_2.

Ἐπειδὴ $V(P_{1,2}) \cap V(P_{1,3}) = \{v_1\}$, οἱ κορυφὲς τοῦ $P_{1,2}$ ἐκτὸς τῆς v_1 διατηροῦν τὸ χρῶμα τους στὸν χ'. Εἰδικότερα $\chi'(z) = 2$, καὶ ἡ z εἶναι γειτονικὴ τῆς v_1, ποὺ ἔχει πλέον χρῶμα 3· ἄρα ἡ z ἀνήκει στὴ συνιστῶσα τῆς v_1 στὸ $G^*_{2,3}$, δηλαδὴ στὸ $P^*_{2,3}$. Ἐπίσης, τὸ μονοπάτι $P_{1,2} - v_1$, ποὺ ἑνώνει τὶς z καὶ v_2, ἔχει ὅλες τὶς κορυφές του χρωματισμένες μὲ 1 ἢ 2 στὸν χ', ἄρα περιέχεται στὴ συνιστῶσα τῆς v_2 στὸ $G^*_{1,2}$, δηλαδὴ στὸ $P^*_{1,2}$. Ἑπομένως $z \in V(P^*_{1,2}) \cap V(P^*_{2,3})$ καὶ $z \neq v_2$, ποὺ ἀντιβαίνει

στὸν προηγούμενο ἰσχυρισμὸ ἐφαρμοσμένο στὸν χ', ἄτοπο. □

Τὸ Λῆμμα 8.24 μπορεῖ νὰ ἐπαναδιατυπωθεῖ ὡς ἑξῆς (βλ. [15]).

Θεώρημα 8.25 (Brooks, 1941 [15])**.** Κάθε συνεκτικὸ γράφημα G ποὺ δὲν εἶναι πλῆρες οὔτε περιττὸς κύκλος εἶναι $\Delta(G)$-χρωματίσιμο.

Ἀπόδειξη. Θέτουμε $d = \Delta(G)$ καὶ διακρίνουμε περιπτώσεις.

Ἂν $d \leq 2$, τότε τὸ G, ὡς συνεκτικὸ γράφημα μὲ μέγιστο βαθμὸ τὸ πολὺ 2, εἶναι μονοπάτι ἢ κύκλος. Τὰ γραφήματα K_1 καὶ K_2 εἶναι πλήρη καὶ οἱ περιττοὶ κύκλοι ἐξαιροῦνται ἀπὸ τὴν ὑπόθεση, ὁπότε τὸ G εἶναι μονοπάτι μὲ τουλάχιστον τρεῖς κορυφὲς ἢ ἄρτιος κύκλος. Καὶ στὶς δύο περιπτώσεις τὸ G εἶναι διμερὲς καὶ $d = 2$, ἄρα $\chi(G) = 2 = d$.

Ἂν $d \geq 3$, ἀρκεῖ, λόγῳ τοῦ Λήμματος 8.24, νὰ δείξουμε ὅτι $K_{d+1} \not\subseteq_{υπ} G$. Ἔστω, πρὸς ἄτοπο, ὅτι τὸ G περιέχει K_{d+1} ὡς ὑπογράφημα, μὲ σύνολο κορυφῶν A. Κάθε κορυφὴ τοῦ A ἔχει ἤδη βαθμὸ d μέσα στὸ K_{d+1}, ὁπότε δὲν εἶναι γειτονικὴ μὲ καμία κορυφὴ ἐκτὸς τοῦ A, διαφορετικὰ ὁ βαθμός της θὰ ξεπερνοῦσε τὸ d. Ἀφοῦ τὸ G εἶναι συνεκτικό, ἕπεται ὅτι $V(G) = A$ καὶ ἄρα τὸ G εἶναι τὸ πλῆρες γράφημα K_{d+1}, ποὺ ἀντιβαίνει στὴν ὑπόθεση. □

8.5 Χρωματισμοὶ καὶ περιφέρεια

Ἔστω γράφημα G μὲ περιφέρεια μεγαλύτερη τοῦ $2l$. Εἶναι εὔκολο νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωση κάθε ὑπογράφημα τοῦ G μεγέθους $\leq l$ εἶναι δάσος καὶ ἄρα 2-χρωματίσιμο. Αὐτὸ μᾶς δίνει τὸ δικαίωμα νὰ ποῦμε ὅτι τὰ γραφήματα μεγάλης περιφέρειας εἶναι «τοπικῶς 2-χρωματίσιμα». Παρ' ὅλα αὐτὰ ἡ «τοπική» αὐτὴ 2-χρωματισιμότητα δὲν ἐπεκτείνεται σὲ ὁλόκληρο τὸ γράφημα ὅσο μεγάλη καὶ νὰ εἶναι ἡ περιφέρεια. Τὸ παρακάτω θεώρημα καταδεικνύει ὅτι ὑπάρχουν γραφήματα ὅπου ὁ χρωματικὸς ἀριθμὸς καὶ ἡ περιφέρεια εἶναι αὐθαίρετα μεγάλα. Ἡ πρώτη ἀπόδειξη δόθηκε ἀπὸ τὸν Erdős τὸ 1959 χρησιμοποιώντας τὴν πιθανοτικὴ μέθοδο (βλ. [31]). Ἀπὸ τότε ἔχουν ἐμφανιστεῖ πολλὲς ἀποδείξεις (κατασκευαστικὲς ἢ μή) αὐτοῦ τοῦ θεωρήματος. Παρακάτω δίνουμε μιὰ πρόσφατη ἀπόδειξη ποὺ χρησιμοποιεῖ ἁπλὰ ἐπιχειρήματα μέτρησης (ἡ ἀπόδειξη ποὺ δίνουμε εἶναι πρόσφατη καὶ ἐμφανίστηκε στὴν [74]).

Θεώρημα 8.26. Γιὰ κάθε q, ὑπάρχει γράφημα τοῦ ὁποίου ὁ χρωματικὸς ἀριθμὸς καὶ ἡ περιφέρεια εἶναι τουλάχιστον q.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\mathcal{U}_n$ ἡ κλάση τῶν γραφημάτων μὲ σύνολο κορυφῶν τὸ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ὅπου ἰσόμορφα γραφήματα στὴν $\mathcal{U}_n$ ἀντιμετωπίζονται ὡς διαφορετικά. Ὁρίζουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{m,n,d,k} &= \{G \in \mathcal{U}_n \mid m(G) = m \leq nd, \Delta(G) \leq d^2, \chi(G) \leq k\} \text{ καὶ} \\ \mathcal{G}_{m,n,d,l} &= \{G \in \mathcal{U}_n \mid m(G) = m \leq nd, \Delta(G) \leq d^2, \textbf{περιφέρεια}(G) \geq l\}. \end{aligned}$$

Θὰ δείξουμε ὅτι γιὰ κάθε $k \geq 2$ καὶ $l \geq 3$, ὑπάρχουν τιμὲς τῶν n, d γιὰ τὶς ὁποῖες $|\mathcal{X}_{m,n,d,k}| < |\mathcal{G}_{m,n,d,l}|$, ἄρα θὰ ὑπάρχει κάποιο γράφημα στὴν $\mathcal{U}_n$ μὲ περιφέρεια $\geq l$ τὸ ὁποῖο νὰ μὴν εἶναι k-χρωματίσιμο. Γιὰ τὸν λόγο αὐτὸ θὰ βροῦμε ἕνα ἄνω φράγμα γιὰ τὸ $|\mathcal{X}_{m,n,d,k}|$ καὶ ἕνα κάτω φράγμα γιὰ τὸ $|\mathcal{G}_{m,n,d,l}|$.

Γιὰ νὰ φράξουμε ἄνω τὸ $|\mathcal{X}_{m,n,d,k}|$ θεωροῦμε ἕναν ὁποιονδήποτε χρωματισμὸ $\chi : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$ τοῦ $H = (V(G), \emptyset)$. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 8.10 ὑπάρχουν $\leq \binom{n}{2} - k\binom{n/k}{2} = \frac{1}{2}n^2(1 - \frac{1}{k})$ διαφορετικὲς ἀκμὲς ποὺ μπορεῖ νὰ προστεθοῦν στὸ H ἔτσι ὥστε τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει νὰ παραμείνει χρωματίσιμο ἀπὸ τὴν χ. Ἄρα ὑπάρχουν $\binom{\frac{1}{2}n^2(1-\frac{1}{k})}{m} \leq \frac{1}{m!}(\frac{1}{2}n^2(1 - \frac{1}{k}))^m$ διαφορετικοὶ τρόποι νὰ προσθέσουμε m ἀκμὲς στὸ H ἔτσι ὥστε τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει νὰ παραμείνει χρωματίσιμο ἀπὸ τὴν χ. Μιὰ καὶ ὑπάρχουν k^n διαφορετικοὶ k-χρωματισμοὶ τοῦ H, καταλήγουμε ὅτι

$$|\mathcal{X}_{m,n,d,k}| \leq \frac{1}{m!}\, k^n (\frac{1}{2}n^2(1 - \frac{1}{k}))^m \tag{8.1}$$

Θὰ βροῦμε τώρα ἕνα κάτω φράγμα γιὰ τὸ $|\mathcal{G}_{m,n,d,l}|$ φράζοντας κάτω ὅλους τοὺς τρόπους νὰ φτιάξουμε ἕνα μέλος τοῦ $\mathcal{G}_{m,n,d,l}$ ἀπὸ ἕνα μέλος H τοῦ $\mathcal{G}_{m-1,n,d,l}$ προσθέτοντας μιὰ νέα ἀκμὴ e. Ἀφοῦ $\Delta(H) \leq d^2$ καὶ $m(H) \leq nd$, ἔχουμε ὅτι τὸ πολὺ $2n/d$ κορυφὲς στὸ H θὰ ἔχουν βαθμὸ d^2 καὶ ἄρα ὑπάρχουν τουλάχιστον $n(1 - \frac{2}{d})$ κορυφὲς οἱ ὁποῖες μποροῦν νὰ εἶναι τὸ ἄκρο τῆς ἀκμῆς ποὺ θὰ προσθέσουμε. Ἔστω $S \subseteq V(H)$ τὸ σύνολο αὐτῶν τῶν κορυφῶν. Παρατηροῦμε ὅτι ἂν ἡ e ἔχει τὴν κορυφὴ $x \in S$ στὸ ἕνα ἄκρο της, τότε τὸ ἄλλο ἄκρο της πρέπει νὰ βρίσκεται μὲν στὸ $S \backslash \{x\}$ ἀλλὰ πρέπει νὰ ἀποκλείσουμε κάθε κορυφὴ σὲ ἀπόσταση $< l$ ἀπὸ τὸ x γιατὶ τότε θὰ δημιουργοῦνταν στὸ νέο γράφημα κύκλος μήκους $< l$. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 4.17, ἔχουμε ὅτι ἀποκλείονται τὸ πολὺ $\frac{d^2}{d^2-2}(d^2 - 1)^l \leq d^{2l}$ κορυφὲς (χρησιμοποιοῦμε τὸ ὅτι $l \geq 3$) ἄρα ἔχουμε τουλάχιστον $n(1 - \frac{2}{d}) - d^{2l}$ ἐπιλογὲς γιὰ τὸ ἄλλο ἄκρο τῆς e. Ἄρα ἔχουμε τουλάχιστον $\frac{1}{2}n(1 - \frac{2}{d})(n(1 - \frac{2}{d}) - d^{2l})$ τρόπους νὰ προσθέσουμε μιὰ ἀκμὴ στὸ H ἔτσι ὥστε νὰ δημιουργηθεῖ ἕνα γράφημα τοῦ $\mathcal{G}_{m,n,d,l}$. Κάθε γράφημα τοῦ $\mathcal{G}_{m,n,d,l}$ προκύπτει μὲ αὐτὸν τὸν τρόπο ἀπὸ τὸ πολὺ m διαφορετικὰ ζεύγη (H, e) (ἕνα γιὰ κάθε ἀκμὴ e ποὺ μπορεῖ νὰ ἀφαιρεθεῖ), ἄρα

$|\mathcal{G}_{m,n,d,l}| \geq \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2}n(1-\frac{2}{d})(n(1-\frac{2}{d}) - d^{2l}) \cdot |\mathcal{G}_{m-1,n,d,l}|$. Ἀφοῦ $|\mathcal{G}_{0,n,d,l}| = 1$, συνολικὰ ἔχουμε ὅτι

$$|\mathcal{G}_{m,n,d,l}| \quad \geq \quad \frac{1}{m!}(\frac{1}{2}n(1-\frac{2}{d})(n(1-\frac{2}{d}) - d^{2l}))^m \tag{8.2}$$

Ὑποθέτουμε, μὲ σκοπὸ τὸ ἄτοπο, ὅτι γιὰ κάθε n καὶ d ἰσχύει ὅτι $|\mathcal{X}_{dn,n,d,k}| \geq |\mathcal{G}_{dn,n,d,l}|$, πρᾶγμα ποὺ σημαίνει (πολλαπλασιάζοντας τὶς (8.1) καὶ (8.2) μὲ $(dn)!$) ὅτι

$$k^n(\frac{1}{2}n^2(1-\frac{1}{k}))^{dn} \geq (\frac{1}{2}n(1-\frac{2}{d})(n(1-\frac{2}{d}) - d^{2l}))^{nd}$$

ἢ ἀλλιῶς ὅτι

$$n^2 k^{1/d}(1-\frac{1}{k}) \geq n(n(1-\frac{2}{d}) - d^{2l})(1-\frac{2}{d}). \tag{8.3}$$

Γιὰ νὰ ἰσχύει τὸ παραπάνω γιὰ κάθε n καὶ d πρέπει ὁ συντελεστὴς τοῦ n^2 στὸ ἀριστερὸ μέρος τῆς ἀνισότητας (8.3) νὰ εἶναι *μεγαλύτερος ἢ ἴσος* ἀπὸ τὸν συντελεστὴ τοῦ n^2 στὸ δεξὶ μέρος, δηλαδὴ γιὰ κάθε d ἰσχύει ὅτι,

$$k^{1/d}(1-\frac{1}{k}) \geq (1-\frac{2}{d})^2.$$

Στὴν παραπάνω ἀνισότητα παρατηροῦμε ὅτι καθὼς τὸ d τείνει στὸ ἄπειρο, τὸ δεξὶ μέρος τείνει στὸ 1 καὶ τὸ ἀριστερὸ τείνει στὸ $1 - 1/k$, ἄτοπο. □

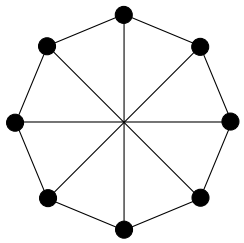
Ἡ παραπάνω ἀπόδειξη δὲν εἶναι κατασκευαστική, δηλ. δὲν μᾶς δίνει τὸ γράφημα ποὺ ἀποδεικνύει ὅτι ὑπάρχει. Ἡ πρώτη κατασκευαστικὴ ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 8.26 προτάθηκε ἀπὸ τὸν Lovász τὸ 1968 (βλ. [67]). Ἕνα παράδειγμα γραφήματος μὲ χρωματικὸ ἀριθμὸ 4 καὶ περιφέρεια 4 εἶναι τὸ γράφημα G στὸ Σχῆμα 4.4.

8.6 Χρωματισμοὶ καὶ ἀραιὰ γραφήματα

Τὸ Θεώρημα 8.17 μᾶς λέει ὅτι κάθε «ἐκφυλισμένο» γράφημα μπορεῖ νὰ χρωματιστεῖ μὲ λίγα χρώματα.

Στὴν περίπτωση τῶν ἐπιπέδων γραφημάτων ὁ ἐκφυλισμός, καὶ ἄρα ὁ χρωματισμὸς μὲ λίγα χρώματα, μπορεῖ νὰ προκύψει ἀπὸ τὴν ἀπουσία τῶν K_5 καὶ $K_{3,3}$ ὡς ἐλασσόνων ἢ ὡς τοπολογικῶν ἐλασσόνων (Θεωρήματα 7.59 καὶ 7.58). Πολὺ περισσότερο, ὁ ἀποκλεισμὸς τῶν K_5 καὶ $K_{3,3}$ ἀπὸ ἕνα γράφημα μπορεῖ νὰ ἐγγυηθεῖ τὸν χρωματισμό του μὲ 4 χρώματα (λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν τὸ Θεώρημα 8.22).

Προκύπτει ὅτι, στὴν περίπτωση ποὺ ἀποκλείουμε *μόνο* τὸ K_5 ὡς ἔλασσον, 4 χρώματα εἶναι ἐπίσης ἀρκετά. Τὸ γεγονὸς αὐτὸ προκύπτει εὔκολα ἀπὸ τὸ ἀκόλουθο θεώρημα ποὺ ἀπέδειξε ὁ Wagner τὸ 1937 (βλ. [106]).



V_8

Σχῆμα 8.3: Τὸ γράφημα V_8.

Θεώρημα 8.27. Κάθε γράφημα G ὅπου $K_5 \not\leq_{\epsilon\lambda} G$, μπορεῖ νὰ προκύψει ἀπὸ μιὰ ἀκολουθία ἀθροισμάτων κλικῶν μὲ τὸ πολὺ τρεῖς κορυφές, γραφημάτων ποὺ εἶναι εἴτε ἐπίπεδα εἴτε ἰσόμορφα μὲ τὸ γράφημα V_8 τοῦ Σχήματος 8.3.

Ἀπὸ αὐτό, σὲ συνδυασμὸ μὲ τὸ Θεώρημα τῶν τεσσάρων χρωμάτων γιὰ τὰ ἐπίπεδα γραφήματα, τὸ γεγονὸς ὅτι $\chi(V_8) = 3$ καὶ τὴν παρατήρηση ὅτι ὁ χρωματικὸς ἀριθμὸς ἑνὸς ἀθροίσματος κλικῶν δὲν ξεπερνᾶ τὸν μέγιστο ἀπὸ τοὺς χρωματικοὺς ἀριθμοὺς τῶν ὅρων του, προκύπτει τὸ παρακάτω.

Θεώρημα 8.28. Κάθε γράφημα G ὅπου $K_5 \not\leq_{\epsilon\lambda} G$, εἶναι 4-χρωματίσιμο.

Ἐπίσης τὸ παρακάτω Θεώρημα εἶναι ἄμεση συνέπεια τῶν Θεωρημάτων 5.48 καὶ 8.17.

Θεώρημα 8.29. Κάθε γράφημα G ὅπου $K_4 \not\leq_{\epsilon\lambda} G$, εἶναι 3-χρωματίσιμο.

Ἀπόδειξη. Ἔστω H ὑπογράφημα τοῦ G. Ἡ σχέση $\leq_{\epsilon\lambda}$ εἶναι μεταβατικὴ καὶ κάθε ὑπογράφημα ἑνὸς γραφήματος εἶναι ἔλασσόν του, ὁπότε $K_4 \not\leq_{\epsilon\lambda} H$. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.48 ἔπεται ὅτι $\delta(H) \leq 2$. Ἀφοῦ αὐτὸ ἰσχύει γιὰ κάθε ὑπογράφημα τοῦ G, ἔχουμε $\delta^*(G) \leq 2$ καὶ ἀπὸ τὸ Θεώρημα 8.17, $\chi(G) \leq \delta^*(G) + 1 \leq 3$. □

Ἕνα ἀπὸ τὰ μεγαλύτερα ἐρωτήματα τῆς σύγχρονης γραφοθεωρίας εἶναι τὸ ἂν τὰ Θεωρήματα 8.28 καὶ 8.29 μποροῦν νὰ γενικευτοῦν γιὰ κάθε μέγεθος ἀποκλειόμενης κλίκας (βλ. [48]).

Εἰκασία 8.30 (Hadwiger, 1943 [48])**.** Γιὰ κάθε $r > 0$, καὶ γιὰ κάθε γράφημα G: $\chi(G) \geq r \Rightarrow K_r \leq_{\epsilon\lambda} G$.

Ἡ εἰκασία 8.30 ἀποδείχθηκε γιὰ $r = 6$ ἀπὸ τοὺς Robertson, Seymour καὶ Thomas τὸ 1993 καὶ παραμένει ἀνοιχτὴ γιὰ $r \geq 7$.

Μιὰ προσέγγιση γιὰ τὸν χρωματικὸ ἀριθμὸ τῶν γραφημάτων χωρὶς τὸ K_r ὡς ἔλασσον μᾶς δίνει τὸ παρακάτω Λῆμμα ποὺ ἀποδείχθηκε ἀπὸ τὸν Wolfgang K.W. Mader τὸ 1967 (βλ. [72]).

Λῆμμα 8.31. Γιὰ κάθε γράφημα G καὶ κάθε $r \geq 2$, $K_r \not\leq_{\epsilon\lambda} G \Rightarrow \epsilon(G) < 2^{r-3}$.

Ἀπόδειξη. Θὰ δείξουμε ἰσοδύναμα ὅτι $\epsilon(G) \geq 2^{r-3} \Rightarrow K_r \leq_{\epsilon\lambda} G$. Θὰ χρησιμοποιήσουμε ἐπαγωγὴ στὸ r. Προφανῶς τὸ λῆμμα ἰσχύει γιὰ $r = 2$ γιατὶ τότε $\epsilon(G) = 0 < 1/2$ καὶ γιὰ $r = 3$ γιατὶ τότε τὸ G εἶναι δάσος, ὁπότε $\epsilon(G) < 1$. Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι τὸ ζητούμενο ἰσχύει ὅταν ἀποκλείουμε ὡς ἐλάσσονα κλίκες μὲ λιγότερες ἀπὸ r κορυφές.

Ἔστω $\ell = 2^{r-3}$, ἔστω G γράφημα μὲ $\epsilon(G) \geq \ell$ καὶ ἔστω G' ἕνα ἔλασσον τοῦ G, ἐλαχιστικὸ ὡς πρὸς τὴν σχέση ἐλασσόνων, γιὰ τὸ ὁποῖο $\epsilon(G') \geq \ell$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι $\epsilon(G') \geq \ell$ καὶ ὅτι γιὰ κάθε γνήσιο ἐλάσσον G'' τοῦ G', $\epsilon(G'') < \ell$. Παρατηροῦμε ὅτι, τὸ G' εἶναι συνεκτικό. (γιὰ αὐτὸ χρησιμοποιοῦμε τὴν ἀνισότητα $\max\{\frac{a_1}{b_1}, \cdots, \frac{a_q}{b_q}\} \geq \frac{\sum_{i\in\{1,\ldots q\}} a_i}{\sum_{i\in\{1,\ldots q\}} b_i}$, ὅπου $a_1, \ldots, a_q, b_1, \ldots, b_q \geq 0$).

Ἰσχυριζόμαστε ὅτι $\delta(G') \geq \ell$. Πράγματι, ἂν $v \in V(G')$ καὶ $\deg_{G'}(v) < \ell$ τότε, ἂν $G'' = G' - v$, τότε $\epsilon(G'') = \frac{m(G') - \deg_{G'}(v)}{n(G')-1} > \frac{m(G')-\ell}{n(G')-1} \geq \frac{\ell\cdot n(G')-\ell}{n(G')-1} = \ell$, ἄτοπο γιατὶ τὸ G'' εἶναι γνήσιο ἔλασσον τοῦ G'.

Ἔστω v μιὰ ὁποιαδήποτε κορυφὴ τοῦ G' καὶ ἔστω u μιὰ ὁποιαδήποτε κορυφὴ τοῦ $N_{G'}(v)$. Ὁρίζουμε $e = \{u, v\}$, $S_u = N_{G'}(v) \cap N_{G'}(u)$, καὶ $G'' = G'/e$. Παρατηροῦμε ὅτι $m(G'') = m(G') - |S_u| - 1$, ἄρα $\epsilon(G'') = \frac{m(G')-|S_u|-1}{n(G')-1}$ καὶ ἡ τιμὴ αὐτή, ἀφοῦ τὸ G'' εἶναι γνήσιο ἔλασσον τοῦ G', πρέπει νὰ εἶναι μικρότερη τοῦ ℓ. Ἄρα $m(G') - |S_u| - 1 < \ell \cdot n(G') - \ell$ καὶ ἀφοῦ $n(G') \cdot \ell \leq m(G')$ ἔχουμε ὅτι $n(G') \cdot \ell - |S_u| - 1 < \ell \cdot n(G') - \ell \Rightarrow |S_u| \geq \ell$. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι, ἂν $H = G'[N_{G'}(v)]$, τότε $\delta(H) \geq \ell$, ἄρα $\epsilon(H) \geq \ell/2 = 2^{r-4}$. Ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση, $K_{r-1} \leq_{\epsilon\lambda} H$, καὶ ἀφοῦ ὅλες οἱ κορυφὲς τοῦ H εἶναι συνδεδεμένες μὲ τὴν v στὸ G', ἰσχύει ὅτι $K_r \leq_{\epsilon\lambda} G'$ καὶ ἐπειδὴ $G' \leq_{\epsilon\lambda} G$, καταλήγουμε στὸ ζητούμενο. □

Πόρισμα 8.32. Γιὰ κάθε $r \geq 2$, κάθε γράφημα G μὲ $K_r \not\leq_{\epsilon\lambda} G$ εἶναι 2^{r-2}-χρωματίσιμο.

Ἀπόδειξη. Κάθε ὑπογράφημα H τοῦ G ἱκανοποιεῖ ἐπίσης $K_r \not\leq_{\epsilon\lambda} H$, ὁπότε, ἀπὸ τὸ Λῆμμα 8.31, $\delta(H) \leq 2\epsilon(H) < 2^{r-2}$, δηλαδὴ $\delta(H) \leq 2^{r-2} - 1$. Ἄρα $\delta^*(G) \leq 2^{r-2} - 1$ καί, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 8.17, $\chi(G) \leq 2^{r-2}$. □

Ἡ σχέση πυκνότητας καὶ μεγέθους κλίκας στὸ Λῆμμα 8.31 μπορεῖ νὰ βελτιωθεῖ δραστικὰ χωρὶς ὅμως νὰ γίνει γραμμική, ὅπως ὑποδεικνύει τὸ παρακάτω (σημαντικό) Θεώρημα ποὺ ἀποδείχθηκε ἀπὸ τὸν Andrew Thomason τὸ 2001 (βλ. [100]).

Θεώρημα 8.33 (Thomason, 2001 [100])**.** Ἔστω $c(t)$ ὁ μικρότερος ἀριθμὸς c γιὰ τὸν ὁποῖο ἰσχύει ὅτι $\epsilon(G) \geq c \Rightarrow K_t \leq_{\epsilon\lambda} G$. Τότε $c(t) = (\alpha + o(1))t\sqrt{\log t}$ ὅπου $\alpha = 0.3190863...$ εἶναι μιὰ συγκεκριμένη σταθερά.

Τὸ παραπάνω ἀποτέλεσμα ὑποδεικνύει ὅτι ἡ ἀπόδειξη τῆς Εἰκασίας 8.30 δὲν μπορεῖ νὰ προκύψει μόνο μὲ τὴν χρήση ποσοτικῶν ἐπιχειρημάτων ὅπως αὐτὸ τοῦ Θεωρήματος 8.17. Σὲ κάθε περίπτωση εἶναι ἀξιοσημείωτο ὅτι τέτοια ἐπιχειρήματα δουλεύουν γιὰ $t \leq 4$.

8.7 Χρωματισμοὶ ἀκμῶν

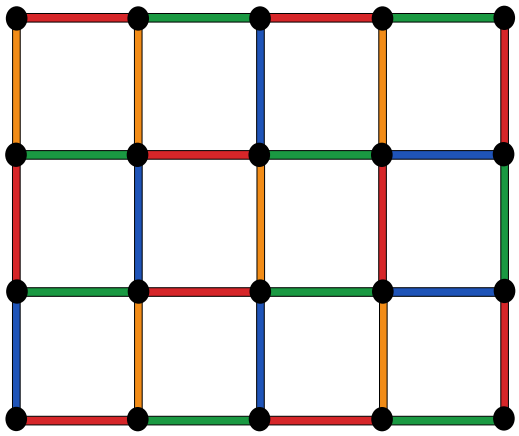
Ὁρισμός 8.34. Ἔστω G γράφημα. Καλοῦμε *χρωματισμὸ ἀκμῶν* κάθε συνάρτηση $\psi : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ γιὰ τὴν ὁποία ἰσχύει ὅτι γιὰ κάθε $e, e' \in E(G)$ μὲ $e \neq e'$ καὶ $e \cap e' \neq \emptyset$, $\psi(e) \neq \psi(e')$. Μὲ ἄλλα λόγια ἕνας k-χρωματισμὸς ἀκμῶν εἶναι ἡ ἀνάθεση ἑνὸς «χρώματος» σὲ κάθε ἀκμὴ τοῦ G ἔτσι ὥστε ἀκμὲς προσπίπτουσες στὴν ἴδια κορυφὴ νὰ μὴ φέρουν τὸ ἴδιο χρῶμα. Λέμε ὅτι ἕνα γράφημα G εἶναι *k-χρωματίσιμο ὡς πρὸς τὶς ἀκμές του* ἂν ὑπάρχει ἕνας k-χρωματισμὸς ἀκμῶν τοῦ G. Ὁ *χρωματικὸς ἀριθμὸς ἀκμῶν* ἑνὸς γραφήματος G, $\psi(G)$ εἶναι τὸ ἐλάχιστο k γιὰ τὸ ὁποῖο τὸ G εἶναι k-χρωματίσιμο ὡς πρὸς τὶς ἀκμές του.

Παρατήρηση 8.35. Γιὰ κάθε γράφημα G, $\psi(G) \geq \Delta(G)$.

Θεώρημα 8.36 (Kőnig, 1916 [61])**.** Γιὰ κάθε διμερὲς γράφημα G, $\psi(G) = \Delta(G)$.

Ἀπόδειξη. Θέτουμε $d = \Delta(G)$. Ἡ ἀνισότητα $\psi(G) \geq d$ εἶναι ἡ προηγούμενη παρατήρηση, ὁπότε ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσουμε χρωματισμὸ τῶν ἀκμῶν μὲ d χρώματα. Χρησιμοποιοῦμε ἐπαγωγὴ στὸ $m(G)$. Ἂν $m(G) = 0$ δὲν ὑπάρχει τίποτα νὰ δείξουμε.

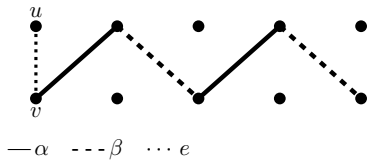
Ἔστω $e = \{u, v\} \in E(G)$. Τὸ $G - e$ εἶναι διμερὲς μὲ μέγιστο βαθμὸ τὸ πολὺ d, ὁπότε ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση ἔχει χρωματισμὸ ἀκμῶν c μὲ d χρώματα. Στὸ



Σχῆμα 8.4: Μιὰ (4×5)-σχάρα καὶ ἕνας 4-χρωματισμὸς τῶν ἀκμῶν της.

$G - e$ οἱ u καὶ v ἔχουν βαθμὸ τὸ πολὺ $d - 1$, ἑπομένως ὑπάρχει χρῶμα α ποὺ δὲν ἐμφανίζεται σὲ καμία ἀκμὴ προσκείμενη τῆς u καὶ χρῶμα β ποὺ δὲν ἐμφανίζεται σὲ καμία ἀκμὴ προσκείμενη τῆς v. Ἂν $\alpha = \beta$, χρωματίζουμε τὴν e μὲ τὸ χρῶμα αὐτὸ καὶ τελειώσαμε.

Ἔστω λοιπὸν $\alpha \neq \beta$ καὶ ἔστω P τὸ μέγιστο μονοπάτι τοῦ $G - e$ ποὺ ξεκινάει ἀπὸ τὴν v καὶ τοῦ ὁποίου οἱ ἀκμὲς εἶναι ἐναλλὰξ χρώματος $\alpha, \beta, \alpha, \ldots$, ἀρχίζοντας ἀπὸ ἀκμὴ χρώματος α. Τὸ P εἶναι καλὰ ὁρισμένο, ἀφοῦ σὲ κάθε κορυφὴ προσπίπτει τὸ πολὺ μία ἀκμὴ κάθε χρώματος.



Σχῆμα 8.5: Τὸ ἐναλλάσσον μονοπάτι P στὴν ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος τοῦ Kőnig. Ἡ u βρίσκεται στὸ ἀπέναντι μέρος ἀπὸ τὴν v, ὁπότε ἂν ἀνῆκε στὸ P θὰ προσέπιπτε σὲ ἀκμὴ χρώματος α.

Ἰσχυριζόμαστε ὅτι ἡ u δὲν εἶναι κορυφὴ τοῦ P. Πράγματι, ἂν ἡ u ἦταν ἐσωτερικὴ κορυφὴ τοῦ P, θὰ ἦταν προσκείμενη σὲ δύο ἀκμές του, μία χρώματος α καὶ μία χρώματος β, ποὺ ἀντιβαίνει στὴν ἐπιλογὴ τοῦ α. Ἂν πάλι ἡ u ἦταν τὸ τελευταῖο ἄκρο τοῦ P, παρατηροῦμε ὅτι, ἀφοῦ τὸ G εἶναι διμερὲς καὶ $\{u, v\} \in E(G)$, οἱ u καὶ v ἀνήκουν σὲ διαφορετικὰ μέρη του· οἱ κορυφὲς τοῦ P ἐναλλάσσουν μέρος σὲ

κάθε βῆμα, ὁπότε ἡ u θὰ βρισκόταν σὲ περιττὴ ἀπόσταση ἀπὸ τὴν v κατὰ μῆκος τοῦ P. Οἱ ἀκμὲς τοῦ P σὲ περιττὴ θέση ἔχουν χρῶμα α, ἄρα ἡ τελευταία ἀκμὴ τοῦ P θὰ ἦταν χρώματος α καὶ θὰ προσέπιπτε στὴν u, ἄτοπο.

Ἐναλλάσσουμε τώρα τὰ χρώματα α καὶ β σὲ ὅλες τὶς ἀκμὲς τοῦ P. Ὁ νέος χρωματισμὸς ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι ἔγκυρος: γιὰ κορυφὴ ἐκτὸς τοῦ P τίποτα δὲν ἀλλάζει, γιὰ ἐσωτερικὴ κορυφὴ τοῦ P τὰ δύο χρώματα ἁπλῶς ἀνταλλάσσονται, ἐνῶ γιὰ ἄκρο τοῦ P ἡ ἀλλαγὴ δὲν δημιουργεῖ σύγκρουση, ἀφοῦ διαφορετικὰ τὸ P θὰ μποροῦσε νὰ ἐπεκταθεῖ. Μετὰ τὴν ἐναλλαγή, ἡ μοναδικὴ ἀκμὴ τοῦ P ποὺ προσπίπτει στὴν v ἔχει χρῶμα β, ὁπότε τὸ α λείπει πλέον ἀπὸ τὴν v· λείπει ἐπίσης καὶ ἀπὸ τὴν u, ἡ ὁποία δὲν ἀνήκει στὸ P. Χρωματίζουμε τὴν e μὲ τὸ α. □

Θεώρημα 8.37 (Vizing, 1964 [105])**.** Γιὰ κάθε γράφημα G, $\Delta(G) \leq \psi(G) \leq \Delta(G)+1$.

Ἀπόδειξη. Θέτουμε $d = \Delta(G)$. Ἡ πρώτη ἀνισότητα εἶναι ἡ προηγούμενη παρατήρηση.

Γιὰ τὴ δεύτερη χρησιμοποιοῦμε ἐπαγωγὴ στὸ $m(G)$. Ἂν $m(G) = 0$ τὸ ζητούμενο εἶναι προφανές. Ἔστω $e = \{u, v_0\} \in E(G)$. Ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση, τὸ $G - e$ ἔχει χρωματισμὸ ἀκμῶν c μὲ $d+1$ χρώματα. Κάθε κορυφὴ ἔχει βαθμὸ τὸ πολὺ $d < d+1$, ἑπομένως σὲ κάθε κορυφὴ *λείπει* τουλάχιστον ἕνα χρῶμα, δηλαδὴ ὑπάρχει χρῶμα ποὺ δὲν ἐμφανίζεται σὲ καμία προσκείμενή της ἀκμή. Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι ὁ c χρωματίζει ὅλες τὶς ἀκμὲς τοῦ G ἐκτὸς ἀπὸ τὴν e· εἰδικότερα, κάθε ἀκμὴ τῆς μορφῆς $\{u, v\}$ μὲ $v \neq v_0$ εἶναι χρωματισμένη. Ὑποθέτουμε, πρὸς ἄτοπο, ὅτι ὁ c δὲν ἐπεκτείνεται σὲ χρωματισμὸ τοῦ G, δηλαδὴ ὅτι κανένα ἀπὸ τὰ $d+1$ χρώματα δὲν μπορεῖ νὰ δοθεῖ στὴν e.

Ἡ ἰδέα εἶναι νὰ μεταθέσουμε τὰ χρώματα τῶν ἀκμῶν ποὺ προσπίπτουν στὴν u, ὥστε νὰ ἐλευθερωθεῖ ἕνα χρῶμα γιὰ τὴν e. Γιὰ τὸν σκοπὸ αὐτὸ κατασκευάζουμε μιὰ *βεντάλια* στὴν u: μιὰ ἀκολουθία $v_0, v_1, \ldots, v_k$ ἀνὰ δύο διαφορετικῶν γειτονικῶν κορυφῶν τῆς u, μὲ πρώτη τὴν v_0, τέτοια ὥστε γιὰ κάθε $i \geq 1$ τὸ χρῶμα $c(\{u, v_i\})$ νὰ λείπει ἀπὸ τὴν v_{i-1}. Οἱ ἀκμὲς $\{u, v_1\}, \ldots, \{u, v_k\}$ εἶναι ὅλες χρωματισμένες, σύμφωνα μὲ τὴν προηγούμενη παρατήρηση, ὁπότε τὰ χρώματα αὐτὰ εἶναι καλὰ ὁρισμένα. Παίρνουμε μιὰ τέτοια ἀκολουθία μέγιστου μήκους. Ἔστω α ἕνα χρῶμα ποὺ λείπει ἀπὸ τὴν u.

Ἰσχυρισμός 8.38. Γιὰ κάθε $i \in \{0, \ldots, k\}$, τὸ α δὲν λείπει ἀπὸ τὴν v_i.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι τὸ α λείπει ἀπὸ τὴν v_i. *Ὀλισθαίνουμε* τότε τὴ βεντάλια ὡς τὸ i: θέτουμε $c(\{u, v_{j-1}\}) := c(\{u, v_j\})$ γιὰ $j = 1, \ldots, i$ καὶ $c(\{u, v_i\}) := \alpha$. Ὁ

χρωματισμὸς ποὺ προκύπτει εἶναι ἔγκυρος: τὸ χρῶμα $c(\{u, v_j\})$ ποὺ μεταφέρθηκε στὴν ἀκμὴ $\{u, v_{j-1}\}$ λείπει ἐξ ὁρισμοῦ ἀπὸ τὴν v_{j-1}, ἐνῶ τὸ α λείπει καὶ ἀπὸ τὴν u καὶ ἀπὸ τὴν v_i. Ἔτσι ὅμως ἡ ἀκμὴ $\{u, v_0\} = e$ ἔχει χρωματιστεῖ, ἄτοπο. □

Ἔστω β ἕνα χρῶμα ποὺ λείπει ἀπὸ τὴν v_k. Ἀπὸ τὸν Ἰσχυρισμό, $\beta \neq \alpha$, καὶ ἐπιπλέον τὸ β δὲν λείπει ἀπὸ τὴν u: ἂν ἔλειπε, ἡ ὀλίσθηση ὁλόκληρης τῆς βεντάλιας καὶ ὁ χρωματισμὸς τῆς $\{u, v_k\}$ μὲ τὸ β θὰ ἔδιναν πάλι ἄτοπο. Ἄρα ὑπάρχει γειτονικὴ κορυφὴ w τῆς u μὲ $c(\{u, w\}) = \beta$. Λόγῳ τῆς μεγιστικότητας τῆς βεντάλιας, ἡ w ἀνήκει ἤδη σὲ αὐτήν, δηλαδὴ $w = v_{j+1}$ γιὰ κάποιο j μὲ $0 \leq j < k$, ὁπότε τὸ β λείπει καὶ ἀπὸ τὴν v_j.

Θεωροῦμε τώρα τὸ ὑπογράφημα H τοῦ $G - e$ ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὶς ἀκμὲς χρώματος α ἢ β. Κάθε κορυφὴ ἔχει βαθμὸ τὸ πολὺ 2 στὸ H, ὁπότε οἱ συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ H εἶναι μονοπάτια ἢ κύκλοι. Οἱ κορυφὲς u, v_j καὶ v_k ἔχουν βαθμὸ 1 στὸ H: ἡ u ἔχει τὴν ἀκμὴ $\{u, v_{j+1}\}$ χρώματος β καί της λείπει τὸ α, ἐνῶ καθεμία ἀπὸ τὶς v_j, v_k ἔχει ἀκμὴ χρώματος α (ἀπὸ τὸν Ἰσχυρισμό) καί της λείπει τὸ β. Ἄρα καὶ οἱ τρεῖς εἶναι ἄκρα μονοπατιῶν τοῦ H. Ἕνα μονοπάτι ἔχει μόνο δύο ἄκρα, ἑπομένως τουλάχιστον μία ἀπὸ τὶς v_j, v_k ἀνήκει σὲ συνιστῶσα διαφορετικὴ ἀπὸ ἐκείνη τῆς u.

Ἂν ἡ v_j δὲν ἀνήκει στὴ συνιστῶσα τῆς u, θέτουμε $i = j$. Διαφορετικά, ἡ συνιστῶσα τῆς u εἶναι τὸ μονοπάτι μὲ ἄκρα τὶς u καὶ v_j, ὁπότε ἡ v_k ἀνήκει σὲ ἄλλη συνιστῶσα, καὶ θέτουμε $i = k$. Ἔστω C ἡ συνιστῶσα τοῦ H ποὺ περιέχει τὴν v_i· ἡ C δὲν περιέχει τὴν u καί, ὅταν $i = k$, οὔτε τὴν v_j. (Ἡ ἐπιλογὴ αὐτὴ ἔχει σημασία: οἱ v_j καὶ v_k μπορεῖ νὰ εἶναι τὰ δύο ἄκρα τοῦ ἴδιου μονοπατιοῦ τοῦ H, καὶ τότε ἡ ἐναλλαγὴ στὴ συνιστῶσα τῆς v_k θὰ κατέστρεφε τὴ βεντάλια στὴ θέση $j + 1$.) Ἐναλλάσσουμε τὰ χρώματα α καὶ β πάνω στὴν C· ὁ χρωματισμὸς παραμένει ἔγκυρος, ὅπως καὶ στὴν ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος τοῦ Kőnig. Μετὰ τὴν ἐναλλαγὴ τὸ α λείπει ἀπὸ τὴν v_i, ἐνῶ ἐξακολουθεῖ νὰ λείπει ἀπὸ τὴν u, ἀφοῦ ἡ συνιστῶσα τῆς u δὲν πειράχτηκε.

Μένει νὰ δοῦμε ὅτι ἡ $v_0, \ldots, v_i$ παραμένει βεντάλια. Οἱ ἀκμὲς $\{u, v_1\}, \ldots, \{u, v_i\}$ δὲν ἄλλαξαν χρῶμα: καμία δὲν εἶναι χρώματος α (τὸ α λείπει ἀπὸ τὴν u) καὶ ἡ μοναδικὴ χρώματος β εἶναι ἡ $\{u, v_{j+1}\}$, ἡ ὁποία ἀνήκει στὴ συνιστῶσα τῆς u. Γιὰ $l \neq j+1$, τὸ χρῶμα $c(\{u, v_l\})$ εἶναι διαφορετικὸ ἀπὸ τὰ α καὶ β, ὁπότε ἡ ἐναλλαγὴ δὲν ἐπηρεάζει τὸ ἂν λείπει ἀπὸ τὴν v_{l-1}. Ἂν $i = j$, ἡ ἀκμὴ $\{u, v_{j+1}\}$ δὲν ἀνήκει στὴ βεντάλια ὡς τὸ i. Ἂν $i = k$, τότε $j + 1 \leq i$ καὶ τὸ $\beta = c(\{u, v_{j+1}\})$ ἐξακολουθεῖ νὰ λείπει ἀπὸ τὴν v_j, ἀφοῦ $v_j \notin V(C)$. Ἄρα ἡ $v_0, \ldots, v_i$ εἶναι βεντάλια γιὰ τὸν νέο χρωματισμὸ καὶ τὸ α λείπει ἀπὸ τὶς u καὶ v_i. Ὀλισθαίνοντας τὴ βεντάλια ὡς

τὸ i, ὅπως στὴν ἀπόδειξη τοῦ Ἰσχυρισμοῦ, χρωματίζουμε καὶ τὴν e, καὶ παίρνουμε χρωματισμὸ ἀκμῶν τοῦ G μὲ $d+1$ χρώματα, ὅπως θέλαμε. □

Ἀσκήσεις Κεφαλαίου

8.1 (★☆☆)**.** Ἔστω γράφημα G μὲ 2007 κορυφὲς ἐκ τῶν ὁποίων οἱ 3 ἔχουν βαθμὸ 2006. Δεῖξτε ὅτι τὸ G δὲν εἶναι 3-χρωματίσιμο.

8.2 (★★☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m(G) + \frac{1}{4}}$.

8.3 (★★☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G μὲ $\chi(G) \geq 2$ ὑπάρχει διαμέριση $\{V_1, V_2\}$ τοῦ $V(G)$ τέτοια ὥστε $\chi(G[V_1]) + \chi(G[V_2]) = \chi(G)$.

8.4 (★★☆)**.** Ἀποδεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε μὴ-πλῆρες γράφημα G ὑπάρχει διαμέριση $\{V_1, V_2\}$ τοῦ $V(G)$ τέτοια ὥστε $\chi(G[V_1]) + \chi(G[V_2]) > \chi(G)$.

8.5 (☆☆☆)**.** Ποιὸς εἶναι ὁ χρωματικὸς ἀριθμὸς τοῦ ὀκταέδρου (βλ. σχῆμα 1.3);

8.6 (★☆☆)**.** Γιὰ κάθε δύο, ὄχι ἀπαραίτητα διακεκριμένα, γραφήματα G καὶ H ἰσχύει ὅτι $\chi(G) \cdot \chi(H) \geq \chi(G \cup H)$.

8.7 (★☆☆)**.** Ποιὰ εἶναι ἡ σχέση μεταξὺ τοῦ χρωματικοῦ ἀριθμοῦ ἑνὸς γραφήματος καὶ τοῦ χρωματικοῦ ἀριθμοῦ τῶν τεμαχίων του;

8.8 (★☆☆)**.** Ἔστω γράφημα G μὲ 89 κορυφὲς καὶ 2007 ἀκμές. Δεῖξτε ὅτι τὸ G περιέχει (ὡς ὑπογράφημα) κύκλο περιττοῦ μήκους.

8.9 (★☆☆)**.** Πῶς προκύπτει τὸ Θεώρημα 8.25 ἀπὸ τὸ Λῆμμα 8.24 ;

8.10 (☆☆☆)**.** Πὼς πρέπει νὰ ἐπαναδιατυπωθεῖ τὸ Θεώρημα 8.25 γιὰ ὄχι ἀπαραίτητα συνεκτικὰ γραφήματα;

8.11 (★☆☆)**.** Πῶς ἀπὸ τὰ Θεωρήματα 8.22 καὶ 8.27 προκύπτει τὸ Θεώρημα 8.28 ;

8.12 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι κάθε γράφημα μὲ m ἀκμὲς περιέχει ὡς ὑπογράφημα ἕνα διμερὲς γράφημα μὲ $m/2$ ἀκμές.

8.13 (★★☆)**.** Ἔστω παραγόμενο δέντρο T ἑνὸς διμεροῦς γραφήματος G μὲ μέρη τὰ U καὶ D. Δεῖξτε ὅτι ἂν ὅλα τὰ φύλλα τοῦ T εἶναι στὸ D τότε τὸ T ἔχει ἄρτια διάμετρο.

8.14 (☆☆☆)**.** Σὲ ἕνα δωμάτιο ὑπάρχουν 15 γυναῖκες καὶ ἄγνωστος ἀριθμὸς ἀνδρῶν. Κάθε ἄντρας κάνει χειραψία μὲ ἀκριβῶς 6 γυναῖκες καὶ κάθε γυναῖκα κάνει χειραψία μὲ ἀκριβῶς 8 ἄνδρες. Χρησιμοποιῆστε τὰ δεδομένα αὐτὰ γιὰ νὰ βρεῖτε τὸν ἀριθμὸ τῶν ἀνδρῶν ποὺ βρίσκονται στὸ δωμάτιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΚΛΙΚΕΣ ΚΑΙ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

Δύο ἔννοιες ποὺ εἶναι μεταξὺ τοὺς συμπληρωματικές: μιὰ *κλίκα* εἶναι σύνολο κορυφῶν ἀνὰ δύο γειτονικῶν καὶ ἕνα *ἀνεξάρτητο σύνολο* εἶναι σύνολο κορυφῶν ἀνὰ δύο μὴ γειτονικῶν. Τὸ ἕνα γίνεται τὸ ἄλλο ἂν περάσουμε στὸ συμπλήρωμα, ὁπότε κάθε πρόταση γιὰ τὶς κλίκες μεταφράζεται αὐτόματα σὲ πρόταση γιὰ τὰ ἀνεξάρτητα σύνολα. Τὸ ἐρώτημα ποὺ ὀργανώνει τὸ κεφάλαιο εἶναι πόσες ἀκμὲς μπορεῖ νὰ ἔχει ἕνα γράφημα ποὺ δὲν περιέχει μεγάλη κλίκα· ἡ ἀπάντηση δίνεται ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Turán.

9.1 Κλίκες

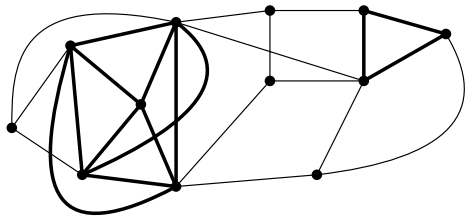
Ὁρισμός 9.1. Θὰ χρησιμοποιοῦμε τὸν συμβολισμὸ $\omega(G)$ γιὰ τὸν μέγιστο ἀριθμὸ κορυφῶν σὲ μιὰ κλίκα τοῦ G. Καλοῦμε τὴν ποσότητα αὐτὴ *ἀριθμὸ κλίκας* τοῦ G. Μὲ ἄλλα λόγια, $\omega(G) = \max\{r \mid K_r \subseteq_{υπ} G\}$.

Παρατήρηση 9.2. Γιὰ κάθε γράφημα G ἰσχύει ὅτι $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Παρατήρηση 9.3. Γιὰ κάθε ἐπίπεδο γράφημα G ἰσχύει ὅτι $\omega(G) \leq 4$.

Ὁρισμός 9.4. *Γράφημα Turán* καλεῖται ἕνα p-μερὲς γράφημα μὲ n κορυφὲς καὶ τὸ μέγιστο δυνατὸ πλῆθος ἀκμῶν, ἔστω $\tau(p, n)$.

Λῆμμα 9.5. Γιὰ κάθε p, n $(p \geq 1, n \geq 0)$, ὑπάρχει ἕνα καὶ μοναδικὸ γράφημα Turán καὶ εἶναι τὸ πλῆρες p-μερὲς γράφημα τοῦ ὁποίου τὰ μέρη ἔχουν πληθάριθμους ποὺ διαφέρουν τὸ πολὺ κατὰ 1.



Σχῆμα 9.1: Ἕνα γράφημα G καὶ δύο κλίκες σὲ αὐτὸ μεγέθους 5 καὶ 3 ἀντίστοιχα.

Ἀπόδειξη. Ἔστω G ἕνα γράφημα Turán μὲ n κορυφὲς (ὑπάρχει, ἀφοῦ τὰ p-μερῆ γραφήματα μὲ n κορυφὲς εἶναι πεπερασμένα στὸ πλῆθος, ὡς πρὸς ἰσομορφισμό) καὶ ἔστω $n_1, \ldots, n_p$ οἱ πληθάριθμοι τῶν μερῶν του. Τὸ G εἶναι πλῆρες p-μερές, ἀφοῦ διαφορετικὰ θὰ μπορούσαμε νὰ προσθέσουμε μιὰ ἀκμὴ μεταξὺ δύο κορυφῶν διαφορετικῶν μερῶν καὶ νὰ πάρουμε p-μερὲς γράφημα μὲ περισσότερες ἀκμές. Ἄρα

$$m(G) = \sum_{1 \le i < j \le p} n_i \cdot n_j.$$

Ἂν γιὰ κάποια i, j ἴσχυε ὅτι $n_i \ge n_j + 2$, τότε, μεταφέροντας μιὰ κορυφὴ ἀπὸ τὸ i-ὀστὸ στὸ j-ὀστὸ μέρος (καὶ κάνοντας ξανὰ τὸ γράφημα πλῆρες p-μερές), οἱ ὅροι τοῦ παραπάνω ἀθροίσματος ποὺ ἀφοροῦν τρίτα μέρη δὲν ἀλλάζουν (ἀφοῦ τὸ $n_i + n_j$ μένει σταθερό), ἐνῶ ὁ ὅρος $n_i n_j$ γίνεται $(n_i - 1)(n_j + 1) = n_i n_j + n_i - n_j - 1 > n_i n_j$, ἄτοπο. Ἄρα οἱ πληθάριθμοι τῶν μερῶν τοῦ G διαφέρουν ἀνὰ δύο τὸ πολὺ κατὰ 1, καὶ ἑπομένως εἶναι

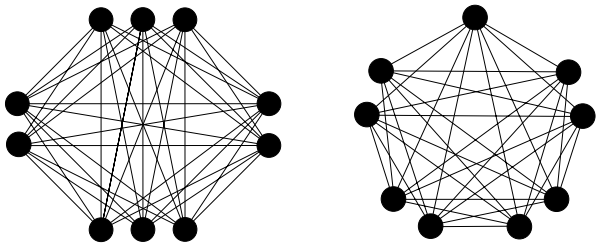
$$\underbrace{\lceil \frac{n}{p} \rceil, \ldots, \lceil \frac{n}{p} \rceil}_{n \bmod p}, \underbrace{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor, \ldots, \lfloor \frac{n}{p} \rfloor}_{p - (n \bmod p)}.$$

Ἀφοῦ ἕνα πλῆρες p-μερὲς γράφημα καθορίζεται (ὡς πρὸς ἰσομορφισμό) ἀπὸ τοὺς πληθάριθμους τῶν μερῶν του, τὸ γράφημα αὐτὸ εἶναι μοναδικό. □

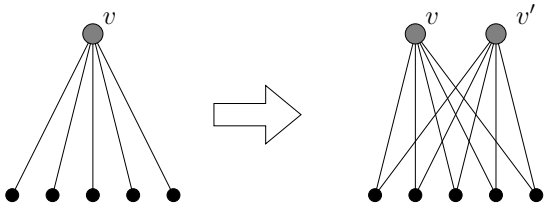
Ὁρισμός 9.6. Γιὰ κάθε p, n ($p \ge 1, n \ge 0$), συμβολίζουμε μὲ $T_p(n)$ τὸ (μοναδικό, σύμφωνα μὲ τὸ Λῆμμα 9.5) γράφημα Turán μὲ $\tau(p, n)$ ἀκμές.

Ὁρισμός 9.7. Καλοῦμε ἕνα γράφημα G (k)-*ω-ἀκραῖο* ἂν $\omega(G) \le k$ καὶ δὲν ὑπάρχει ἄλλο γράφημα G' γιὰ τὸ ὁποῖο $\omega(G') \le k$, $n(G) = n(G')$ καὶ $m(G) < m(G')$.

Ὁρισμός 9.8. Ἔστω G γράφημα καὶ ἔστω $v \in V(G)$ καλοῦμε *διπλασιασμὸ τῆς v στὸ G* τὸν μετασχηματισμὸ τοῦ G ὁ ὁποῖος συνίσταται στὴν πρόσθεση μιᾶς νέας κορυφῆς v' στὸ G καὶ τὴ σύνδεσή της μὲ ὅλες τὶς κορυφὲς στὸ $N_G(v)$.



Σχῆμα 9.2: Τὰ γραφήματα Turán $T_4(10)$ καὶ $T_5(9)$.



Σχῆμα 9.3: Μιὰ κορυφὴ v καὶ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ διπλασιασμοῦ της.

Λῆμμα 9.9. Ἔστω G γράφημα καὶ ἔστω G^+ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ διπλασιασμοῦ μιᾶς κορυφῆς τοῦ G. Τότε $\omega(G) = \omega(G^+)$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω v ἡ κορυφὴ ποὺ διπλασιάζεται καὶ v' τὸ ἀντίγραφό της, ὁπότε $N_{G^+}(v') = N_G(v)$ καὶ $\{v, v'\} \notin E(G^+)$.

Ἀφοῦ $G \subseteq_{v\pi} G^+$, ἰσχύει $\omega(G) \leq \omega(G^+)$.

Ἀντιστρόφως, ἔστω K κλίκα τοῦ G^+ μὲ $|K| = \omega(G^+)$. Οἱ v καὶ v' δὲν εἶναι γειτονικές, ὁπότε τὸ K περιέχει τὸ πολὺ μία ἀπὸ αὐτές. Ἂν $v' \notin K$, τότε τὸ K εἶναι κλίκα τοῦ G. Ἂν $v' \in K$, τότε τὸ $(K\backslash\{v'\}) \cup \{v\}$ εἶναι κλίκα τοῦ ἴδιου μεγέθους: κάθε κορυφὴ τοῦ $K\backslash\{v'\}$ ἀνήκει στὸ $N_{G^+}(v') = N_G(v)$ καὶ ἄρα εἶναι γειτονικὴ τῆς v. Σὲ κάθε περίπτωση τὸ G περιέχει κλίκα μεγέθους $\omega(G^+)$, δηλαδὴ $\omega(G) \geq \omega(G^+)$. □

Λῆμμα 9.10. Κάθε (k)-ω-ἀκραῖο γράφημα εἶναι πλῆρες πολυμερές.

Ἀπόδειξη. Ἂν ἕνα γράφημα G δὲν εἶναι πλῆρες πολυμερές, τότε περιέχει τρεῖς κορυφὲς x, y, a τέτοιες ὥστε $\{x, y\} \in E(G)$ καὶ $\{x, a\}, \{y, a\} \notin E(G)$. Αὐτὸ μπορεῖ νὰ διαπιστωθεῖ κοιτώντας τὸ συμπλήρωμά του στὸ ὁποῖο οἱ κορυφὲς x καὶ y ἔχουν ἀπόσταση 2 ἐνῶ κάθε ζεῦγος κορυφῶν στὸ συμπλήρωμα ἑνὸς πολυμεροῦς γραφήματος ἔχει ἀπόσταση εἴτε ἄπειρη εἴτε 1. Ἂν $\deg_G(x) > \deg_G(a)$ τότε διπλασιάζοντας τὴν κορυφὴ x ἔχουμε ἕνα γράφημα G^+ γιὰ τὸ ὁποῖο $\omega(G^+) \leq k$, $m(G^+) =$

$m(G)+\deg_G(x)$. Ἂν τώρα ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸ G^+ τὴν κορυφὴ a τότε ἔχουμε ἕνα γράφημα G^* γιὰ τὸ ὁποῖο $\omega(G^*) \leq k$, $m(G^*) = m(G) + \deg_G(x) - \deg_G(a) > m(G)$ ἄτοπο. Ἄρα $\deg_G(x) \leq \deg_G(a)$. Γιὰ τὸν ἴδιο λόγο, $\deg_G(y) \leq \deg_G(a)$. Ἂν τώρα διπλασιάσουμε δύο φορὲς τὴν κορυφὴ a ἔχουμε ἕνα γράφημα G^+ γιὰ τὸ ὁποῖο $\omega(G^+) \leq k$ καὶ $m(G^+) = m(G) + 2 \cdot \deg_G(a)$. Ἂν τώρα ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸ G^+ τὴν κορυφὴ x καὶ μετὰ τὴν κορυφὴ y, ἔχουμε ἕνα γράφημα G^* γιὰ τὸ ὁποῖο $\omega(G^*) \leq k$, $m(G^*) = m(G) + 2 \cdot \deg_G(a) - \deg_G(x) - (\deg_G(y) - 1) > m(G)$, ἄτοπο (παρατηρῆστε ὅτι οἱ x καὶ y εἶναι γειτονικὲς καὶ ἄρα μετὰ τὴν ἀφαίρεση τῆς x ὁ βαθμὸς τῆς y εἶναι ἴσος μὲ $\deg_G(y) - 1$). □

Λῆμμα 9.11. Κάθε (k)-ω-ἀκραῖο γράφημα G μὲ n κορυφὲς εἶναι ἰσόμορφο μὲ τὸ γράφημα Turán $T_k(n)$.

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 9.10, τὸ G εἶναι πολυμερές. Ἐπίσης τὸ G ἔχει τὸ πολὺ k μὴ κενὰ μέρη, διαφορετικὰ $\omega(G) > k$. Ἄρα τὸ G εἶναι γράφημα Turán, λόγῳ τοῦ Λήμματος 9.5 τὸ γράφημα αὐτὸ εἶναι μοναδικὸ καὶ ἄρα εἶναι ἰσόμορφο μὲ τὸ $T_k(n)$. □

Συνέπεια τοῦ Λήμματος 9.11 εἶναι τὸ παρακάτω θεώρημα. Γιὰ τὴν ἀπόδειξη, ἔστω $k = \omega(G)$ καὶ ἔστω G^* ἕνα γράφημα μὲ $n(G)$ κορυφές, $\omega(G^*) \leq k$, καὶ τὸ μέγιστο δυνατὸ πλῆθος ἀκμῶν. Τότε τὸ G^* εἶναι (k)-ω-ἀκραῖο, καὶ ἄρα, ἀπὸ τὸ Λῆμμα 9.11, $m(G) \leq m(G^*) = m(T_k(n(G))) = \tau(k, n(G))$. (Σημειώνουμε ὅτι δὲν ἀρκεῖ νὰ προσθέτουμε ἀκμὲς στὸ G ὅσο ὁ ἀριθμὸς κλίκας του δὲν αὐξάνεται: γιὰ παράδειγμα, ὁ C_5 δὲν περιέχει τρίγωνο καὶ ἡ προσθήκη ὁποιασδήποτε ἀκμῆς δημιουργεῖ τρίγωνο, ἀλλὰ $m(C_5) = 5 < 6 = \tau(2, 5)$.)

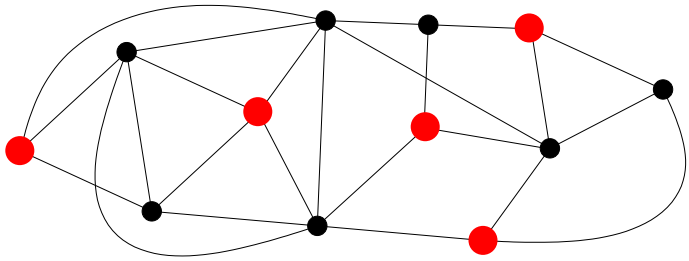
Θεώρημα 9.12 (Turán, 1941 [101])**.** Γιὰ κάθε γράφημα G, $m(G) \leq \tau(\omega(G), n(G))$.

9.2 Ἀνεξάρτητα σύνολα

Ὁρισμός 9.13. Ἔστω γράφημα G. Λέμε ὅτι ἕνα σύνολο κορυφῶν $S \subseteq V(G)$ εἶναι *ἀνεξάρτητο σύνολο τοῦ* G ἂν κανένα ζεῦγος κορυφῶν ἀπὸ τὸ S δὲν εἶναι ἀκμὴ τοῦ G. Ὁ *ἀριθμὸς ἀνεξαρτησίας* $\alpha(G)$ ἑνὸς γραφήματος G, εἶναι τὸ μέγιστο πλῆθος κορυφῶν ἑνὸς ἀνεξάρτητου συνόλου τοῦ G.

Παρατήρηση 9.14. Γιὰ κάθε γράφημα G, ἰσχύει ὅτι $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

Παρατήρηση 9.15. Γιὰ κάθε γράφημα G, ἰσχύει ὅτι $n(G) \leq \alpha(G) \cdot \chi(G)$.



Σχῆμα 9.4: Ἕνα ἀνεξάρτητο σύνολο στὸ γράφημα τοῦ Σχήματος 9.1.

Σὲ ἀρκετὰ μεγάλα γραφήματα ἡ πλήρης ἀταξία εἶναι ἀδύνατη: κάτι δομημένο ἐμφανίζεται ἀναπόφευκτα. Ἡ παρατήρηση αὐτὴ εἶναι ἡ ἀφετηρία τῆς θεωρίας Ramsey [86].

Ὁρισμός 9.16. Γιὰ κάθε θετικοὺς ἀκεραίους k καὶ l ὁρίζουμε τὸν *ἀριθμὸ Ramsey* $r(k,l)$ *τῶν* k *καὶ* l ὡς τὸ μικρότερο n γιὰ τὸ ὁποῖο γιὰ κάθε γράφημα G μὲ n κορυφές, εἴτε $\omega(G) \geq k$ ἢ $\alpha(G) \geq l$.

Παρατήρηση 9.17. Ἂν k καὶ l εἶναι θετικοὶ ἀκέραιοι τότε $r(1,l) = r(k,1) = 1$, $r(2,l) = l$ καὶ $r(k,2) = k$. Ἐπίσης, ἰσχύει ὅτι $r(k,l) = r(l,k)$.

Παρατήρηση 9.18. Ἔστω θετικοὶ ἀκέραιοι k, l καὶ γράφημα G μὲ n κορυφὲς τέτοιο ὥστε $\omega(G) < k$ καὶ $\alpha(G) < l$. Τότε $r(k,l) > n$.

Ἡ πληρότητα τοῦ Ὁρισμοῦ 9.16 (δηλαδὴ τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ ἀριθμὸς $r(k,l)$ πράγματι ὑπάρχει) στηρίζεται στὸ Θεώρημα 9.20 τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόδειξη στηρίζεται στὸ παρακάτω λῆμμα.

Λῆμμα 9.19. Γιὰ κάθε ἀκεραίους $k \geq 2$ καὶ $l \geq 2$ ἰσχύει ὅτι

$$r(k,l) \leq r(k-1,l) + r(k,l-1).$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω γράφημα G μὲ $n(G) = r(k-1,l) + r(k,l-1)$ καὶ ἔστω v ὁποιαδήποτε κορυφὴ τοῦ G. Ἔστω ἐπίσης $k_1 = |N_G(v)|$ καὶ $k_2 = |N_{\overline{G}}(v)|$ (δηλ. τὸ k_2 εἶναι τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν τοῦ G μὲ τὶς ὁποῖες δὲν συνδέεται ἡ v στὸ G). Παρατηροῦμε ὅτι

$$k_1 + k_2 \quad = \quad n(G) - 1 = r(k-1,l) + r(k,l-1) - 1. \tag{9.1}$$

Ἂν $k_1 \geq r(k-1,l)$, τότε γιὰ τὸ γράφημα $G^- = G[N_G(v)]$ ἔχουμε ὅτι εἴτε $\omega(G^-) \geq k-1$ ἢ $\alpha(G^-) \geq l$. Στὴν πρώτη περίπτωση, ἔχουμε ὅτι $\omega(G) \geq k$ (ἡ v

προστίθεται στὴν κλίκα τοῦ G^-) καὶ στὴν δεύτερη περίπτωση ἔχουμε ὅτι $\alpha(G) \geq l$ καὶ τὸ λῆμμα ἰσχύει.

Ἂν $k_1 < r(k-1,l)$, τότε, χρησιμοποιώντας τὴν Σχέση 9.1, ἔχουμε ὅτι $k_1 \leq r(k-1,l)-1 \Rightarrow -k_1 \geq -r(k-1,l)+1 \Rightarrow k_2 \geq r(k,l-1)$. Ὁρίζουμε $G^- = G[N_{\overline{G}}(v)]$ καὶ ἔχουμε ὅτι εἴτε $\omega(G^-) \geq k$ ἢ $\alpha(G^-) \geq l-1$. Στὴν πρώτη περίπτωση ἔχουμε ὅτι $\omega(G) \geq k$ καὶ στὴν δεύτερη περίπτωση ἔχουμε ὅτι $\alpha(G) \geq l$ (ἡ v προστίθεται στὸ ἀνεξάρτητο σύνολο τοῦ G^-). Καὶ στὶς δύο περιπτώσεις τὸ λῆμμα ἰσχύει. □

Θεώρημα 9.20 (Erdős καὶ Szekeres, 1935 [37])**.** Γιὰ κάθε θετικοὺς ἀκεραίους k καὶ l ἰσχύει ὅτι

$$r(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

Ἀπόδειξη. Θὰ χρησιμοποιήσουμε ἐπαγωγὴ στὴν ποσότητα $k+l$. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 9.17, τὸ θεώρημα ἰσχύει ὅταν $\min\{k,l\} \leq 2$, ἀφοῦ $\binom{l-1}{0} = \binom{k-1}{k-1} = 1$, $\binom{l}{1} = l$ καὶ $\binom{k}{k-1} = k$. Ἔστω $p,q \geq 3$ ἀκέραιοι. Ὑποθέτουμε ὅτι τὸ θεώρημα ἰσχύει γιὰ κάθε ζεῦγος k,l ὅπου $k+l < p+q$. Τότε ἡ ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση μαζὶ μὲ τὸ Λῆμμα 9.19 μᾶς δίνουν:

$$\begin{aligned} r(p,q) &\leq r(p-1,q)+r(p,q-1) \\ &\leq \binom{p+q-3}{p-1} + \binom{p+q-3}{p-2} \\ &= \binom{p+q-2}{p-1}, \end{aligned}$$

ἄρα τὸ θεώρημα ἰσχύει γιὰ κάθε ζεῦγος θετικῶν ἀκεραίων. □

Παρατήρηση 9.21. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 9.19 ἔχουμε ὅτι $r(3,3) \leq r(2,3)+r(3,2) = 6$. Μιὰ καὶ ὁ κύκλος C_5 ἔχει $\omega(C_5) = \alpha(C_5) = 2$ ἔχουμε ὅτι $r(3,3) > 5$, ἄρα $r(3,3) = 6$.

Σχόλιο 9.22. Ἡ εὕρεση τῆς ἀκριβοῦς τιμῆς τοῦ $r(k,l)$ εἶναι ἕνα πολὺ δύσκολο[1] πρόβλημα ἀκόμη καὶ γιὰ μικρὲς τιμὲς τῶν k καὶ l. Ὡς τώρα (σύμφωνα μὲ τὴν [85])

[1] Στὸ σημεῖο αὐτὸ παραθέτουμε τὰ λεγόμενα τοῦ Paul Erdős σχετικὰ μὲ τὸν ὑπολογισμὸ τῶν $r(5,5)$ καὶ $r(6,6)$:

> *"Imagine an alien force, vastly more powerful than us landing on Earth and demanding the value of $r(5,5)$ or they will destroy our planet. In that case, we should marshal all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they asked for $r(6,6)$, we should attempt to destroy the aliens."*

οἱ μόνες (μὴ τετριμμένες) τιμὲς ποὺ εἶναι γνωστὲς εἶναι οἱ $r(3,i)$ γιὰ $i \in \{3,\ldots,9\}$ καὶ οἱ $r(4,i)$ γιὰ $i \in \{4,5\}$. Εἶναι ἐπίσης γνωστὸ ὅτι $r(5,5) \in \{43,\ldots,46\}$.

Τὸ παρακάτω θεώρημα ἦταν τὸ πρῶτο ἐκθετικὸ κάτω φράγμα ποὺ δόθηκε γιὰ τοὺς ἀριθμοὺς Ramsey.

Θεώρημα 9.23 (Erdős, 1947 [32])**.** Γιὰ κάθε θετικὸ ἀκέραιο $k \geq 2$, ἰσχύει ὅτι $r(k,k) \geq 2^{k/2}$.

Ἀπόδειξη. Θὰ ἐξετάσουμε τὴ μὴ τετριμμένη περίπτωση ὅπου $k \geq 3$. Ἔστω $V_n = \{v_1,\ldots,v_n\}$. Συμβολίζουμε μὲ $\mathcal{G}_n$ τὴν κλάση τῶν γραφημάτων μὲ σύνολο κορυφῶν τὸ V_n καὶ μὲ $\mathcal{G}_n^k$ ὡς τὸ ὑποσύνολο τῆς $\mathcal{G}_n$ τὸ ὁποῖο περιέχει γραφήματα μὲ κλίκα μεγέθους k. Ἀπὸ τὴν στιγμὴ ποὺ κάθε ζεῦγος $i,j, 1 \leq i < j \leq n$ ἀντιστοιχεῖ σὲ μιὰ ἀκμὴ κάποιου ἀπὸ τὰ γραφήματα τοῦ $\mathcal{G}_n$, ἔχουμε ὅτι $|\mathcal{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}$. Παρομοίως γιὰ κάθε ὑποσύνολο $S \subseteq V_n$ μεγέθους k, ὑπάρχουν $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$ γραφήματα στὸ $\mathcal{G}_n$ στὰ ὁποία τὸ S ἐνάγει κλίκα. Ἀφοῦ ὑπάρχουν $\binom{n}{k}$ διαφορετικὰ τέτοια σύνολα S, ἔχουμε ὅτι

$$|\mathcal{G}_n^k| \leq \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} \Rightarrow \frac{|\mathcal{G}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} \leq \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} < \frac{n^k \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!}.$$

Ἂν $n < 2^{k/2}$, τότε

$$\frac{|\mathcal{G}_n^k|}{|\mathcal{G}_n|} < \frac{2^{k^2/2} \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!} < \frac{1}{2}.$$

Ἄρα λιγότερα ἀπὸ τὰ μισὰ γραφήματα στὸ $\mathcal{G}_n$ ἔχουν κλίκα μεγέθους k. Μιὰ καὶ $\mathcal{G}_n = \{G \mid \overline{G} \in \mathcal{G}_n\}$, ἐπίσης λιγότερα ἀπὸ τὰ μισὰ γραφήματα στὸ $\mathcal{G}_n$ ἔχουν ἀνεξάρτητο σύνολο μεγέθους k. Αὐτὸ ὅμως σημαίνει ὅτι θὰ ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα γράφημα $G \in \mathcal{G}_n$ τὸ ὁποῖο νὰ μὴν ἔχει οὔτε κλίκα οὔτε ἀνεξάρτητο σύνολο μεγέθους k. Ἄρα $\omega(G) < k$ καὶ $\alpha(G) < k$, συνεπῶς δὲν μπορεῖ νὰ ἰσχύει ὅτι $r(k,k) < 2^{k/2}$ καὶ τὸ θεώρημα ἀποδείχθηκε. □

Σχόλιο 9.24. Ἡ ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 9.23 εἶναι μὴ κατασκευαστικὴ μὲ τὴν ἔννοια ὅτι ἀποδεικνύει τὴν ὕπαρξη γραφήματος G μὲ $\omega(G) < k$, $\alpha(G) < k$ καὶ $n < 2^{k/2}$ κορυφὲς χωρὶς νὰ δίνει κάποιον τρόπο νὰ κατασκευαστεῖ αὐτὸ τὸ γράφημα. Ἀξίζει νὰ σημειωθεῖ ὅτι ἂν καὶ ὑπάρχουν κάτω φράγματα ποὺ ἔχουν ἀποδειχθεῖ μὲ κατασκευαστικὸ τρόπο, ὅλα εἶναι κατὰ πολὺ χειρότερα ἀπὸ αὐτὸ τοῦ Θεωρήματος 9.23.

Ἀσκήσεις Κεφαλαίου

9.1 (☆☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G, $\omega(G) \leq \delta^*(G) + 1$.

9.2 (★★☆)**.** Χρησιμοποιῆστε τὴν ἀπόδειξη τοῦ Λήμματος 9.5 γιὰ νὰ βρεῖτε μιὰ ἀκριβῆ φόρμουλα γιὰ τὸ $\tau(p, n)$.

9.3 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι $\tau(p, n) \leq n^2 \cdot \frac{p-1}{2p}$. Σὲ ποιὲς περιπτώσεις ἰσχύει ἡ ἰσότητα;

9.4 (★☆☆)**.** Κάθε γράφημα μὲ περισσότερες ἀπὸ $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ἀκμὲς περιέχει τουλάχιστον ἕνα τρίγωνο ὡς ὑπογράφημα.

9.5 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G ἰσχύει $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq n(G)$.

9.6 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G ἰσχύει $\alpha(G) \geq \frac{n(G)}{\Delta(G)+1}$.

9.7 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι $r(3, 3) = 6$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΚΑΛΥΜΜΑΤΑ ΚΑΙ ΤΑΙΡΙΑΣΜΑΤΑ

Τὸ κεφάλαιο πραγματεύεται δύο παραμέτρους ποὺ κοιτάζουν τὶς ἀκμὲς ἑνὸς γραφήματος ἀπὸ ἀντίθετες μεριές: ἕνα *κάλυμμα κορυφῶν* εἶναι λίγες κορυφὲς ποὺ «ἀγγίζουν» ὅλες τὶς ἀκμές, ἐνῶ ἕνα *ταίριασμα* εἶναι πολλὲς ἀκμὲς ποὺ δὲν ἀγγίζονται μεταξύ τους. Κάθε ταίριασμα δίνει κάτω φράγμα γιὰ κάθε κάλυμμα, καὶ τὸ κύριο ἀποτέλεσμα τοῦ κεφαλαίου εἶναι ὅτι στὰ διμερῆ γραφήματα τὰ δύο φράγματα συμπίπτουν.

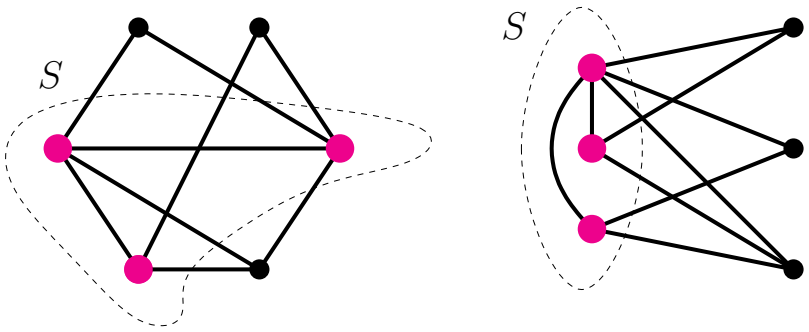
10.1 Καλύμματα κορυφῶν

Καλύμματα καὶ ταιριάσματα εἶναι δύο ὄψεις τοῦ ἴδιου νομίσματος. Τὸ κεφάλαιο κορυφώνεται στὴ σχέση ποὺ τὰ συνδέει γιὰ τὰ διμερῆ γραφήματα.

Ὁρισμός 10.1. Μιὰ ἀκμὴ e ἑνὸς γραφήματος G *καλύπτεται* ἀπὸ ἕνα σύνολο $S \subseteq V(G)$ ἂν κάποιο ἀπὸ τὰ ἄκρα της βρίσκεται στὸ S. Λέμε ὅτι ἕνα σύνολο κορυφῶν $S \subseteq V(G)$ εἶναι *κάλυμμα κορυφῶν τοῦ* G ἂν τὸ S καλύπτει ὅλες τὶς ἀκμὲς τοῦ G. Ὁ *ἀριθμὸς καλύμματος κορυφῶν* $\mathbf{vc}(G)$ ἑνὸς γραφήματος G εἶναι τὸ ἐλάχιστο πλῆθος κορυφῶν ἑνὸς καλύμματος κορυφῶν τοῦ G.

Παρατήρηση 10.2. Ἂν ἕνα γράφημα G ἔχει κάλυμμα κορυφῶν τὸ πολὺ k τότε τὸ ἴδιο θὰ ἰσχύει καὶ γιὰ κάθε ὑπογράφημά του.

Παρατήρηση 10.3. Ἂν τὸ G εἶναι διμερὲς γράφημα μὲ μέρη U καὶ D, τότε $\mathbf{vc}(G) \leq \min\{|U|, |D|\}$.



Σχῆμα 10.1: Ἕνα κάλυμμα κορυφῶν καὶ δύο τρόποι νὰ τὸ ἀναπαραστήσουμε.

Λῆμμα 10.4. Γιὰ κάθε γράφημα G, ἰσχύει ὅτι $\mathbf{vc}(G) = n(G) - \alpha(G)$.

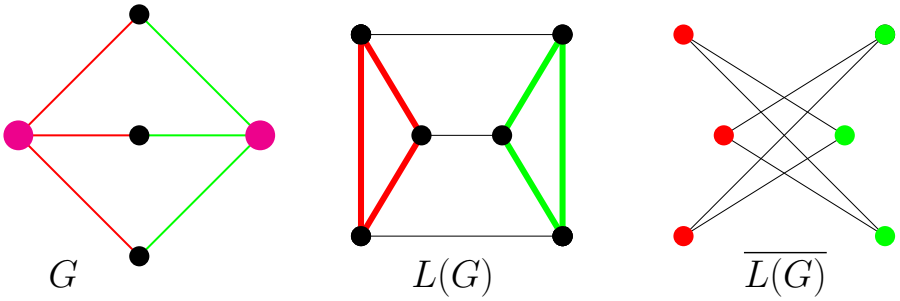
Ἀπόδειξη. Ἔστω S ἕνα ἀνεξάρτητο σύνολο τοῦ γραφήματος G. Ἀφοῦ καμία ἀπὸ τὶς ἀκμὲς τοῦ G δὲν ἔχει καὶ τὰ δύο ἄκρα της στὸ S, ἔχουμε ὅτι κάθε ἀκμὴ τοῦ G θὰ ἔχει τουλάχιστον ἕνα ἄκρο ἐκτὸς τοῦ S, δηλαδὴ στὸ $V(G)\backslash S$. Ἀντιστρόφως, ἂν τὸ σύνολο S εἶναι κάλυμμα κορυφῶν τοῦ γραφήματος G, τότε ὅλες οἱ ἀκμὲς τοῦ G θὰ ἔχουν τουλάχιστον ἕνα ἀπὸ τὰ ἄκρα τους στὸ S. Ἄρα καμία ἀκμὴ δὲν θὰ ἔχει καὶ τὰ δύο ἄκρα της στὸ $V(G)\backslash S$, ἄρα τὸ $V(G)\backslash S$ εἶναι ἀνεξάρτητο σύνολο τοῦ G (βλ. Σχῆμα 10.1). Καταλήγουμε ὅτι τὸ G ἔχει ἀνεξάρτητο σύνολο μεγέθους k ἂν καὶ μόνο ἂν ἔχει κάλυμμα κορυφῶν μεγέθους $n(G) - k$ καὶ ἄρα τὸ λῆμμα ἰσχύει. □

Παρατήρηση 10.5. Γιὰ κάθε γράφημα G, ἰσχύει ὅτι $\delta^*(G) \leq \mathbf{vc}(G)$.

Ἀπόδειξη. Θέτουμε $k = \delta^*(G)$. Γιὰ $k = 0$ ἡ ἀνισότητα εἶναι προφανής, ὁπότε ὑποθέτουμε ὅτι $k \geq 1$. Ἀπὸ τὸν Ὁρισμὸ 3.8 ὑπάρχει ὑπογράφημα H τοῦ G μὲ $\delta(H) = k$, δηλαδὴ κάθε κορυφὴ τοῦ H ἔχει τουλάχιστον k γείτονες μέσα στὸ H· εἰδικότερα, τὸ H ἔχει τουλάχιστον μία κορυφή.

Θὰ δείξουμε πρῶτα ὅτι $\mathbf{vc}(H) \geq k$. Ἔστω, πρὸς ἄτοπο, ὅτι τὸ H ἔχει κάλυμμα κορυφῶν S μὲ $|S| < k$ καὶ θέτουμε $I = V(H)\backslash S$. Ἂν $I = \emptyset$, τότε $n(H) = |S| < k$, ἐνῶ κάθε κορυφὴ τοῦ H ἔχει τουλάχιστον k γείτονες μέσα στὸ H καὶ ἄρα $n(H) \geq k + 1$, ἄτοπο. Ἂν $I \neq \emptyset$, ἔστω $v \in I$· ὅπως εἴδαμε στὴν ἀπόδειξη τοῦ Λήμματος 10.4, τὸ συμπλήρωμα ἑνὸς καλύμματος κορυφῶν εἶναι ἀνεξάρτητο σύνολο, ὁπότε τὸ I εἶναι ἀνεξάρτητο στὸ H καὶ κάθε γείτονας τῆς v στὸ H ἀνήκει στὸ S, δηλαδὴ $\deg_H(v) \leq |S| < k$, ποὺ ἀντιβαίνει στὸ ὅτι $\delta(H) = k$. Καὶ στὶς δύο περιπτώσεις καταλήγουμε σὲ ἄτοπο, ἄρα $\mathbf{vc}(H) \geq k$.

Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 10.2 τὸ **vc** δὲν αὐξάνεται ὅταν περνᾶμε σὲ ὑπογράφημα, ὁπότε $\mathbf{vc}(G) \geq \mathbf{vc}(H) \geq k = \delta^*(G)$. □



Σχῆμα 10.2: Διμερὲς γράφημα G καὶ τὰ γραφήματα $L(G)$ καὶ $\overline{L(G)}$.

Λῆμμα 10.6. Γιὰ κάθε διμερὲς γράφημα G, ἰσχύει ὅτι $\mathbf{vc}(G) = \chi(\overline{L(G)})$.

Ἀπόδειξη. Ἕνας r-χρωματισμὸς στὸ συμπλήρωμα τοῦ γραφήματος $L(G)$ τοῦ G ἀντιστοιχεῖ σὲ μιὰ διαμέριση τοῦ $V(L(G))$ σὲ r σύνολα κορυφῶν (ἕνα γιὰ κάθε χρωματικὴ κλάση) τὸ καθένα ἀπὸ τὰ ὁποία ἐνάγει κλίκα στὸ $L(G)$ (βλ. Λῆμμα 8.9). Ἐπειδὴ τὸ G εἶναι διμερές, κάθε τέτοια κλίκα θὰ ἀντιστοιχεῖ σὲ ἕνα σύνολο ἀκμῶν τοῦ G ποὺ ἔχουν κάποιο κοινὸ ἄκρο. Αὐτὰ τὰ r σύνολα ἀκμῶν ἀποτελοῦν μιὰ διαμέριση τοῦ $E(G)$ καὶ τὸ σύνολο τῶν r κοινῶν ἄκρων γιὰ τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι ἕνα κάλυμμα κορυφῶν στὸ G μεγέθους τὸ πολὺ r, ὁπότε $\mathbf{vc}(G) \leq \chi(\overline{L(G)})$. Μὲ παρόμοιο τρόπο, χρησιμοποιώντας τὸν ἀντίστροφο συλλογισμὸ μπορεῖ νὰ δειχτεῖ ὅτι κάθε κάλυμμα κορυφῶν μεγέθους r στὸ G ἀντιστοιχεῖ σὲ ἕναν r-χρωματισμὸ τοῦ $\overline{L(G)}$. □

10.2 Ταιριάσματα

Ὁρισμός 10.7. Καλοῦμε *ταίριασμα* ἑνὸς γραφήματος G κάθε σύνολο ἀκμῶν $M \subseteq E(G)$ γιὰ τὸ ὁποῖο $e \cap e' = \emptyset$ γιὰ κάθε $e, e' \in M$ μὲ $e \neq e'$. Χρησιμοποιοῦμε τὸν συμβολισμὸ $\mu(G)$ γιὰ τὸ μέγιστο πλῆθος τῶν ἀκμῶν σὲ ἕνα ταίριασμα τοῦ G. Θὰ λέμε ὅτι ἕνα ταίριασμα M *καλύπτει* μιὰ κορυφὴ $v \in V(G)$ ἂν ἡ v εἶναι ἄκρο κάποιας ἀκμῆς τοῦ M. Ἕνα ταίριασμα ποὺ καλύπτει ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ G καλεῖται *τέλειο*.

Παρατήρηση 10.8. Γιὰ κάθε γράφημα G ἰσχύει ὅτι $\mu(G) = \omega(\overline{L(G)})$

Λῆμμα 10.9. Γιὰ κάθε γράφημα G, ἰσχύει ὅτι $\chi(\overline{G}) \leq n(G) - \mu(G)$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $n = n(G) = n(\overline{G})$. Χρησιμοποιοῦμε $\mu(G)$ χρώματα γιὰ νὰ χρωματίσουμε, μὲ τὸ καθένα ἀπὸ αὐτά, τὶς κορυφὲς τοῦ $\overline{G}$ ποὺ εἶναι ἄκρα τῆς κάθε ἀκμῆς ἑνὸς μέγιστου ταιριάσματος τοῦ G. Γιὰ τὶς $n - 2 \cdot \mu(G)$ κορυφὲς τοῦ $\overline{G}$ ποὺ δὲν καλύπτονται ἀπὸ τὸ M στὸ G, χρησιμοποιοῦμε $n-2\cdot\mu(G)$ ἐπιπλέον χρώματα, ἕνα γιὰ κάθε μιὰ ἀπὸ αὐτές. Συνολικὰ χρησιμοποιήσαμε $\mu(G) + n - 2 \cdot \mu(G) = n - \mu(G)$ χρώματα καὶ ἄρα $\chi(\overline{G}) \leq n(G) - \mu(G)$. □

Λῆμμα 10.10. Γιὰ κάθε γράφημα G μὲ $n \geq 1$ κορυφὲς καὶ m ἀκμές, ἰσχύει ὅτι

$$\mu(G) \leq \frac{2mn}{n + 2m}.$$

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 10.9, $\mu(G) \leq n - \chi(\overline{G})$ καὶ ἀπὸ τὸ Πόρισμα 8.11, $\chi(\overline{G}) \geq \frac{n^2}{n^2-2(\binom{n}{2}-m)}$. Ἄρα $\mu(G) \leq n - \frac{n^2}{n^2-n(n-1)+2m} = \frac{2mn}{n+2m}$. □

Παρατήρηση 10.11. Τὸ γράφημα $3 \cdot K_2$ ἱκανοποιεῖ τὴν ἰσότητα τοῦ ἄνω φράγματος τοῦ Λήμματος 10.10.

Παρατήρηση 10.12. Ἀφοῦ κάθε ἀκμὴ σὲ ἕνα ταίριασμα πρέπει νὰ ἔχει τουλάχιστον ἕνα ἀπὸ τὰ ἄκρα της σὲ ἕνα κάλυμμα κορυφῶν παρατηροῦμε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G ἰσχύει ὅτι $\mu(G) \leq \mathbf{vc}(G)$.

Περνᾶμε τώρα σὲ ἕνα βασικὸ ἐργαλεῖο τῆς θεωρίας τῶν ταιριασμάτων, τὸ ὁποῖο θὰ μᾶς συνοδεύει σὲ ὅλο τὸ ὑπόλοιπο κεφάλαιο. Ἡ ἰδέα εἶναι ἁπλή: ἂν ἕνα μονοπάτι ἐναλλάσσει ἀκμὲς ἐκτὸς καὶ ἐντὸς τοῦ ταιριάσματος καὶ ἔχει ἄκρα δύο ἀκάλυπτες κορυφές, τότε ἀνταλλάσσοντας τοὺς ρόλους τῶν ἀκμῶν του μεγαλώνουμε τὸ ταίριασμα κατὰ μία ἀκμή.

Γιὰ δύο σύνολα X καὶ Y συμβολίζουμε μὲ $X \triangle Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$ τὴ *συμμετρικὴ διαφορά* τους.

Ὁρισμός 10.13. Ἔστω M ταίριασμα ἑνὸς γραφήματος G. Καλοῦμε μιὰ κορυφὴ τοῦ G *ἐλεύθερη* (ὡς πρὸς τὸ M) ἂν δὲν καλύπτεται ἀπὸ τὸ M, καὶ συμβολίζουμε μὲ S_M τὸ σύνολο τῶν ἐλεύθερων κορυφῶν τοῦ G. Καλοῦμε ἕνα μονοπάτι P τοῦ G *M-ἐναλλασσόμενο* ἂν ἀπὸ κάθε δύο διαδοχικὲς ἀκμές του ἡ μία ἀνήκει στὸ M καὶ ἡ ἄλλη ὄχι. Ἕνα M-ἐναλλασσόμενο μονοπάτι μὲ τουλάχιστον μία ἀκμὴ καλεῖται *M-αὐξητικὸ* ἂν καὶ τὰ δύο ἄκρα του εἶναι ἐλεύθερες κορυφές.

Παρατήρηση 10.14. Ἔστω M ταίριασμα τοῦ G καὶ ἔστω $P = [v_0, \ldots, v_\ell]$ ἕνα M-ἐναλλασσόμενο μονοπάτι τοῦ ὁποίου τὸ ἄκρο v_0 εἶναι ἐλεύθερο. Τότε, ἂν θέσουμε

$e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ γιὰ $i = 1, \ldots, \ell$, ἰσχύει ὅτι $e_i \in M$ ἂν καὶ μόνο ἂν ὁ i εἶναι ἄρτιος. Ἐπιπλέον καμία ἀκμὴ τοῦ $M \backslash E(P)$ δὲν προσπίπτει σὲ κορυφὴ τοῦ P, μὲ μοναδικὴ ἐξαίρεση τὴν v_ℓ στὴν περίπτωση ὅπου ὁ ℓ εἶναι περιττός.

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ ἡ v_0 εἶναι ἐλεύθερη, $e_1 \notin M$, καὶ ἡ πρώτη πρόταση προκύπτει ἀπὸ τὴν ἐναλλαγὴ μὲ ἐπαγωγὴ στὸ i.

Γιὰ τὴ δεύτερη, ἔστω $0 \leq i \leq \ell$. Ἂν $0 < i < \ell$, τότε ἀκριβῶς ἕνας ἀπὸ τοὺς $i, i+1$ εἶναι ἄρτιος, ὁπότε ἀκριβῶς μία ἀπὸ τὶς e_i, e_{i+1} ἀνήκει στὸ M καὶ καλύπτει τὴν v_i· ἀφοῦ τὸ M εἶναι ταίριασμα, καμία ἄλλη ἀκμὴ τοῦ M δὲν προσπίπτει στὴν v_i. Ἡ v_0 εἶναι ἐλεύθερη. Τέλος, ἂν ὁ ℓ εἶναι ἄρτιος τότε $e_\ell \in M$ καὶ ἡ v_ℓ καλύπτεται ἀπὸ αὐτήν. □

Παρατήρηση 10.15. Ἔστω M ταίριασμα τοῦ G καὶ ἔστω P ἕνα M-αὐξητικὸ μονοπάτι. Τότε τὸ $M \triangle E(P)$ εἶναι ταίριασμα τοῦ G μὲ $|M \triangle E(P)| = |M| + 1$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $P = [v_0, \ldots, v_\ell]$ καὶ $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$. Τὰ δύο ἄκρα εἶναι ἐλεύθερα, ὁπότε $e_1, e_\ell \notin M$ καί, ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 10.14, ὁ ℓ εἶναι περιττός. Τὸ $M \triangle E(P)$ προκύπτει λοιπὸν ἀπὸ τὸ M ἂν ἀφαιρέσουμε τὶς $(\ell - 1)/2$ ἀκμὲς $e_2, e_4, \ldots, e_{\ell-1}$ καὶ προσθέσουμε τὶς $(\ell + 1)/2$ ἀκμὲς $e_1, e_3, \ldots, e_\ell$, ὁπότε τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν αὐξάνεται κατὰ ἕνα.

Τὸ $M \triangle E(P)$ εἶναι ταίριασμα: κάθε κορυφὴ v_i μὲ $0 < i < \ell$ καλύπτεται στὸ M ἀπὸ ἀκριβῶς μία ἀπὸ τὶς e_i, e_{i+1} καὶ στὸ $M \triangle E(P)$ ἀπὸ ἀκριβῶς τὴν ἄλλη, ἐνῶ οἱ v_0 καὶ v_ℓ, ποὺ ἦταν ἐλεύθερες, καλύπτονται τώρα ἀπὸ τὶς e_1 καὶ e_ℓ ἀντίστοιχα. Καμία ἄλλη κορυφὴ δὲν ἐπηρεάζεται: ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 10.14 καμία ἀκμὴ τοῦ $M \backslash E(P)$ δὲν προσπίπτει σὲ κορυφὴ τοῦ P, μὲ πιθανὴ ἐξαίρεση τὴν v_ℓ, ἡ ὁποία ὅμως εἶναι ἐλεύθερη καὶ ἄρα δὲν προσπίπτει σὲ καμία ἀκμὴ τοῦ M. □

Τὸ ἑπόμενο θεώρημα, ποὺ ὀφείλεται στὸν Claude Berge (1957), λέει ὅτι τὰ αὐξητικὰ μονοπάτια δὲν εἶναι ἁπλῶς ἕνας τρόπος νὰ βελτιώσουμε ἕνα ταίριασμα: εἶναι ὁ μόνος τρόπος, καὶ ἡ ἀπουσία τους πιστοποιεῖ τὴ μεγιστότητα.

Θεώρημα 10.16 (Berge, 1957 [10])**.** Ἕνα ταίριασμα M ἑνὸς γραφήματος G εἶναι μέγιστο ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ G δὲν περιέχει M-αὐξητικὸ μονοπάτι.

Ἀπόδειξη. Τὸ κλειδὶ τῆς μιᾶς κατεύθυνσης εἶναι ὅτι ἡ συμμετρικὴ διαφορὰ δύο ταιριασμάτων εἶναι γράφημα μὲ μέγιστο βαθμὸ 2: διασπᾶται λοιπὸν σὲ μονοπάτια καὶ κύκλους, καὶ τὸ ἕνα ταίριασμα μπορεῖ νὰ ὑπερτερεῖ τοῦ ἄλλου μόνο πάνω σὲ ἕνα ἀπὸ τὰ μονοπάτια αὐτά.

Ἂν τὸ G περιέχει M-αὐξητικὸ μονοπάτι P, τότε ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 10.15 τὸ $M \triangle E(P)$ εἶναι ταίριασμα μὲ περισσότερες ἀκμές, ἄρα τὸ M δὲν εἶναι μέγιστο.

Ἔστω τώρα ὅτι τὸ M δὲν εἶναι μέγιστο καὶ ἔστω N ταίριασμα τοῦ G μὲ $|N| > |M|$. Θεωροῦμε τὸ γράφημα $H = (V(G), M \triangle N)$. Κάθε κορυφὴ τοῦ H προσπίπτει σὲ τὸ πολὺ μία ἀκμὴ τοῦ M καὶ σὲ τὸ πολὺ μία ἀκμὴ τοῦ N, ἄρα $\Delta(H) \leq 2$ καὶ ἑπομένως κάθε συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ H εἶναι μονοπάτι ἢ κύκλος. Δύο διαδοχικὲς ἀκμὲς μιᾶς τέτοιας συνιστώσας δὲν μποροῦν νὰ ἀνήκουν ἀμφότερες στὸ M ἢ ἀμφότερες στὸ N, ὁπότε κάθε συνιστῶσα εἶναι ταυτόχρονα M-ἐναλλασσόμενη καὶ N-ἐναλλασσόμενη· εἰδικότερα, κάθε συνιστῶσα ποὺ εἶναι κύκλος ἔχει ἄρτιο μῆκος καὶ περιέχει ἴσο πλῆθος ἀκμῶν τοῦ M καὶ τοῦ N.

Οἱ ἀκμὲς τοῦ H εἶναι ἀκριβῶς οἱ ἀκμὲς τοῦ $M \triangle N$, ὁπότε

$$\sum_C \big(|E(C) \cap N| - |E(C) \cap M|\big) = |N \backslash M| - |M \backslash N| = |N| - |M| > 0,$$

ὅπου τὸ ἄθροισμα ἐκτείνεται στὶς συνιστῶσες C τοῦ H. Ἄρα ὑπάρχει συνιστῶσα C μὲ $|E(C) \cap N| > |E(C) \cap M|$, ἡ ὁποία, σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω, εἶναι μονοπάτι P· ἀφοῦ οἱ ἀκμές του ἐναλλάσσονται, ἡ πρώτη καὶ ἡ τελευταία ἀκμή του ἀνήκουν στὸ N.

Μένει νὰ δείξουμε ὅτι τὰ ἄκρα x, y τοῦ P εἶναι ἐλεύθερα ὡς πρὸς τὸ M, ὁπότε τὸ P εἶναι M-αὐξητικό. Ἔστω $f \in N$ ἡ ἀκμὴ τοῦ P ποὺ προσπίπτει στὴν x καὶ ἔστω, πρὸς ἄτοπο, ὅτι τὸ M καλύπτει τὴν x μὲ μιὰ ἀκμὴ e. Ἂν $e \in N$, τότε $e \neq f$, γιατὶ $f \in N \backslash M$, καὶ οἱ e, f εἶναι δύο διαφορετικὲς ἀκμὲς τοῦ N ποὺ προσπίπτουν στὴν x, ἄτοπο. Ἄρα $e \in M \backslash N \subseteq M \triangle N$, δηλαδὴ ἡ e εἶναι ἀκμὴ τοῦ H διαφορετικὴ τῆς f ποὺ προσπίπτει στὴν x· τότε ὅμως ἡ x ἔχει βαθμὸ 2 στὸ H καὶ δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι ἄκρο τοῦ μονοπατιοῦ P, ἄτοπο. Ὁμοίως γιὰ τὴν y. □

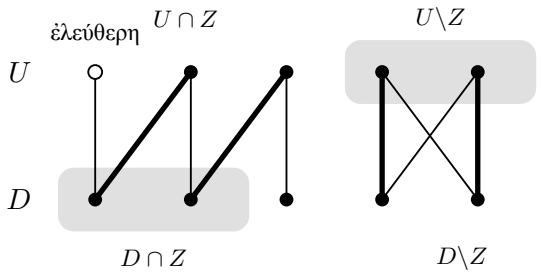
Τὸ ἑπόμενο θεώρημα, ποὺ ὀφείλεται στὸν D. Kőnig, εἶναι ἕνα ἀκόμη μεγιστοελάχιστο θεώρημα: γιὰ τὰ διμερῆ γραφήματα τὸ ἐλάχιστο κάλυμμα καὶ τὸ μέγιστο ταίριασμα ἔχουν τὸ ἴδιο μέγεθος.

Θεώρημα 10.17 (Kőnig, 1931 [62])**.** Γιὰ κάθε διμερὲς γράφημα G ἰσχύει ὅτι $\mathbf{vc}(G) = \mu(G)$.

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 10.12 ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξουμε ὅτι $\mathbf{vc}(G) \leq \mu(G)$. Ἡ ἰδέα εἶναι ὅτι τὸ σύνολο τῶν κορυφῶν στὶς ὁποῖες φτάνουμε μὲ ἐναλλασσόμενα μονοπάτια ξεκινώντας ἀπὸ τὶς ἀκάλυπτες κορυφὲς τοῦ ἑνὸς μέρους δίνει κατευθεῖαν ἕνα κάλυμμα τοῦ σωστοῦ μεγέθους.

Ἔστω U καὶ D τὰ μέρη τοῦ G καὶ ἔστω M ἕνα μέγιστο ταίριασμα τοῦ G. Συμβολίζουμε μὲ Z τὸ σύνολο τῶν κορυφῶν v τοῦ G γιὰ τὶς ὁποῖες ὑπάρχει M-ἐναλλασσόμενο μονοπάτι μὲ ἄκρα μιὰ ἐλεύθερη κορυφὴ τοῦ U καὶ τὴν v, ὅπου συμπεριλαμβάνουμε καὶ τὰ τετριμμένα μονοπάτια μήκους 0, ὁπότε $S_M \cap U \subseteq Z$. Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ἀρχικὸ τμῆμα ἑνὸς τέτοιου μονοπατιοῦ εἶναι πάλι τέτοιο μονοπάτι, ὁπότε *κάθε* κορυφὴ ἑνὸς τέτοιου μονοπατιοῦ ἀνήκει στὸ Z. Θέτουμε

$$R = (U \backslash Z) \cup (D \cap Z).$$



Σχῆμα 10.3: Ἡ ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 10.17. Τὸ Z περιέχει τὶς κορυφὲς στὶς ὁποῖες φτάνουμε μὲ M-ἐναλλασσόμενα μονοπάτια ἀπὸ τὶς ἐλεύθερες κορυφὲς τοῦ U. Τὸ κάλυμμα $R = (U \backslash Z) \cup (D \cap Z)$ εἶναι οἱ γκρι περιοχές: καμία ἀκμὴ τοῦ G δὲν ἑνώνει τὸ $U \cap Z$ μὲ τὸ $D \backslash Z$, ὁπότε κάθε ἀκμὴ ἔχει ἄκρο στὸ R.

Κάθε τέτοιο μονοπάτι P ξεκινάει ἀπὸ ἐλεύθερη κορυφή, ὁπότε ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 10.14 ἡ i-οστὴ ἀκμή του ἀνήκει στὸ M ἂν καὶ μόνο ἂν ὁ i εἶναι ἄρτιος. Ἐπιπλέον, ἀφοῦ τὸ G εἶναι διμερὲς καὶ τὸ P ξεκινάει ἀπὸ κορυφὴ τοῦ U, τὸ μῆκος του εἶναι ἄρτιο ἂν τὸ ἄλλο του ἄκρο ἀνήκει στὸ U καὶ περιττὸ ἂν ἀνήκει στὸ D. Συνεπῶς:

> (*) *ἡ τελευταία ἀκμὴ ἑνὸς τέτοιου μονοπατιοῦ ἀνήκει στὸ M ἂν αὐτὸ καταλήγει σὲ κορυφὴ τοῦ U καὶ ἔχει τουλάχιστον μία ἀκμή, καὶ δὲν ἀνήκει στὸ M ἂν καταλήγει σὲ κορυφὴ τοῦ D.*

Τὸ R εἶναι κάλυμμα κορυφῶν τοῦ G. Ἔστω $e = \{u, d\} \in E(G)$ μὲ $u \in U$ καὶ $d \in D$ καὶ ὑποθέτουμε, πρὸς ἄτοπο, ὅτι κανένα ἀπὸ τὰ ἄκρα της δὲν ἀνήκει στὸ R, δηλαδὴ ὅτι $u \in Z$ καὶ $d \notin Z$. Ἔστω P ἕνα M-ἐναλλασσόμενο μονοπάτι μὲ ἄκρα μιὰ ἐλεύθερη κορυφὴ τοῦ U καὶ τὴν u.

Ἂν $e \in M$, τότε ἡ u δὲν εἶναι ἐλεύθερη, ὁπότε τὸ P ἔχει τουλάχιστον μία ἀκμὴ καί, ἀπὸ τὴν (*), ἡ τελευταία του ἀκμὴ εἶναι ἀκμὴ τοῦ M ποὺ καλύπτει τὴν u·

ἀφοῦ τὸ M εἶναι ταίριασμα, ἡ ἀκμὴ αὐτὴ εἶναι ἡ e. Ἄρα ἡ d εἶναι κορυφὴ τοῦ P καὶ ἑπομένως $d \in Z$, ἄτοπο.

Ἂν $e \notin M$, τότε ἡ d δὲν εἶναι κορυφὴ τοῦ P, διαφορετικὰ $d \in Z$. Ἀπὸ τὴν (*) ἡ τελευταία ἀκμὴ τοῦ P, ἂν ὑπάρχει, ἀνήκει στὸ M, ὁπότε τὸ P μαζὶ μὲ τὴν ἀκμὴ e εἶναι M-ἐναλλασσόμενο μονοπάτι μὲ ἄκρα μιὰ ἐλεύθερη κορυφὴ τοῦ U καὶ τὴν d. Ἄρα πάλι $d \in Z$, ἄτοπο.

Ἰσχύει $|R| \leq |M|$. Ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι κάθε κορυφὴ τοῦ R καλύπτεται ἀπὸ τὸ M καὶ ὅτι καμία ἀκμὴ τοῦ M δὲν ἔχει καὶ τὰ δύο ἄκρα της στὸ R: τότε οἱ κορυφὲς τοῦ R καλύπτονται ἀπὸ $|R|$ ἀνὰ δύο διαφορετικὲς ἀκμὲς τοῦ M.

Μιὰ κορυφὴ $u \in U \backslash Z$ δὲν εἶναι ἐλεύθερη, ἀφοῦ κάθε ἐλεύθερη κορυφὴ τοῦ U ἀνήκει στὸ Z. Ἔστω τώρα $d \in D \cap Z$ καὶ ἔστω P ἕνα M-ἐναλλασσόμενο μονοπάτι μὲ ἄκρα μιὰ ἐλεύθερη κορυφὴ τοῦ U καὶ τὴν d. Ἂν ἡ d ἦταν ἐλεύθερη, τὸ P θὰ ἦταν M-αὐξητικὸ μονοπάτι καί, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 10.16, τὸ M δὲν θὰ ἦταν μέγιστο, ἄτοπο.

Ἔστω τέλος $\{u, d\} \in M$ μὲ $u \in U \backslash Z$ καὶ $d \in D \cap Z$, καὶ ἔστω P ὅπως πρίν, μὲ ἄκρο τὴν d. Ἂν ἡ u εἶναι κορυφὴ τοῦ P, τότε $u \in Z$, ἄτοπο. Διαφορετικά, ἀπὸ τὴν (*) ἡ τελευταία ἀκμὴ τοῦ P δὲν ἀνήκει στὸ M, ὁπότε τὸ P μαζὶ μὲ τὴν ἀκμὴ $\{d, u\}$ εἶναι M-ἐναλλασσόμενο μονοπάτι ποὺ καταλήγει στὴν u, δηλαδὴ $u \in Z$, ἄτοπο.

Συνδυάζοντας τὰ δύο παραπάνω, $\mathbf{vc}(G) \leq |R| \leq |M| = \mu(G)$, καὶ μαζὶ μὲ τὴν Παρατήρηση 10.12 ἔχουμε $\mathbf{vc}(G) = \mu(G)$. □

Ἰσοδύναμη διατύπωση, γνωστὴ ὡς θεώρημα γάμων τοῦ Hall (1935), δίνει κριτήριο γιὰ τὸ πότε ὁλόκληρο τὸ ἕνα μέρος μπορεῖ νὰ καλυφθεῖ ἀπὸ ἕνα ταίριασμα.

Θεώρημα 10.18 (Hall, 1935 [51])**.** Ἕνα διμερὲς γράφημα G μὲ μέρη U καὶ D περιέχει ἕνα ταίριασμα M ποὺ νὰ καλύπτει ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ U ἂν καὶ μόνο ἂν γιὰ κάθε $R \subseteq U$ ἰσχύει ὅτι $|N_G(R)| \geq |R|$.

Ἀπόδειξη. ($\Rightarrow$) Ἔστω M ταίριασμα ποὺ καλύπτει ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ U καὶ ἔστω $R \subseteq U$. Οἱ $|R|$ ἀκμὲς τοῦ M ποὺ καλύπτουν τὶς κορυφὲς τοῦ R ἔχουν ἀνὰ δύο διαφορετικὰ ἄκρα στὸ D, καὶ τὰ ἄκρα αὐτὰ ἀνήκουν στὸ $N_G(R)$. Ἄρα $|N_G(R)| \geq |R|$.

($\Leftarrow$) Ἀποδεικνύουμε τὸ ἀντιθετοαντίστροφο. Ἔστω ὅτι κανένα ταίριασμα δὲν καλύπτει ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ U. Κάθε ταίριασμα μὲ $|U|$ ἀκμὲς θὰ κάλυπτε ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ U, ἀφοῦ τὰ ἄκρα του στὸ U εἶναι ἀνὰ δύο διαφορετικά, ὁπότε $\mu(G) < |U|$. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 10.17 ὑπάρχει κάλυμμα κορυφῶν S τοῦ G μὲ $|S| = \mu(G) < |U|$. Θέτουμε $S_U = S \cap U$, $S_D = S \cap D$ καὶ $R = U \backslash S_U$.

Κάθε ἀκμὴ τοῦ G μὲ ἕνα ἄκρο στὸ R καλύπτεται ἀπὸ τὸ S, καὶ τὸ ἄκρο αὐτὸ δὲν ἀνήκει στὸ S_U· ἄρα τὸ ἄλλο της ἄκρο ἀνήκει στὸ S_D, δηλαδὴ $N_G(R) \subseteq S_D$. Ἑπομένως

$$|N_G(R)| \leq |S_D| = |S| - |S_U| < |U| - |S_U| = |R|,$$

ὁπότε τὸ R εἶναι τὸ ζητούμενο ὑποσύνολο τοῦ U. □

Κλείνουμε τὴν ἑνότητα μὲ ἕνα φράγμα πρὸς τὴν ἀντίθετη κατεύθυνση ἀπὸ ἐκεῖνο τῆς Παρατήρησης 10.12. Στὰ διμερῆ γραφήματα τὸ Θεώρημα 10.17 μᾶς εἶπε ὅτι τὰ $\mu(G)$ καὶ $\mathbf{vc}(G)$ συμπίπτουν. Στὰ γενικὰ γραφήματα αὐτὸ δὲν ἰσχύει, ὅπως δείχνει τὸ τρίγωνο, γιὰ τὸ ὁποῖο $\mu(K_3) = 1$ καὶ $\mathbf{vc}(K_3) = 2$· τὰ δύο μεγέθη ὅμως δὲν ἀπέχουν ποτὲ περισσότερο ἀπὸ ἕναν παράγοντα 2.

Καλοῦμε ἕνα ταίριασμα M ἑνὸς γραφήματος G *μεγιστικὸ* (maximal) ἂν καμία ἀκμὴ τοῦ G δὲν μπορεῖ νὰ προστεθεῖ στὸ M χωρὶς αὐτὸ νὰ πάψει νὰ εἶναι ταίριασμα. Προσοχὴ στὴ διαφορὰ ἀπὸ τὸ *μέγιστο* ταίριασμα: κάθε μέγιστο ταίριασμα εἶναι καὶ μεγιστικό, ἀλλὰ ὄχι ἀντιστρόφως. Στὸ μονοπάτι $[a, b, c, d]$, γιὰ παράδειγμα, τὸ $\{\{b, c\}\}$ εἶναι μεγιστικὸ χωρὶς νὰ εἶναι μέγιστο.

Λῆμμα 10.19. Γιὰ κάθε γράφημα G ἰσχύει ὅτι $\mu(G) \leq \mathbf{vc}(G) \leq 2\mu(G)$.

Ἀπόδειξη. Ἡ ἀριστερὴ ἀνισότητα εἶναι ἡ Παρατήρηση 10.12. Γιὰ τὴ δεξιὰ κατασκευάζουμε ἕνα ταίριασμα μὲ ἄπληστο τρόπο.

Ξεκινᾶμε μὲ $M_0 = \emptyset$. Ἔχοντας κατασκευάσει τὸ M_i, ἐλέγχουμε ἂν ὑπάρχει ἀκμὴ τοῦ G καὶ τὰ δύο ἄκρα τῆς ὁποίας εἶναι ἐλεύθερα ὡς πρὸς τὸ M_i. Ἂν ὑπάρχει, ἐπιλέγουμε μία τέτοια ἀκμὴ e_{i+1} καὶ θέτουμε $M_{i+1} = M_i \cup \{e_{i+1}\}$· ἂν δὲν ὑπάρχει, σταματᾶμε.

Κάθε M_i εἶναι ταίριασμα: αὐτὸ ἰσχύει γιὰ τὸ M_0, καὶ ἡ e_{i+1} δὲν ἔχει κοινὸ ἄκρο μὲ καμία ἀκμὴ τοῦ M_i ἀκριβῶς ἐπειδὴ καὶ τὰ δύο ἄκρα της εἶναι ἐλεύθερα ὡς πρὸς τὸ M_i. Ἐπιπλέον $|M_{i+1}| = |M_i| + 1$ καὶ κάθε ταίριασμα τοῦ G ἔχει τὸ πολὺ $\lfloor n(G)/2 \rfloor$ ἀκμές, ὁπότε ἡ διαδικασία τερματίζει. Ἔστω M τὸ ταίριασμα μὲ τὸ ὁποῖο τερματίζει· ἀπὸ τὴ συνθήκη τερματισμοῦ, καμία ἀκμὴ τοῦ G δὲν ἔχει καὶ τὰ δύο ἄκρα της ἐλεύθερα ὡς πρὸς τὸ M, δηλαδὴ τὸ M εἶναι μεγιστικό.

Θέτουμε $S = \bigcup_{e \in M} e$, δηλαδὴ τὸ σύνολο τῶν ἄκρων τῶν ἀκμῶν τοῦ M. Τὸ S εἶναι κάλυμμα κορυφῶν τοῦ G: ἂν κάποια ἀκμὴ $\{u, v\}$ τοῦ G δὲν καλυπτόταν ἀπὸ τὸ S, τότε οἱ u καὶ v θὰ ἦταν ἐλεύθερες ὡς πρὸς τὸ M καὶ ἡ διαδικασία δὲν θὰ εἶχε τερματίσει μὲ τὸ M. Τέλος, οἱ ἀκμὲς τοῦ M ἔχουν ἀνὰ δύο ξένα σύνολα ἄκρων,

ὁπότε $|S| = 2|M|$, καὶ ἐπειδὴ τὸ M εἶναι ταίριασμα τοῦ G ἰσχύει $|M| \leq \mu(G)$. Συνδυάζοντας,

$$\mathbf{vc}(G) \leq |S| = 2|M| \leq 2\mu(G).$$

□

Παρατήρηση 10.20. Τὸ δεξὶ φράγμα τοῦ Λήμματος 10.19 εἶναι σφιχτό: γιὰ κάθε $k \geq 1$, τὸ γράφημα $k \cdot K_3$ ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ k ξένα τρίγωνα ἔχει $\mu = k$ καὶ $\mathbf{vc} = 2k$. Ἰσοδύναμα, ἡ ἄπληστη διαδικασία τῆς ἀπόδειξης παράγει κάλυμμα κορυφῶν μὲ τὸ πολὺ διπλάσιες κορυφὲς ἀπὸ τὸ ἐλάχιστο, καὶ μάλιστα σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο· εἶναι δηλαδὴ ἕνας 2-*προσεγγιστικὸς ἀλγόριθμος* γιὰ τὸ κάλυμμα κορυφῶν, μὲ τὴν ἔννοια ποὺ θὰ ὁρίσουμε στὸ Κεφάλαιο 14 (Ὁρισμὸς 14.23).

10.3 Τὸ θεώρημα τοῦ Tutte

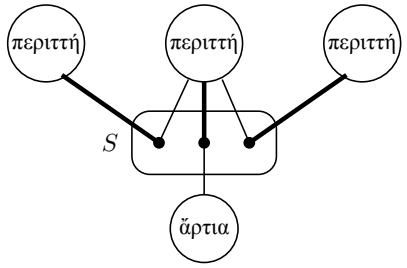
Τὸ θεώρημα τοῦ Tutte χαρακτηρίζει τὰ γραφήματα ποὺ ἔχουν τέλειο ταίριασμα. Ἡ μία κατεύθυνση εἶναι διαφανής: ἂν ἀφαιρέσουμε ἕνα σύνολο κορυφῶν S, κάθε συνιστῶσα περιττῆς τάξης ποὺ ἀπομένει εἶναι ὑποχρεωμένη νὰ στείλει μιὰ ἀκμὴ τοῦ ταιριάσματος σὲ δική της κορυφὴ τοῦ S, ὁπότε τέτοιες συνιστῶσες δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι περισσότερες ἀπὸ τὶς κορυφὲς τοῦ S. Τὸ βάθος τοῦ θεωρήματος βρίσκεται στὸ ὅτι ἡ ἀναγκαία αὐτὴ συνθήκη εἶναι καὶ ἱκανή.

Ὁρισμός 10.21. Γιὰ κάθε γράφημα G συμβολίζουμε μὲ $\boldsymbol{\pi\sigma}(G)$ τὸ πλῆθος τῶν συνεκτικῶν συνιστωσῶν τοῦ G μὲ περιττὸ πλῆθος κορυφῶν.

Θεώρημα 10.22 (Tutte, 1947 [102])**.** Ἕνα γράφημα G ἔχει τέλειο ταίριασμα ἂν καὶ μόνο ἂν γιὰ κάθε $S \subseteq V(G)$ ἰσχύει ὅτι $\boldsymbol{\pi\sigma}(G - S) \leq |S|$.

Ἀπόδειξη. ($\Rightarrow$) Ἔστω M ἕνα τέλειο ταίριασμα τοῦ G καὶ $S \subseteq V(G)$. Κάθε συνεκτικὴ συνιστῶσα C τοῦ $G - S$ μὲ περιττὸ πλῆθος κορυφῶν περιέχει τουλάχιστον μία κορυφὴ ποὺ ταιριάζεται ἀπὸ τὸ M μὲ κορυφὴ ἐκτὸς τοῦ C, δηλαδὴ μὲ κορυφὴ τοῦ S: διαφορετικὰ τὸ M θὰ ὅριζε τέλειο ταίριασμα τοῦ C, ποὺ εἶναι ἀδύνατο ἀφοῦ τὸ $|V(C)|$ εἶναι περιττό. Διαφορετικὲς συνιστῶσες ἀντιστοιχοῦν ἔτσι σὲ διαφορετικὲς κορυφὲς τοῦ S, ἄρα $\boldsymbol{\pi\sigma}(G - S) \leq |S|$.
($\Leftarrow$) Ἐπαγωγὴ στὸ $n(G)$. Γιὰ $n(G) = 0$ τὸ ζητούμενο εἶναι τετριμμένο. Παίρνοντας $S = \emptyset$ βλέπουμε ὅτι $\boldsymbol{\pi\sigma}(G) = 0$, ὁπότε εἰδικότερα ὁ $n(G)$ εἶναι ἄρτιος.

Ἔστω S ἕνα *μεγιστικὸ* ὑποσύνολο τοῦ $V(G)$ μὲ $\boldsymbol{\pi\sigma}(G - S) = |S|$· τέτοιο ὑπάρχει, ἀφοῦ τὸ $\emptyset$ ἱκανοποιεῖ τὴν ἰσότητα.



Σχῆμα 10.4: Ἡ συνθήκη τοῦ Tutte: κάθε συνιστῶσα περιττοῦ μεγέθους τοῦ $G - S$ ὀφείλει νὰ στείλει μιὰ ἀκμὴ τοῦ ταιριάσματος (μὲ ἔντονη γραμμή) σὲ δική της κορυφὴ τοῦ S.

Ἰσχυρισμός 10.23. Κάθε συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ $G - S$ ἔχει περιττὸ πλῆθος κορυφῶν.

Ἀπόδειξη. Ἔστω C συνιστῶσα τοῦ $G - S$ μὲ ἄρτιο πλῆθος κορυφῶν καὶ ἔστω $v \in V(C)$. Τὸ $C - v$ ἔχει περιττὸ πλῆθος κορυφῶν, ἄρα περιέχει τουλάχιστον μία συνιστῶσα περιττοῦ μεγέθους, ἐνῶ οἱ ὑπόλοιπες συνιστῶσες τοῦ $G - S$ παραμένουν ἀναλλοίωτες. Ἑπομένως $\boldsymbol{\pi\sigma}(G - S - v) \geq \boldsymbol{\pi\sigma}(G - S) + 1 = |S| + 1 = |S \cup \{v\}|$, ἐνῶ ἡ ὑπόθεση δίνει $\boldsymbol{\pi\sigma}(G - (S \cup \{v\})) \leq |S \cup \{v\}|$. Ἄρα ἰσχύει ἰσότητα γιὰ τὸ $S \cup \{v\}$, ποὺ ἀντιβαίνει στὴ μεγιστικότητα τοῦ S. □

Ἰσχυρισμός 10.24. Γιὰ κάθε συνιστῶσα C τοῦ $G - S$ καὶ κάθε $v \in V(C)$, τὸ $C - v$ ἔχει τέλειο ταίριασμα.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι τὸ $C - v$ δὲν ἔχει τέλειο ταίριασμα. Ἀφοῦ $n(C - v) < n(G)$, ἡ ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση δίνει $T \subseteq V(C - v)$ μὲ $\boldsymbol{\pi\sigma}(C - v - T) > |T|$. Τὸ $n(C - v)$ εἶναι ἄρτιο, ὁπότε $\boldsymbol{\pi\sigma}(C - v - T)$ καὶ $|T|$ ἔχουν τὴν ἴδια ἰσοτιμία καὶ ἄρα $\boldsymbol{\pi\sigma}(C - v - T) \geq |T| + 2$. Θέτοντας $S' = S \cup \{v\} \cup T$ παίρνουμε

$$\boldsymbol{\pi\sigma}(G - S') \geq (|S| - 1) + \boldsymbol{\pi\sigma}(C - v - T) \geq |S| + |T| + 1 = |S'|,$$

ἀφοῦ οἱ $|S| - 1$ ὑπόλοιπες συνιστῶσες τοῦ $G - S$ εἶναι περιττὲς καὶ παραμένουν ἀναλλοίωτες. Μαζὶ μὲ τὴν ὑπόθεση $\boldsymbol{\pi\sigma}(G - S') \leq |S'|$ ἔχουμε ἰσότητα, ποὺ ἀντιβαίνει πάλι στὴ μεγιστικότητα τοῦ S. □

Ἔστω $C_1, \ldots, C_{|S|}$ οἱ συνιστῶσες τοῦ $G - S$. Θεωροῦμε τὸ διμερὲς γράφημα B μὲ μέρη τὸ S καὶ τὸ $\{C_1, \ldots, C_{|S|}\}$, ὅπου ἡ $s \in S$ συνδέεται μὲ τὸ C_i ἂν ἡ s ἔχει

γειτονικὴ κορυφὴ στὸ C_i. Γιὰ κάθε $\mathcal{C} \subseteq \{C_1, \ldots, C_{|S|}\}$, τὸ σύνολο $N_B(\mathcal{C})$ διαχωρίζει τὶς συνιστῶσες τῆς $\mathcal{C}$ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο γράφημα, ὁπότε $\boldsymbol{\pi\sigma}(G - N_B(\mathcal{C})) \geq |\mathcal{C}|$ καὶ ἡ ὑπόθεση δίνει $|N_B(\mathcal{C})| \geq |\mathcal{C}|$. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 10.18 ὑπάρχει ταίριασμα τοῦ B ποὺ καλύπτει ὅλες τὶς συνιστῶσες, καὶ ἀφοῦ τὰ δύο μέρη ἔχουν ἴσο πληθάριθμο, τὸ ταίριασμα αὐτὸ καλύπτει καὶ ὅλο τὸ S.

Γιὰ κάθε i, ἔστω $s_i \in S$ ἡ κορυφὴ ποὺ τὸ ταίριασμα ἀντιστοιχεῖ στὸ C_i καὶ ἔστω $v_i \in V(C_i)$ γειτονικὴ τῆς s_i. Παίρνουμε τὸ ταίριασμα ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὶς ἀκμὲς $\{s_i, v_i\}$ γιὰ κάθε i, μαζὶ μὲ ἕνα τέλειο ταίριασμα κάθε $C_i - v_i$, τὰ ὁποία ὑπάρχουν ἀπὸ τὸν δεύτερο Ἰσχυρισμό. Τὸ ταίριασμα αὐτὸ καλύπτει κάθε κορυφὴ τοῦ G, δηλαδὴ εἶναι τέλειο. □

Ἀσκήσεις Κεφαλαίου

10.1 (★☆☆). Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα μὲ n κορυφὲς καὶ m ἀκμές, $\mathbf{vc}(G) \geq \frac{m}{n}$ καὶ $\alpha(G) \leq \frac{n^2-m}{n}$.

10.2 (★★★). Κάθε 3-κανονικὸ γράφημα G χωρὶς γέφυρες περιέχει ταίριασμα μεγέθους $\frac{1}{3}m(G)$.

10.3 (☆☆☆). Δεῖξτε ὅτι ἂν ἕνα γράφημα G ἔχει k-παράγοντα, τότε ὁ ἀριθμὸς $k \cdot n(G)$ εἶναι ἄρτιος.

10.4 (★☆☆). Δεῖξτε ὅτι τὸ K_n ἔχει 1-παράγοντα ἂν καὶ μόνο ἂν ὁ n εἶναι ἄρτιος.

10.5 (★☆☆). Δεῖξτε ὅτι ὁ ὑπερκύβος Q_r ἔχει 1-παράγοντα γιὰ κάθε $r \geq 1$.

10.6 (★☆☆). Ἀποδεῖξτε ὅτι κανένα κανονικὸ γράφημα ἄρτιου βαθμοῦ δὲν περιέχει γέφυρα.

10.7 (★☆☆). Δεῖξτε ὅτι κάθε $2k$-κανονικὸ γράφημα ἔχει $2i$-παράγοντα γιὰ κάθε $0 \leq i \leq k$.

10.8 (★★☆). Δεῖξτε ὅτι κάθε δέντρο ἔχει τὸ πολὺ ἕναν 1-παράγοντα.

10.9 (★★☆). Δεῖξτε ὅτι ἕνα δέντρο T ἔχει 1-παράγοντα ἂν καὶ μόνο ἂν $\boldsymbol{\pi\sigma}(T - v) = 1$ γιὰ κάθε $v \in V(T)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

ΠΑΚΕΤΑΡΙΣΜΑΤΑ

Τὸ κοινὸ θέμα τοῦ κεφαλαίου εἶναι ἡ διττότητα ἀνάμεσα στὸ νὰ *καταστρέφει* κανεὶς ὅλους τοὺς κύκλους ἑνὸς γραφήματος καὶ στὸ νὰ *πακετάρει* ὅσο τὸ δυνατὸν περισσότερους ἀνὰ δύο ξένους κύκλους μέσα του. Τὸ ἕνα δίνει πάντοτε ἄνω φράγμα γιὰ τὸ ἄλλο, καὶ τὸ ἐνδιαφέρον ἐρώτημα εἶναι πόσο μακριὰ μποροῦν νὰ ἀπέχουν. Ἡ τρίτη ἑνότητα ἐξετάζει τὴν ἴδια ἰδέα στὸ ἐπίπεδο τῶν ἀκμῶν: πόσα δάση χρειάζονται γιὰ νὰ καλυφθοῦν ὅλες οἱ ἀκμές.

11.1 Σύνολα ἀνάδρασης κορυφῶν

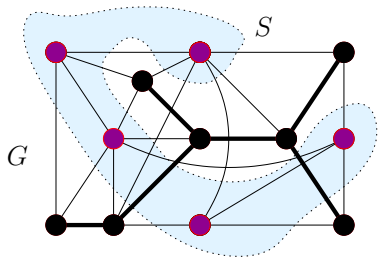
Ὁρισμός 11.1. Ἔστω G γράφημα. Καλοῦμε *σύνολο ἀνάδρασης κορυφῶν* τοῦ G κάθε σύνολο $S \subseteq V(G)$ τέτοιο ὥστε τὸ $G - S$ εἶναι δάσος. Ὁ *ἀριθμὸς ἀνάδρασης κορυφῶν*, $\mathbf{vfs}(G)$, τοῦ G εἶναι ὁ πληθάριθμος τοῦ μικρότερου συνόλου ἀνάδρασης κορυφῶν τοῦ G.

Παρατήρηση 11.2. Ἕνας ἐναλλακτικὸς ὁρισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ ἀνάδρασης κορυφῶν εἶναι

$$\mathbf{vfs}(G) = \min\{|S| \mid K_3 \not\leq_{\tau\pi} G - S\}$$

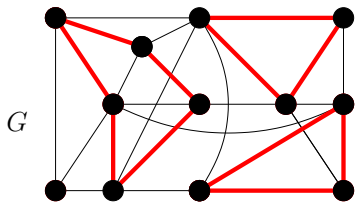
11.2 Πακεταρίσματα κύκλων

Ὁρισμός 11.3. Ἔστω G γράφημα. Καλοῦμε *πακετάρισμα κύκλων* τοῦ G κάθε 2-κανονικὸ ὑπογράφημά του. Μὲ ἄλλα λόγια, μποροῦμε νὰ *πακετάρουμε* r κύκλους



Σχῆμα 11.1: Ἕνα σύνολο ἀνάδρασης κορυφῶν S σὲ ἕνα γράφημα G καὶ τὸ δέντρο $G - S$.

στὸ G ἂν τὸ G περιέχει πακετάρισμα κύκλων H μὲ r συνεκτικὲς συνιστῶσες. Ὁ ἀριθμὸς πακεταρίσματος κύκλων ἑνὸς γραφήματος G, τὸν ὁποῖο συμβολίζουμε μὲ $\mathbf{cp}(G)$, εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς κύκλων ποὺ μποροῦμε νὰ πακετάρουμε στὸ G.



Σχῆμα 11.2: Ἕνα πακετάρισμα κύκλων στὸ γράφημα τοῦ σχήματος 11.1.

Παρατήρηση 11.4. Γιὰ κάθε γράφημα G ἰσχύει ὅτι $\mathbf{cp}(G) \leq \mathbf{vfs}(G)$.

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος στηρίζεται σὲ δύο λήμματα. Τὸ πρῶτο λέει ὅτι μεγάλη περιφέρεια μετατρέπει ἕναν μέτριο ἐλάχιστο βαθμὸ σὲ πολὺ μεγάλο ἐλάχιστο βαθμό, ἂν ἐπιτραπεῖ τὸ πέρασμα σὲ ἔλασσον. Τὸ δεύτερο λέει ὅτι μεγάλος ἐλάχιστος βαθμὸς ἐξασφαλίζει πολλοὺς ξένους κύκλους. Μαζὶ δίνουν ὅτι ἕνα γράφημα μὲ λίγους ξένους κύκλους δὲν μπορεῖ νὰ ἔχει ταυτόχρονα μεγάλη περιφέρεια καὶ ἐλάχιστο βαθμὸ τουλάχιστον 3· καὶ ἕνα γράφημα μὲ μικρὴ περιφέρεια τὸ ξεφορτωνόμαστε ἀφαιρώντας ἕναν μικρὸ κύκλο καὶ ἐπαναλαμβάνοντας.

Λῆμμα 11.5. Ἔστω $d \geq 3$ καὶ $m \geq 0$. Κάθε γράφημα G μὲ $\delta(G) \geq d$ καὶ $\mathbf{περιφέρεια}(G) \geq 8m + 3$ ἔχει ἔλασσον H μὲ $\delta(H) \geq d(d-1)^m$.

Ἀπόδειξη. Γιὰ $x \in V(G)$ καὶ $i \geq 0$ συμβολίζουμε μὲ

$$B_i(x) = \{v \in V(G) \mid \mathbf{ἀπόσταση}_G(x, v) \leq i\}$$

τὸ σύνολο τῶν κορυφῶν σὲ ἀπόσταση τὸ πολὺ i ἀπὸ τὴν x.
Ἡ διαμέριση. Ἔστω $X \subseteq V(G)$ ἕνα μεγιστικὸ σύνολο κορυφῶν μὲ $\textbf{ἀπόσταση}_G(x,y)$ τουλάχιστον $2m+1$ γιὰ κάθε δύο διαφορετικὲς $x, y \in X$. Ἀπὸ τὴ μεγιστικότητα, κάθε κορυφὴ τοῦ G ἀπέχει τὸ πολὺ $2m$ ἀπὸ κάποια κορυφὴ τοῦ X. Ἐκτελοῦμε ἀναζήτηση κατὰ πλάτος ταυτόχρονα ἀπὸ ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ X: κάθε κορυφὴ v ἀνατίθεται στὴν κορυφὴ $x(v) \in X$ ἀπὸ τὴν ὁποία τὴν ἔφτασε ἡ ἀναζήτηση καὶ θυμόμαστε τὸν *γονέα* της, δηλαδὴ τὴ γειτονική της κορυφὴ ἀπὸ τὴν ὁποία ἀνακαλύφθηκε. Θέτουμε

$$D_x = \{v \in V(G) \mid x(v) = x\}, \qquad x \in X.$$

Ἐξ ὁρισμοῦ τὰ D_x διαμερίζουν τὸ $V(G)$, καὶ γιὰ κάθε $v \in D_x$ ἡ ἀκολουθία τῶν γονέων δίνει μονοπάτι ἀπὸ τὴν v στὴν x μήκους $\textbf{ἀπόσταση}_G(v,x)$ ποὺ μένει ὁλόκληρο μέσα στὸ D_x. Εἰδικότερα:

(i) $B_m(x) \subseteq D_x$. Πράγματι, ἂν $\textbf{ἀπόσταση}_G(v,x) \le m$ καὶ $y \in X \setminus \{x\}$, τότε $\textbf{ἀπόσταση}_G(v,y) \ge \textbf{ἀπόσταση}_G(x,y) - \textbf{ἀπόσταση}_G(v,x) \ge (2m+1) - m > m$, ὁπότε ἡ x εἶναι ἡ μοναδικὴ πλησιέστερη στὴν v κορυφὴ τοῦ X.

(ii) $D_x \subseteq B_{2m}(x)$, ἀφοῦ κάθε κορυφὴ ἀπέχει τὸ πολὺ $2m$ ἀπὸ τὸ X καὶ ἀνατίθεται σὲ πλησιέστερη κορυφή του.

Κάθε $G[D_x]$ εἶναι δέντρο. Ἔστω $\{u,v\}$ ἀκμὴ τοῦ $G[D_x]$ ποὺ δὲν εἶναι ἀκμὴ γονέα, καὶ ἔστω P_u, P_v τὰ μονοπάτια τῶν γονέων ἀπὸ τὶς u καὶ v πρὸς τὴν x, μήκους τὸ πολὺ $2m$ τὸ καθένα ἀπὸ τὸ (ii). Ἔστω z ἡ τελευταία κοινὴ κορυφή τους ξεκινώντας ἀπὸ τὴν x. Τὰ τμήματα $z \dots u$ καὶ $z \dots v$ τέμνονται μόνο στὴν z, ὁπότε μαζὶ μὲ τὴν ἀκμὴ $\{u,v\}$ ὁρίζουν κύκλο μήκους τὸ πολὺ $4m+1$, ἐκτὸς ἂν ἡ μία ἀπὸ τὶς u, v ἀνήκει στὸ μονοπάτι τῆς ἄλλης — ὁπότε ἡ $\{u,v\}$ θὰ ἦταν ἀκμὴ γονέα. Ἀφοῦ $\textbf{περιφέρεια}(G) \ge 8m+3 > 4m+1$, τέτοια ἀκμὴ δὲν ὑπάρχει. Ἑπομένως τὸ $G[D_x]$ ἀποτελεῖται ἀκριβῶς ἀπὸ τὶς ἀκμὲς γονέα, εἶναι συνεκτικό, καὶ ἔχει $|D_x| - 1$ ἀκμές.
Πόσο μεγάλο εἶναι τὸ $B_m(x)$. Τὸ $G[B_m(x)]$ εἶναι δέντρο, μὲ τὸ ἴδιο ἐπιχείρημα (ἐδῶ τὰ μονοπάτια ἔχουν μῆκος τὸ πολὺ m καὶ ὁ κύκλος ποὺ θὰ προέκυπτε θὰ εἶχε μῆκος τὸ πολὺ $2m+1$). Κάθε κορυφὴ σὲ ἀπόσταση $i < m$ ἀπὸ τὴν x ἔχει ὅλες τὶς γειτονικές της κορυφὲς μέσα στὸ $B_m(x)$, ὁπότε, ἀφοῦ τὸ γράφημα εἶναι δέντρο, ἔχει τουλάχιστον $d-1$ παιδιά, ἐνῶ ἡ ἴδια ἡ x ἔχει τουλάχιστον d. Ἄρα, γιὰ $m \ge 1$,

$$|B_m(x)| \ge 1 + d \sum_{i=0}^{m-1} (d-1)^i = 1 + d \cdot \frac{(d-1)^m - 1}{d-2},$$

ἐνῶ γιὰ $m = 0$ ἰσχύει $|B_0(x)| = 1$ καὶ ἡ ἴδια σχέση.

Τὸ ἔλασσον. Ἔστω H τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει ἂν συνθλίψουμε κάθε D_x σὲ μία κορυφή· τὸ H εἶναι ἔλασσον τοῦ G μὲ σύνολο κορυφῶν τὸ X. Θὰ δείξουμε πρῶτα ὅτι δύο διαφορετικὲς ἀκμὲς τοῦ G μὲ τὸ ἕνα ἄκρο στὸ D_x καὶ τὸ ἄλλο στὸ D_y ($x \neq y$) δὲν μποροῦν νὰ συνυπάρχουν. Ἔστω $\{u_1, w_1\}$ καὶ $\{u_2, w_2\}$ δύο τέτοιες, μὲ $u_1, u_2 \in D_x$ καὶ $w_1, w_2 \in D_y$. Τὸ μονοπάτι $u_1 \dots x \dots u_2$ μέσα στὸ $G[D_x]$ ἔχει μῆκος τὸ πολὺ $4m$ καὶ τὸ μονοπάτι $w_2 \dots y \dots w_1$ μέσα στὸ $G[D_y]$ ἐπίσης. Τὰ δύο σύνολα εἶναι ξένα, ὁπότε τὰ δύο μονοπάτια μαζὶ μὲ τὶς δύο ἀκμὲς ὁρίζουν κύκλο μήκους τὸ πολὺ $8m + 2$, ποὺ ἀντιβαίνει στὴν ὑπόθεση γιὰ τὴν περιφέρεια.

Ἑπομένως ὁ βαθμὸς τῆς κορυφῆς x στὸ H ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν τοῦ G ποὺ ἔχουν ἀκριβῶς ἕνα ἄκρο στὸ D_x. Τὸ πλῆθος αὐτὸ εἶναι

$$\sum_{v \in D_x} \deg_G(v) - 2 \cdot |E(G[D_x])| \geq d \cdot |D_x| - 2(|D_x| - 1) = (d-2)|D_x| + 2,$$

καί, χρησιμοποιώντας τὸ (i) καὶ τὸ φράγμα γιὰ τὸ $|B_m(x)|$,

$$(d-2)|D_x| + 2 \geq (d-2)\left(1 + d \cdot \frac{(d-1)^m - 1}{d-2}\right) + 2 = d(d-1)^m.$$

Ἄρα $\delta(H) \geq d(d-1)^m$. □

Λῆμμα 11.6. Γιὰ κάθε $k \geq 1$, κάθε γράφημα H μὲ $\delta(H) \geq 3k$ ἱκανοποιεῖ $\mathbf{cp}(H) \geq k$.

Ἀπόδειξη. Ἐπαγωγὴ στὸ k. Γιὰ $k = 1$ ἰσχύει $\delta(H) \geq 3 \geq 2$, ὁπότε τὸ H περιέχει κύκλο.

Ἔστω $k \geq 2$ καὶ ἔστω C κύκλος τοῦ H ἐλάχιστου μήκους. Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι $V(H) \backslash V(C) \neq \emptyset$: διαφορετικὰ κάθε κορυφὴ τοῦ C θὰ εἶχε, λόγῳ τοῦ $\delta(H) \geq 3$, μιὰ γειτονικὴ κορυφὴ ποὺ δὲν εἶναι διαδοχική της πάνω στὸν C, δηλαδὴ ὁ C θὰ εἶχε χορδή, ἡ ὁποία θὰ τὸν χώριζε σὲ δύο μικρότερους κύκλους.

Ἔστω τώρα $v \in V(H) \backslash V(C)$. Ἰσχυριζόμαστε ὅτι ἡ v ἔχει τὸ πολὺ τρεῖς γειτονικὲς κορυφὲς πάνω στὸν C. Πράγματι, ἂν εἶχε τουλάχιστον τέσσερις, τότε δύο ἀπὸ αὐτὲς θὰ ἦταν διαδοχικὲς πάνω στὸν C σὲ ἀπόσταση τὸ πολὺ $\frac{|V(C)|}{4}$ κατὰ μῆκος του· τὸ ἀντίστοιχο τόξο μαζὶ μὲ τὶς δύο ἀκμὲς πρὸς τὴν v θὰ ἔδινε κύκλο μήκους τὸ πολὺ $\frac{|V(C)|}{4} + 2$, ὁ ὁποῖος γιὰ $|V(C)| \geq 3$ εἶναι γνησίως μικρότερος τοῦ C, ἄτοπο.

Ἄρα κάθε κορυφὴ τοῦ $H - V(C)$ χάνει τὸ πολὺ τρεῖς γειτονικὲς κορυφές, δηλαδὴ $\delta(H - V(C)) \geq 3k - 3 = 3(k-1)$. Ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση τὸ $H - V(C)$ περιέχει $k - 1$ ἀνὰ δύο κορυφοξένους κύκλους, οἱ ὁποῖοι μαζὶ μὲ τὸν C δίνουν k τέτοιους κύκλους στὸ H. □

Θεώρημα 11.7 (Erdős & Pósa, 1965 [35])**.** Ὑπάρχει μιὰ συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ τέτοια ὥστε, γιὰ κάθε γράφημα G,

$$\mathbf{cp}(G) \leq \mathbf{vfs}(G) \leq f(\mathbf{cp}(G))$$

Ἀπόδειξη. Θέτουμε $m(k) = \lceil \log_2 k \rceil$ καὶ $g(k) = 8\,m(k) + 2$, καὶ θὰ δείξουμε τὸν ἀκόλουθο ἰσχυρισμό.

Ἰσχυρισμός 11.8. Γιὰ κάθε $k \geq 1$, κάθε γράφημα G εἴτε ἱκανοποιεῖ $\mathbf{cp}(G) \geq k$ εἴτε ἱκανοποιεῖ $\mathbf{vfs}(G) \leq k \cdot g(k)$.

Ἀπόδειξη. Ἐπαγωγὴ στὸ $n(G)$, ταυτόχρονα γιὰ ὅλα τὰ k.

Γιὰ $k = 1$ ὁ ἰσχυρισμὸς εἶναι τετριμμένος: εἴτε τὸ G περιέχει κύκλο, ὁπότε $\mathbf{cp}(G) \geq 1$, εἴτε εἶναι δάσος, ὁπότε $\mathbf{vfs}(G) = 0$. Ἔστω λοιπὸν $k \geq 2$.

Περίπτωση 1: τὸ G περιέχει κύκλο C μὲ $|V(C)| \leq g(k)$. Ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση γιὰ τὸ $G - V(C)$ καὶ τὸ $k - 1$, εἴτε $\mathbf{cp}(G - V(C)) \geq k - 1$ εἴτε $\mathbf{vfs}(G - V(C)) \leq (k-1)g(k-1)$. Στὴν πρώτη περίπτωση, οἱ $k - 1$ κύκλοι μαζὶ μὲ τὸν C δίνουν $\mathbf{cp}(G) \geq k$. Στὴ δεύτερη, ἂν F' εἶναι σύνολο ἀνάδρασης κορυφῶν τοῦ $G - V(C)$ μὲ $|F'| \leq (k-1)g(k-1)$, τότε τὸ $F' \cup V(C)$ εἶναι σύνολο ἀνάδρασης κορυφῶν τοῦ G μὲ

$$|F' \cup V(C)| \leq (k-1)g(k-1) + g(k) \leq k \cdot g(k),$$

ἀφοῦ ἡ g εἶναι αὔξουσα.

Περίπτωση 2: $\mathbf{περιφέρεια}(G) \geq g(k) + 1$ *καὶ ὑπάρχει κορυφὴ* v *μὲ* $\deg_G(v) \leq 1$. Ἡ v δὲν ἀνήκει σὲ κανέναν κύκλο, ὁπότε $\mathbf{cp}(G - v) = \mathbf{cp}(G)$ καὶ $\mathbf{vfs}(G - v) = \mathbf{vfs}(G)$, καὶ ἐφαρμόζουμε τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση στὸ $G - v$.

Περίπτωση 3: $\mathbf{περιφέρεια}(G) \geq g(k) + 1$ *καὶ ὑπάρχει κορυφὴ* v *μὲ* $\deg_G(v) = 2$. Ἔστω $G' = G/v$. Ἀφοῦ $k \geq 2$, ἰσχύει $g(k) \geq 10$, ὁπότε ἡ περιφέρεια τοῦ G εἶναι τουλάχιστον 11 καὶ οἱ δύο γειτονικὲς κορυφὲς τῆς v δὲν εἶναι γειτονικὲς μεταξύ τους· ἄρα τὸ G' εἶναι γράφημα. Οἱ κύκλοι τοῦ G' ἀντιστοιχοῦν ἕνα πρὸς ἕνα στοὺς κύκλους τοῦ G (ἕνας κύκλος τοῦ G' ποὺ χρησιμοποιεῖ τὴ νέα ἀκμὴ ἀντιστοιχεῖ στὸν κύκλο τοῦ G ποὺ περνάει ἀπὸ τὴν v), καὶ ἡ ἀντιστοιχία διατηρεῖ τὰ ξένα σύνολα κορυφῶν. Ἑπομένως $\mathbf{cp}(G') = \mathbf{cp}(G)$, ἐνῶ κάθε $X \subseteq V(G')$ εἶναι σύνολο ἀνάδρασης κορυφῶν τοῦ G' ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι σύνολο ἀνάδρασης κορυφῶν τοῦ G. Ἐφαρμόζουμε τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση στὸ G'.

Περίπτωση 4: $\mathbf{περιφέρεια}(G) \geq g(k) + 1$ *καὶ* $\delta(G) \geq 3$. Θέτουμε $m = m(k)$, ὁπότε $\mathbf{περιφέρεια}(G) \geq 8m + 3$. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 11.5 μὲ $d = 3$, τὸ G ἔχει ἔλασσον H μὲ

$$\delta(H) \geq 3 \cdot 2^m = 3 \cdot 2^{\lceil \log_2 k \rceil} \geq 3k.$$

Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 11.6, τὸ H περιέχει k ἀνὰ δύο κορυφοξένους κύκλους. Οἱ κύκλοι αὐτοὶ ἀνυψώνονται στὸ G: κάθε κορυφὴ τοῦ H ἀντιστοιχεῖ σὲ ἕνα συνεκτικὸ σύνολο κορυφῶν τοῦ G καὶ τὰ σύνολα αὐτὰ εἶναι ἀνὰ δύο ξένα, ὁπότε ἀντικαθιστώντας κάθε κορυφὴ ἑνὸς κύκλου τοῦ H μὲ ἕνα κατάλληλο μονοπάτι μέσα στὸ ἀντίστοιχο σύνολο παίρνουμε κύκλο τοῦ G, καὶ κύκλοι ποὺ προέρχονται ἀπὸ κορυφοξένους κύκλους τοῦ H εἶναι κορυφοξένοι. Ἄρα $\mathbf{cp}(G) \geq k$. □

Ἐφαρμόζοντας τὸν Ἰσχυρισμὸ μὲ $k = \mathbf{cp}(G) + 1$, τὸ G δὲν μπορεῖ νὰ περιέχει $\mathbf{cp}(G) + 1$ ἀνὰ δύο κορυφοξένους κύκλους, ὁπότε

$$\mathbf{vfs}(G) \leq (\mathbf{cp}(G)+1) \cdot g(\mathbf{cp}(G)+1) = (\mathbf{cp}(G)+1)\left(8\left\lceil \log_2(\mathbf{cp}(G)+1)\right\rceil + 2\right).$$

Ἡ συνάρτηση $f(k) = (k+1)(8\lceil \log_2(k+1)\rceil + 2)$ εἶναι λοιπὸν μιὰ ἐπιλογὴ ποὺ ἱκανοποιεῖ τὸ θεώρημα, καὶ μάλιστα δίνει $\mathbf{vfs}(G) = O(\mathbf{cp}(G) \cdot \log \mathbf{cp}(G))$. □

Στὰ ἐπίπεδα γραφήματα ἡ κατάσταση εἶναι πολὺ καλύτερη: ἡ λογαριθμικὴ ἀπόκλιση ἐξαφανίζεται καὶ τὸ **vfs** φράσσεται γραμμικὰ ἀπὸ τὸ **cp**. Τὸ κλειδὶ εἶναι ὅτι ἕνα ἐπίπεδο γράφημα δὲν μπορεῖ νὰ ἔχει ταυτόχρονα μεγάλη περιφέρεια καὶ ἐλάχιστο βαθμὸ τουλάχιστον 3.

Λῆμμα 11.9. Κάθε ἐπίπεδο γράφημα G μὲ $\delta(G) \geq 3$ περιέχει κύκλο μήκους τὸ πολὺ 5.

Ἀπόδειξη. Ἔστω C μιὰ συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ G. Κάθε κορυφὴ τῆς C ἔχει τὸν ἴδιο βαθμὸ στὸ C ὅπως καὶ στὸ G, ὁπότε $\delta(C) \geq 3$ καὶ εἰδικότερα $n(C) \geq 4$. Τὸ C περιέχει κύκλο, ἀφοῦ $\delta(C) \geq 2$· ἔστω $g = \mathbf{περιφέρεια}(C)$ καὶ ἂς ὑποθέσουμε, πρὸς ἄτοπο, ὅτι $g \geq 6$.

Ἀπὸ τὴν Ἄσκηση 7.34, κάθε ἐπίπεδο γράφημα μὲ περιφέρεια g ἱκανοποιεῖ $m \leq \frac{g\,(n-2)}{g-2}$, ἐνῶ ἀπὸ τὸ λῆμμα τῆς χειραψίας καὶ τὸν $\delta(C) \geq 3$ ἔχουμε $m(C) \geq \frac{3\,n(C)}{2}$. Γράφοντας $n = n(C)$,

$$\frac{3n}{2} \leq \frac{g\,(n-2)}{g-2} \Longrightarrow 3n(g-2) \leq 2g(n-2) \Longrightarrow n(g-6) \leq -4g.$$

Τὸ δεξιὸ μέλος εἶναι γνησίως ἀρνητικό, ἐνῶ γιὰ $g \geq 6$ τὸ ἀριστερὸ εἶναι μὴ ἀρνητικό, ἄτοπο. Ἄρα $g \leq 5$. □

Τὸ φράγμα τοῦ λήμματος εἶναι σφιχτό: τὸ δωδεκάεδρο εἶναι ἐπίπεδο καὶ 3-κανονικὸ μὲ περιφέρεια ἀκριβῶς 5.

Θεώρημα 11.10 (Kloks, Lee & Liu, 2002 [60])**.** Γιὰ κάθε ἐπίπεδο γράφημα G,

$$\mathbf{cp}(G) \leq \mathbf{vfs}(G) \leq 5 \cdot \mathbf{cp}(G)$$

Ἀπόδειξη. Ἡ ἀριστερὴ ἀνισότητα εἶναι ἡ Παρατήρηση ποὺ προηγήθηκε τοῦ Θεωρήματος τῶν Erdős καὶ Pósa. Γιὰ τὴ δεξιὰ χρησιμοποιοῦμε ἐπαγωγὴ στὸ $n(G)$· γιὰ $n(G) = 0$ καὶ τὰ δύο μέλη εἶναι μηδέν.
Περίπτωση 1: τὸ G περιέχει κύκλο C μὲ $|V(C)| \leq 5$. Τὸ $G - V(C)$ εἶναι ἐπίπεδο μὲ λιγότερες κορυφές, ὁπότε ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση $\mathbf{vfs}(G - V(C)) \leq 5 \cdot \mathbf{cp}(G - V(C))$. Ἔστω F ἕνα ἐλάχιστο σύνολο ἀνάδρασης κορυφῶν τοῦ $G - V(C)$. Τὸ $G - (F \cup V(C)) = (G - V(C)) - F$ εἶναι δάσος, ὁπότε τὸ $F \cup V(C)$ εἶναι σύνολο ἀνάδρασης κορυφῶν τοῦ G καὶ

$$\mathbf{vfs}(G) \leq |F| + |V(C)| \leq 5 \cdot \mathbf{cp}(G - V(C)) + 5.$$

Ἀπὸ τὴν ἄλλη, ἕνα μέγιστο πακετάρισμα κύκλων τοῦ $G - V(C)$ ἀποτελεῖται ἀπὸ κύκλους ποὺ ἀποφεύγουν τὸ $V(C)$, ὁπότε μαζὶ μὲ τὸν C δίνει πακετάρισμα τοῦ G καὶ ἄρα $\mathbf{cp}(G) \geq \mathbf{cp}(G - V(C)) + 1$. Συνδυάζοντας,

$$\mathbf{vfs}(G) \leq 5\,(\mathbf{cp}(G) - 1) + 5 = 5 \cdot \mathbf{cp}(G).$$

Περίπτωση 2: τὸ G δὲν περιέχει κύκλο μήκους τὸ πολὺ 5. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 11.9 ἰσχύει $\delta(G) \leq 2$. Ἂν $n(G) = 0$ δὲν ἔχουμε τίποτα νὰ δείξουμε, ὁπότε ἔστω v κορυφὴ ἐλάχιστου βαθμοῦ.

Ἂν $\deg_G(v) \leq 1$, τότε ἡ v δὲν ἀνήκει σὲ κανέναν κύκλο, ὁπότε $\mathbf{cp}(G - v) = \mathbf{cp}(G)$ καὶ $\mathbf{vfs}(G - v) = \mathbf{vfs}(G)$, καὶ ἐφαρμόζουμε τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση στὸ $G - v$.

Ἂν $\deg_G(v) = 2$, ἔστω $N_G(v) = \{u, w\}$. Οἱ u καὶ w δὲν εἶναι γειτονικές, διαφορετικὰ τὸ $\{u, v, w\}$ θὰ ἐνῆγε τρίγωνο, δηλαδὴ κύκλο μήκους $3 \leq 5$. Ἄρα τὸ $G' = G/v$ εἶναι ἐπίπεδο γράφημα μὲ $n(G) - 1$ κορυφές. Οἱ κύκλοι τοῦ G' ἀντιστοιχοῦν ἕνα πρὸς ἕνα στοὺς κύκλους τοῦ G, μὲ τὸν κύκλο ποὺ χρησιμοποιεῖ τὴ νέα ἀκμὴ $\{u, w\}$ νὰ ἀντιστοιχεῖ σὲ ἐκεῖνον ποὺ περνάει ἀπὸ τὴν v, καὶ ἡ ἀντιστοιχία διατηρεῖ τὰ ξένα σύνολα κορυφῶν. Ἑπομένως $\mathbf{cp}(G') = \mathbf{cp}(G)$, ἐνῶ ἕνα $X \subseteq V(G')$ εἶναι σύνολο ἀνάδρασης κορυφῶν τοῦ G' ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι σύνολο ἀνάδρασης κορυφῶν τοῦ G, ἄρα $\mathbf{vfs}(G) \leq \mathbf{vfs}(G')$. Ἐφαρμόζουμε τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση στὸ G'. □

Ἡ σταθερὰ 5 ἔχει ἔκτοτε βελτιωθεῖ σὲ 3, ἀνεξάρτητα ἀπὸ τοὺς Chappell, Gimbel, καὶ Hartman [19], τοὺς Chen, Fu, καὶ Shih [20], καὶ τοὺς Ma, Yu,

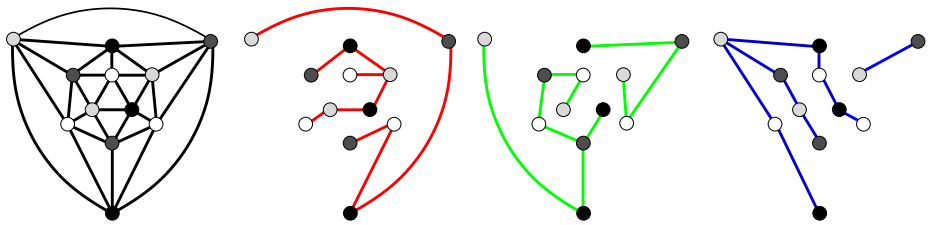
καὶ Zang [70]. Οἱ πρῶτοι ἀποδεικνύουν μάλιστα τὸ φράγμα γιὰ κάθε γράφημα ἐμβαπτίσιμο σὲ ἐπιφάνεια μὴ ἀρνητικῆς χαρακτηριστικῆς Euler. Ἡ βέλτιστη σταθερὰ παραμένει ἄγνωστη.

Εἰκασία 11.11 (Εἰκασία τοῦ Jones, Kloks, Lee & Liu, 2002 [60])**.** Γιὰ κάθε ἐπίπεδο γράφημα G ἰσχύει ὅτι $\mathbf{vfs}(G) \leq 2 \cdot \mathbf{cp}(G)$.

Ἂν ἡ εἰκασία ἰσχύει, ἡ σταθερὰ 2 εἶναι ἡ βέλτιστη δυνατή: οἱ τροχοὶ καὶ τὸ δωδεκάεδρο τὴν ἐπιτυγχάνουν. Ἔχει ἐπιβεβαιωθεῖ γιὰ τὰ γραφήματα μὲ μέγιστο βαθμὸ τὸ πολὺ 3 ἀπὸ τοὺς Bonamy, Dross, Masařík, Nadara, Pilipczuk, καὶ Pilipczuk [13].

11.3 Δενδρικότητα

Ὁρισμός 11.12. Ἡ *δενδρικότητα*, **δενδρικότητα**(G) ἑνὸς γραφήματος εἶναι ὁ ἐλάχιστος πληθάριθμος μιᾶς διαμέρισης $\{F_1, \ldots, F_r\}$ τῶν ἀκμῶν τοῦ G γιὰ τὴν ὁποία τὰ γραφήματα $G[F_i], i = 1, \ldots, r$ εἶναι ἄκυκλα.



Σχῆμα 11.3: Μιὰ διαμέριση τῶν ἀκμῶν τοῦ εἰκοσαέδρου σὲ τρία σύνολα, τὸ καθένα ἐκ τῶν ὁποίων ἐνάγει δάσος (τὸ εἰκοσάεδρο εἶναι 4-χρωματισμένο γιὰ νὰ διευκολυνθεῖ ὁ ἐντοπισμὸς τῶν κορυφῶν).

Θεώρημα 11.13. Γιὰ κάθε γράφημα G, ἰσχύει ὅτι

$$\mathbf{δενδρικότητα}(G) \leq \delta^*(G) \leq 2 \cdot \mathbf{δενδρικότητα}(G) - 1.$$

Ἀπόδειξη. Πρώτη ἀνισότητα. Ἔστω $k = \delta^*(G)$ καὶ $n = n(G)$. Κάθε ὑπογράφημα τοῦ G ἔχει κορυφὴ βαθμοῦ $\leq k$, ὁπότε μποροῦμε νὰ ἀπαριθμήσουμε τὶς κορυφὲς ὡς $v_1, \ldots, v_n$ ἀφαιρώντας διαδοχικὰ μιὰ κορυφὴ ἐλάχιστου βαθμοῦ: ἐπιλέγουμε

ὡς v_n μιὰ κορυφὴ τοῦ G μὲ βαθμὸ $\leq k$, ὡς v_{n-1} μιὰ κορυφὴ τοῦ $G - v_n$ μὲ βαθμὸ $\leq k$, καὶ οὕτω καθεξῆς. Μὲ αὐτὴ τὴν ἀπαρίθμηση, κάθε v_i ἔχει τὸ πολὺ k γειτονικὲς κορυφὲς στὸ $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$· τὶς ἀντίστοιχες ἀκμὲς τὶς λέμε *ὀπίσθιες ἀκμὲς* τῆς v_i.

Χρωματίζουμε τὶς ὀπίσθιες ἀκμὲς κάθε κορυφῆς μὲ διαφορετικὰ χρώματα ἀπὸ τὸ $\{1, \ldots, k\}$ καὶ ἔστω F_j τὸ σύνολο τῶν ἀκμῶν χρώματος j. Τὰ $F_1, \ldots, F_k$ διαμερίζουν τὸ $E(G)$, ἀφοῦ κάθε ἀκμὴ εἶναι ὀπίσθια ἀκμὴ ἀκριβῶς ἑνὸς ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα της. Κάθε $G[F_j]$ εἶναι ἄκυκλο: ἂν περιεῖχε κύκλο, ἡ κορυφὴ τοῦ κύκλου μὲ τὸν μεγαλύτερο δείκτη θὰ εἶχε δύο ὀπίσθιες ἀκμὲς χρώματος j, ἄτοπο. Ἄρα $\textbf{δενδρικότητα}(G) \leq k$.

Δεύτερη ἀνισότητα. Ἔστω $a = \textbf{δενδρικότητα}(G)$ καὶ ἔστω H ὑπογράφημα τοῦ G μὲ $s = n(H) \geq 1$ κορυφές. Μιὰ διαμέριση τοῦ $E(G)$ σὲ a ἄκυκλα σύνολα ἐπάγει διαμέριση τοῦ $E(H)$ σὲ τὸ πολὺ a ἄκυκλα σύνολα, καθένα ἀπὸ τὰ ὁποία ἔχει τὸ πολὺ $s-1$ ἀκμές. Ἄρα $m(H) \leq a(s-1) < a \cdot s$, ὁπότε ὁ μέσος βαθμὸς τοῦ H εἶναι $\frac{2m(H)}{s} < 2a$ καὶ ἑπομένως $\delta(H) \leq 2a-1$. Ἀφοῦ αὐτὸ ἰσχύει γιὰ κάθε ὑπογράφημα, $\delta^*(G) \leq 2a-1$. □

Τὸ ἑπόμενο θεώρημα ἀποδείχτηκε ἀπὸ τὸν Nash-Williams τὸ 1964 [79]. Συγγενεύει στενὰ μὲ τὸ θεώρημα τῶν Nash-Williams καὶ Tutte τοῦ 1961 [78, 103], ποὺ χαρακτηρίζει πότε ἕνα γράφημα περιέχει k παραγόμενα δέντρα χωρὶς κοινὲς ἀκμές.

Θεώρημα 11.14 (Nash-Williams, 1964 [79])**.** Γιὰ κάθε πολυγράφημα G χωρὶς θηλιὲς μὲ τουλάχιστον δύο κορυφές, ἰσχύει ὅτι

$$\textbf{δενδρικότητα}(G) = \max_{\substack{S \subseteq V(G) \\ |S| \geq 2}} \left\lceil \frac{m(G[S])}{n(G[S]) - 1} \right\rceil .$$

Ἀπόδειξη. Ἡ ὑπόθεση ὅτι τὸ G δὲν ἔχει θηλιὲς εἶναι ἀπαραίτητη, ἀφοῦ διαφορετικὰ καμία διαμέριση τῶν ἀκμῶν του σὲ ἄκυκλα σύνολα δὲν ὑπάρχει. Συμβολίζουμε μὲ k τὸ δεξιὸ μέλος.

Ἡ ἀνισότητα $\textbf{δενδρικότητα}(G) \geq k$. Ἔστω $\{F_1, \ldots, F_r\}$ διαμέριση τοῦ $E(G)$ σὲ $r = \textbf{δενδρικότητα}(G)$ ἄκυκλα σύνολα καὶ ἔστω $S \subseteq V(G)$ μὲ $|S| = s \geq 2$. Γιὰ κάθε i, τὸ σύνολο $F_i \cap E(G[S])$ ἐνάγει ἄκυκλο ὑπογράφημα μὲ τὸ πολὺ s κορυφές, ἄρα ἔχει τὸ πολὺ $s-1$ ἀκμές. Ἑπομένως $m(G[S]) \leq r(s-1)$, δηλαδὴ $\frac{m(G[S])}{s-1} \leq r$, καὶ ἀφοῦ ὁ r εἶναι ἀκέραιος, $\left\lceil \frac{m(G[S])}{s-1} \right\rceil \leq r$. Παίρνοντας μέγιστο ὡς πρὸς S ἔχουμε $k \leq r$.

Ἡ ἀνισότητα $\textbf{δενδρικότητα}(G) \leq k$. Θεωροῦμε k ἀνὰ δύο ξένα σύνολα ἀκμῶν $F_1, \ldots, F_k$, καθένα ἀπὸ τὰ ὁποία ἐνάγει ἄκυκλο ὑπογράφημα, ἐπιλεγμένα ἔτσι

ὥστε τὸ πλῆθος $|F_1 \cup \cdots \cup F_k|$ νὰ εἶναι τὸ μέγιστο δυνατό. Ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι $F_1 \cup \cdots \cup F_k = E(G)$. Ἔστω, πρὸς ἄτοπο, ἀκμὴ $e_0 \in E(G) \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_k)$.

Καλοῦμε μιὰ ἀκμὴ f *προσιτὴ* ἂν ὑπάρχει ἀκολουθία ἀνὰ δύο διαφορετικῶν ἀκμῶν $e_0, e_1, \ldots, e_r = f$ καὶ δεικτῶν $i_1, \ldots, i_r$ τέτοια ὥστε, γιὰ κάθε $j \geq 1$, ἡ e_j νὰ ἀνήκει στὸ F_{i_j} καὶ νὰ βρίσκεται πάνω στὸ μονοπάτι ποὺ ἑνώνει τὰ ἄκρα τῆς e_{j-1} μέσα στὸ δάσος $G[F_{i_j}]$. Ἔστω R τὸ σύνολο ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν e_0 καὶ ἀπὸ ὅλες τὶς προσιτὲς ἀκμές.

Ἰσχυρισμός 11.15. Γιὰ κάθε $f \in R$ καὶ κάθε $i \in \{1, \ldots, k\}$, τὰ δύο ἄκρα τῆς f ἀνήκουν στὴν ἴδια συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ $G[F_i]$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω, πρὸς ἄτοπο, ὅτι ὁ Ἰσχυρισμὸς δὲν ἰσχύει. Ἐπιλέγουμε $f \in R$, δείκτη i καὶ ἀκολουθία $e_0, e_1, \ldots, e_r = f$ μὲ δεῖκτες $i_1, \ldots, i_r$, ὅπως στὸν ὁρισμὸ τῆς προσιτότητας, ἔτσι ὥστε τὰ ἄκρα τῆς f νὰ ἀνήκουν σὲ διαφορετικὲς συνιστῶσες τοῦ $G[F_i]$ καὶ τὸ r νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστο δυνατό. Γιὰ $j = 1, \ldots, r$ συμβολίζουμε μὲ P_j τὸ μονοπάτι ποὺ ἑνώνει τὰ ἄκρα τῆς e_{j-1} στὸ $G[F_{i_j}]$· ἐξ ὁρισμοῦ $e_j \in E(P_j)$. Παρατηροῦμε ὅτι $e_{j-1} \notin F_{i_j}$, ἀφοῦ διαφορετικὰ θὰ εἴχαμε $P_j = [e_{j-1}]$ καὶ $e_j = e_{j-1}$. Ἀπὸ τὴν ἐλαχιστότητα τοῦ r προκύπτει ἐπιπλέον ὅτι

$$(\star) \text{ γιὰ } 1 \leq j < j' \leq r \text{ μὲ } i_{j'} = i_j, \text{ ἡ } e_{j'} \text{ δὲν ἀνήκει στὸ } P_j.$$

πράγματι, διαφορετικὰ ἡ $e_0, \ldots, e_{j-1}, e_{j'}, \ldots, e_r$ θὰ ἦταν συντομότερη ἀκολουθία μὲ τὶς ἴδιες ἰδιότητες.

Μετακινοῦμε τώρα τὶς ἀκμὲς τῆς ἀκολουθίας ὡς ἑξῆς. Πρῶτα προσθέτουμε τὴν e_r στὸ F_i, τὸ ὁποῖο παραμένει ἄκυκλο, ἀφοῦ τὰ ἄκρα τῆς e_r ἀνήκουν σὲ διαφορετικὲς συνιστῶσες τοῦ $G[F_i]$. Στὴ συνέχεια, γιὰ $j = r, r-1, \ldots, 1$ μὲ αὐτὴ τὴ σειρά, ἀφαιροῦμε τὴν e_j ἀπὸ τὸ (τρέχον) F_{i_j} καὶ προσθέτουμε σὲ αὐτὸ τὴν e_{j-1}. Τὴ στιγμὴ τοῦ βήματος j, οἱ ἀκμὲς ποὺ ἔχουν ἤδη ἀφαιρεθεῖ ἀπὸ τὸ F_{i_j} εἶναι κάποιες ἀπὸ τὶς $e_{j'}$ μὲ $j' > j$ καὶ $i_{j'} = i_j$, οἱ ὁποῖες, λόγῳ τῆς $(\star)$, δὲν ἀνήκουν στὸ P_j, ἐνῶ οἱ προσθῆκες ἀκμῶν δὲν καταστρέφουν μονοπάτια. Ἑπομένως τὸ P_j ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι τὸ μοναδικὸ μονοπάτι ποὺ ἑνώνει τὰ ἄκρα τῆς e_{j-1} στὸ τρέχον δάσος, ὁπότε ὁ μοναδικὸς κύκλος ποὺ δημιουργεῖ ἡ προσθήκη τῆς e_{j-1} εἶναι ὁ P_j μαζὶ μὲ τὴν e_{j-1}, καὶ αὐτὸς καταστρέφεται μὲ τὴν ἀφαίρεση τῆς $e_j \in E(P_j)$. Ἔτσι, μετὰ ἀπὸ κάθε βῆμα ὅλα τὰ σύνολα ἐνάγουν ἄκυκλα ὑπογραφήματα καὶ παραμένουν ἀνὰ δύο ξένα, ἀφοῦ κάθε e_j μὲ $j \geq 1$ ἁπλῶς μετακινεῖται ἀπὸ ἕνα σύνολο σὲ ἄλλο. Στὸ τέλος ἡ e_0 ἔχει προστεθεῖ στὸ F_{i_1} καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν ποὺ καλύπτονται αὐξήθηκε κατὰ ἕνα, ἄτοπο. □

Ἔστω S τὸ σύνολο τῶν κορυφῶν ποὺ προσπίπτουν σὲ ἀκμὲς τοῦ R. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς προσιτότητας, γιὰ κάθε $f \in R$ καὶ κάθε i, ὅλες οἱ ἀκμὲς τοῦ μονοπατιοῦ ποὺ ἑνώνει τὰ ἄκρα τῆς f μέσα στὸ $G[F_i]$ εἶναι προσιτές, ἄρα ἀνήκουν στὸ R. Ἑπομένως τὰ ἄκρα κάθε ἀκμῆς τοῦ R συνδέονται μὲ μονοπάτι μέσα στὸ $G[R \cap F_i]$. Τὸ γράφημα (S, R) εἶναι συνεκτικό: κάθε προσιτὴ ἀκμὴ ἔχει τουλάχιστον ἕνα ἄκρο πάνω στὸ μονοπάτι ποὺ τὴν «γέννησε», καὶ ἐπαγωγικὰ ὅλες οἱ ἀκμὲς τοῦ R βρίσκονται στὴν ἴδια συνεκτικὴ συνιστῶσα μὲ τὴν e_0. Συνδυάζοντας τὰ δύο, τὸ $G[R \cap F_i]$ εἶναι συνεκτικὸ καὶ καλύπτει ὅλο τὸ S, ἐνῶ εἶναι καὶ ἄκυκλο· ἄρα εἶναι παραγόμενο δέντρο τοῦ S καὶ $|R \cap F_i| = |S| - 1$.

Τέλος, ὅλες οἱ ἀκμὲς τοῦ R ἔχουν καὶ τὰ δύο ἄκρα τους στὸ S, ὁπότε

$$m(G[S]) \geq |R| \geq 1 + \sum_{i=1}^{k} |R \cap F_i| = 1 + k(|S| - 1) > k(|S| - 1),$$

ὅπου ἡ μονάδα ἀντιστοιχεῖ στὴν e_0, ἡ ὁποία δὲν ἀνήκει σὲ κανένα F_i. Αὐτὸ δίνει $\left\lceil \frac{m(G[S])}{|S|-1} \right\rceil > k$, ποὺ ἀντιβαίνει στὸν ὁρισμὸ τοῦ k. □

Θεώρημα 11.16. Γιὰ κάθε ἐπίπεδο γράφημα G, **δενδρικότητα**$(G) \leq 3$.

Ἀπόδειξη. Ἂν τὸ G ἔχει μία κορυφή, τότε **δενδρικότητα**$(G) = 0$. Διαφορετικά, ἔστω $S \subseteq V(G)$ μὲ $s = |S| \geq 2$. Ἂν $s = 2$, τότε $m(G[S]) \leq 1$ καὶ $\lceil \frac{1}{1} \rceil = 1$. Ἂν $s \geq 3$, τότε τὸ $G[S]$ εἶναι ἐπίπεδο (Παρατήρηση 7.13) καὶ ἀπὸ τὸ Πόρισμα 7.47 ἔχουμε $m(G[S]) \leq 3s - 6$, ὁπότε

$$\left\lceil \frac{m(G[S])}{s-1} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{3s-6}{s-1} \right\rceil = \left\lceil 3 - \frac{3}{s-1} \right\rceil \leq 3.$$

Σὲ κάθε περίπτωση τὸ ἀντίστοιχο πηλίκο δὲν ὑπερβαίνει τὸ 3, ὁπότε ἀπὸ τὸ Θεώρημα 11.14, **δενδρικότητα**$(G) \leq 3$. □

Ἀσκήσεις Κεφαλαίου

11.1 (☆☆☆). Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G ἰσχύει ὅτι **cp**$(G) = 0$ ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ G εἶναι δάσος.

11.2 (★☆☆). Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε $n \geq 2$ ἰσχύει ὅτι **vfs**$(K_n) = n - 2$.

11.3 (★★☆). Δεῖξτε ὅτι κάθε γράφημα G μὲ μέγιστο βαθμὸ $\Delta(G) \geq 2$ ἱκανοποιεῖ

$$\textbf{vfs}(G) \geq \frac{m(G) - n(G) + 1}{\Delta(G) - 1}.$$

11.4 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G μὲ τουλάχιστον δύο κορυφὲς ἰσχύει ὅτι **δενδρικότητα**$(G) \geq \left\lceil \frac{m(G)}{n(G)-1} \right\rceil$ (δηλαδὴ ἡ εὔκολη κατεύθυνση τοῦ Θεωρήματος τοῦ Nash-Williams).

11.5 (★★☆)**.** Ὑπολογίστε τὴ δενδρικότητα τοῦ πλήρους γραφήματος K_n γιὰ κάθε $n \geq 2$.

11.6 (★☆☆)**.** Βρεῖτε ἕνα ἐπίπεδο γράφημα G γιὰ τὸ ὁποῖο **vfs**$(G) >$ **cp**(G).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

ΤΕΛΕΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

12.1 Κλάσεις τέλειων γραφημάτων

Ὁρισμός 12.1. Ἕνα γράφημα G καλεῖται *τέλειο* ἂν γιὰ κάθε ἐναγόμενο ὑπογράφημά του H, ἰσχύει ὅτι $\chi(H) = \omega(H)$.

Ἡ μελέτη τῶν τέλειων γραφημάτων ἀνάγεται σὲ μιὰ ἐργασία τοῦ Tibor Gallai, τὸ 1958 [42], ὅπου ἀπέδειξε ὅτι τὸ συμπλήρωμα κάθε διμεροῦς γραφήματος εἶναι τέλειο. Ὁ ὅρος «τέλεια» γιὰ τὰ γραφήματα τοῦ Ὁρισμοῦ 12.1 δόθηκε ἀπὸ τὸν Claude Berge τὸ 1963 [12]. Ὁ ἴδιος ὁ Berge διατύπωσε τὶς παρακάτω δύο εἰκασίες σχετικὰ μὲ τὴν δομή τους.

(Ἀσθενὴς) εἰκασία τῶν τέλειων γραφημάτων:

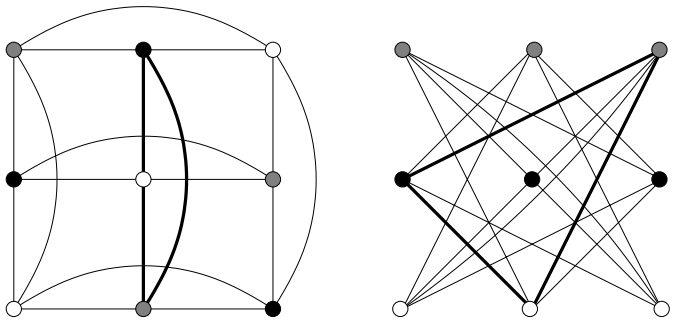
Ἕνα γράφημα εἶναι τέλειο ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ συμπλήρωμά του εἶναι τέλειο.

Ἰσχυρὴ εἰκασία τῶν τέλειων γραφημάτων:

Ἕνα γράφημα εἶναι τέλειο ἂν καὶ μόνο ἂν οὔτε τὸ ἴδιο οὔτε τὸ συμπλήρωμά του δὲν περιέχει περιττὴ τρύπα[1] *μεγέθους μεγαλύτερου ἢ ἴσου τοῦ 5.*

Παρατήρηση 12.2. Ἡ ἰσχυρὴ εἰκασία τῶν τέλειων γραφημάτων συνεπάγεται τὴν ἀσθενῆ.

[1] Δηλ. ἐναγόμενο κύκλο, βλ. Ὁρισμὸ 4.26.



Σχῆμα 12.1: Ἕνα τέλειο γράφημα, τὸ συμπλήρωμά του καὶ ἕνας 3-χρωματισμός του καὶ μιὰ κλίκα μεγέθους 3 σὲ καθένα ἀπὸ αὐτά. Παρατηρῆστε ὅτι ὁ ἀριθμὸς ἀνεξαρτησίας σὲ καθένα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι 3.

Σχόλιο 12.3. Ἕνα γράφημα καλεῖται *γράφημα Berge* ἂν οὔτε τὸ ἴδιο οὔτε τὸ συμπλήρωμά του περιέχουν ἐναγόμενους περιττοὺς κύκλους μεγέθους τουλάχιστον 5. Συνεπῶς ἡ ἰσχυρὴ εἰκασία τῶν τέλειων γραφημάτων λέει ὅτι ἡ κλάση τῶν τέλειων γραφημάτων συμπίπτει μὲ τὴν κλάση τῶν γραφημάτων Berge.

Παρατήρηση 12.4. Τὰ διμερῆ γραφήματα εἶναι τέλεια.

Παρατήρηση 12.5. Οἱ τροχοὶ $W_i, i \geq 4$ γιὰ ἄρτιες τιμὲς τοῦ i εἶναι τέλεια γραφήματα (βλ. Ὁρισμὸ 5.44).

Παρατήρηση 12.6. Τὰ ἐπίπεδα γραφήματα δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκη τέλεια. Γιὰ παράδειγμα, τὸ C_5 ἔχει χρωματικὸ ἀριθμὸ 3 καὶ ἀριθμὸ κλίκας 2.

Ὁρισμός 12.7. Καλοῦμε ἕνα γράφημα G *συνδιμερές* ἂν εἶναι τὸ συμπληρωματικὸ ἑνὸς διμεροῦς γραφήματος.

Θεώρημα 12.8 (Gallai, 1958 [42])**.** Τὰ συνδιμερῆ γραφήματα εἶναι τέλεια.

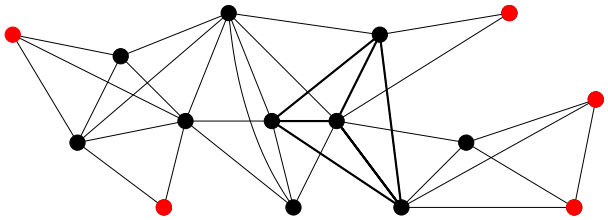
Ἀπόδειξη. Ἔστω G συνδιμερὲς γράφημα μὲ n κορυφές. Μιὰ καὶ κάθε ἐναγόμενο ὑπογράφημά του εἶναι συνδιμερές, μένει νὰ ἀποδείξουμε ὅτι $\chi(G) \leq \omega(G)$. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 10.9 ἔχουμε $\chi(G) \leq n - \mu(\overline{G})$ καὶ ἀπὸ τὸ Θεώρημα 10.17, $\mu(\overline{G}) = \mathbf{vc}(\overline{G})$. Ἐπίσης ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 9.14, $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ καὶ ἀπὸ τὴν Λῆμμα 10.4, $\alpha(\overline{G}) = n - \mathbf{vc}(\overline{G})$. Συνεπῶς, $\chi(G) \leq n - \mu(\overline{G}) = n - \mathbf{vc}(\overline{G}) = \alpha(\overline{G}) = \omega(G)$. □

Λῆμμα 12.9. Κάθε γράφημα ποὺ εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ γραμμικοῦ γραφήματος ἑνὸς διμεροῦς γραφήματος εἶναι τέλειο.

Ἀπόδειξη. Ἔστω H διμερὲς γράφημα. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀφαίρεση κορυφῶν ἀπὸ τὸ $\overline{L(H)}$ ἀντιστοιχεῖ σὲ ἀφαίρεση ἀκμῶν ἀπὸ τὸ H. Ἀφοῦ ἡ ἀφαίρεση ἀκμῶν στὸ H δημιουργεῖ πάλι διμερὲς γράφημα, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι $\chi(\overline{L(H)}) = \omega(\overline{L(H)})$. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 10.6, $\mathbf{vc}(H) = \chi(\overline{L(H)})$. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 10.8, $\mu(H) = \omega(\overline{L(H)})$. Συνεπῶς τὸ Λῆμμα προκύπτει ἀπὸ τὸ Θεώρημα 10.17. □

12.2 Χορδικὰ γραφήματα

Ὁρισμός 12.10. Ἕνα γράφημα G καλεῖται *χορδικό* ἂν **χορδικότητα**$(G) \leq 3$ (δηλ. δὲν περιέχει ἐναγόμενους κύκλους μεγέθους μεγαλύτερου τοῦ 3).



Σχῆμα 12.2: Ἕνα χορδικὸ γράφημα G ὅπου $\chi(G) = \omega(G) = \delta^*(G) + 1 = 4$. Διακρίνονται οἱ ἁπλοειδεῖς του κορυφὲς καὶ μιὰ μέγιστη κλίκα του.

Παρατήρηση 12.11. Ἡ κλάση τῶν χορδικῶν γραφημάτων εἶναι κλειστὴ ὡς πρὸς ἐναγόμενα ὑπογραφήματα ἀλλὰ ὄχι ὡς πρὸς ὑπογραφήματα.

Λῆμμα 12.12. Ἔστω G συνεκτικὸ χορδικὸ γράφημα καὶ a, b δύο μὴ γειτονικὲς κορυφές του. Κάθε ἐλαχιστικὸς (a, b)-διαχωριστὴς S τοῦ G ἐνάγει κλίκα στὸ G.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $x, y \in S$ ὅπου $\{x, y\} \notin E(G)$. Ἔστω C_a καὶ C_b οἱ συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ $G - S$ ὅπου ἀνήκουν τὰ a καὶ b. Παρατηροῦμε ὅτι οἱ x καὶ y θὰ ἔχουν γειτονικὲς κορυφὲς στὶς C_a καὶ C_b, διαφορετικὰ κάποιο ὑποσύνολο τοῦ S θὰ εἶναι (a, b)-διαχωριστὴς τοῦ G. Ἄρα ὑπάρχει (x, y)-μονοπάτι P_a μὲ ἐσωτερικὲς κορυφὲς στὴν C_a καὶ (x, y)-μονοπάτι P_b μὲ ἐσωτερικὲς κορυφὲς στὴν C_b. Ἐπιλέγουμε τὰ P_a καὶ P_b ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι μικρότερου δυνατοῦ μήκους. Τότε τὸ $P_a \cup P_b$ εἶναι τρύπα στὸ G μὲ μῆκος ≥ 4, ἄτοπο γιατὶ τὸ G εἶναι χορδικό. □

Τὸ κλειδὶ γιὰ τὰ χορδικὰ γραφήματα εἶναι ἡ ὕπαρξη κορυφῶν τῶν ὁποίων ἡ γειτονιὰ εἶναι κλίκα: τέτοιες κορυφὲς μποροῦν νὰ ἀφαιρεθοῦν χωρὶς ἀπώλεια δομῆς.

Λῆμμα 12.13. Κάθε χορδικὸ γράφημα G εἴτε εἶναι κλίκα εἴτε ἔχει δύο μὴ γειτονικὲς ἁπλοειδεῖς κορυφὲς (γιὰ τὸ πότε μιὰ κορυφὴ εἶναι ἁπλοειδής, βλ. Ὁρισμὸ 5.39).

Ἀπόδειξη. Ἔστω G ἀντιπαράδειγμα μὲ τὸ μικρότερο πλῆθος κορυφῶν. Προφανῶς τὸ G δὲν εἶναι κλίκα καὶ ἄρα περιέχει δύο μὴ γειτονικὲς κορυφὲς a καὶ b. Ἂν τὸ G δὲν εἶναι συνεκτικό, ἔστω C_1 καὶ C_2 δύο συνεκτικὲς συνιστῶσες του. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 12.11 καὶ τὴν ἐπιλογὴ τοῦ G, καθεμία ἀπὸ αὐτὲς εἶναι κλίκα ἢ ἔχει δύο μὴ γειτονικὲς ἁπλοειδεῖς κορυφές· σὲ κάθε περίπτωση ἔχει μιὰ ἁπλοειδῆ κορυφή, ἡ ὁποία εἶναι ἁπλοειδὴς καὶ στὸ G. Οἱ δύο αὐτὲς κορυφὲς εἶναι μὴ γειτονικὲς ἁπλοειδεῖς κορυφὲς τοῦ G, ἄτοπο. Ἄρα τὸ G εἶναι συνεκτικό. Τότε τὸ $N_G(a)$ εἶναι (a, b)-διαχωριστὴς τοῦ G, ἄρα ὑπάρχει καὶ ἐλαχιστικὸς (a, b)-διαχωριστής. Ἔστω S ἐλαχιστικὸς (a, b)-διαχωριστὴς τοῦ G. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 12.12, τὸ S ἐνάγει κλίκα στὸ G. Ἔστω C_a ἡ συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ $G - S$ ποὺ περιέχει τὴν a. Θέτουμε $G_1 = G[S \cup V(C_a)]$ καὶ $G_2 = G - V(C_a)$. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 12.11, τὰ G_1 καὶ G_2 εἶναι χορδικά. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι $n(G_i) < n(G), i = 1, 2$. Ἄρα, γιὰ $i = 1, 2$, τὸ G_i θὰ εἶναι εἴτε κλίκα εἴτε θὰ περιέχει δύο ἁπλοειδεῖς κορυφές. Ἂν, γιὰ κάποιο $i \in \{1, 2\}$, τὸ G_i εἶναι κλίκα τότε ἐπιλέγουμε μιὰ κορυφὴ v_i στὸ $V(G_i)\backslash S$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι εἶναι ἁπλοειδὴς στὸ G. Ἂν, γιὰ κάποιο $i \in \{1, 2\}$, τὸ G_i δὲν εἶναι κλίκα τότε περιέχει δύο μὴ γειτονικὲς ἁπλοειδεῖς κορυφὲς καί, ἐπειδὴ δὲν εἶναι γειτονικές, κάποια ἀπὸ αὐτές, τὴν συμβολίζουμε μὲ v_i, δὲν ἀνήκει στὸ S. Σὲ κάθε περίπτωση, οἱ κορυφὲς v_1 καὶ v_2 εἶναι μὴ γειτονικὲς ἁπλοειδεῖς κορυφὲς τοῦ G καὶ τὸ λῆμμα ἰσχύει. □

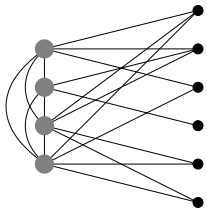
Λῆμμα 12.14. Γιὰ κάθε χορδικὸ γράφημα G ἰσχύει ὅτι $\delta^*(G) \leq \omega(G) - 1$.

Ἀπόδειξη. Γιὰ κάθε ὑπογράφημα H τοῦ G ἰσχύει ὅτι $\delta(H) \leq \delta(G[V(H)])$, ἐνῶ, ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 12.11, τὸ $G[V(H)]$ εἶναι χορδικὸ καὶ προφανῶς $\omega(G[V(H)]) \leq \omega(G)$. Ἄρα ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξουμε ὅτι κάθε χορδικὸ γράφημα G ἔχει μιὰ κορυφὴ βαθμοῦ $\leq \omega(G) - 1$. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 12.13, τὸ G ἔχει μιὰ ἁπλοειδῆ κορυφὴ v καὶ ἐπειδὴ τὸ $G' = G[N_G(v) \cup \{v\}]$ εἶναι κλίκα, $\deg_G(v) = \deg_{G'}(v) \leq \omega(G) - 1$. □

Θεώρημα 12.15. Κάθε χορδικὸ γράφημα εἶναι τέλειο.

Ἀπόδειξη. Ἔστω G χορδικὸ γράφημα καὶ ἔστω H ἐναγόμενο ὑπογράφημά του τὸ ὁποῖο εἶναι ἐπίσης χορδικὸ (Παρατήρηση 12.11). Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 8.17 καὶ τὸ Λῆμμα 12.14, ἔχουμε $\chi(H) \leq \delta^*(H) + 1 \leq \omega(H) - 1 + 1 = \omega(H)$. □

Ὁρισμός 12.16. Καλοῦμε ἕνα γράφημα G *γράφημα διαχωρισμοῦ* ἂν ὑπάρχει μιὰ διαμέριση $\{V_c, V_d\}$ τοῦ $V(G)$ τέτοια ὥστε τὸ V_c νὰ ἐνάγει κλίκα στὸ G καὶ τὸ V_d νὰ εἶναι ἀνεξάρτητο σύνολο τοῦ G.



Σχῆμα 12.3: Ἕνα γράφημα διαχωρισμοῦ.

Λῆμμα 12.17. Κάθε γράφημα διαχωρισμοῦ G εἶναι χορδικό.

Ἀπόδειξη. Ἔστω C_i τρύπα τοῦ G καὶ ἔστω $\{V_c, V_d\}$ διαμέριση τοῦ $V(G)$ ὅπως στὸν Ὁρισμὸ 12.16. Ἀφοῦ τὸ $G[V_c]$ εἶναι κλίκα τὸ C_i δὲν μπορεῖ νὰ ἔχει πάνω ἀπὸ 2 κορυφὲς τοῦ V_c καί, ἂν ὄντως ἔχει 2, αὐτὲς θὰ πρέπει νὰ εἶναι γειτονικὲς στὸ G. Τότε τὸ $G[V_d]$ θὰ περιέχει ἐναγόμενο μονοπάτι μήκους τουλάχιστον $i - 3$. Ἀφοῦ τὸ V_d εἶναι ἀνεξάρτητο σύνολο τοῦ G, ἔχουμε ὅτι $i - 3 \leq 0 \Rightarrow i \leq 3$, ἄρα τὸ G εἶναι χορδικό. □

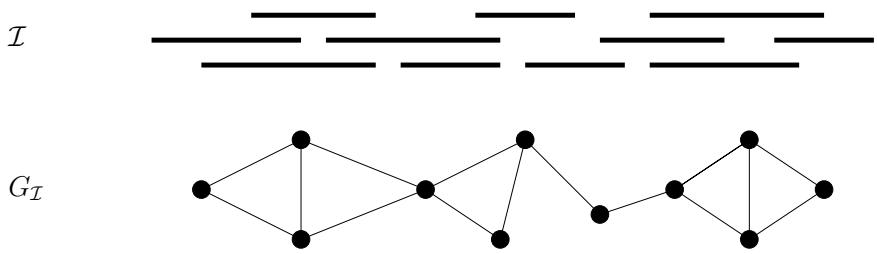
Πόρισμα 12.18. Κάθε γράφημα διαχωρισμοῦ G εἶναι τέλειο.

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 12.17 τὸ G εἶναι χορδικὸ καὶ ἀπὸ τὸ Θεώρημα 12.15 κάθε χορδικὸ γράφημα εἶναι τέλειο. □

Ὁρισμός 12.19. Ἔστω $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots, I_n\}$ μιὰ πεπερασμένη συλλογὴ μὴ τετριμμένων κλειστῶν διαστημάτων τῆς εὐθείας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Χρησιμοποιοῦμε γιὰ κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$, τὸν συμβολισμὸ $I_i = [l_i, r_i]$ μὲ $l_i < r_i$. Καλοῦμε *γράφημα τομῶν* τῆς $\mathcal{I}$ τὸ γράφημα

$$G_{\mathcal{I}} = (\mathcal{I}, \{\{I_i, I_j\} \mid I_i \cap I_j \neq \emptyset\}),$$

(δηλ. οἱ κορυφὲς τοῦ $G_{\mathcal{I}}$ εἶναι τὰ διαστήματα τοῦ $\mathcal{I}$ καὶ δύο διαστήματα εἶναι γειτονικὰ στὸ $G_{\mathcal{I}}$ ἂν καὶ μόνο ἂν τέμνονται). Καλοῦμε ἕνα γράφημα G *γράφημα διαστημάτων* ἂν εἶναι ἰσόμορφο μὲ τὸ γράφημα τομῶν κάποιας συλλογῆς κλειστῶν διαστημάτων τῆς εὐθείας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.



Σχῆμα 12.4: Μιὰ συλλογὴ διαστημάτων $\mathcal{I}$ καὶ τὸ γράφημα $G_{\mathcal{I}}$ ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ αὐτήν.

Λῆμμα 12.20. Κάθε γράφημα διαστημάτων G εἶναι χορδικό.

Ἀπόδειξη. Ἔστω C_i τρύπα τοῦ G ὅπου $i \geq 4$ καὶ ἔστω $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_i$ τὰ διαστήματα ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς κορυφὲς τοῦ C_i, μὲ αὐτὴ τὴ σειρά. Ἡ αὐθαιρεσία στὴν ἐπιλογὴ τοῦ I_2 μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑποθέσουμε ὅτι $r_2 = \min\{r_j \mid 1 \leq j \leq i\}$. Ἀφοῦ $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, ἔχουμε ὅτι $l_1 \leq r_2$, ἐνῶ, ἀπὸ τὴν ἐπιλογὴ τοῦ I_2, $r_2 \leq r_1$. Ἄρα $r_2 \in I_1$. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο, ἀφοῦ $I_3 \cap I_2 \neq \emptyset$, ἔχουμε ὅτι $r_2 \in I_3$. Ἑπομένως $I_1 \cap I_3 \neq \emptyset$, δηλαδὴ οἱ κορυφὲς ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ I_1 καὶ I_3 εἶναι γειτονικὲς στὸ G. Ἀφοῦ $i \geq 4$, οἱ κορυφὲς αὐτὲς δὲν εἶναι διαδοχικὲς στὸν C_i, ἄρα ἡ ἀκμὴ ποὺ τὶς ἑνώνει εἶναι χορδὴ τοῦ C_i, ἄτοπο γιατὶ ὁ C_i εἶναι τρύπα. □

Πόρισμα 12.21. Κάθε γράφημα διαστημάτων G εἶναι τέλειο.

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 12.20 τὸ G εἶναι χορδικὸ καὶ ἀπὸ τὸ Θεώρημα 12.15 κάθε χορδικὸ γράφημα εἶναι τέλειο. □

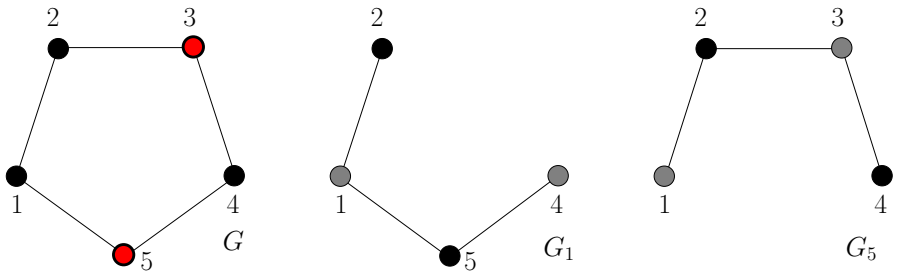
12.3 Τὸ θεώρημα τῶν τέλειων γραφημάτων

Τὸ πρῶτο μεγάλο βῆμα γιὰ τὴν μελέτη τῶν τέλειων γραφημάτων ἔγινε ἀπὸ τὸν Lovász τὸ 1972 ὁ ὁποῖος ἀπέδειξε τὴν ἀσθενῆ εἰκασία τῶν τέλειων γραφημάτων. Παραθέτουμε παρακάτω μιὰ μεταγενέστερη ἀπόδειξη τῆς εἰκασίας ποὺ προτάθηκε ἀπὸ τὸν Gasparian τὸ 1996 [44].

Θεώρημα 12.22 (Θεώρημα τῶν τέλειων γραφημάτων, Lovász, 1972 [68])**.** Ἕνα γράφημα εἶναι τέλειο ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ συμπλήρωμά του εἶναι τέλειο.

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ καὶ $n(G) = n(\overline{G})$, ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξουμε ὅτι

Ἕνα γράφημα εἶναι τέλειο ἂν καὶ μόνο ἂν γιὰ κάθε ἐναγόμενο ὑπογράφημά του H ἰσχύει ὅτι $n(H) \leq \alpha(H) \cdot \omega(H)$. (12.1)



Σχῆμα 12.5: Ἕνα (μὴ τέλειο) γράφημα G, τὸ ἀνεξάρτητο σύνολο $I_0 = \{3, 5\}$, τὰ γραφήματα G_3 καὶ G_5 καὶ 2-χρωματισμοὶ χ_3 καὶ χ_5 τῶν G_3 καὶ G_5 ἀντίστοιχα. Οἱ χρωματικὲς κλάσεις τῶν χ_3 καὶ χ_5 ἀντιστοιχοῦν στὰ ἐξῆς ἀνεξάρτητα σύνολα $I_1 = \{2, 5\}, I_2 = \{1, 4\}, I_3 = \{2, 4\}$ καὶ $I_4 = \{1, 3\}$ τοῦ G. Οἱ κλίκες τοῦ G ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ ἀνεξάρτητα σύνολα I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 ἐνάγονται ἀπὸ τὰ σύνολα $S_0 = \{1, 2\}, S_1 = \{3, 4\}, S_2 = \{2, 3\}, S_3 = \{1, 5\}$ καὶ $S_4 = \{4, 5\}$.

(«μόνο ἂν» γιὰ τὴν (12.1)) Ἂν τὸ G εἶναι τέλειο, τότε γιὰ κάθε ἐναγόμενο ὑπογράφημά του H, ἰσχύει ὅτι $\chi(H) = \omega(H)$. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 9.15, ἔχουμε ὅτι $n(H) \leq \alpha(H) \cdot \chi(H)$ καὶ ἄρα $n(H) \leq \alpha(H) \cdot \omega(H)$.

(«ἂν» γιὰ τὴν (12.1)) Ἔστω G ἀντιπαράδειγμα μὲ ἐλάχιστο ἀριθμὸ κορυφῶν. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι

(α) $\chi(G) > \omega(G)$ καί

(β) γιὰ κάθε ἐναγόμενο ὑπογράφημα H τοῦ G, διαφορετικὸ τοῦ G, ἰσχύει ὅτι $\chi(H) = \omega(H)$.

Θέτουμε $p = \omega(G)$. Ἔστω $I_0 = \{v_1, \ldots, v_q\}$ ἕνα ἀνεξάρτητο σύνολο τοῦ G μεγίστου μεγέθους ($q = \alpha(G)$). Γιὰ κάθε $i \in \{1, \ldots, q\}$, θέτουμε $G_i = G - v_i$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι $\omega(G_i) = \omega(G)$, πράγματι ἂν $\omega(G_i) < \omega(G)$, τότε, ἀπὸ τὴν **(β)**, $\chi(G_i) = \omega(G_i) < \omega(G)$ καὶ ἀφοῦ ἡ πρόσθεση μιᾶς κορυφῆς μπορεῖ νὰ αὐξήσει τὸν χρωματικὸ ἀριθμὸ τὸ πολὺ κατὰ 1, ἔχουμε ὅτι $\chi(G) \leq \omega(G)$, πρᾶγμα ποὺ ἀντιβαίνει στὴν **(α)**. Ἀπὸ τὴν **(β)**, ἔχουμε ὅτι $\chi(G_i) = \omega(G_i) = p$ καὶ ἄρα, γιὰ κάθε $i \in \{1, \ldots, q\}$, ὑπάρχει ἕνας p-χρωματισμὸς $\sigma_i : V(G_i) \to \{1, \ldots, p\}$ τοῦ G_i. Ἔστω ἐπίσης $I_{(i-1)\cdot p+1}, \ldots, I_{(i-1)\cdot p+p}$ οἱ χρωματικὲς κλάσεις τοῦ σ_i, γιὰ $i = 1, \ldots, q$. Προφανῶς κάθε μιὰ ἀπὸ αὐτὲς εἶναι ἕνα ἀνεξάρτητο σύνολο τοῦ G. Κατασκευάσαμε μὲ αὐτὸ τὸν τρόπο $pq + 1$ ἀνεξάρτητα σύνολα $I_0, I_1, \ldots, I_{pq}$ τοῦ G. Ἔστω $j \in \{0, \ldots, pq\}$. Παρατηροῦμε ὅτι ἂν $\chi(G - I_j) < \omega(G)$, τότε χρωματίζοντας μὲ ἕνα ἀκόμα χρῶμα ὅλες τὶς (ἀνεξάρτητες) κορυφὲς τοῦ I_j, ἔχουμε

ὅτι $\chi(G) \leq \omega(G)$, πρᾶγμα ποὺ ἀντιβαίνει στὴν **(α)**. Ἄρα $\chi(G - I_j) \geq \omega(G)$ καὶ ἀπὸ τὴν **(β)**, ἔχουμε ὅτι $\omega(G) \leq \chi(G - I_j) = \omega(G - I_j) \leq \omega(G)$ καὶ ἄρα τὸ $G - I_j$ ἔχει μιὰ κλίκα μεγέθους p τῆς ὁποίας τὸ σύνολο κορυφῶν συμβολίζουμε μὲ S_j. Μὲ αὐτὸ τὸν τρόπο, κατασκευάσαμε $pq + 1$ κλίκες $S_0, S_1, \ldots, S_{pq}$ τοῦ G.

Ἰσχυρισμός: Γιὰ κάθε $j, j' \in \{0, \ldots, pq\}$, ὅπου $j \neq j'$, ἰσχύει ὅτι $S_j \cap I_{j'} \neq \emptyset$.
Ἀπόδειξη: Ἐξετάζουμε πρῶτα τὴν περίπτωση ὅπου $j = 0$. Ἔστω $j' \in \{1, \ldots, pq\}$ καὶ ἔστω $G_{i'} = G - v_{i'}$ τὸ γράφημα τοῦ ὁποίου ὁ χρωματισμὸς $\sigma_{i'}$ ἔχει τὸ $I_{j'}$ μεταξὺ τῶν χρωματικῶν του κλάσεων. Μιὰ καὶ $S_0 \subseteq V(G) \backslash I_0$, τὸ S_0 δὲν περιέχει κανένα στοιχεῖο τοῦ I_0, συνεπῶς $v_{i'} \notin S_0$. Ἄρα ἡ κλίκα $G[S_0]$ εἶναι καὶ ὑπογράφημα τοῦ $G_{i'}$ καὶ ἀφοῦ $\chi(G_{i'}) = p$, ἡ $G[S_0]$ θὰ τέμνει κάθε χρωματικὴ κλάση τῆς $\sigma_{i'}$ ἄρα καὶ τὴν $I_{j'}$ (διαφορετικά, ἡ $G[S_0]$ θὰ μποροῦσε νὰ χρωματιστεῖ μὲ $< p$ χρώματα). Ἄρα ἡ $G[S_0]$ θὰ τέμνει κάθε $I_{j'}$ γιὰ $j' \in \{1, \ldots, pq\}$.

Ἔστω τώρα $j > 0$. Ἀπὸ τὸν ὁρισμό της, ἡ κλίκα $G[S_j]$ εἶναι ὑπογράφημα τοῦ $G - I_j$ ὅπου I_j εἶναι μιὰ χρωματικὴ κλάση τοῦ σ_i γιὰ κάποιο $i \in \{1, \ldots, q\}$ (ὑπενθυμίζουμε ὅτι τὸ σ_i εἶναι ἕνας χρωματισμὸς τοῦ $G_i = G - v_i$). Θὰ δείξουμε ὅτι $v_i \in S_j$. Πράγματι, ἂν $v_i \notin S_j$, τότε ἡ κλίκα $G[S_j]$ εἶναι καὶ ὑπογράφημα τοῦ $G_i - I_j$ τὸ ὁποῖο ἔχει μιὰ χρωματικὴ κλάση λιγότερο ἀπὸ τὸ G_i καὶ ἄρα $\chi(G_i - I_j) < p$, ἄτοπο γιατὶ τότε ἡ κλίκα $G[S_j]$ θὰ μποροῦσε νὰ χρωματιστεῖ μὲ $< p$ χρώματα. Συνεπῶς, $v_i \in S_j$ καὶ ἄρα $S_j \cap I_0 \neq \emptyset$. Μένει νὰ δείξουμε ὅτι $S_j \cap I_{j'} \neq \emptyset$ γιὰ κάθε $j' \in \{1, \ldots, pq\} \backslash \{j\}$. Ἔστω $G_{i'} = G - v_{i'}$ τὸ γράφημα τοῦ ὁποίου ὁ χρωματισμὸς $\sigma_{i'}$ ἔχει τὸ $I_{j'}$ μεταξὺ τῶν χρωματικῶν του κλάσεων. Ἂν $i' \neq i$, τότε ἐπειδὴ $v_i \in S_j$ καὶ $v_i, v_{i'} \in I_0$, ἔχουμε ὅτι $v_{i'} \notin S_j$. Τότε ἡ $G[S_j]$ εἶναι καὶ ὑπογράφημα τοῦ $G_{i'} = G - v_{i'}$ καὶ τέμνει κάθε χρωματικὴ κλάση τοῦ $G_{i'}$ ἄρα καὶ τὴν $I_{j'}$, διαφορετικὰ τὸ S_j θὰ μπορεῖ νὰ χρωματιστεῖ μὲ $< p$ χρώματα. Ἂν $i' = i$, τότε οἱ I_j καὶ $I_{j'}$ θὰ εἶναι διαφορετικὲς χρωματικὲς κλάσεις τοῦ σ_i. Μένει νὰ ἀποδείξουμε ὅτι $S_j \cap I_{j'} \neq \emptyset$. Πράγματι, ἂν $S_j \cap I_{j'} = \emptyset$, τότε ἡ κλίκα $G[S_j]$ θὰ εἶναι καὶ ὑπογράφημα τοῦ $G - (I_j \cup I_{j'})$. Ἀφοῦ τὸ $G - (\{v_i\} \cup I_j \cup I_{j'})$ ἔχει χρωματικὸ ἀριθμὸ $\leq p - 2$, τὸ $G - (I_j \cup I_{j'})$ θὰ ἔχει χρωματικὸ ἀριθμὸ $\leq p - 1$ καὶ ἄρα $\chi(G[S_j]) < p$, ἄτοπο.

Ἔστω $V(G) = \{u_1, \ldots, u_n\}$ (χρησιμοποιοῦμε διαφορετικὸ γράμμα ἀπὸ αὐτὸ τῶν κορυφῶν $v_1, \ldots, v_q$ τοῦ I_0). Ὁρίζουμε τώρα τὸν $(pq + 1) \times n$ πίνακα $X = [x_{i,h}]_{(i,h) \in \{0,\ldots,pq\} \times [n]}$ ἔτσι ὥστε $x_{i,h} = 1$ ἂν καὶ μόνο ἂν $u_h \in I_i$ (οἱ γραμμὲς τοῦ X ἀναπαριστοῦν τὴν χαρακτηριστικὴ συνάρτηση τῶν συνόλων $I_i, i \in \{0, \ldots, pq\}$). Ἐπίσης ὁρίζουμε τὸν $n \times (pq + 1)$ πίνακα $Y = [y_{h,j}]_{(h,j) \in [n] \times \{0,\ldots,pq\}}$ ἔτσι ὥστε $y_{h,j} = 1$ ἂν καὶ μόνο ἂν $u_h \in S_j$ (οἱ στῆλες τοῦ Y ἀναπαριστοῦν τὴν χαρακτηριστικὴ συνάρτηση τῶν συνόλων $S_j, j \in \{0, \ldots, pq\}$). Θὰ ἐξετάσουμε τώρα τὴν

	1	2	3	4	5
I_0	0	0	1	0	1
I_1	0	1	0	0	1
I_2	1	0	0	1	0
I_3	0	1	0	1	0
I_4	1	0	1	0	0

X

	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4
1	1	0	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	1	0	0
4	0	1	0	0	1
5	0	0	0	1	1

Y

0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Z

Σχῆμα 12.6: Οἱ πίνακες X καὶ Y ὅπως προκύπτουν ἀπὸ τὸ γράφημα τοῦ Σχήματος 12.5. Μιὰ καὶ τὸ γράφημα C_5 δὲν εἶναι τέλειο, ἡ τάξη τῶν X, Y καὶ Z εἶναι ἴση μὲ $n(G) = 5 > 2 \cdot 2 = \alpha(G) \cdot \omega(G)$.

τιμὴ τοῦ $|S_j \cap I_i|$ γιὰ ὅλες τὶς πιθανὲς τιμὲς τῶν i καὶ j. Ἂν $i = j$, τότε $|S_j \cap I_i| = 0$. Πράγματι, ἐπειδὴ $S_j \subseteq V(G) \backslash I_j$, ἔχουμε ὅτι $S_j \cap I_j = S_j \cap I_i = \emptyset$. Ἂν $i \neq j$, ἰσχύει, ἀπὸ τὸν παραπάνω ἰσχυρισμό, ὅτι $S_j \cap I_i \neq \emptyset$ καὶ ἀφοῦ τὸ S_j εἶναι κλίκα καὶ τὸ I_i εἶναι ἀνεξάρτητο σύνολο, ἔχουμε $|S_j \cap I_i| = 1$. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι

$$z_{i,j} \quad = \quad \sum_{h \in \{1,\ldots,n\}} x_{i,h} \cdot y_{h,j} = |S_j \cap I_i| \tag{12.2}$$

καὶ ἄρα τὸ γινόμενο XY τῶν δύο πινάκων εἶναι ἴσο μὲ τὸν $(pq+1) \times (pq+1)$ πίνακα $Z = [z_{i,j}]_{(i,j) \in \{0,\ldots,pq\}^2}$. Σύμφωνα μὲ τὴν (12.2), ὁ Z ἔχει ὅλες τὶς μὴ διαγώνιες τιμές του ἴσες μὲ 1 καὶ ὅλες τὶς διαγώνιες τιμές του ἴσες μὲ 0. Ἐπειδὴ ὁ X ἔχει n στῆλες, ἡ τάξη τοῦ X εἶναι τὸ πολὺ n, ἄρα ἀπὸ τὴν ἀρχική μας ὑπόθεση ($n \leq \alpha(G) \cdot \omega(G) = pq$) ἔχουμε ὅτι ἡ τάξη τοῦ X εἶναι τὸ πολὺ pq. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι καὶ ἡ τάξη τοῦ $Z = XY$ εἶναι τὸ πολὺ pq (ἡ τάξη τοῦ XY εἶναι τὸ πολὺ τὸ ἐλάχιστο τῶν τάξεων τῶν X καὶ Y). Ὅμως, ὁ Z εἶναι ὁ πίνακας $J - \mathrm{Id}$, ὅπου J ὁ $N \times N$ πίνακας μὲ ὅλα τὰ στοιχεῖα ἴσα μὲ 1, Id ὁ $N \times N$ μοναδιαῖος πίνακας, καὶ $N = pq + 1 \geq 2$. Οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ J εἶναι οἱ N (μία φορά) καὶ 0 ($N - 1$ φορές), ἄρα οἱ ἰδιοτιμὲς τοῦ Z εἶναι οἱ $N - 1$ καὶ -1, καὶ ἡ ὁρίζουσα τοῦ Z εἶναι $(-1)^{N-1}(N-1) \neq 0$. Ἄρα ἡ τάξη τοῦ Z εἶναι ἴση μὲ $pq + 1$, ἄτοπο. □

Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 12.9 καὶ τὸ Θεώρημα 12.22 ἔχουμε τὸ ἑξῆς πόρισμα.

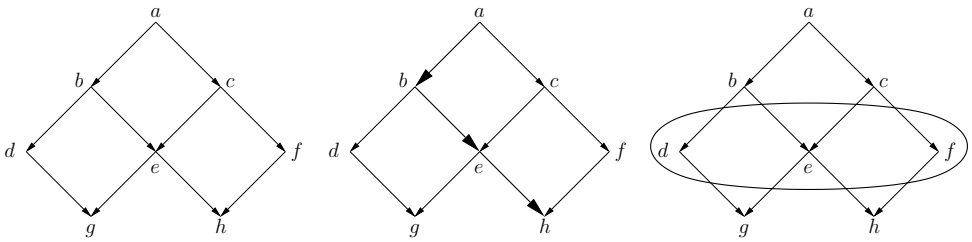
Πόρισμα 12.23. Τὰ γραμμικὰ γραφήματα τῶν διμερῶν γραφημάτων εἶναι τέλεια.

Ἀπόδειξη. Ἔστω G διμερὲς γράφημα. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 12.9 τὸ $\overline{L(G)}$ εἶναι τέλειο,

ὁπότε ἀπὸ τὸ Θεώρημα 12.22 τέλειο εἶναι καὶ τὸ συμπλήρωμά του, δηλαδὴ τὸ $L(G)$. □

12.4 Γραφήματα συγκρισιμότητας

Ὁρισμός 12.24. Ἔστω $\mathcal{P} = (S, <)$ μερικὴ διάταξη σὲ κάποιο σύνολο S. Καλοῦμε ἕνα ὑποσύνολο R τοῦ S *ἁλυσίδα* ἂν κάθε ζεῦγος $x, y \in R$ εἶναι συγκρίσιμο (δηλ. $x < y$ ἢ $y < x$). Καλοῦμε ἕνα ὑποσύνολο R τοῦ S *ἀντιαλυσίδα* ἂν κανένα ζεῦγος $x, y \in R$ δὲν εἶναι συγκρίσιμο (δηλ. $x \not< y$ καὶ $y \not< x$). Ἀπὸ ἐδῶ καὶ στὸ ἑξῆς θὰ θεωρήσουμε μόνο μερικὲς διατάξεις σὲ πεπερασμένα σύνολα.



Σχῆμα 12.7: Μιὰ μερικὴ διάταξη $\mathcal{P}$, μιὰ ἁλυσίδα καὶ μιὰ ἀντιαλυσίδα στὴν $\mathcal{P}$.

Ὁρισμός 12.25. Ἔστω $\mathcal{P} = (S, <)$ μερικὴ διάταξη. Ὁρίζουμε τὸ γράφημα συγκρίσεων $G_{\mathcal{P}}$ τῆς $\mathcal{P}$ ὡς ἑξῆς:

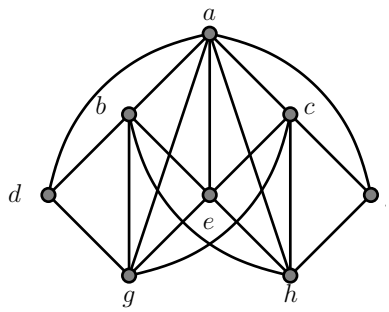
$$G_{\mathcal{P}} = (S, \{\{x, y\} \mid x < y \text{ ἢ } x > y\}),$$

δηλαδὴ τὸ σύνολο S εἶναι καὶ σύνολο κορυφῶν τοῦ $G_{\mathcal{P}}$ καὶ οἱ ἀκμὲς τοῦ $G_{\mathcal{P}}$ ἀντιστοιχοῦν στὰ συγκρίσιμα ζεύγη τῆς $\mathcal{P}$. Ἕνα γράφημα καλεῖται *γράφημα συγκρισιμότητας* ἂν εἶναι ἰσόμορφο μὲ τὸ γράφημα συγκρίσεων $G_{\mathcal{P}}$ κάποιας μερικῆς διάταξης $\mathcal{P}$.

Λῆμμα 12.26. Ἔστω $\mathcal{P} = (S, <)$ μερικὴ διάταξη σὲ κάποιο πεπερασμένο σύνολο S. Τότε ὑπάρχει ἕνας ἀριθμὸς ρ τέτοιος ὥστε ἡ $\mathcal{P}$ νὰ μπορεῖ νὰ διαμεριστεῖ σὲ ρ ἁλυσίδες καὶ ἡ $\mathcal{P}$ περιέχει ἀντιαλυσίδα μεγέθους ρ.

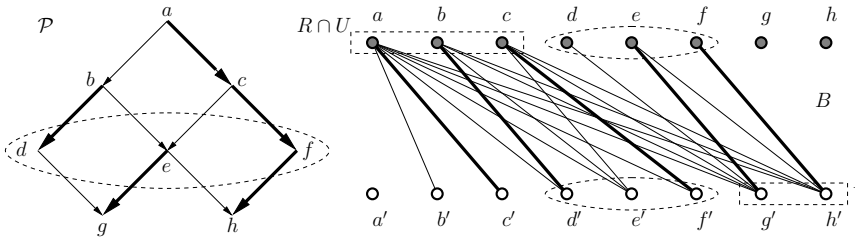
Ἀπόδειξη. Ἔστω $\mathcal{P} = (S, <)$ μερικὴ διάταξη ὅπου $|S| = n$.

Χρησιμοποιοῦμε τὴν $\mathcal{P}$ γιὰ νὰ κατασκευάσουμε τὸ διμερὲς γράφημα B μὲ μέρη U καὶ D ὡς ἑξῆς. Θέτουμε $U = S$ καὶ γιὰ κάθε στοιχεῖο v τοῦ S δημιουργοῦμε



Σχῆμα 12.8: Τὸ γράφημα συγκρισιμότητας $G_{\mathcal{P}}$ ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν μερικὴ διάταξη τοῦ Σχήματος 12.7.

ἕνα ἀντίγραφό του v' καὶ ὁρίζουμε τὸ D ὡς τὸ σύνολο αὐτῶν τῶν ἀντιγράφων. Γιὰ κάθε συγκρίσιμο ζεῦγος $(v, u) \in S \times S$ ὅπου $v < u$, συνδέουμε στὸ B τὴν κορυφὴ $v \in U$ μὲ τὴν κορυφὴ $u' \in D$ (δηλ. τὸ ἀντίγραφο τῆς u στὴν D). Γιὰ κάθε κορυφὴ $v \in U$ ($v' \in D$) θὰ καλοῦμε τὴν κορυφὴ v' (v) *ἀντίποδά* της.



Σχῆμα 12.9: Ἡ μερικὴ διάταξη τοῦ Σχήματος 12.7, τὸ ἀντίστοιχο διμερὲς γράφημα B τῆς ἀπόδειξης τοῦ Λήμματος 12.26, ἕνα ταίριασμα στὸ B καὶ ἕνα κάλυμμα κορυφῶν R τοῦ B. Στὴν μερικὴ διάταξη διακρίνονται οἱ ἁλυσίδες $\{a, c, f, h\}$, $\{b, d\}$ καὶ $\{e, g\}$ στὶς ὁποῖες διαμερίζεται. Οἱ κορυφὲς d, e καὶ f δὲν ἀντιστοιχοῦν σὲ κορυφὲς τοῦ καλύμματος κορυφῶν καὶ ἀποτελοῦν μιὰ ἀντιαλυσίδα τῆς $\mathcal{P}$.

Ἔστω M μέγιστο ταίριασμα τοῦ B καὶ R ἐλάχιστο κάλυμμα κορυφῶν στὸ B (ὑπενθυμίζουμε ὅτι, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 10.17, $|M| = \mu(B) = \mathbf{vc}(B) = |R| = k$). Παρατηροῦμε ὅτι οἱ κορυφὲς τοῦ R καὶ οἱ ἀντίποδές τους ἀντιστοιχοῦν σὲ $\leq k$ στοιχεῖα τοῦ S. Τὰ ὑπόλοιπα $\geq n - k$ στοιχεῖα τοῦ S ἀποτελοῦν μιὰ ἀντιαλυσίδα τῆς $\mathcal{P}$. Κατασκευάζουμε τώρα μιὰ διαμέριση $\mathcal{F}$ τοῦ S σὲ ἁλυσίδες τῆς $\mathcal{P}$ ὡς ἑξῆς (ἀναπαριστοῦμε κάθε ἁλυσίδα μὲ μιὰ ἀκολουθία στοιχείων τοῦ S). Ἀρχικὰ θέτουμε $\mathcal{F} = \{[v] \mid v \in S\}$. Στὴ συνέχεια, γιὰ κάθε ἀκμὴ $\{v, u'\}$ τοῦ M (μὲ ὁποιαδήποτε

σειρά), ἀντικαθιστοῦμε τὴν ἀκολουθία τοῦ $\mathcal{F}$ ποὺ περιέχει τὸ v καὶ τὴν ἀκολουθία τοῦ $\mathcal{F}$ ποὺ περιέχει τὸ u μὲ τὴν συνένωσή τους (πρῶτα ἡ πρώτη καὶ μετὰ ἡ δεύτερη).

Ἡ διαδικασία αὐτὴ εἶναι καλὰ ὁρισμένη. Πράγματι, σὲ κάθε βῆμα, δύο διαδοχικὰ στοιχεῖα a, b μιᾶς ἀκολουθίας τοῦ $\mathcal{F}$ ἀντιστοιχοῦν σὲ μιὰ ἀκμὴ $\{a, b'\}$ τοῦ M ποὺ ἔχει ἤδη ἐξεταστεῖ. Ἀφοῦ τὸ M εἶναι ταίριασμα, τὸ v εἶναι ἄκρο μίας μόνο ἀκμῆς τοῦ M στὸ U καὶ τὸ u' μίας μόνο ἀκμῆς τοῦ M στὸ D· ἄρα, ὅταν ἐξετάζουμε τὴν $\{v, u'\}$, ἡ ἀκολουθία ποὺ περιέχει τὸ v τελειώνει στὸ v καὶ ἡ ἀκολουθία ποὺ περιέχει τὸ u ἀρχίζει ἀπὸ τὸ u. Οἱ δύο ἀκολουθίες εἶναι διαφορετικές: διαφορετικὰ θὰ εἴχαμε μιὰ ἁλυσίδα ποὺ ἀρχίζει ἀπὸ τὸ u καὶ τελειώνει στὸ v, δηλαδὴ $u < v$, τὸ ὁποῖο ἀντιβαίνει στὸ ὅτι $v < u$. Τέλος, ἀφοῦ $v < u$, ἡ συνένωσή τους εἶναι ἐπίσης ἁλυσίδα τῆς $\mathcal{P}$.

Ἀρχικὰ $|\mathcal{F}| = n$ καὶ κάθε ἀκμὴ τοῦ M μειώνει τὸ $|\mathcal{F}|$ κατὰ ἕνα, ἄρα στὸ τέλος ἡ $\mathcal{F}$ εἶναι μιὰ διαμέριση τοῦ S σὲ $n-|M| = n-k$ ἁλυσίδες. Ἀφοῦ κάθε ἀντιαλυσίδα ἔχει τὸ πολὺ ἕνα στοιχεῖο ἀπὸ κάθε ἁλυσίδα, ἡ ἀντιαλυσίδα ποὺ βρήκαμε παραπάνω ἔχει ἀκριβῶς $n - k$ στοιχεῖα, καὶ τὸ λῆμμα ἰσχύει γιὰ $\rho = n - k$. □

Ὁρισμός 12.27. Ἔστω $\mathcal{P} = (S, <)$ μερικὴ διάταξη. Καλοῦμε *πλάτος τῆς* $\mathcal{P}$, συμβολισμὸς **width**$(\mathcal{P})$, τὸν ἐλάχιστο πληθάριθμο k μιᾶς διαμέρισης $\mathcal{F} = \{L_1, \ldots, L_k\}$ τοῦ S γιὰ τὴν ὁποία κάθε $L_i \in \mathcal{F}$ εἶναι ἁλυσίδα τῆς $\mathcal{P}$.

Θεώρημα 12.28 (Dilworth, 1950 [26])**.** Γιὰ κάθε μερικὴ διάταξη $\mathcal{P} = (S, <)$ τὸ πλάτος τῆς $\mathcal{P}$ εἶναι ἴσο μὲ τὸ μέγιστο πληθάριθμο μιᾶς ἀντιαλυσίδας τοῦ $\mathcal{P}$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\mathcal{F}$ μιὰ διαμέριση τῆς $\mathcal{P}$ σὲ ρ ἁλυσίδες καὶ ἔστω I ἀντιαλυσίδα μεγέθους ρ, σύμφωνα μὲ τὸ Λῆμμα 12.26.

Μιὰ καὶ κάθε διαμέριση $\mathcal{F}'$ τῆς $\mathcal{P}$ σὲ ἁλυσίδες πρέπει νὰ ἔχει τουλάχιστον μιὰ ἁλυσίδα ἀνὰ μέλος τῆς ἀντιαλυσίδας I, ἔχουμε ὅτι $|\mathcal{F}'| \geq |I| = |\mathcal{F}|$. Ἄρα ἡ $\mathcal{F}$ εἶναι διαμέριση ἐλαχίστου μεγέθους.

Μιὰ καὶ κάθε ἀντιαλυσίδα I' τῆς $\mathcal{P}$ μπορεῖ νὰ ἔχει τὸ πολὺ ἕνα στοιχεῖο ἀπὸ κάθε ἁλυσίδα τῆς διαμέρισης $\mathcal{F}$, ἔχουμε ὅτι $|I'| \leq |\mathcal{F}| = |I|$. Ἄρα τὸ I εἶναι ἀντιαλυσίδα μεγίστου μεγέθους. □

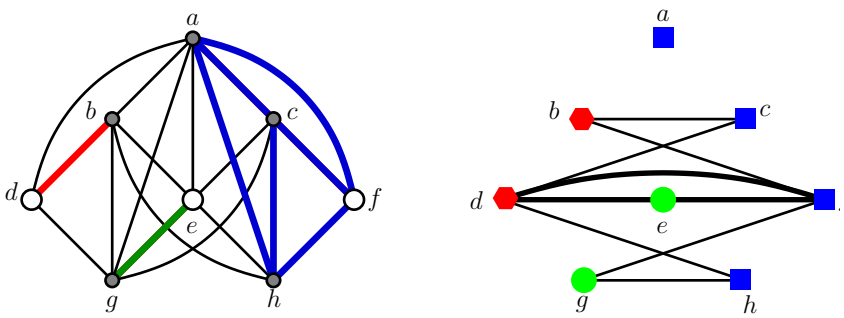
Παρατήρηση 12.29. Κάθε ἐναγόμενο ὑπογράφημα ἑνὸς γραφήματος συγκρισιμότητας εἶναι ἐπίσης γράφημα συγκρισιμότητας.

Παρατήρηση 12.30. Ἔστω $\mathcal{P} = (S, <)$ μερικὴ διάταξη στὸ πεπερασμένο σύνολο S. Τότε $\alpha(G_{\mathcal{P}}) =$ **width**$(\mathcal{P})$.

Ἀπόδειξη. Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ἀντιαλυσίδα στὴν $\mathcal{P}$ ἀντιστοιχεῖ σὲ ἕνα ἀνεξάρτητο σύνολο τοῦ $G_{\mathcal{P}}$. Ἄρα τὸ $\alpha(G_{\mathcal{P}})$ εἶναι ἴσο μὲ τὸ μέγιστο μέγεθος μιᾶς ἀντιαλυσίδας τοῦ $\mathcal{P}$ τὸ ὁποῖο, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 12.28, εἶναι ἴσο μὲ τὸ πλάτος τῆς $\mathcal{P}$. □

Παρατήρηση 12.31. Ἔστω $\mathcal{P} = (S, <)$ μερικὴ διάταξη στὸ πεπερασμένο σύνολο S. Τότε **width**$(\mathcal{P}) = \chi(\overline{G_{\mathcal{P}}})$

Ἀπόδειξη. Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ἁλυσίδα στὴν $\mathcal{P}$ ἀντιστοιχεῖ σὲ μιὰ κλίκα τοῦ $G_{\mathcal{P}}$. Ἄρα ὑπάρχει μιὰ διαμέριση $\mathcal{F}$ τῆς $\mathcal{P}$ σὲ ρ ἁλυσίδες, ἂν καὶ μόνο ἂν ὑπάρχει μιὰ διαμέριση τοῦ $V(G_{\mathcal{P}})$ σὲ ρ σύνολα κορυφῶν ἐκ τῶν ὁποίων τὸ καθένα ἐνάγει κλίκα στὸ $G_{\mathcal{P}}$. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 8.9, ἔχουμε ὅτι τότε (καὶ μόνο τότε) ἰσχύει ὅτι $\chi(\overline{G_{\mathcal{P}}}) \leq \rho$. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ πλάτους τῆς $\mathcal{P}$, καταλήγουμε ὅτι **width**$(\mathcal{P}) = \chi(\overline{G_{\mathcal{P}}})$ □



Σχῆμα 12.10: Τὸ γράφημα συγκρισιμότητας $G_{\mathcal{P}}$ ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν μερικὴ διάταξη $\mathcal{P}$ τοῦ Σχήματος 12.7 καὶ τὸ συμπληρωματικὸ τοῦ $\overline{G_{\mathcal{P}}}$. Στὸ γράφημα $G_{\mathcal{P}}$ διακρίνεται ἡ διαμέριση σὲ 3 κλίκες καὶ τὸ ἀνεξάρτητο σύνολο μεγέθους 3 τὰ ὁποία στὸ $\overline{G_{\mathcal{P}}}$ ἀντιστοιχοῦν σὲ ἕνα 3-χρωματισμὸ καὶ σὲ μιὰ κλίκα μὲ 3 κορυφές.

Θεώρημα 12.32. Τὰ γραφήματα συγκρισιμότητας εἶναι τέλεια.

Ἀπόδειξη. Ἔστω G γράφημα συγκρισιμότητας μὲ n κορυφές. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 12.29 ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι $\chi(G) \leq \omega(G)$. Ἀντὶ αὐτοῦ θὰ δείξουμε ὅτι $\chi(\overline{G}) \leq \omega(\overline{G})$ καὶ τὸ θεώρημα προκύπτει ἀπὸ τὸ Θεώρημα 12.22.

Ἔστω $\mathcal{P} = (V(G), <)$ μιὰ μερικὴ διάταξη στὴν ὁποία ἀντιστοιχεῖ τὸ G (δηλαδὴ $G = G_{\mathcal{P}}$). Ἀπὸ τὶς Παρατηρήσεις 12.31, 12.30 καὶ 9.14 ἔχουμε ὅτι $\chi(\overline{G}) = \chi(\overline{G_{\mathcal{P}}}) =$ **width**$(\mathcal{P}) = \alpha(G_{\mathcal{P}}) = \alpha(G) = \omega(\overline{G})$ καὶ τὸ θεώρημα ἰσχύει. □

Παρατήρηση 12.33. Παρατηροῦμε ὅτι αὐτὸ ποὺ οὐσιαστικὰ ἀποδείξαμε στὴν ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 12.32, εἶναι ὅτι τὰ συμπληρώματα τῶν γραφημάτων συγκρισιμότητας εἶναι τέλεια (γιὰ τὴν τελειότητα τῶν γραφημάτων συγκρισιμότητας χρειάστηκε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ Θεώρημα 12.22).

Ὁρισμός 12.34. Καλοῦμε ἕνα γράφημα *γράφημα συνσυγκρισιμότητας* ἂν τὸ συμπλήρωμά του εἶναι γράφημα συγκρισιμότητας.

Πόρισμα 12.35. Τὰ γραφήματα συνσυγκρισιμότητας εἶναι τέλεια.

Ἀπόδειξη. Ἔστω G γράφημα συνσυγκρισιμότητας, δηλαδὴ τὸ $\overline{G}$ εἶναι γράφημα συγκρισιμότητας. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 12.32 τὸ $\overline{G}$ εἶναι τέλειο, ὁπότε ἀπὸ τὸ Θεώρημα 12.22 τέλειο εἶναι καὶ τὸ G. □

12.5 Τὸ ἰσχυρὸ θεώρημα τέλειων γραφημάτων

Ἡ ἰσχυρὴ εἰκασία τῶν τέλειων γραφημάτων εἶναι πλέον θεώρημα.

Θεώρημα 12.36 (Chudnovsky, Robertson, Seymour & Thomas, 2002 [21])**.** Ἕνα γράφημα εἶναι τέλειο ἂν καὶ μόνο ἂν οὔτε τὸ ἴδιο οὔτε τὸ συμπλήρωμά του δὲν περιέχουν περιττὲς τρύπες μεγέθους μεγαλύτερου ἢ ἴσου τοῦ 5.

Ἡ ἀπόδειξή του Θεωρήματος 12.36 εἶναι ἀρκετὰ περίπλοκη. Γιὰ περισσότερες λεπτομέρειες σχετικὰ μὲ τὸ πῶς βρέθηκε, βλ. [94].

Ἀσκήσεις Κεφαλαίου

12.1 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι οἱ κλάσεις τῶν γραφημάτων διαστημάτων καὶ διαχωρισμοῦ εἶναι μὴ συγκρίσιμες μὲ τὴ σχέση ὑποσυνόλου. Δεῖξτε ἐπίσης ὅτι ἡ τομή τους εἶναι μὴ κενὴ καὶ ὅτι ἡ ἕνωσή τους δὲν περιλαμβάνει ὅλα τὰ γραφήματα.

12.2 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι ἡ κλάση τῶν χορδικῶν γραφημάτων εἶναι κλειστὴ ὡς πρὸς συνθλίψεις ἀκμῶν.

12.3 (★★☆)**.** Ἔστω:

$$k = \min\{\omega(H) - 1 \mid G \subseteq H,\, H \text{ γράφημα διαχωρισμοῦ}\}$$

$$l = \min\{\omega(H) \mid G \subseteq H,\, H \text{ γράφημα διαχωρισμοῦ}\}$$

Δεῖξτε ὅτι $k \leq \mathbf{vc}(G) \leq l$.
Σὲ ποιὲς περιπτώσεις ὁ ἀριθμὸς καλύμματος κορυφῶν τοῦ G εἶναι ἴσος μὲ τὸ μικρότερο ἀριθμὸ κλίκας ποὺ μπορεῖ νὰ ἔχει ἕνα γράφημα διαχωρισμοῦ H ποὺ περιέχει τὸ G ὡς ὑπογράφημα;

12.4 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι κάθε διμερὲς γράφημα εἶναι τέλειο.

12.5 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι ὁ κύκλος C_{2k+1} μὲ $k \geq 2$ δὲν εἶναι τέλειο γράφημα, ἐνῶ ὁ C_{2k} εἶναι.

12.6 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι κάθε τέλειο γράφημα G ἱκανοποιεῖ $n(G) \leq \alpha(G) \cdot \omega(G)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

ΔΙΑΠΕΡΑΣΕΙΣ

Ένα ἀπὸ τὰ παλαιότερα ἐρωτήματα τῆς θεωρίας γραφημάτων: πότε μπορεῖ κανεὶς νὰ διασχίσει ἕνα γράφημα περνώντας ἀκριβῶς μία φορὰ ἀπὸ κάθε ἀκμή, καὶ πότε ἀκριβῶς μία φορὰ ἀπὸ κάθε κορυφή. Τὰ δύο ἐρωτήματα μοιάζουν συμμετρικά, ὅμως οἱ ἀπαντήσεις τους δὲν θὰ μποροῦσαν νὰ διαφέρουν περισσότερο. Τὸ πρῶτο λύνεται πλήρως ἀπὸ ἕνα κριτήριο ποὺ ἐλέγχεται μὲ μιὰ ματιὰ στοὺς βαθμοὺς τῶν κορυφῶν. Γιὰ τὸ δεύτερο δὲν εἶναι γνωστὸς κανένας τέτοιος χαρακτηρισμός, καὶ ὅσα γνωρίζουμε εἶναι ἱκανὲς συνθῆκες.

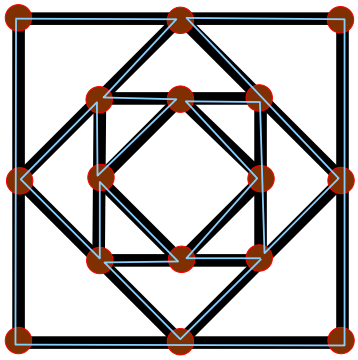
13.1 Διαπεράσεις ἀκμῶν

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι, σύμφωνα μὲ τὸν Ὁρισμὸ 4.1 μιὰ περιήγηση σὲ ἕνα γράφημα G εἶναι ἕνας περίπατος ποὺ ἀρχίζει καὶ τελειώνει στὴν ἴδια κορυφή.

Ὁρισμός 13.1. Μιὰ *περιήγηση Euler* σὲ ἕνα γράφημα G εἶναι μιὰ περιήγηση $W = [v_0, \ldots, v_{r-1}, v_0]$ ποὺ περνάει ἀπὸ ὅλες τὶς ἀκμὲς τοῦ G μιὰ ἀκριβῶς φορά. Μὲ ἄλλα λόγια μιὰ περιήγηση $W = [v_0, \ldots, v_{r-1}, v_0]$ εἶναι περιήγηση Euler ἂν

$$\forall_{e \in E(G)} \, |\{i \mid \{v_i, v_{i+1 \bmod r}\} = e\}| = 1.$$

Σχόλιο 13.2. Τὸ πρόβλημα τῆς εὕρεσης (ἂν ὑπάρχει) μιᾶς περιήγησης Euler σὲ ἕνα γράφημα εἶναι ἀπὸ τὰ πρῶτα γραφοθεωρητικὰ προβλήματα ποὺ ἔχουν τεθεῖ ποτέ. Τὸ πρόβλημα ὁρίστηκε τὸν 18ο αἰῶνα ἀπὸ τὸ μαθηματικὸ Leonhard Euler



Σχῆμα 13.1: Ἕνα γράφημα καὶ μία περιήγηση Euler σὲ αὐτό.

μὲ ἀφορμὴ τὴν διάταξη τῶν γεφυρῶν πάνω ἀπὸ τὸν ποταμὸ Pregel τῆς πόλης Königsberg ἡ ὁποία τότε[1] ἦτανε ἡ πρωτεύουσα τῆς Ἀνατολικῆς Πρωσσίας. Τὸ ἐρώτημα ποὺ ἀπασχολοῦσε τοὺς κατοίκους τῆς πόλης ἦτανε ἡ ὕπαρξη διαδρομῆς ἡ ὁποία νὰ ἐπιστρέφει στὸ σημεῖο ἐκκίνησης ἀφοῦ περάσει μόνο μιὰ φορὰ ἀπὸ κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς ἑπτὰ γέφυρες τῆς πόλης (βλ. σχ. 13.2). Τὸ ἐρώτημα τέθηκε στὸν Euler ὁ ὁποῖος ἐκείνη τὴν ἐποχὴ ἔδρευε στὴν Ἁγία Πετρούπολη [38]. Ἡ ἀπάντηση τοῦ Euler ἦτανε ὅτι τέτοια διαδρομὴ δὲν ὑπάρχει καὶ συνοδεύτηκε ἀπὸ τὸ Θεώρημα 13.3 τὸ ὁποῖο ξεκαθαρίζει τὸ πότε μιὰ τέτοια διαδρομὴ ὑπάρχει. Τὸ θεώρημα αὐτὸ (λόγῳ τῆς παλαιότητάς του) θεωρεῖται ὡς ἱδρυτικὸ γιὰ τὴν θεωρία γραφημάτων.

Θεώρημα 13.3 (Euler, 1736 [38])**.** Ἕνα συνεκτικὸ γράφημα ἔχει περιήγηση Euler ἂν καὶ μόνο ἂν ὅλες οἱ κορυφές του ἔχουν ἄρτιο βαθμό.

Ἀπόδειξη. Θὰ δείξουμε πρῶτα τὴν κατεύθυνση «μόνο ἄν». Ἔστω ὅτι τὸ G ἔχει περιήγηση Euler $C = [v_0, \ldots, v_{r-1}, v_0]$ καὶ ἔστω v μιὰ ὁποιαδήποτε κορυφὴ τοῦ G. Ἔστω $I \subseteq \{0, \ldots, r-1\}$ τὸ σύνολο τῶν δεικτῶν γιὰ τοὺς ὁποίους $v = v_i$ (δηλ. $I = \{i \in \{0, \ldots, r-1\} \mid v = v_i\}$). Γιὰ κάθε $i \in I$ ὑπάρχουν 2 προσκείμενες στὴν $v = v_i$ ἀκμές, οἱ $\{v_{i-1 \bmod r}, v_i\}$ καὶ $\{v_i, v_{i+1 \bmod r}\}$ καὶ γιὰ διαφορετικοὺς δεῖκτες τοῦ I οἱ ἀκμὲς αὐτὲς εἶναι διαφορετικές. Μιὰ καὶ ὅλες οἱ ἀκμὲς τοῦ γραφήματος ἐμφανίζονται ὡς διαδοχικὲς στὴν C, ἔχουμε ὅτι $\deg(v) = 2 \cdot |I|$ καὶ ἄρα ἡ v ἔχει ἄρτιο βαθμό.

[1] Σήμερα ἡ πόλη αὐτὴ βρίσκεται στὴν ἐπικράτεια τῆς Ῥωσσικῆς Ὁμοσπονδίας καὶ ὀνομάζεται Калининград (Kaliningrad).

Γιὰ τὴν κατεύθυνση «ἄν» ὁρίζουμε πρῶτα τὴν ποσότητα

$$\rho(G) = \sum_{v \in V(G)} (\deg(v) - 2).$$

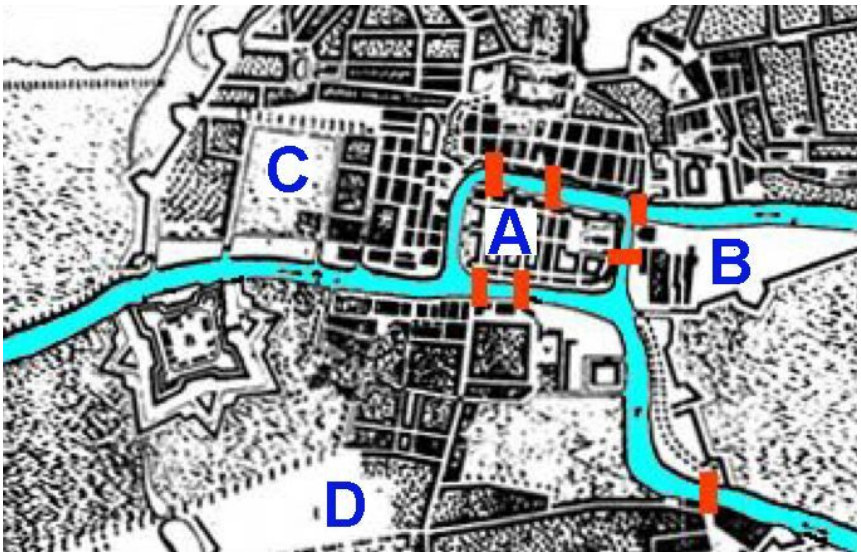
καὶ παρατηροῦμε ὅτι στὴν περίπτωση ὅπου $\rho(G) = 0$ τὸ θεώρημα ἰσχύει προφανῶς γιατὶ τότε τὸ G εἶναι κύκλος. Ἔστω τώρα G ἀντιπαράδειγμα γιὰ τὸ ὁποῖο τὸ $\rho(G)$ εἶναι τὸ ἐλάχιστο δυνατό. Μιὰ καὶ $\rho(G) > 0$, ὑπάρχει μιὰ κορυφὴ v μὲ (ἄρτιο) βαθμὸ μεγαλύτερο ἢ ἴσο τοῦ 4. Κατασκευάζουμε ἕνα νέο γράφημα G' ὡς ἑξῆς: ἂν ἡ v δὲν εἶναι ἀρθρικὴ κορυφὴ τοῦ G τότε ἐπιλέγουμε δύο ὁποιεσδήποτε ἀκμὲς $\{x, v\}$ καὶ $\{y, v\}$ προσκείμενες στὸ v, τὶς ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὸ G, προσθέτουμε μιὰ νέα κορυφὴ w καὶ τὴν συνδέουμε μὲ τὶς κορυφὲς x καὶ y. Ἂν ἡ v εἶναι ἀρθρικὴ κορυφὴ τοῦ G, τότε ἐφαρμόζουμε τὴν ἴδια κατασκευὴ ἐπιλέγοντας ὅμως ἀκμὲς ποὺ νὰ ἀνήκουν σὲ διαφορετικὰ τεμάχια τοῦ G. Σὲ κάθε περίπτωση, τὸ νέο γράφημα G' εἶναι συνεκτικό, ὅλες οἱ κορυφές του ἔχουν ἄρτιο βαθμὸ ($\deg_{G'}(v) = \deg_G(v) - 2$) καὶ ἡ ὕπαρξη περιήγησης Euler στὸ G' συνεπάγεται τὴν ὕπαρξη περιήγησης Euler στὸ G (ὅταν ἡ περιήγηση στὸ G' περάσει ἀπὸ τὴν νέα κορυφὴ w, ἡ ἀντίστοιχη περιήγηση στὸ G θὰ (ξανα)περάσει ἀπὸ τὴν κορυφὴ v). Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι $\rho(G') < \rho(G)$ καὶ ἀπὸ τὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο ἐπιλέξαμε τὸ G, τὸ G' ἔχει περιήγηση Euler. Ἄρα καὶ τὸ G θὰ ἔχει περιήγηση Euler, ἄτοπο. □

Παρατήρηση 13.4. Ἡ γραφοθεωρητικὴ ἀναπαράσταση τοῦ προβλήματος τῶν γεφυρῶν τοῦ Königsberg ἀντιστοιχεῖ στὴν εὕρεση μιᾶς περιήγησης Euler στὸ γράφημα τοῦ Σχήματος 13.3. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ κριτήριο τοῦ Θεωρήματος 13.3 ἀποτυγχάνει γιὰ αὐτὸ τὸ γράφημα καὶ κατὰ συνέπεια ἡ ἀπάντηση στὸ πρόβλημα εἶναι ἀρνητική.

Ὁρισμός 13.5. Ἕνας *περίπατος Euler* σὲ ἕνα γράφημα G εἶναι ἕνας περίπατος $W = [v_0, \ldots, v_{r-1}]$ ποὺ νὰ περνάει ἀπὸ ὅλες τὶς ἀκμὲς τοῦ G μιὰ ἀκριβῶς φορά.

Τὸ παρακάτω Πόρισμα εἶναι ἄμεση συνέπεια τοῦ Θεωρήματος 13.3.

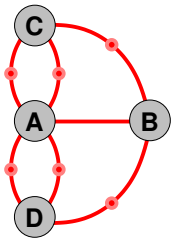
Πόρισμα 13.6. Ἕνα συνεκτικὸ γράφημα ἔχει περίπατο Euler ἂν καὶ μόνο ἂν εἴτε ὅλες οἱ κορυφές του ἔχουν ἄρτιο βαθμὸ εἴτε ἔχει ἀκριβῶς δύο κορυφὲς περιττοῦ βαθμοῦ. Στὴν πρώτη περίπτωση ὁ περίπατος Euler εἶναι καὶ περιήγηση Euler καὶ στὴν δεύτερη περίπτωση, ὁ περίπατος Euler θὰ ἔχει ὡς ἄκρα τὶς δύο κορυφὲς περιττοῦ βαθμοῦ.



Σχῆμα 13.2: Ἡ πόλη Königsberg κατὰ τὸν 18ο αἰῶνα καὶ οἱ ἑπτὰ γέφυρες πάνω ἀπὸ τὸν ποταμὸ Pregel. Τὸ νησάκι στὸ κέντρο τῆς πόλης στὸ ὁποῖο προσπίπτουν 5 ἀπὸ τὶς 7 γέφυρες ὀνομάζεται Kniephof.

Ἀπόδειξη. («μόνο ἄν») Ἔστω $W = [v_0, \ldots, v_{r-1}]$ ἕνας περίπατος Euler τοῦ G. Ἂν $v_0 = v_{r-1}$, τότε ὁ W εἶναι περιήγηση Euler καὶ ἀπὸ τὸ Θεώρημα 13.3 ὅλες οἱ κορυφὲς τοῦ G ἔχουν ἄρτιο βαθμό. Ἂν $v_0 \neq v_{r-1}$, ἔστω G' τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸ G ἂν προσθέσουμε μιὰ νέα κορυφὴ w καὶ τὶς ἀκμὲς $\{v_{r-1}, w\}$ καὶ $\{w, v_0\}$. Ὁ W μαζὶ μὲ τὶς δύο νέες ἀκμὲς εἶναι περιήγηση Euler τοῦ συνεκτικοῦ γραφήματος G', ὁπότε, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 13.3, ὅλες οἱ κορυφὲς τοῦ G' ἔχουν ἄρτιο βαθμό. Ἑπομένως οἱ v_0 καὶ v_{r-1} ἔχουν περιττὸ βαθμὸ στὸ G, ἐνῶ ὅλες οἱ ὑπόλοιπες κορυφές του ἔχουν ἄρτιο βαθμό.

(«ἄν») Ἂν ὅλες οἱ κορυφὲς τοῦ G ἔχουν ἄρτιο βαθμὸ τότε, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 13.3, τὸ G ἔχει περιήγηση Euler καὶ ἄρα περίπατο Euler. Ἂν ἀκριβῶς δύο κορυφὲς x, y τοῦ G ἔχουν περιττὸ βαθμό, τότε τὸ γράφημα G' ποὺ προκύπτει ἂν προσθέσουμε μιὰ νέα κορυφὴ w καὶ τὶς ἀκμὲς $\{x, w\}$ καὶ $\{w, y\}$ εἶναι συνεκτικὸ καὶ ὅλες οἱ κορυφές του ἔχουν ἄρτιο βαθμό. Ἄρα, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 13.3, τὸ G' ἔχει περιήγηση Euler, ἡ ὁποία μετὰ τὴν ἀφαίρεση τῆς w μετατρέπεται σὲ περίπατο Euler τοῦ G μὲ ἄκρα τὶς x καὶ y. □



Σχῆμα 13.3: Τὸ γράφημα ποὺ μοντελοποιεῖ τὸ πρόβλημα τῶν γεφυρῶν τοῦ Königsberg. Τὸ νησὶ Kniephof ἀντιστοιχεῖ στὴν κορυφὴ A καὶ οἱ τρεῖς περιοχὲς γύρω ἀπὸ αὐτὸ ἀντιστοιχοῦν στὶς κορυφὲς B, C καὶ D.

Διαμέριση σὲ κύκλους

Ἡ συνθήκη «ὅλες οἱ κορυφὲς ἔχουν ἄρτιο βαθμό» ἔχει μιὰ δεύτερη, καθαρὰ δομικὴ ἀνάγνωση, ἡ ὁποία δὲν προϋποθέτει συνεκτικότητα.

Θεώρημα 13.7. Ἕνα γράφημα G ἔχει ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ ἄρτιου βαθμοῦ ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ $E(G)$ διαμερίζεται σὲ σύνολα ἀκμῶν κύκλων τοῦ G.

Ἀπόδειξη. ($\Leftarrow$) Ἔστω $\{E(C_1), \dots, E(C_r)\}$ μιὰ τέτοια διαμέριση. Κάθε κορυφὴ v ἔχει βαθμὸ 0 ἢ 2 σὲ καθέναν ἀπὸ τοὺς κύκλους, ὁπότε

$$\deg_G(v) = \sum_{i=1}^{r} \deg_{C_i}(v)$$

εἶναι ἄθροισμα ἄρτιων ἀριθμῶν καὶ ἄρα ἄρτιος.

($\Rightarrow$) Ἐπαγωγὴ στὸ $m(G)$. Ἂν $m(G) = 0$, ἡ κενὴ διαμέριση κάνει τὴ δουλειά. Ἔστω $m(G) \geq 1$ καὶ ἔστω H τὸ ὑπογράφημα τοῦ G ποὺ ἐπάγεται ἀπὸ τὶς μὴ ἀπομονωμένες κορυφές του. Κάθε κορυφὴ τοῦ H ἔχει βαθμὸ ἄρτιο καὶ τουλάχιστον 1, δηλαδὴ τουλάχιστον 2· ἄρα $\delta(H) \geq 2$ καὶ ἀπὸ τὸ Λῆμμα 4.29 τὸ H περιέχει κύκλο C.

Τὸ γράφημα $G - E(C)$ ἔχει καὶ αὐτὸ ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ ἄρτιου βαθμοῦ, ἀφοῦ κάθε κορυφὴ χάνει 0 ἢ 2 προσκείμενες ἀκμές, καὶ ἔχει γνησίως λιγότερες ἀκμὲς ἀπὸ τὸ G. Ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση τὸ $E(G) \setminus E(C)$ διαμερίζεται σὲ σύνολα ἀκμῶν κύκλων, καὶ προσθέτοντας σὲ αὐτὰ τὸ $E(C)$ παίρνουμε τὴ ζητούμενη διαμέριση τοῦ $E(G)$. □

Τὸ θεώρημα δίνει ἀμέσως τὴν «εὔκολη» κατεύθυνση τοῦ Θεωρήματος 13.3 μὲ ἄλλο τρόπο, ἀλλὰ ἡ δύσκολη κατεύθυνση δὲν προκύπτει ἀπὸ αὐτὸ χωρὶς ἐπιπλέον

δουλειά: μιὰ διαμέριση σὲ κύκλους δὲν εἶναι περιήγηση, καὶ χρειάζεται νά τους συγκολλήσουμε. Αὐτὸ ἀκριβῶς κάνει ὁ ἀλγόριθμος τῆς ἑπόμενης ὑποενότητας.

Παρατήρηση 13.8. Ἡ διαμέριση σὲ κύκλους εἶναι τὸ ἐργαλεῖο πίσω ἀπὸ ἀρκετὰ ἀποτελέσματα ποὺ ἔχουμε ἤδη συναντήσει. Δείχνει, γιὰ παράδειγμα, ὅτι κανένα κανονικὸ γράφημα ἄρτιου βαθμοῦ δὲν ἔχει γέφυρα, ἀφοῦ κάθε ἀκμή του βρίσκεται πάνω σὲ κύκλο.

Ὁ ἀλγόριθμος τοῦ Hierholzer

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 13.3 ποὺ δώσαμε εἶναι μὴ κατασκευαστική: μᾶς λέει ὅτι ἡ περιήγηση ὑπάρχει, ὄχι πῶς νὰ τὴ βροῦμε. Ὁ ἀλγόριθμος ποὺ ἀκολουθεῖ, ὁ ὁποῖος ὀφείλεται στὸν Hierholzer [55], τὴ βρίσκει σὲ γραμμικὸ χρόνο καὶ ταυτόχρονα ἀποτελεῖ δεύτερη, κατασκευαστικὴ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος. Στὰ ἑπόμενα, *διαδρομὴ* θὰ λέμε ἕναν περίπατο στὸν ὁποῖο καμία ἀκμὴ δὲν ἐμφανίζεται δύο φορές, καὶ *κλειστὴ διαδρομὴ* μιὰ διαδρομὴ ποὺ ἀρχίζει καὶ τελειώνει στὴν ἴδια κορυφή.

1. Ἔστω v_0 ὁποιαδήποτε κορυφὴ καὶ ἔστω C ἡ περιήγηση $[v_0]$.
2. Ἐνῶ τὸ C δὲν περιέχει ὅλες τὶς ἀκμὲς τοῦ G,
   Ἔστω u κορυφὴ τοῦ C ποὺ προσπίπτει σὲ ἀκμὴ ἐκτὸς τοῦ C,
   Ξεκινώντας ἀπὸ τὴν u, διάσχισε ἀκμὲς ἐκτὸς τοῦ C ὅσο γίνεται καὶ ἔστω C' ἡ κλειστὴ διαδρομὴ ποὺ προκύπτει,
   Ἀντικατέστησε τὸ C μὲ τὴ συγκόλληση τῶν C καὶ C' στὴν u.
3. Ἐπίστρεψε τὸ C.

Θεώρημα 13.9. Ἔστω G συνεκτικὸ γράφημα μὲ ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ ἄρτιου βαθμοῦ. Ὁ παραπάνω ἀλγόριθμος τερματίζει καὶ ἐπιστρέφει περιήγηση Euler τοῦ G.

Ἀπόδειξη. Τὸ κρίσιμο σημεῖο εἶναι τὸ ἀκόλουθο.

Ἰσχυρισμός 13.10. Ἔστω H ὑπογράφημα τοῦ G μὲ ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ ἄρτιου βαθμοῦ, ἔστω $u \in V(H)$, καὶ ἔστω W μιὰ διαδρομὴ τοῦ H ποὺ ξεκινάει ἀπὸ τὴν u, δὲν ἐπαναλαμβάνει ἀκμή, καὶ εἶναι μέγιστη ὡς πρὸς αὐτὴ τὴν ἰδιότητα. Τότε ἡ W τερματίζει στὴν u, δηλαδὴ εἶναι κλειστή.

Ἀπόδειξη. Ἔστω x τὸ τελευταῖο ἄκρο τῆς W καὶ ἔστω $x \neq u$. Μετροῦμε τὶς ἀκμὲς τῆς W ποὺ προσπίπτουν στὴν x: κάθε φορὰ ποὺ ἡ διαδρομὴ περνάει ἀπὸ τὴν x χωρὶς νὰ σταματήσει χρησιμοποιεῖ δύο τέτοιες ἀκμές, ἐνῶ ἡ τελευταία ἄφιξη χρησιμοποιεῖ μία. Ἄρα ἡ W χρησιμοποιεῖ περιττὸ πλῆθος ἀκμῶν προσκείμενων στὴν

x. Ὁ $\deg_H(x)$ εἶναι ἄρτιος, ὁπότε ὑπάρχει ἀκμὴ τοῦ H προσκείμενη στὴν x ποὺ δὲν ἀνήκει στὴ W, καὶ ἡ W θὰ μποροῦσε νὰ ἐπεκταθεῖ, ποὺ ἀντιβαίνει στὴ μεγιστικότητά της. □

Ἂς δοῦμε τώρα ὅτι κάθε ἐπανάληψη τοῦ βήματος 2 ἐκτελεῖται σωστά. Στὴν ἀρχὴ τῆς ἐπανάληψης τὸ C εἶναι κλειστὴ διαδρομὴ χωρὶς ἐπανάληψη ἀκμῆς. Τὸ γράφημα $G - E(C)$ ἔχει ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ ἄρτιου βαθμοῦ, ἀφοῦ κάθε κορυφὴ χάνει ἄρτιο πλῆθος προσκείμενων ἀκμῶν — δύο γιὰ κάθε πέρασμα τῆς C ἀπὸ αὐτήν. Ἀφοῦ τὸ C δὲν περιέχει ὅλες τὶς ἀκμὲς καὶ τὸ G εἶναι συνεκτικό, ὑπάρχει ἀκμὴ ἐκτὸς τοῦ C μὲ ἄκρο πάνω στὸ C: διαφορετικὰ καμία ἀκμὴ δὲν θὰ συνέδεε τὸ $V(C)$ μὲ τὸ ὑπόλοιπο γράφημα καὶ οἱ ὑπόλοιπες ἀκμὲς θὰ βρίσκονταν σὲ ἄλλη συνεκτικὴ συνιστῶσα. Ἔστω u ἕνα τέτοιο ἄκρο. Ἐφαρμόζοντας τὸν Ἰσχυρισμὸ 13.10 στὸ $H = G - E(C)$, ἡ μέγιστη διαδρομὴ ποὺ ξεκινάει ἀπὸ τὴν u μέσα στὸ $G - E(C)$ εἶναι κλειστή, δηλαδὴ τὸ C' εἶναι περιήγηση.

Ἡ συγκόλληση τῶν C καὶ C' στὴν u — διασχίζουμε τὸ C ὡς τὴν u, ἔπειτα ὁλόκληρο τὸ C', καὶ ἔπειτα τὸ ὑπόλοιπο τοῦ C — δίνει πάλι κλειστὴ διαδρομὴ χωρὶς ἐπανάληψη ἀκμῆς, ἀφοῦ τὰ $E(C)$ καὶ $E(C')$ εἶναι ξένα. Τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν τοῦ C αὐξάνεται γνησίως σὲ κάθε ἐπανάληψη, ὁπότε ὁ ἀλγόριθμος τερματίζει, καὶ τερματίζει μόνο ὅταν τὸ C περιέχει ὅλες τὶς ἀκμὲς τοῦ G, δηλαδὴ ὅταν τὸ C εἶναι περιήγηση Euler. □

Παρατήρηση 13.11. Ὁ ἀλγόριθμος ὑλοποιεῖται σὲ χρόνο $O(n + m)$. Κρατᾶμε γιὰ κάθε κορυφὴ ἕναν δείκτη στὴ λίστα γειτνίασής της, ὁ ὁποῖος μόνο προχωράει: ὅταν ἀναζητοῦμε ἀχρησιμοποίητη ἀκμὴ στὴν x, προσπερνᾶμε τὶς ἤδη χρησιμοποιημένες μία φορὰ γιὰ πάντα. Ἔτσι τὸ συνολικὸ κόστος ὅλων τῶν ἀναζητήσεων εἶναι $\sum_v \deg(v) = 2m$. Ἡ συγκόλληση γίνεται σὲ σταθερὸ χρόνο ἂν τὸ C ἀποθηκεύεται ὡς διπλὰ συνδεδεμένη λίστα, ἐνῶ οἱ ὑποψήφιες κορυφὲς u διατηροῦνται σὲ μιὰ στοίβα.

Πόσες διαδρομὲς χρειάζονται

Ὅταν τὸ γράφημα ἔχει κορυφὲς περιττοῦ βαθμοῦ, δὲν ὑπάρχει οὔτε περιήγηση οὔτε περίπατος Euler. Τὸ φυσικὸ ἐρώτημα γίνεται τότε ποσοτικό: πόσες διαδρομὲς χρειάζονται γιὰ νὰ διασχιστοῦν ὅλες οἱ ἀκμές; Θυμίζουμε ὅτι ἀπὸ τὸ λῆμμα τῆς χειραψίας τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν περιττοῦ βαθμοῦ εἶναι πάντοτε ἄρτιος ἀριθμός.

Θεώρημα 13.12. Ἔστω G συνεκτικὸ γράφημα μὲ ἀκριβῶς $2k$ κορυφὲς περιττοῦ βαθμοῦ, ὅπου $k \geq 1$. Τότε τὸ $E(G)$ διαμερίζεται σὲ k διαδρομὲς χωρὶς ἐπανάληψη ἀκμῆς, καὶ σὲ λιγότερες δὲν διαμερίζεται.

Ἀπόδειξη. Κάτω φράγμα. Ἔστω $\{E(W_1), \ldots, E(W_t)\}$ διαμέριση τοῦ $E(G)$ σὲ t διαδρομὲς χωρὶς ἐπανάληψη ἀκμῆς. Γιὰ κάθε κορυφὴ v καὶ κάθε i, ὁ βαθμὸς τῆς v στὴ W_i εἶναι περιττὸς ἀκριβῶς ὅταν ἡ v εἶναι ἄκρο τῆς W_i: κάθε ἐνδιάμεσο πέρασμα χρησιμοποιεῖ δύο ἀκμές, ἐνῶ κάθε ἄκρο μία. Ἑπομένως, ἂν ὁ $\deg_G(v) = \sum_i \deg_{W_i}(v)$ εἶναι περιττός, τότε ἡ v εἶναι ἄκρο περιττοῦ πλήθους διαδρομῶν, ἄρα τουλάχιστον μίας. Κάθε διαδρομὴ ἔχει τὸ πολὺ δύο ἄκρα, ὁπότε $2t \geq 2k$, δηλαδὴ $t \geq k$.

Ἄνω φράγμα. Ἔστω $u_1, \ldots, u_{2k}$ οἱ κορυφὲς περιττοῦ βαθμοῦ. Κατασκευάζουμε γράφημα G' προσθέτοντας στὸ G k νέες κορυφὲς $w_1, \ldots, w_k$, ὅπου ἡ w_i ἑνώνεται μὲ τὶς u_{2i-1} καὶ u_{2i}. Τὸ G' εἶναι γράφημα — οἱ νέες ἀκμὲς δὲν συμπίπτουν μὲ παλιές, ἀφοῦ τὰ ἄκρα τοὺς w_i εἶναι νέες κορυφές — καὶ εἶναι συνεκτικό. Κάθε u_j αὔξησε τὸν βαθμό της κατὰ ἕνα καὶ ἔγινε ἄρτιου βαθμοῦ, ἐνῶ κάθε w_i ἔχει βαθμὸ $2\cdot$ ἄρα ὅλες οἱ κορυφὲς τοῦ G' ἔχουν ἄρτιο βαθμὸ καὶ ἀπὸ τὸ Θεώρημα 13.3 τὸ G' ἔχει περιήγηση Euler C.

Κάθε w_i ἔχει βαθμὸ 2, ὁπότε ἐμφανίζεται στὴν C ἀκριβῶς μία φορά, μὲ τὶς δύο προσκείμενες ἀκμές της διαδοχικές. Ἀφαιρώντας ἀπὸ τὴν C τὰ k περάσματα u_{2i-1}, w_i, u_{2i} σπᾶμε τὴν κλειστὴ διαδρομὴ σὲ τὸ πολὺ k κομμάτια, καθένα ἀπὸ τὰ ὁποία εἶναι διαδρομὴ τοῦ G χωρὶς ἐπανάληψη ἀκμῆς, καὶ τὰ κομμάτια αὐτὰ διαμερίζουν τὸ $E(G)$. Μαζὶ μὲ τὸ κάτω φράγμα, τὰ μὴ κενὰ κομμάτια εἶναι ἀκριβῶς k. □

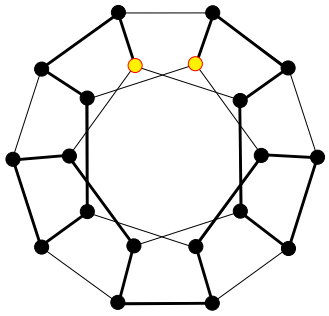
Παρατήρηση 13.13. Τὸ θεώρημα εἶναι ἡ τυπικὴ διατύπωση τοῦ ἐρωτήματος «μὲ πόσες πενιὲς σχεδιάζεται ἕνα σχῆμα χωρὶς νὰ σηκωθεῖ τὸ μολύβι καὶ χωρὶς νὰ περαστεῖ δύο φορὲς ἡ ἴδια γραμμή». Γιὰ τὸ K_5 ὅλες οἱ κορυφὲς ἔχουν ἄρτιο βαθμὸ καὶ μία πενιὰ ἀρκεῖ, ἐνῶ γιὰ τὸ K_6 καὶ οἱ ἕξι κορυφὲς ἔχουν βαθμὸ 5, ὁπότε $k = 3$ καὶ χρειάζονται ἀκριβῶς τρεῖς. Τὸ Πόρισμα 13.6 εἶναι ἡ περίπτωση $k = 1$.

13.2 Διαπεράσεις κορυφῶν

Ὁρισμός 13.14. Ἕνας *κύκλος Hamilton* σὲ ἕνα γράφημα G εἶναι ἕνας κύκλος του ποὺ περιέχει ὅλες τὶς κορυφές του. Ἕνα *μονοπάτι Hamilton* σὲ ἕνα γράφημα G εἶναι ἕνα μονοπάτι του ποὺ περιέχει ὅλες τὶς κορυφές του.

Τὸ πρόβλημα τῆς εὕρεσης (ἂν ὑπάρχει) ἑνὸς κύκλου Hamilton φέρει τὸ ὄνομα τοῦ Sir William Rowan Hamilton ὁ ὁποῖος τὸ ἔθεσε ἀρχικὰ τὸ 1857 μὲ τὸ ὄνομα Icosian Game. Τὸ ἀρχικὸ πρόβλημα ἀναφερότανε στὴν εὕρεση ἑνὸς κύκλου Hamilton σὲ ἕνα δωδεκάεδρο. Τὸ παίγνιο αὐτὸ ἔγινε ἀργότερα γνωστὸ ὡς τὸ παζλ τοῦ Hamilton.

Παρατήρηση 13.15. Σύμφωνα μὲ τοὺς ὁρισμοὺς 13.1 καὶ 13.14 μιὰ περιήγηση Euler εἶναι μιὰ κυκλικὴ ἀκολουθία κορυφῶν ἐνῶ ἕνας κύκλος Hamilton εἶναι ἕνα παραγόμενο ὑπογράφημα τὸ ὁποῖο εἶναι κύκλος.



Σχῆμα 13.4: Ἕνα εἰκοσάεδρο καὶ ἕνα μονοπάτι Hamilton σὲ αὐτό.

Τὸ πρῶτο κριτήριο γιὰ τὴν ὕπαρξη κύκλου Hamilton ἔχει νὰ κάνει μὲ τὴν ὕπαρξη κορυφῶν μεγάλου βαθμοῦ. Ἡ ἀπόδειξή του βασίζεται στὴν παρακάτω παρατήρηση.

Παρατήρηση 13.16. Ἔστω $I = \{1, \ldots, k\}$ καὶ ἔστω $I_1, I_2 \subseteq I$ τέτοια ὥστε $|I_1| + |I_2| \geq k + 2$. Τότε ὑπάρχει $i \in I_1$ τέτοιο ὥστε $i + 1 \in I_2$ καὶ ὑπάρχει $j \in I_2$ τέτοιο ὥστε $j + 1 \in I_1$.

Θεώρημα 13.17 (Ore, 1960 [80])**.** Κάθε γράφημα G μὲ τουλάχιστον 3 κορυφὲς γιὰ τὸ ὁποῖο κάθε ζεῦγος μὴ γειτονικῶν κορυφῶν ἔχει ἄθροισμα βαθμῶν τουλάχιστον $n(G)$ ἔχει κύκλο Hamilton.

Ἀπόδειξη. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ G εἶναι συνεκτικό, διαφορετικά, ἂν x καὶ y εἶναι κορυφὲς σὲ διαφορετικὲς συνεκτικὲς συνιστῶσες τότε $\deg_G(x) + \deg_G(y) \leq n(G) - 2 < n(G)$.

Ὑποθέτουμε, μὲ σκοπὸ τὸ ἄτοπο, ὅτι τὸ G δὲν ἔχει κύκλο Hamilton. Ἔστω $P = [v_1, \ldots, v_r]$ ἕνα μονοπάτι τοῦ G μέγιστου μήκους (προφανῶς, $r \leq n(G)$). Ἰσχυριζόμαστε πρῶτα ὅτι τὸ G περιέχει κύκλο τοῦ ὁποίου οἱ κορυφὲς εἶναι αὐτὲς

τοῦ P. Μιὰ καὶ αὐτὸ εἶναι προφανὲς ἂν $\{v_1, v_r\} \in E(G)$, ὑποθέτουμε ὅτι οἱ v_1 καὶ v_r δὲν εἶναι γειτονικὲς κορυφές. Κατὰ συνέπεια, ἔχουμε ὅτι $N_G(v_1), N_G(v_r) \subseteq \{v_2, \ldots, v_{r-1}\}$ καὶ ἄρα $|N_G(v_1) \cup N_G(v_r)| \leq r - 2 \leq n(G) - 2$. Λαμβάνοντας τώρα ὑπ' ὄψιν τὴν σχέση $|N_G(v_1)| + |N_G(v_r)| \geq n(G)$ καὶ χρησιμοποιώντας τὴν Παρατήρηση 13.16, ἔχουμε ὅτι ὑπάρχει $i \in \{2, \ldots, r-2\}$ τέτοιο ὥστε $v_i \in N_G(v_r)$ καὶ $v_{i+1} \in N_G(v_1)$. Τότε ὅμως τὸ G περιέχει τὸν κύκλο $C = [v_1, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_r, v_i, v_{i-1}, \ldots, v_1]$ καὶ ὁ ἰσχυρισμὸς εἶναι σωστός.

Μιὰ καὶ ὑποθέσαμε ὅτι τὸ G δὲν περιέχει κύκλο Hamilton, ἔχουμε ὅτι $r < n$ καὶ ἄρα, ἀπὸ τὴν συνεκτικότητα τοῦ G, ὑπάρχει μιὰ κορυφὴ w στὸ G ποὺ νὰ μὴν ἀνήκει στὸ C καὶ νὰ εἶναι γειτονικὴ κάποιας κορυφῆς v τοῦ C. Τότε ὅμως τὸ G θὰ περιέχει μονοπάτι (αὐτὸ μὲ ἄκρα τὴν w καὶ κάποια γειτονικὴ στὴν v κορυφὴ τοῦ C) μὲ $r+1$ κορυφές, ἄτοπο γιατὶ τὸ P ἐπιλέχθηκε ὡς μονοπάτι μέγιστου μήκους. □

Σχόλιο 13.18. Τὸ θεώρημα τοῦ Ore εἶναι γενίκευση τοῦ κριτηρίου τοῦ Dirac σύμφωνα μὲ τὸ ὁποῖο

> *«Ἕνα γράφημα ἔχει κύκλο Hamilton ἂν ὅλες οἱ κορυφές του ἔχουν βαθμὸ τουλάχιστον $n(G)/2$.»*

Τὸ παρακάτω θεώρημα, ποὺ ὀφείλεται στοὺς Chvátal καὶ Erdős (1972) [23], συνδέει τὴν ὕπαρξη ἑνὸς κύκλου Hamilton μὲ τὴν συνεκτικότητα καὶ τὸν ἀριθμὸ ἀνεξαρτησίας του.

Θεώρημα 13.19 (Chvátal & Erdős, 1972 [23])**.** Κάθε γράφημα G μὲ τουλάχιστον 3 κορυφὲς γιὰ τὸ ὁποῖο $\alpha(G) \leq \kappa(G)$ ἔχει κύκλο Hamilton.

Ἀπόδειξη. Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι $\kappa(G) \geq 2$. Πράγματι, ἂν $\kappa(G) \leq 1$, τότε $\alpha(G) \leq 1$, δηλαδὴ τὸ G εἶναι πλῆρες, καὶ ἀφοῦ $n(G) \geq 3$ θὰ εἴχαμε $\kappa(G) = n(G) - 1 \geq 2$, ἄτοπο. Ἑπομένως, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.32, δύο ὁποιεσδήποτε κορυφὲς τοῦ G συνδέονται μὲ δύο ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια, τὰ ὁποία σχηματίζουν κύκλο· ἄρα τὸ G περιέχει κύκλο. Ἔστω C κύκλος τοῦ G μεγίστου μεγέθους. Ὑποθέτουμε ὅτι τὸ G δὲν περιέχει κύκλο Hamilton καὶ ἔστω u μιὰ κορυφὴ τοῦ $V(G)\backslash V(C)$. Θὰ δείξουμε πρῶτα ὅτι $|V(C)| \geq \kappa(G)$. Πράγματι, ἂν $|V(C)| < \kappa(G)$ τότε ἐπιλέγουμε ὁποιεσδήποτε δύο διαδοχικὲς κορυφὲς x, x' τοῦ C καὶ ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.32 ὑπάρχουν $\geq \kappa(G)$ ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια στὸ G μεταξὺ τῶν x καὶ x'. Τὸ μόνο ἀπὸ αὐτὰ τὰ μονοπάτια ποὺ δὲν περιέχει ἐσωτερικὲς κορυφὲς εἶναι ἡ ἀκμὴ $e = \{x, x'\}$ καὶ ἀφοῦ $|V(C)\backslash\{x, x'\}| < \kappa(G) - 2$, κάποιο, ἔστω τὸ P, ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα μονοπάτια δὲν θὰ ἔχει ἐσωτερικὲς κορυφὲς

στὸ $V(C)\backslash\{x, x'\}$. Τότε ὅμως τὸ $P\cup(C-e)$ εἶναι κύκλος μήκους μεγαλύτερου τοῦ $|V(C)|$, ἄτοπο καὶ ἄρα ἔχουμε ὅτι $|V(C)| \geq \kappa(G)$. Ἔστω τώρα G^+ τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει ἂν προσθέσουμε στὸ G μιὰ νέα κορυφὴ v_{new} καὶ τὴν συνδέσουμε μὲ ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ C. Ἀφοῦ $|V(C)| \geq \kappa(G)$, ἔχουμε ὅτι $\kappa(G^+) \geq \kappa(G)$. Ἀφοῦ οἱ κορυφὲς v_{new} καὶ u δὲν εἶναι συνδεδεμένες στὸ G^+, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.29 θὰ ὑπάρχουν $\geq \kappa(G)$ ἐσωτερικῶς διακεκριμένα μονοπάτια μεταξὺ τοῦ v_{new} καὶ τοῦ u στὸ G^+. Κόβοντας καθένα ἀπὸ αὐτὰ στὴν πρώτη του κορυφὴ στὸ $V(C)$, παίρνουμε μιὰ (u, S)-βεντάλια στὸ G, ὅπου $S \subseteq V(C)$ καὶ $|S| \geq \kappa(G)$, κάθε μονοπάτι τῆς ὁποίας ἔχει μόνο τὸ τελικό του ἄκρο στὸ $V(C)$. Ἐπιλέγουμε μιὰ τέτοια βεντάλια μὲ τὸ $|S|$ νὰ εἶναι τὸ μεγαλύτερο δυνατόν, ἔτσι ἐξασφαλίζουμε ὅτι ἡ κορυφὴ u δὲν ἔχει γειτονικὲς κορυφὲς στὸ $V(C)\backslash S$: κάθε τέτοια κορυφὴ w θὰ μποροῦσε νὰ προστεθεῖ στὴ βεντάλια μαζὶ μὲ τὸ μονοπάτι $[u, w]$. Προσανατολίζουμε τὸν C καί, γιὰ κάθε $x \in V(C)$, συμβολίζουμε μὲ x' τὴν ἑπόμενη κορυφὴ τῆς x στὸν C. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι, γιὰ κάθε κορυφὴ $x \in S$, ἡ x' δὲν ἀνήκει στὸ S. Πράγματι, ἂν δὲν εἶναι ἔτσι, τότε τὸ γράφημα $(C - e') \cup P_1 \cup P_2$, ὅπου $e' = \{x, x'\}$ καὶ P_1, P_2 εἶναι τὰ μονοπάτια τῆς βεντάλιας ποὺ συνδέουν τὴν u μὲ τὶς x καὶ x', εἶναι ἕνας κύκλος μὲ μῆκος μεγαλύτερο τοῦ C, ἄτοπο. Ἔστω λοιπὸν I τὸ σύνολο τῶν κορυφῶν τοῦ $V(C)$ ποὺ εἶναι ἑπόμενες κορυφῶν τοῦ S. Ἀφοῦ ἡ ἀντιστοιχία $x \mapsto x'$ εἶναι 1-1, ἔχουμε $|I| = |S| \geq \kappa(G)$, ἐνῶ, ἀπὸ τὴν προηγούμενη παρατήρηση, $I \subseteq V(C)\backslash S$. Ἰσχυριζόμαστε ὅτι τὸ I εἶναι ἕνα ἀνεξάρτητο σύνολο τοῦ G. Πράγματι, ἂν οἱ κορυφὲς $x', y' \in I$ συνδέονται μὲ μιὰ ἀκμὴ e, τότε καταλήγουμε σὲ ἄτοπο κατασκευάζοντας τὸν κύκλο $(C - \{\{x, x'\}, \{y, y'\}\}) \cup P_x \cup P_y$ μαζὶ μὲ τὴν ἀκμὴ e, ὅπου x καὶ y εἶναι οἱ προηγούμενες κορυφὲς τῶν x' καὶ y' καὶ P_x καὶ P_y εἶναι τὰ μονοπάτια τῆς βεντάλιας ποὺ συνδέουν τὴν u μὲ τὶς x καὶ y ἀντίστοιχα. Πράγματι, ὁ κύκλος αὐτὸς διατρέχει τὸν C ἀπὸ τὴν x' ὡς τὴν y, ἐπιστρέφει στὴν x μέσῳ τῶν P_y καὶ P_x, διατρέχει τὸν C ἀντίστροφα ἀπὸ τὴν x ὡς τὴν y' καὶ κλείνει μὲ τὴν ἀκμὴ e· περιέχει δηλαδὴ ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ C καὶ ἐπιπλέον τὴν u. Μιὰ καὶ $I \subseteq V(C)\backslash S$ καὶ ἡ u δὲν εἶναι γειτονικὴ στὶς κορυφὲς τοῦ $V(C)\backslash S$, τὸ σύνολο $\{u\} \cup I$ εἶναι ἀνεξάρτητο σύνολο τοῦ G τὸ ὁποῖο ἔχει πληθάριθμο τουλάχιστον $\kappa(G) + 1$. Ἄρα $\alpha(G) > \kappa(G)$, ἄτοπο. □

Ἀσκήσεις Κεφαλαίου

13.1 (★☆☆)**.** Βρέστε ἕναν κύκλο Hamilton στὸ εἰκοσάεδρο.

13.2 (★☆☆)**.** Γιὰ ποιὲς τιμὲς τοῦ n ἔχει τὸ K_n περιήγηση Euler; Πόσες διαδρομὲς χωρὶς ἐπανάληψη ἀκμῆς χρειάζονται γιὰ τὶς ὑπόλοιπες τιμές;

13.3 (★☆☆)**.** Γιὰ ποιὲς τιμὲς τῶν p καὶ q ἔχει τὸ $K_{p,q}$ περιήγηση Euler;

13.4 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι κάθε γράφημα μὲ κύκλο Hamilton καὶ τουλάχιστον τρεῖς κορυφὲς εἶναι δισυνεκτικό. Ἰσχύει τὸ ἀντίστροφο;

13.5 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι ἂν ἕνα γράφημα G ἔχει κύκλο Hamilton, τότε γιὰ κάθε μὴ κενὸ $S \subseteq V(G)$ τὸ $G - S$ ἔχει τὸ πολὺ $|S|$ συνεκτικὲς συνιστῶσες. Συμπεράνετε ὅτι τὸ $K_{p,q}$ ἔχει κύκλο Hamilton μόνο ἂν $p = q$.

13.6 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι ὁ ὑπερκύβος Q_r ἔχει κύκλο Hamilton γιὰ κάθε $r \geq 2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

ΣΥΝΟΛΑ ΚΥΡΙΑΡΧΙΑΣ

Ένα σύνολο κυριαρχίας εἶναι ἕνα σύνολο κορυφῶν ποὺ «βλέπει» ὁλόκληρο τὸ γράφημα: κάθε κορυφὴ εἴτε ἀνήκει σὲ αὐτὸ εἴτε γειτονεύει μὲ κάποια κορυφή του. Ἡ ἔννοια εἶναι συγγενὴς μὲ ἐκείνη τοῦ καλύμματος κορυφῶν, μὲ τὴ διαφορὰ ὅτι ἐδῶ καλύπτονται κορυφὲς ἀντὶ γιὰ ἀκμές· δὲν εἶναι ὅμως ταυτόσημες, ὅπως δείχνει ἡ Ἄσκηση 14.1.

Ὁρισμός 14.1. Ἔστω G γράφημα. Καλοῦμε ἕνα σύνολο $S \subseteq V(G)$ *σύνολο κυριαρχίας* τοῦ G ἂν κάθε κορυφὴ τοῦ G εἶναι εἴτε στὸ S εἴτε στὴν γειτονιά του. Ὁ *ἀριθμὸς κυριαρχίας* $\mathbf{ds}(G)$ ἑνὸς γραφήματος G εἶναι ὁ πληθάριθμος τοῦ μικρότερου συνόλου κυριαρχίας τοῦ G. Πιὸ τυπικά,

$$\mathbf{ds}(G) = \min\{|S| \mid S \subseteq V(G) \text{ καὶ } V(G) \subseteq S \cup N_G(S)\}.$$

Ὁρισμός 14.2. Ἔστω G γράφημα καὶ $v \in V(G)$. *Κλειστὴ γειτονιὰ* τῆς v στὸ G εἶναι τὸ σύνολο

$$N_G[v] = \{v\} \cup N_G(v),$$

δηλαδὴ ἡ γειτονιὰ τῆς v μαζὶ μὲ τὴν ἴδια τὴν v. Γιὰ $S \subseteq V(G)$ θέτουμε $N_G[S] = \bigcup_{v \in S} N_G[v]$, καὶ λέμε ὅτι ἡ κορυφὴ v *κυριαρχεῖ* τὶς κορυφὲς τοῦ $N_G[v]$.

Ὅταν τὸ γράφημα εἶναι σαφὲς ἀπὸ τὰ συμφραζόμενα γράφουμε $N[v]$ ἀντὶ γιὰ $N_G[v]$. Παρατηρῆστε ὅτι $|N_G[v]| = \deg_G(v) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ γιὰ κάθε κορυφὴ v τοῦ G.

Παρατήρηση 14.3. Ἕνα σύνολο $D \subseteq V(G)$ εἶναι σύνολο κυριαρχίας τοῦ G ἂν καὶ μόνο ἂν

$$V(G) = \bigcup_{v \in D} N_G[v].$$

Ἀπόδειξη. Οἱ δύο συνθῆκες λένε ἀκριβῶς τὸ ἴδιο πρᾶγμα: κάθε κορυφὴ τοῦ G εἴτε ἀνήκει στὸ D εἴτε εἶναι γειτονικὴ μὲ κάποια κορυφὴ τοῦ D. □

Ἡ Παρατήρηση 14.3 δίνει μιὰ χρήσιμη ἀναδιατύπωση τῆς κυριαρχίας: ἕνα σύνολο κυριαρχίας δὲν εἶναι παρὰ μιὰ ἐπιλογὴ κλειστῶν γειτονιῶν ποὺ καλύπτουν ὁλόκληρο τὸ σύνολο τῶν κορυφῶν. Στὴν ὀπτικὴ αὐτὴ θὰ στηριχθεῖ ἡ τελευταία ἑνότητα τοῦ κεφαλαίου.

14.1 Ἐλαχιστικὰ καὶ ἐλάχιστα σύνολα κυριαρχίας

Τὸ ἴδιο γράφημα ἔχει, κατὰ κανόνα, πολλὰ σύνολα κυριαρχίας, καὶ δύο ἐντελῶς διαφορετικὲς ἔννοιες «μικροῦ» τέτοιου συνόλου συγχέονται εὔκολα: τὸ ἕνα δὲν ἐπιδέχεται καμία περικοπή, ἐνῶ τὸ ἄλλο ἔχει τὸν μικρότερο δυνατὸ πληθάριθμο.

Ὁρισμός 14.4. Ἔστω G γράφημα καὶ D σύνολο κυριαρχίας τοῦ G. Τὸ D λέγεται *ἐλαχιστικὸ* ἂν κανένα γνήσιο ὑποσύνολό του δὲν εἶναι σύνολο κυριαρχίας τοῦ G, καὶ *ἐλάχιστο* ἂν $|D| = \mathbf{ds}(G)$.

Παρατήρηση 14.5. Κάθε ἐλάχιστο σύνολο κυριαρχίας εἶναι ἐλαχιστικό, ὄχι ὅμως καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξη. Ἂν τὸ D εἶναι ἐλάχιστο καὶ κάποιο $D' \subsetneq D$ ἦταν ἐπίσης σύνολο κυριαρχίας, τότε θὰ εἴχαμε $|D'| < |D| = \mathbf{ds}(G)$, ἄτοπο.

Γιὰ τὸ ἀντίστροφο θεωροῦμε τὸ μονοπάτι $P_5 = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5]$ καὶ τὸ σύνολο $D = \{v_1, v_3, v_5\}$. Τὸ D εἶναι σύνολο κυριαρχίας, καὶ εἶναι ἐλαχιστικό: ἂν ἀφαιρέσουμε ἀπὸ αὐτὸ τὴν v_1, ἡ v_1 παύει νὰ κυριαρχεῖται (οἱ μόνες κορυφὲς ποὺ τὴν κυριαρχοῦν εἶναι οἱ v_1 καὶ v_2), καὶ συμμετρικὰ γιὰ τὴν v_5, ἐνῶ ἂν ἀφαιρέσουμε τὴν v_3 παύει νὰ κυριαρχεῖται ἡ ἴδια ἡ v_3. Παρ' ὅλα αὐτὰ τὸ D δὲν εἶναι ἐλάχιστο, ἀφοῦ τὸ $\{v_2, v_4\}$ εἶναι σύνολο κυριαρχίας πληθαρίθμου 2. □

Παράδειγμα 14.6. Γιὰ τὰ βασικὰ γραφήματα ὁ ἀριθμὸς κυριαρχίας ὑπολογίζεται ἄμεσα:

- $\mathbf{ds}(K_n) = 1$ γιὰ κάθε $n \geq 1$, ἀφοῦ $N_{K_n}[v] = V(K_n)$ γιὰ κάθε κορυφὴ v.

- **ds**$(K_{1,q}) = 1$ γιὰ κάθε $q \geq 1$: τὸ κέντρο τοῦ ἄστρου εἶναι γειτονικὸ μὲ ὅλες τὶς ὑπόλοιπες κορυφές.

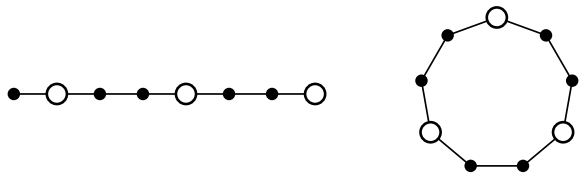
- **ds**$(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ γιὰ κάθε $n \geq 1$.

- **ds**$(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ γιὰ κάθε $n \geq 3$.

Ἀπόδειξη. Μένουν οἱ δύο τελευταῖες ἰσότητες. Καὶ στὸ P_n καὶ στὸ C_n κάθε κορυφὴ ἔχει βαθμὸ τὸ πολὺ 2, δηλαδὴ $|N[v]| \leq 3$. Ἂν λοιπὸν τὸ D εἶναι σύνολο κυριαρχίας, τότε

$$n = \Big| \bigcup_{v \in D} N[v] \Big| \leq \sum_{v \in D} |N[v]| \leq 3|D|,$$

ὁπότε $|D| \geq n/3$ καί, ἐπειδὴ ὁ $|D|$ εἶναι ἀκέραιος, $|D| \geq \lceil n/3 \rceil$.



(α) (β)

Σχῆμα 14.1: Ἐλάχιστα σύνολα κυριαρχίας (οἱ κυκλωμένες κορυφές) τοῦ P_8 καὶ τοῦ C_9: καὶ στὶς δύο περιπτώσεις χρειάζονται $\lceil n/3 \rceil = 3$ κορυφές.

Γιὰ τὸ ἄνω φράγμα στὸ $C_n = [v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_0]$ θέτουμε $k = \lceil n/3 \rceil$ καὶ παίρνουμε $D = \{v_1, v_4, \ldots, v_{3k-2}\}$, ὅπου οἱ δεῖκτες ἐννοοῦνται modulo n. Εἶναι $N[v_{3i+1}] = \{v_{3i}, v_{3i+1}, v_{3i+2}\}$, ὁπότε ἡ ἕνωση τῶν κλειστῶν γειτονιῶν τῶν κορυφῶν τοῦ D περιέχει ὅλες τὶς κορυφὲς μὲ δεῖκτες $0, 1, \ldots, 3k-1$· ἀφοῦ $3k \geq n$, αὐτὲς εἶναι ὅλες οἱ κορυφὲς τοῦ κύκλου.

Στὸ $P_n = [v_1, \ldots, v_n]$ παίρνουμε ὡς D ὅλες τὶς κορυφὲς v_j μὲ $j \equiv 2 \bmod 3$, μαζὶ μὲ τὴν v_n ἂν $n \equiv 1 \bmod 3$. Κάθε κορυφὴ v_j μὲ $j \equiv 2 \bmod 3$ κυριαρχεῖ τὶς v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, ὁπότε μένουν ἀκυρίαρχες μόνο οἱ κορυφὲς μὲ δείκτη μεγαλύτερο τοῦ μεγαλύτερου τέτοιου j αὐξημένου κατὰ ἕνα· αὐτὸ συμβαίνει μόνο ὅταν $n \equiv 1 \bmod 3$, καὶ τότε πρόκειται ἀποκλειστικὰ γιὰ τὴν v_n, τὴν ὁποία προσθέσαμε. Ὁ πληθάριθμος τοῦ D εἶναι $\lfloor (n+1)/3 \rfloor$, αὐξημένος κατὰ ἕνα ὅταν $n \equiv 1 \bmod 3$, δηλαδὴ σὲ κάθε περίπτωση $\lceil n/3 \rceil$. □

14.2 Βασικὰ λήμματα

Τὸ πρῶτο λῆμμα συνδέει τὴν κυριαρχία μὲ τὴν ἀνεξαρτησία καὶ εἶναι, παρὰ τὴν ἁπλότητά του, τὸ πιὸ συχνὰ χρησιμοποιούμενο ἐργαλεῖο τοῦ κεφαλαίου.

Λῆμμα 14.7. Κάθε μεγιστικὸ (ὡς πρὸς τὸν ἐγκλεισμό) ἀνεξάρτητο σύνολο ἑνὸς γραφήματος G εἶναι σύνολο κυριαρχίας τοῦ G. Εἰδικότερα, $\mathbf{ds}(G) \leq \alpha(G)$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω I μεγιστικὸ ἀνεξάρτητο σύνολο τοῦ G καὶ ἔστω $v \in V(G)\backslash I$. Ἂν ἡ v δὲν εἶχε γειτονικὴ κορυφὴ στὸ I, τότε τὸ $I \cup \{v\}$ θὰ ἦταν ἀνεξάρτητο σύνολο γνησίως μεγαλύτερο τοῦ I, ποὺ ἀντιβαίνει στὴ μεγιστικότητα τοῦ I. Ἄρα κάθε κορυφὴ ἐκτὸς τοῦ I ἔχει γειτονικὴ κορυφὴ στὸ I, δηλαδὴ τὸ I εἶναι σύνολο κυριαρχίας.

Ἐφαρμόζοντας τὸ παραπάνω σὲ ἕνα μέγιστο ἀνεξάρτητο σύνολο (τὸ ὁποῖο εἶναι βεβαίως καὶ μεγιστικό) παίρνουμε $\mathbf{ds}(G) \leq \alpha(G)$. □

Τὸ ἑπόμενο λῆμμα λέει ὅτι οἱ ἀκμὲς μόνο βοηθοῦν: ὅσο περισσότερες ἀκμὲς ἔχει ἕνα γράφημα, τόσο εὐκολότερα κυριαρχεῖται.

Λῆμμα 14.8. Ἂν τὸ H εἶναι παραγόμενο ὑπογράφημα τοῦ G, δηλαδὴ ἂν $V(H) = V(G)$ καὶ $E(H) \subseteq E(G)$, τότε $\mathbf{ds}(G) \leq \mathbf{ds}(H)$.

Ἀπόδειξη. Γιὰ κάθε κορυφὴ v ἰσχύει $N_H[v] \subseteq N_G[v]$. Ἑπομένως, ἂν τὸ D εἶναι σύνολο κυριαρχίας τοῦ H, τότε

$$V(G) = V(H) = \bigcup_{v \in D} N_H[v] \subseteq \bigcup_{v \in D} N_G[v],$$

δηλαδὴ τὸ D εἶναι σύνολο κυριαρχίας καὶ τοῦ G. □

Θὰ ἦταν βολικὸ νὰ ἴσχυε κάτι ἀνάλογο καὶ γιὰ τὴ διαγραφὴ κορυφῶν, δηλαδὴ ὅτι ἡ ἀφαίρεση μιᾶς κορυφῆς μόνο δυσκολεύει τὴν κυριαρχία. Αὐτὸ ὅμως εἶναι λάθος, καὶ μάλιστα καὶ πρὸς τὶς δύο κατευθύνσεις.

Παρατήρηση 14.9. Ὁ ἀριθμὸς κυριαρχίας δὲν εἶναι μονότονος ὡς πρὸς τὴ διαγραφὴ κορυφῶν: ὑπάρχουν γραφήματα G καὶ κορυφὲς v μὲ $\mathbf{ds}(G-v) > \mathbf{ds}(G)$, καὶ ἄλλα μὲ $\mathbf{ds}(G-v) < \mathbf{ds}(G)$.

Ἀπόδειξη. Γιὰ τὴν πρώτη περίπτωση παίρνουμε τὸ ἄστρο $K_{1,q}$ μὲ $q \geq 2$ καὶ ὡς v τὸ κέντρο του: ἰσχύει $\mathbf{ds}(K_{1,q}) = 1$, ἐνῶ τὸ $K_{1,q}-v$ ἀποτελεῖται ἀπὸ q ἀπομονωμένες

κορυφές, καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ὁποῖες πρέπει νὰ ἀνήκει σὲ κάθε σύνολο κυριαρχίας, δηλαδὴ $\mathbf{ds}(K_{1,q} - v) = q$.

Γιὰ τὴ δεύτερη παίρνουμε τὸ μονοπάτι $P_4 = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ καὶ $v = v_1$. Ἀπὸ τὸ Παράδειγμα 14.6 ἔχουμε $\mathbf{ds}(P_4) = 2$, ἐνῶ $P_4 - v_1 = P_3$ καὶ $\mathbf{ds}(P_3) = 1$. □

14.3 Στοιχειώδη φράγματα

Παρατήρηση 14.10. Γιὰ κάθε γράφημα G μὲ $n = n(G) \geq 1$ ἰσχύει $1 \leq \mathbf{ds}(G) \leq n$, καὶ $\mathbf{ds}(G) = n$ ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ G δὲν ἔχει ἀκμές.

Ἀπόδειξη. Τὸ $V(G)$ εἶναι σύνολο κυριαρχίας, ἐνῶ τὸ κενὸ σύνολο δὲν εἶναι (ἀφοῦ $n \geq 1$)· ἄρα $1 \leq \mathbf{ds}(G) \leq n$. Ἂν τὸ G δὲν ἔχει ἀκμές, τότε $N_G[v] = \{v\}$ γιὰ κάθε v, ὁπότε κάθε σύνολο κυριαρχίας περιέχει ὅλες τὶς κορυφὲς καὶ $\mathbf{ds}(G) = n$. Ἂν πάλι τὸ G ἔχει μιὰ ἀκμὴ $\{u, v\}$, τότε τὸ $V(G)\backslash\{u\}$ εἶναι σύνολο κυριαρχίας — ἡ u κυριαρχεῖται ἀπὸ τὴν v — καὶ ἄρα $\mathbf{ds}(G) \leq n - 1$. □

Λῆμμα 14.11. Γιὰ κάθε γράφημα G ἰσχύει $\mathbf{ds}(G) \geq \frac{n(G)}{\Delta(G)+1}$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω D σύνολο κυριαρχίας τοῦ G. Κάθε κορυφὴ $v \in D$ κυριαρχεῖ τὶς $|N_G[v]| = \deg_G(v) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ κορυφὲς τῆς κλειστῆς γειτονιᾶς της, ὁπότε

$$n(G) = \Big|\bigcup_{v\in D} N_G[v]\Big| \leq \sum_{v\in D} |N_G[v]| \leq |D| \cdot (\Delta(G) + 1).$$

□

Τὸ φράγμα τοῦ Λήμματος 14.11 πιάνεται, λόγου χάριν, ἀπὸ κάθε ξένη ἕνωση ἀντιγράφων τοῦ $K_{\Delta+1}$, καθὼς καὶ ἀπὸ τοὺς κύκλους C_n μὲ $3 \mid n$.

Λῆμμα 14.12. Γιὰ κάθε γράφημα G μὲ $n(G) \geq 1$ ἰσχύει $\mathbf{ds}(G) \leq n(G) - \Delta(G)$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω v κορυφὴ μέγιστου βαθμοῦ καὶ ἔστω $D = \{v\} \cup \big(V(G)\backslash N_G[v]\big)$. Κάθε κορυφὴ τοῦ G εἴτε ἀνήκει στὸ $N_G[v]$, ὁπότε κυριαρχεῖται ἀπὸ τὴν v, εἴτε ἀνήκει στὸ D· ἄρα τὸ D εἶναι σύνολο κυριαρχίας. Ὁ πληθάριθμός του εἶναι $1 + n(G) - |N_G[v]| = 1 + n(G) - (\Delta(G) + 1) = n(G) - \Delta(G)$. □

Παρατήρηση 14.13. Θὰ περίμενε κανείς, κατοπτρικὰ πρὸς τὸ Λῆμμα 14.11, νὰ ἰσχύει τὸ ἄνω φράγμα $\mathbf{ds}(G) \leq \frac{n(G)}{\delta(G)+1}$ μὲ τὸν ἐλάχιστο βαθμὸ στὴ θέση τοῦ μέγιστου. Αὐτὸ ὅμως εἶναι λάθος: γιὰ τὸν κύκλο C_4 ἰσχύει $\delta = 2$ καὶ $\frac{n}{\delta+1} = \frac{4}{3}$,

ἐνῶ $\mathbf{ds}(C_4) = 2$. Γενικότερα, κάθε κύκλος C_n μὲ n μὴ πολλαπλάσιο τοῦ 3 εἶναι ἀντιπαράδειγμα, ἀφοῦ $\lceil n/3 \rceil > n/3$. Τὸ σωστὸ φράγμα ἐπιβαρύνεται μὲ ἕναν λογαριθμικὸ παράγοντα:

$$\mathbf{ds}(G) \leq \frac{1 + \ln(\delta(G)+1)}{\delta(G)+1} \cdot n(G),$$

ἀποτέλεσμα ποὺ ὀφείλεται ἀνεξάρτητα στοὺς Arnautov [6] καὶ Payan [82]. Ἡ ἀπόδειξη εἶναι πιθανοτική: ἐπιλέγουμε κάθε κορυφὴ ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὶς ὑπόλοιπες μὲ πιθανότητα p, ἔστω A τὸ τυχαῖο σύνολο ποὺ προκύπτει, καὶ ἔστω B τὸ σύνολο τῶν κορυφῶν ποὺ δὲν κυριαρχοῦνται ἀπὸ τὸ A. Τὸ $A \cup B$ εἶναι σύνολο κυριαρχίας, ἐνῶ, ἀφοῦ $|N[v]| \geq \delta + 1$ γιὰ κάθε v, ἡ μέση τιμὴ τοῦ πληθαρίθμου του εἶναι τὸ πολὺ $pn + n(1-p)^{\delta+1} \leq pn + n\,e^{-p(\delta+1)}$. Γιὰ $p = \frac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}$ ἡ ποσότητα αὐτὴ ἰσοῦται μὲ τὸ δεξιὸ μέλος τοῦ φράγματος, καὶ κάποια πραγματοποίηση τοῦ τυχαίου πειράματος δίνει σύνολο κυριαρχίας τὸ πολὺ τόσο μεγάλο. Ὁ λογαριθμικὸς παράγοντας δὲν μπορεῖ νὰ ἀφαιρεθεῖ: ὑπάρχουν γραφήματα μὲ $\mathbf{ds}(G) = \Omega\big(\frac{\ln \delta}{\delta} n\big)$ [2]. Πρόκειται γιὰ τὴν ἴδια λογαριθμικὴ ἀπώλεια ποὺ θὰ συναντήσουμε καὶ στὴν τελευταία ἑνότητα τοῦ κεφαλαίου.

14.4 Τὸ φράγμα τοῦ Ore

Τὸ φράγμα $\mathbf{ds}(G) \leq n(G) - \Delta(G)$ τοῦ Λήμματος 14.12 εἶναι ἰσχυρὸ μόνο γιὰ γραφήματα μὲ κορυφὲς μεγάλου βαθμοῦ. Τὸ ἑπόμενο θεώρημα δίνει κάτι πολὺ καλύτερο, μὲ τὴ μοναδικὴ προϋπόθεση νὰ μὴν ὑπάρχουν ἀπομονωμένες κορυφές — προϋπόθεση ἀναγκαία, ἀφοῦ ἕνα γράφημα χωρὶς ἀκμὲς ἔχει $\mathbf{ds}(G) = n(G)$, σύμφωνα μὲ τὴν Παρατήρηση 14.10.

Θεώρημα 14.14 (Ore, 1962 [81])**.** Ἂν τὸ γράφημα G δὲν ἔχει ἀπομονωμένες κορυφές, τότε

$$\mathbf{ds}(G) \leq \frac{n(G)}{2}.$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω D ἐλαχιστικὸ σύνολο κυριαρχίας τοῦ G· τέτοιο ὑπάρχει, ἀφοῦ κάθε ἐλάχιστο σύνολο κυριαρχίας εἶναι καὶ ἐλαχιστικὸ (Παρατήρηση 14.5). Θὰ δείξουμε ὅτι καὶ τὸ $V(G) \setminus D$ εἶναι σύνολο κυριαρχίας.

Κάθε κορυφὴ ἐκτὸς τοῦ D κυριαρχεῖται ἀπὸ τὸν ἑαυτό της, ὁπότε ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι κάθε $v \in D$ ἔχει γειτονικὴ κορυφὴ ἐκτὸς τοῦ D. Ἔστω, πρὸς ἄτοπο, ὅτι γιὰ κάποια $v \in D$ ἰσχύει $N_G(v) \subseteq D$. Ἀφοῦ τὸ D εἶναι ἐλαχιστικό, τὸ $D \setminus \{v\}$

δὲν εἶναι σύνολο κυριαρχίας, δηλαδὴ ὑπάρχει κορυφὴ w μὲ

$$N_G[w] \cap \big(D\backslash\{v\}\big) = \emptyset.$$

Ἂν $w \neq v$, τότε ἡ w κυριαρχεῖται ἀπὸ τὸ D μόνο μέσῳ τῆς v, ἄρα $w \in N_G(v) \subseteq D$· ὅμως $w \in N_G[w]$, ὁπότε $w \in N_G[w] \cap (D\backslash\{v\})$, ἄτοπο. Ἄρα $w = v$, δηλαδὴ $N_G[v] \cap (D\backslash\{v\}) = \emptyset$ καὶ ἑπομένως $N_G(v) \cap D = \emptyset$. Σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν ὑπόθεση $N_G(v) \subseteq D$ αὐτὸ δίνει $N_G(v) = \emptyset$, δηλαδὴ ἡ v εἶναι ἀπομονωμένη, ἄτοπο.

Ἑπομένως τόσο τὸ D ὅσο καὶ τὸ $V(G)\backslash D$ εἶναι σύνολα κυριαρχίας, καὶ

$$\mathbf{ds}(G) \leq \min\big\{|D|, n(G) - |D|\big\} \leq \frac{n(G)}{2}.$$

□

Πόρισμα 14.15. Ἂν τὸ G δὲν ἔχει ἀπομονωμένες κορυφές, τότε $\mathbf{ds}(G) \leq \left\lfloor \frac{n(G)}{2} \right\rfloor$.

Ἀπόδειξη. Ὁ $\mathbf{ds}(G)$ εἶναι ἀκέραιος καὶ δὲν ὑπερβαίνει τὸ $n(G)/2$. □

Παρατήρηση 14.16. Τὸ φράγμα τοῦ Θεωρήματος 14.14 πιάνεται. Τὸ ἁπλούστερο παράδειγμα εἶναι μιὰ ξένη ἕνωση ἀντιγράφων τοῦ K_2, δηλαδὴ ἕνα 1-κανονικὸ γράφημα: κάθε ἀντίγραφο χρειάζεται δική του κορυφή, ὁπότε $\mathbf{ds}(G) = n(G)/2$. Ἕνα συνεκτικὸ παράδειγμα εἶναι ὁ κύκλος C_4. Γενικότερα, τὸ *στεφάνι* $H \circ K_1$ ἑνὸς γραφήματος H — τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει ἂν προσθέσουμε σὲ κάθε κορυφὴ v τοῦ H μιὰ νέα γειτονικὴ κορυφὴ u_v βαθμοῦ 1 — ἱκανοποιεῖ $\mathbf{ds}(H \circ K_1) = n(H) = n(H \circ K_1)/2$ (Ἄσκηση 14.6). Οἱ Payan καὶ Xuong ἀπέδειξαν ὅτι αὐτὰ εἶναι καὶ τὰ μόνα παραδείγματα: τὰ συνεκτικὰ γραφήματα G μὲ $\mathbf{ds}(G) = n(G)/2$ εἶναι ἀκριβῶς ὁ κύκλος C_4 καὶ τὰ στεφάνια $H \circ K_1$ συνεκτικῶν γραφημάτων H [83].

14.5 Κυριαρχία σὲ δέντρα

Στὰ δέντρα ἡ κυριαρχία γίνεται πολὺ πιὸ εὔκολη, καὶ ὁ λόγος εἶναι ὅτι τὰ φύλλα δὲν ἀφήνουν περιθώρια ἐπιλογῆς: ἕνα φύλλο κυριαρχεῖται μόνο ἀπὸ τὸν ἑαυτό του ἢ ἀπὸ τὸν μοναδικὸ γείτονά του.

Ὁρισμός 14.17. Ἔστω G γράφημα. Θυμίζουμε ὅτι *φύλλο* εἶναι μιὰ κορυφὴ βαθμοῦ 1. Μιὰ κορυφὴ λέγεται *στηρικτικὴ* ἂν εἶναι γειτονικὴ μὲ τουλάχιστον ἕνα φύλλο, καὶ *ἰσχυρὰ στηρικτικὴ* ἂν εἶναι γειτονικὴ μὲ τουλάχιστον δύο φύλλα.

Λῆμμα 14.18. Ἔστω T δέντρο μὲ $n(T) \geq 3$. Τότε ὑπάρχει ἐλάχιστο σύνολο κυριαρχίας τοῦ T ποὺ περιέχει ὅλες τὶς στηρικτικὲς κορυφές του.

Ἀπόδειξη. Παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι σὲ ἕνα δέντρο μὲ τουλάχιστον τρεῖς κορυφὲς κανένα φύλλο δὲν εἶναι στηρικτικὴ κορυφή: ἂν τὸ φύλλο u ἦταν γειτονικὸ μὲ φύλλο w, τότε ἡ συνεκτικὴ συνιστῶσα τῶν u καὶ w θὰ ἦταν τὸ K_2, ἐνῶ τὸ T εἶναι συνεκτικὸ μὲ $n(T) \geq 3$.

Ἀνάμεσα σὲ ὅλα τὰ ἐλάχιστα σύνολα κυριαρχίας τοῦ T διαλέγουμε ἕνα, ἔστω D, ποὺ περιέχει ὅσο τὸ δυνατὸν περισσότερες στηρικτικὲς κορυφές. Ἔστω, πρὸς ἄτοπο, ὅτι κάποια στηρικτικὴ κορυφὴ v δὲν ἀνήκει στὸ D, καὶ ἔστω u ἕνα φύλλο γειτονικὸ τῆς v. Ἀφοῦ $N_T[u] = \{u, v\}$ καὶ τὸ D κυριαρχεῖ τὴν u, ἰσχύει $u \in D$. Θέτουμε

$$D' = \big(D \backslash \{u\}\big) \cup \{v\}.$$

Ἐπειδὴ $u \in D$ καὶ $v \notin D$, ἔχουμε $|D'| = |D|$. Τὸ D' εἶναι σύνολο κυριαρχίας: ἡ μόνη κορυφὴ ποὺ ἔχασε τὸν κυρίαρχό της εἶναι κάποια κορυφὴ τοῦ $N_T[u] = \{u, v\}$, καὶ τόσο ἡ u ὅσο καὶ ἡ v ἀνήκουν στὸ $N_T[v]$. Τέλος, τὸ D' περιέχει τὴ v καὶ ὅλες τὶς στηρικτικὲς κορυφὲς τοῦ D — ἡ u ποὺ ἀφαιρέσαμε δὲν εἶναι στηρικτική — δηλαδὴ περισσότερες στηρικτικὲς κορυφὲς ἀπὸ τὸ D, ἄτοπο. □

Λῆμμα 14.19. Ἔστω T δέντρο μὲ $n(T) \geq 3$. Κάθε ἰσχυρὰ στηρικτικὴ κορυφὴ τοῦ T ἀνήκει σὲ κάθε ἐλάχιστο σύνολο κυριαρχίας τοῦ T.

Ἀπόδειξη. Ἔστω v ἰσχυρὰ στηρικτικὴ κορυφὴ μὲ γειτονικὰ φύλλα $u_1 \neq u_2$ καὶ ἔστω D ἐλάχιστο σύνολο κυριαρχίας μὲ $v \notin D$. Ἀφοῦ $N_T[u_i] = \{u_i, v\}$ καὶ τὸ D κυριαρχεῖ τὶς u_1, u_2, ἰσχύει $u_1, u_2 \in D$. Τὸ σύνολο $D' = \big(D \backslash \{u_1, u_2\}\big) \cup \{v\}$ εἶναι σύνολο κυριαρχίας, ἀφοῦ $N_T[u_1] \cup N_T[u_2] = \{u_1, u_2, v\} \subseteq N_T[v]$, καὶ $|D'| = |D| - 1$, ποὺ ἀντιβαίνει στὴν ἐλαχιστότητα τοῦ D. □

Πόρισμα 14.20. Γιὰ κάθε δέντρο T μὲ $n(T) \geq 2$ ἰσχύει $\mathbf{ds}(T) \leq \left\lfloor \frac{n(T)}{2} \right\rfloor$.

Ἀπόδειξη. Ἕνα δέντρο μὲ τουλάχιστον δύο κορυφὲς εἶναι συνεκτικὸ καὶ ἄρα δὲν ἔχει ἀπομονωμένες κορυφές· ἐφαρμόζουμε τὸ Πόρισμα 14.15. □

Παρατήρηση 14.21. Τὸ Λῆμμα 14.18 εἶναι ἡ ἀφετηρία τῆς τεχνικῆς τοῦ *κλαδέματος*: διαλέγουμε ἕνα φύλλο u μέγιστου βάθους ἑνὸς ῥιζωμένου δέντρου, βάζουμε στὴ λύση τὸν πατέρα τοῦ v — κάτι πού, σύμφωνα μὲ τὸ λῆμμα, δὲν μᾶς στερεῖ καμία βέλτιστη λύση —, σημειώνουμε τὶς κορυφὲς τοῦ $N_T[v]$ ὡς κυριαρχούμενες,

καὶ συνεχίζουμε μὲ τὸ μικρότερο δέντρο. Ἡ ἰδέα αὐτή, μὲ μιὰ προσεκτικὴ διαχείριση τῶν κορυφῶν ποὺ ἔχουν ἤδη κυριαρχηθεῖ, δίνει ἀλγόριθμο ποὺ ὑπολογίζει τὸν $\mathbf{ds}(T)$ κάθε δέντρου T σὲ γραμμικὸ χρόνο· ἡ πρώτη τέτοια ὑλοποίηση ὀφείλεται στοὺς Cockayne, Goodman, καὶ Hedetniemi [24]. Ἡ ἀντίθεση μὲ τὴ γενικὴ περίπτωση εἶναι ἀπότομη: ὅπως θὰ δοῦμε ἀμέσως παρακάτω, γιὰ αὐθαίρετα γραφήματα ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ $\mathbf{ds}(G)$ εἶναι NP-δύσκολος, καὶ τὸ καλύτερο ποὺ ξέρουμε νὰ κάνουμε σὲ πολυωνυμικὸ χρόνο εἶναι μιὰ λογαριθμικὴ προσέγγιση.

14.6 Ἄπληστη προσέγγιση τοῦ ἀριθμοῦ κυριαρχίας

Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ $\mathbf{ds}(G)$ εἶναι NP-δύσκολο πρόβλημα [43], ὁπότε δὲν ἀναμένουμε ἀλγόριθμο πολυωνυμικοῦ χρόνου ποὺ νὰ βρίσκει πάντοτε ἐλάχιστο σύνολο κυριαρχίας. Τὸ φυσικὸ ἑπόμενο ἐρώτημα εἶναι πόσο κοντὰ στὸ βέλτιστο μποροῦμε νὰ φτάσουμε ἀποδοτικά. Στὴν ἑνότητα αὐτὴ δείχνουμε ὅτι ὁ ἁπλούστερος δυνατὸς ἀλγόριθμος — σὲ κάθε βῆμα ἐπίλεξε τὴν κορυφὴ ποὺ κυριαρχεῖ τὶς περισσότερες ἀκόμη μὴ κυριαρχούμενες κορυφές — ἐπιστρέφει σύνολο κυριαρχίας μὲ τὸ πολὺ $(1 + \ln n) \cdot \mathbf{ds}(G)$ κορυφές. Θὰ δοῦμε στὴ συνέχεια καὶ μιὰ δεύτερη, λεπτότερη ἀνάλυση τοῦ ἴδιου ἀλγορίθμου, ἡ ὁποία ἀντικαθιστᾶ τὸ n μὲ τὸ $\Delta(G) + 1$, καθὼς καὶ γιατὶ ἡ δεύτερη ἀνάλυση δὲν προκύπτει ἀπὸ τὴν πρώτη. Καὶ οἱ δύο στηρίζονται στὴν ἴδια παρατήρηση: ἡ κυριαρχία εἶναι, στὴν οὐσία, πρόβλημα κάλυψης.

Ἡ κυριαρχία ὡς πρόβλημα κάλυψης

Σύμφωνα μὲ τὴν Παρατήρηση 14.3, τὸ νὰ βροῦμε ἐλάχιστο σύνολο κυριαρχίας εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ νὰ καλύψουμε τὸ $V(G)$ μὲ ὅσο τὸ δυνατὸν λιγότερες κλειστὲς γειτονιές. Αὐτὸ εἶναι εἰδικὴ περίπτωση ἑνὸς κλασικοῦ προβλήματος βελτιστοποίησης.

> **Ἐλάχιστο Σύνολο Κυριαρχίας**
> *Εἴσοδος:* ἕνα γράφημα G.
> *Ζητούμενο:* ἕνα σύνολο κυριαρχίας $D \subseteq V(G)$ τοῦ G ἐλάχιστου πληθαρίθμου.

Κάλυψη Συνόλου
Εἴσοδος: ἕνα πεπερασμένο σύνολο X (τὸ *σύμπαν*) καὶ μιὰ πεπερασμένη οἰκογένεια $\mathcal{S} = (S_i)_{i\in I}$ ὑποσυνόλων τοῦ X μὲ $\bigcup_{i\in I} S_i = X$.
Ζητούμενο: ἕνα σύνολο δεικτῶν $J \subseteq I$ ἐλάχιστου πληθαρίθμου μὲ $\bigcup_{i\in J} S_i = X$.

Παρατήρηση 14.22. Τὸ Ἐλάχιστο Σύνολο Κυριαρχίας εἶναι ἡ εἰδικὴ περίπτωση τῆς Κάλυψης Συνόλου ὅπου $X = V(G)$, $I = V(G)$ καὶ $\mathcal{S} = \big(N_G[v]\big)_{v\in V(G)}$. Οἱ λύσεις τῶν δύο προβλημάτων ταυτίζονται: ἕνα $D \subseteq V(G)$ εἶναι σύνολο κυριαρχίας τοῦ G ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ ἴδιο σύνολο δεικτῶν καλύπτει τὸ X.

Ὁ δείκτης στὴν οἰκογένεια $\mathcal{S}$ δὲν εἶναι σχολαστικότητα. Δύο διαφορετικὲς κορυφὲς μπορεῖ νὰ ἔχουν τὴν ἴδια κλειστὴ γειτονιά — λόγου χάριν ὁποιεσδήποτε δύο κορυφὲς τοῦ K_3 — ὁπότε τὸ $\{N_G[v] \mid v \in V(G)\}$, ὡς σύνολο, θὰ εἶχε ἐνδεχομένως λιγότερα μέλη ἀπὸ ὅ,τι κορυφὲς ἔχει τὸ G.

Θυμίζουμε, τέλος, τί σημαίνει «καλὴ» προσεγγιστικὴ λύση.

Ὁρισμός 14.23. Ἔστω Π πρόβλημα ἐλαχιστοποίησης καὶ $\rho \geq 1$. Ἕνας ἀλγόριθμος πολυωνυμικοῦ χρόνου γιὰ τὸ Π λέγεται *ρ-προσεγγιστικὸς* ἂν γιὰ κάθε στιγμιότυπο ἐπιστρέφει ἐφικτὴ λύση μὲ τιμὴ τὸ πολὺ ρ φορὲς τὴ βέλτιστη. Τὸ ρ τὸ λέμε *λόγο προσέγγισης* τοῦ ἀλγορίθμου καὶ ἐπιτρέπεται νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέγεθος τοῦ στιγμιότυπου.

Ὁ ἄπληστος ἀλγόριθμος

Ὁ ἀλγόριθμος διατηρεῖ τὸ σύνολο U τῶν κορυφῶν ποὺ δὲν κυριαρχοῦνται ἀκόμη ἀπὸ τὶς ἤδη ἐπιλεγμένες κορυφές, καὶ σὲ κάθε βῆμα ἐπιλέγει μιὰ κορυφὴ ποὺ μειώνει τὸ U ὅσο τὸ δυνατὸν περισσότερο.

1. Ἔστω $D = \emptyset$ καὶ $U = V(G)$.
2. Ἐνῶ $U \neq \emptyset$,
   Ἔστω v κορυφὴ τοῦ G ποὺ μεγιστοποιεῖ τὸ $|N_G[v] \cap U|$,
   Πρόσθεσε τὴν v στὸ D,
   Ἀφαίρεσε ἀπὸ τὸ U ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ $N_G[v]$.
3. Ἐπίστρεψε τὸ D.

Πρόκειται γιὰ τὸν *ἄπληστο ἀλγόριθμο* γιὰ τὴν κυριαρχία: σὲ κάθε βῆμα κάνει τὴν ἐπιλογὴ ποὺ φαίνεται καλύτερη *ἐκείνη τὴ στιγμή*, χωρὶς καμία πρόβλεψη γιὰ τὴ

συνέχεια. Θὰ συμβολίζουμε μὲ T τὸ πλῆθος τῶν ἐπαναλήψεων ποὺ ἐκτελεῖ, μὲ v_t τὴν κορυφὴ ποὺ ἐπιλέγεται στὴν t-ὁστὴ ἐπανάληψη, καὶ μὲ U_t τὴν τιμὴ τοῦ U μετὰ τὴν t-ὁστὴ ἐπανάληψη, ὁπότε $U_0 = V(G)$. Θέτουμε ἀκόμη $r_t = |U_t|$ καὶ

$$A_t = N_G[v_t] \cap U_{t-1}$$

γιὰ τὸ σύνολο τῶν κορυφῶν ποὺ κυριαρχοῦνται γιὰ πρώτη φορὰ στὴν t-ὁστὴ ἐπανάληψη.

Λῆμμα 14.24. Ὁ ἀλγόριθμος τερματίζει μετὰ ἀπὸ $T \leq n(G)$ ἐπαναλήψεις καὶ τὸ σύνολο D ποὺ ἐπιστρέφει εἶναι σύνολο κυριαρχίας τοῦ G. Ἐπιπλέον τὰ $A_1, \ldots, A_T$ εἶναι μὴ κενά, ἀνὰ δύο ξένα, καὶ $\bigcup_{t=1}^{T} A_t = V(G)$, δηλαδὴ ἀποτελοῦν διαμέριση τοῦ $V(G)$· εἰδικότερα καμία κορυφὴ δὲν ἐπιλέγεται δύο φορὲς καὶ ἑπομένως $|D| = T$.

Ἀπόδειξη. Ὅσο $U_{t-1} \neq \emptyset$, κάθε $w \in U_{t-1}$ ἱκανοποιεῖ $|N_G[w] \cap U_{t-1}| \geq 1$, ἀφοῦ $w \in N_G[w]$. Ἄρα ἡ μέγιστη τιμὴ ποὺ ἐξετάζει ὁ ἀλγόριθμος στὴν ἐπανάληψη t εἶναι τουλάχιστον 1, δηλαδὴ $|A_t| \geq 1$ καὶ $r_t < r_{t-1}$. Ὁ πληθάριθμος τοῦ U γνησίως φθίνει, ὁπότε ὁ ἀλγόριθμος τερματίζει μετὰ ἀπὸ τὸ πολὺ $n(G)$ ἐπαναλήψεις, καὶ μάλιστα μὲ $U_T = \emptyset$.

Ἐξ ὁρισμοῦ $A_t \subseteq U_{t-1}$ καὶ $U_t = U_{t-1} \backslash A_t$, ὁπότε τὰ A_t εἶναι ἀνὰ δύο ξένα καὶ ἡ ἕνωσή τους ἰσοῦται μὲ $U_0 \backslash U_T = V(G)$. Ἀφοῦ $V(G) = \bigcup_{t=1}^{T} A_t \subseteq \bigcup_{t=1}^{T} N_G[v_t]$, ἡ Παρατήρηση 14.3 δίνει ὅτι τὸ $D = \{v_1, \ldots, v_T\}$ εἶναι σύνολο κυριαρχίας τοῦ G. Τέλος, ἂν ἦταν $v_t = v_s$ γιὰ κάποια $t < s$, τότε θὰ εἴχαμε $A_s = N_G[v_s] \cap U_{s-1} \subseteq N_G[v_t] \cap U_t = \emptyset$, ποὺ ἀντιβαίνει στὸ $|A_s| \geq 1$. Ἄρα οἱ ἐπιλεγμένες κορυφὲς εἶναι ἀνὰ δύο διαφορετικὲς καὶ $|D| = T$. □

Ὁ λόγος προσέγγισης

Θεώρημα 14.25. Ἔστω G γράφημα μὲ $n = n(G) \geq 1$ κορυφὲς καὶ ἔστω D τὸ σύνολο ποὺ ἐπιστρέφει ὁ ἄπληστος ἀλγόριθμος μὲ εἴσοδο τὸ G. Τότε

$$|D| \leq \mathbf{ds}(G) \cdot \ln n + 1 \leq (1 + \ln n) \cdot \mathbf{ds}(G).$$

Εἰδικότερα, ὁ ἄπληστος ἀλγόριθμος εἶναι $(1 + \ln n)$-προσεγγιστικὸς γιὰ τὸ Ἐλάχιστο Σύνολο Κυριαρχίας.

Ἀπόδειξη. Θέτουμε $k = \mathbf{ds}(G)$ καὶ ἔστω D^* ἕνα ἐλάχιστο σύνολο κυριαρχίας τοῦ G, δηλαδὴ $|D^*| = k$. Ἀφοῦ $n \geq 1$, ἰσχύει $k \geq 1$.

Ἰσχυρισμός 14.26. Γιὰ κάθε $t \in \{1, \ldots, T\}$ ἰσχύει $r_t \leq r_{t-1}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 14.3 ἔχουμε $V(G) = \bigcup_{u \in D^*} N_G[u]$, ὁπότε, τέμνοντας μὲ τὸ U_{t-1},

$$U_{t-1} = \bigcup_{u \in D^*} \left(N_G[u] \cap U_{t-1}\right)$$

καὶ ἐπομένως

$$\sum_{u \in D^*} \left|N_G[u] \cap U_{t-1}\right| \geq |U_{t-1}| = r_{t-1}.$$

Τὸ ἄθροισμα ἔχει k προσθετέους, ἄρα κάποιος ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι τουλάχιστον ἴσος μὲ τὸν μέσο ὅρο: ὑπάρχει $u \in D^*$ μὲ $|N_G[u] \cap U_{t-1}| \geq r_{t-1}/k$. Ἡ κορυφὴ v_t ἐπιλέχθηκε ὥστε νὰ μεγιστοποιεῖ τὸ $|N_G[v] \cap U_{t-1}|$ πάνω σὲ *ὅλες* τὶς κορυφὲς τοῦ G, καὶ ἡ u εἶναι μία ἀπὸ αὐτές, ὁπότε

$$|A_t| = \left|N_G[v_t] \cap U_{t-1}\right| \geq \left|N_G[u] \cap U_{t-1}\right| \geq \frac{r_{t-1}}{k}.$$

Ἄρα $r_t = r_{t-1} - |A_t| \leq r_{t-1}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$. □

Μὲ ἐπαγωγὴ στὸ t, ὁ Ἰσχυρισμὸς 14.26 δίνει $r_t \leq n\left(1 - \frac{1}{k}\right)^t$ γιὰ κάθε $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ καί, χρησιμοποιώντας τὴν ἀνισότητα $1 - x \leq e^{-x}$ γιὰ $x = 1/k$,

$$r_t \leq n\, e^{-t/k}.$$

Ἂν $T = 0$ τότε $|D| = 0$ καὶ δὲν ἔχουμε τίποτα νὰ δείξουμε, ὁπότε ἔστω $T \geq 1$. Ἐπειδὴ ὁ ἀλγόριθμος ἐκτέλεσε τὴν T-οστὴ ἐπανάληψη, ἴσχυε $U_{T-1} \neq \emptyset$, δηλαδὴ $r_{T-1} \geq 1$. Συνδυάζοντας,

$$1 \leq r_{T-1} \leq n\, e^{-(T-1)/k} \quad \Longrightarrow \quad e^{(T-1)/k} \leq n \quad \Longrightarrow \quad T \leq k \ln n + 1.$$

Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 14.24 ἰσχύει $|D| = T$, ἄρα $|D| \leq \mathbf{ds}(G) \ln n + 1$. Ἡ δεύτερη ἀνισότητα προκύπτει ἀπὸ τὸ $k \geq 1$: $k \ln n + 1 \leq k \ln n + k = (1 + \ln n)k$. □

Ἡ ἀνάλυση αὐτὴ δὲν χρησιμοποίησε πουθενὰ ὅτι τὰ σύνολα μὲ τὰ ὁποία καλύπτουμε εἶναι κλειστὲς γειτονιές: ἰσχύει αὐτούσια γιὰ τὴν Κάλυψη Συνόλου, μὲ τὸ n ἀντικατεστημένο ἀπὸ τὸ $|X|$. Τὸ ἑπόμενο θεώρημα δίνει ἕνα δεύτερο φράγμα, τὸ ὁποῖο εἶναι σαφῶς καλύτερο ὅταν τὸ γράφημα ἔχει μικρὸ μέγιστο βαθμό. Συμβολίζουμε μὲ

$$H(d) = \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{i}$$

τὸν d-ὸστὸ *ἁρμονικὸ ἀριθμὸ* καὶ θυμίζουμε ὅτι $H(d) \leq 1 + \ln d$ γιὰ κάθε $d \geq 1$, ὅπως προκύπτει συγκρίνοντας τὸ ἄθροισμα μὲ τὸ ὁλοκλήρωμα τῆς $1/x$.

Θεώρημα 14.27. Ἔστω G γράφημα μὲ $n(G) \geq 1$, ἔστω $\Delta = \Delta(G)$ καὶ ἔστω D τὸ σύνολο ποὺ ἐπιστρέφει ὁ ἄπληστος ἀλγόριθμος μὲ εἴσοδο τὸ G. Τότε

$$|D| \leq H(\Delta + 1) \cdot \mathbf{ds}(G) \leq \big(1 + \ln(\Delta + 1)\big) \cdot \mathbf{ds}(G).$$

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 14.24 τὰ $A_1, \ldots, A_T$ ἀποτελοῦν διαμέριση τοῦ $V(G)$ σὲ μὴ κενὰ σύνολα. Χρεώνουμε σὲ κάθε κορυφὴ μιὰ *τιμή*: γιὰ $w \in A_t$ θέτουμε

$$c(w) = \frac{1}{|A_t|}.$$

Μὲ ἄλλα λόγια, κάθε ἐπιλεγμένη κορυφὴ μοιράζει τὸ μοναδιαῖο κόστος της ἐξίσου στὶς κορυφὲς ποὺ κυριαρχεῖ γιὰ πρώτη φορά. Τότε $\sum_{w \in A_t} c(w) = 1$ γιὰ κάθε t, ὁπότε, ἀθροίζοντας πάνω στὴ διαμέριση,

$$\sum_{w \in V(G)} c(w) = T = |D|.$$

Ἰσχυρισμός 14.28. Γιὰ κάθε $u \in V(G)$ ἰσχύει $\sum_{w \in N_G[u]} c(w) \leq H\big(|N_G[u]|\big)$.

Ἀπόδειξη. Θέτουμε $d = |N_G[u]|$ καὶ διατάσσουμε τὶς κορυφὲς τοῦ $N_G[u]$ ὡς $w_1, \ldots, w_d$ σύμφωνα μὲ τὴ σειρὰ μὲ τὴν ὁποία ἀφαιρέθηκαν ἀπὸ τὸ U (κορυφὲς ποὺ ἀφαιρέθηκαν στὴν ἴδια ἐπανάληψη διατάσσονται μεταξύ τους αὐθαίρετα). Ἔστω t_i ἡ ἐπανάληψη στὴν ὁποία ἀφαιρέθηκε ἡ w_i, δηλαδὴ $w_i \in A_{t_i}$. Λόγῳ τῆς διάταξης, οἱ κορυφὲς $w_i, w_{i+1}, \ldots, w_d$ ἀφαιρέθηκαν ὅλες στὴν ἐπανάληψη t_i ἢ ἀργότερα, ἄρα ἀνήκουν ὅλες στὸ $U_{t_i - 1}$ καὶ ἑπομένως

$$\big|N_G[u] \cap U_{t_i - 1}\big| \geq d - i + 1.$$

Στὴν ἐπανάληψη t_i ὁ ἀλγόριθμος ἐπέλεξε κορυφὴ μέγιστου κέρδους, ὁπότε

$$|A_{t_i}| = \big|N_G[v_{t_i}] \cap U_{t_i - 1}\big| \geq \big|N_G[u] \cap U_{t_i - 1}\big| \geq d - i + 1,$$

δηλαδὴ $c(w_i) \leq \frac{1}{d - i + 1}$. Ἀθροίζοντας γιὰ $i = 1, \ldots, d$,

$$\sum_{w \in N_G[u]} c(w) = \sum_{i=1}^{d} c(w_i) \leq \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{d - i + 1} = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{j} = H(d).$$

□

Ἔστω τώρα D^* ἕνα ἐλάχιστο σύνολο κυριαρχίας τοῦ G. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 14.3 ἰσχύει $V(G) = \bigcup_{u\in D^*} N_G[u]$, ὁπότε κάθε κορυφὴ τοῦ G μετριέται τουλάχιστον μία φορὰ στὸ διπλὸ ἄθροισμα ποὺ ἀκολουθεῖ· ἀφοῦ ἐπιπλέον $c(w) > 0$ γιὰ κάθε w, ὁ Ἰσχυρισμὸς 14.28 δίνει

$$|D| = \sum_{w\in V(G)} c(w) \le \sum_{u\in D^*} \sum_{w\in N_G[u]} c(w) \le \sum_{u\in D^*} H\big(|N_G[u]|\big) \le |D^*|\cdot H(\Delta{+}1),$$

ὅπου στὴν τελευταία ἀνισότητα χρησιμοποιήσαμε ὅτι $|N_G[u]| = \deg_G(u) + 1 \le \Delta + 1$ καὶ ὅτι ἡ H εἶναι αὔξουσα. Ἄρα $|D| \le H(\Delta + 1)\mathbf{ds}(G)$, καὶ τὸ δεύτερο φράγμα προκύπτει ἀπὸ τὴν $H(d) \le 1 + \ln d$. □

Παρατήρηση 14.29. Οἱ δύο ἀποδείξεις δὲν εἶναι ἡ ἴδια ἀπόδειξη μὲ ἄλλη παράμετρο. Ἡ ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 14.25 παρακολουθεῖ μόνο τὸ *πλῆθος* r_t τῶν κορυφῶν ποὺ ἀπομένουν καὶ δείχνει ὅτι αὐτὸ συρρικνώνεται κατὰ ἕναν παράγοντα $1 - 1/k$ σὲ κάθε βῆμα· ἡ ἀρχικὴ τιμὴ $r_0 = n$ μπαίνει ἀναγκαστικὰ στὸ τελικὸ φράγμα, ἐνῶ τὸ μέγεθος τῶν κλειστῶν γειτονιῶν δὲν ἐμφανίζεται πουθενά. Δὲν ὑπάρχει τρόπος νὰ ἀντικαταστήσει κανεὶς ἐκεῖ τὸ n μὲ τὸ $\Delta + 1$, ἀφοῦ τὸ r_t δὲν φράσσεται ἀπὸ τὸ $\Delta{+}1$. Ἀντίθετα, ἡ ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 14.27 κάνει *τοπικὴ* λογιστική: χρεώνει τὴ δαπάνη τοῦ ἀλγορίθμου στὶς κορυφὲς καὶ ἐλέγχει ξεχωριστὰ τὴ συνολικὴ χρέωση κάθε κλειστῆς γειτονιᾶς τοῦ βέλτιστου· ἐκεῖ ἀκριβῶς μπαίνει τὸ μέγεθος τῶν συνόλων. Τὸ ἴδιο ἐπιχείρημα τῶν τιμῶν δίνει καὶ τὸ φράγμα $H(n) \cdot \mathbf{ds}(G)$, ἀφοῦ $|N_G[u]| \le n$.

Παρατήρηση 14.30. Ὁ ἄπληστος ἀλγόριθμος ὑλοποιεῖται σὲ χρόνο $O(n{+}m)$, ὅπου $n = n(G)$ καὶ $m = m(G)$. Διατηροῦμε γιὰ κάθε κορυφὴ v τὸν μετρητὴ $c(v) = |N_G[v]\cap U|$ καὶ τὶς κορυφὲς ταξινομημένες σὲ κάδους ὡς πρὸς τὴν τιμὴ τοῦ μετρητή τους. Κάθε φορὰ ποὺ μιὰ κορυφὴ w ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ U, μειώνουμε κατὰ ἕνα τὸν μετρητὴ κάθε $v \in N_G[w]$ καὶ τὸν μετακινοῦμε ἕναν κάδο χαμηλότερα. Τὸ συνολικὸ πλῆθος τῶν μειώσεων εἶναι $\sum_{w\in V(G)} |N_G[w]| = 2m + n$. Τὸ σύνολο U μόνο συρρικνώνεται, ὁπότε κανένας μετρητὴς δὲν αὐξάνεται ποτὲ καὶ ὁ δείκτης τοῦ μέγιστου μὴ κενοῦ κάδου κινεῖται μονότονα πρὸς τὰ κάτω: ἡ συνολικὴ δαπάνη γιὰ τὸν ἐντοπισμὸ τοῦ μεγίστου σὲ ὅλες τὶς ἐπαναλήψεις εἶναι $O(n)$.

Παρατήρηση 14.31. Τὸ φράγμα τοῦ Θεωρήματος 14.25 εἶναι, στὴν οὐσία, τὸ καλύτερο δυνατό — τόσο γιὰ τὸν συγκεκριμένο ἀλγόριθμο ὅσο καὶ γιὰ ὁποιονδήποτε ἄλλον. Ἀφενός, ἡ ἀνάλυση τοῦ ἁπλοῦστου ἀλγορίθμου γιὰ τὴν Κάλυψη Συνόλου εἶναι ἀσυμπτωτικὰ σφιχτή: ὑπάρχουν στιγμιότυπα στὰ ὁποία ὁ ἄπληστος ἐπιστρέφει λύση $\ln n - \ln\ln n + \Theta(1)$ φορὲς μεγαλύτερη τῆς βέλτιστης [96]. Ἀφετέρου,

κανένας ἀλγόριθμος πολυωνυμικοῦ χρόνου δὲν πετυχαίνει λόγο $(1-\varepsilon)\ln n$ γιὰ τὴν Κάλυψη Συνόλου, γιὰ ὁποιαδήποτε σταθερὰ $\varepsilon > 0$, ἐκτὸς ἂν P = NP [40, 27]. Τὸ κάτω αὐτὸ φράγμα μεταφέρεται στὸ Ἐλάχιστο Σύνολο Κυριαρχίας: δοθέντος στιγμιότυπου $(X, \mathcal{S})$ τῆς Κάλυψης Συνόλου, κατασκευάζουμε γράφημα μὲ μία κορυφὴ ἀνὰ στοιχεῖο τοῦ X καὶ μία ἀνὰ σύνολο τῆς $\mathcal{S}$, κάνουμε τὶς κορυφὲς ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ σύνολα κλίκα, καὶ ἑνώνουμε κάθε κορυφὴ-στοιχεῖο μὲ τὶς κορυφὲς-σύνολα ποὺ τὸ περιέχουν. Κάθε κάλυψη δίνει σύνολο κυριαρχίας τοῦ ἴδιου πληθαρίθμου, ἐνῶ ἀντιστρόφως κάθε σύνολο κυριαρχίας μετατρέπεται, χωρὶς αὔξηση τοῦ πληθαρίθμου, σὲ ἕνα ποὺ ἀποτελεῖται μόνο ἀπὸ κορυφὲς-σύνολα — ἀντικαθιστοῦμε κάθε κορυφὴ-στοιχεῖο μὲ μιὰ κορυφὴ-σύνολο ποὺ τὴν περιέχει — δηλαδὴ σὲ κάλυψη. Ἄρα ὁ ἀριθμὸς κυριαρχίας τοῦ γραφήματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἐλάχιστο μέγεθος κάλυψης τοῦ $(X, \mathcal{S})$. Τὸ γράφημα ἔχει $N = |X| + |\mathcal{S}|$ κορυφὲς καί, ἀφοῦ στὰ στιγμιότυπα αὐτὰ τὸ $|\mathcal{S}|$ εἶναι πολυωνυμικὸ ὡς πρὸς τὸ $|X|$, ἰσχύει $\ln N = O(\ln |X|)$. Ἑπομένως καὶ γιὰ τὸ Ἐλάχιστο Σύνολο Κυριαρχίας δὲν ὑπάρχει ἀλγόριθμος πολυωνυμικοῦ χρόνου μὲ λόγο προσέγγισης $c \ln N$, γιὰ κάποια σταθερὰ $c > 0$, ἐκτὸς ἂν P = NP.

Παρατήρηση 14.32. Ὁ ἄπληστος ἀλγόριθμος ἀγνοεῖ ἐντελῶς τὴ δομὴ τοῦ γραφήματος, καὶ τὸ λογαριθμικὸ φράγμα εἶναι τὸ τίμημα αὐτῆς τῆς γενικότητας. Σὲ συγκεκριμένα γραφήματα τὰ καταφέρνει, βεβαίως, πολὺ καλύτερα ἀπὸ ὅ,τι ἐγγυᾶται ἡ ἀνάλυση: στὸ ἄστρο $K_{1,q}$, λόγου χάριν, τὸ πρῶτο κιόλας βῆμα ἐπιλέγει τὸ κέντρο καὶ ἐπιστρέφει βέλτιστη λύση. Σὲ περιορισμένες κλάσεις γραφημάτων μποροῦμε ἐπίσης νὰ πετύχουμε πολὺ περισσότερα: γιὰ γραφήματα φραγμένου δεντροπλάτους ὁ $\mathbf{ds}(G)$ ὑπολογίζεται *ἀκριβῶς* σὲ γραμμικὸ χρόνο μὲ δυναμικὸ προγραμματισμὸ πάνω σὲ μιὰ δεντρο-ἀποσύνθεση, ἔννοια ποὺ θὰ συναντήσουμε στὸ τελευταῖο κεφάλαιο τοῦ βιβλίου, ἐνῶ γιὰ ἐπίπεδα γραφήματα — ὅπου τὸ πρόβλημα παραμένει NP-δύσκολο — ἡ τεχνικὴ τῶν στρωμάτων τοῦ Baker δίνει $(1+\varepsilon)$-προσέγγιση γιὰ κάθε σταθερὸ $\varepsilon > 0$ [8]. Ἡ ἴδια δομὴ δίνει καὶ πυρῆνα γραμμικοῦ μεγέθους γιὰ τὴν παραμετρικὴ ἐκδοχὴ τοῦ προβλήματος [1].

Παρατήρηση 14.33. Ὁ ἄπληστος ἀλγόριθμος γιὰ τὴν Κάλυψη Συνόλου καὶ ἡ ἀνάλυση τοῦ Θεωρήματος 14.25 ὀφείλονται στοὺς Johnson [57] καὶ Lovász [69]. Ἡ μορφὴ $H(s)$ τοῦ φράγματος, ὅπου s τὸ μέγιστο μέγεθος συνόλου τῆς οἰκογένειας, ὀφείλεται στὸν Chvátal [22], ὁ ὁποῖος πραγματεύεται καὶ τὴ σταθμισμένη ἐκδοχὴ τοῦ προβλήματος.

14.7 Τέλεια σύνολα κυριαρχίας

Στὸ κάτω φράγμα τοῦ Λήμματος 14.11 ἡ μόνη ἀπώλεια προέρχεται ἀπὸ τὶς ἐπικαλύψεις: ἂν οἱ κλειστὲς γειτονιὲς τῶν κορυφῶν ἑνὸς συνόλου κυριαρχίας τέμνονται, τότε κάποιες κορυφὲς μετρήθηκαν παραπάνω ἀπὸ μία φορά. Ἀξίζει λοιπὸν νὰ ξεχωρίσουμε τὰ σύνολα κυριαρχίας ποὺ δὲν σπαταλοῦν τίποτα.

Ὁρισμός 14.34. Ἕνα σύνολο κυριαρχίας D ἑνὸς γραφήματος G λέγεται *τέλειο* ἂν οἱ κλειστὲς γειτονιὲς τῶν κορυφῶν του ἀποτελοῦν διαμέριση τοῦ $V(G)$, δηλαδὴ ἂν κάθε κορυφὴ τοῦ G κυριαρχεῖται ἀπὸ ἀκριβῶς μία κορυφὴ τοῦ D.

Ἰσοδύναμα, τὸ D εἶναι τέλειο σύνολο κυριαρχίας ἂν $|N_G[v] \cap D| = 1$ γιὰ κάθε $v \in V(G)$. Εἰδικότερα κάθε τέλειο σύνολο κυριαρχίας εἶναι ἀνεξάρτητο σύνολο, ἀφοῦ δύο γειτονικὲς κορυφὲς τοῦ D θὰ κυριαρχοῦνταν καὶ οἱ δύο ἀπὸ τὸν ἑαυτό τους καὶ ἀπὸ τὴν ἄλλη.

Παρατήρηση 14.35. Ἔστω G ἕνα r-κανονικὸ γράφημα ποὺ διαθέτει τέλειο σύνολο κυριαρχίας D. Τότε ὁ $r+1$ διαιρεῖ τὸ $n(G)$ καὶ

$$|D| = \frac{n(G)}{r+1} = \mathbf{ds}(G).$$

Εἰδικότερα, κάθε τέλειο σύνολο κυριαρχίας ἑνὸς κανονικοῦ γραφήματος εἶναι ἐλάχιστο.

Ἀπόδειξη. Οἱ κλειστὲς γειτονιὲς $N_G[v]$, $v \in D$, εἶναι ἀνὰ δύο ξένες καὶ ἡ ἕνωσή τους εἶναι τὸ $V(G)$, ἐνῶ καθεμιὰ ἔχει $r+1$ στοιχεῖα. Ἄρα $n(G) = |D| \cdot (r+1)$, ὁπότε ὁ $r+1$ διαιρεῖ τὸ $n(G)$ καὶ $|D| = \frac{n(G)}{r+1}$. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 14.11 ἔχουμε $\mathbf{ds}(G) \geq \frac{n(G)}{\Delta(G)+1} = \frac{n(G)}{r+1} = |D|$, ἐνῶ τὸ D εἶναι σύνολο κυριαρχίας καὶ ἄρα $\mathbf{ds}(G) \leq |D|$. □

Παράδειγμα 14.36. Ὁ τρισδιάστατος κύβος Q_3 ἔχει τέλειο σύνολο κυριαρχίας: οἱ δύο ἀντιδιαμετρικὲς κορυφὲς 000 καὶ 111 κυριαρχοῦν ἀπὸ τέσσερις κορυφὲς ἡ καθεμιά, χωρὶς ἐπικάλυψη, ὁπότε $\mathbf{ds}(Q_3) = \frac{8}{4} = 2$.

Ὁ κύκλος C_n ἔχει τέλειο σύνολο κυριαρχίας ἂν καὶ μόνο ἂν ὁ 3 διαιρεῖ τὸν n (Ἄσκηση 14.11), σὲ συμφωνία μὲ τὸ ὅτι τὸ φράγμα $\mathbf{ds}(C_n) = \lceil n/3 \rceil$ τοῦ Παραδείγματος 14.6 πιάνει τὸ $n/3$ ἀκριβῶς σὲ αὐτὴ τὴν περίπτωση.

Ἀντίθετα, τὸ γράφημα τοῦ Petersen εἶναι 3-κανονικὸ μὲ 10 κορυφές, καὶ ὁ 4 δὲν διαιρεῖ τὸ 10· ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 14.35 δὲν διαθέτει τέλειο σύνολο κυριαρχίας. Ὁ ἀριθμὸς κυριαρχίας του εἶναι $3 = \lceil 10/4 \rceil$, δηλαδὴ πιάνει τὸ κάτω φράγμα τοῦ

Λήμματος 14.11 μετὰ τὴ στρογγυλοποίηση, ἀλλὰ ἡ ἀντίστοιχη κάλυψη δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι τέλεια: τρεῖς κλειστὲς γειτονιὲς ἔχουν συνολικὰ $12 > 10$ στοιχεῖα, ἄρα κάπου ἐπικαλύπτονται.

Τὰ τέλεια σύνολα κυριαρχίας εἶναι γνωστὰ καὶ ὡς *τέλειοι κώδικες*, ὅρος ποὺ προέρχεται ἀπὸ τὴ θεωρία κωδίκων: ἕνα τέλειο σύνολο κυριαρχίας τοῦ ὑπερκύβου Q_r εἶναι ἀκριβῶς ἕνας δυαδικὸς κώδικας μήκους r ποὺ διορθώνει ἕνα σφάλμα καὶ τοῦ ὁποίου οἱ μοναδιαῖες μπάλες καλύπτουν ὅλο τὸν χῶρο, δηλαδὴ ἕνας τέλειος κώδικας διόρθωσης ἑνὸς σφάλματος (ὅπως οἱ κώδικες Hamming). Τέτοιοι κώδικες ὑπάρχουν μόνο ὅταν $r = 2^t - 1$ γιὰ κάποιο $t \geq 1$. Ἡ ὕπαρξη τέτοιου συνόλου εἶναι σπάνια: τὸ κριτήριο διαιρετότητας τῆς Παρατήρησης 14.35 τὴν ἀποκλείει γιὰ τὰ περισσότερα κανονικὰ γραφήματα.

Παρατήρηση 14.37. Ἡ μελέτη τῆς κυριαρχίας ξεκίνησε ἀπὸ ἕνα πρόβλημα σκακιέρας: πόσες βασίλισσες χρειάζονται ὥστε κάθε τετράγωνο τῆς σκακιέρας νὰ ἀπειλεῖται ἢ νὰ καταλαμβάνεται ἀπὸ κάποια ἀπὸ αὐτές; Ἡ ἀπάντηση, πέντε γιὰ τὴ συνηθισμένη σκακιέρα 8×8, ἦταν γνωστὴ ἀπὸ τὰ μέσα τοῦ δέκατου ἕνατου αἰῶνα. Ὁ Berge [11] ἦταν ὁ πρῶτος ποὺ διατύπωσε τὴν ἔννοια γιὰ αὐθαίρετα γραφήματα, ἐνῶ ὁ ὅρος «σύνολο κυριαρχίας» καθιερώθηκε ἀπὸ τὸν Ore [81]. Ἔκτοτε ἡ θεωρία κυριαρχίας ἐξελίχθηκε σὲ αὐτοτελῆ κλάδο μὲ ἑκατοντάδες παραλλαγὲς τῆς βασικῆς ἔννοιας· γιὰ μιὰ συστηματικὴ παρουσίαση παραπέμπουμε στὸ βιβλίο τῶν Haynes, Hedetniemi, καὶ Slater [53].

Ἀσκήσεις Κεφαλαίου

14.1 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι κάθε κάλυμμα κορυφῶν ἑνὸς γραφήματος χωρὶς ἀπομονωμένες κορυφὲς εἶναι καὶ σύνολο κυριαρχίας του. Ἰσχύει τὸ ἀντίστροφο;

14.2 (★☆☆)**.** Βρεῖτε τὸν ἀριθμὸ κυριαρχίας τοῦ πλήρους διμεροῦς γραφήματος $K_{p,q}$ γιὰ κάθε $p, q \geq 1$.

14.3 (★☆☆)**.** Ὑπολογίστε τὸν ἀριθμὸ κυριαρχίας τοῦ τρισδιάστατου κύβου Q_3 καὶ τοῦ γραφήματος τοῦ Petersen.

14.4 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G καὶ κάθε κορυφὴ v τοῦ G ἰσχύει $\mathbf{ds}(G) \leq \mathbf{ds}(G - v) + 1$, καὶ ὅτι ἡ διαφορὰ $\mathbf{ds}(G - v) - \mathbf{ds}(G)$ μπορεῖ νὰ γίνει αὐθαίρετα μεγάλη.

14.5 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι τὸ μονοπάτι P_n ἔχει ἐλαχιστικὸ σύνολο κυριαρχίας πληθαρίθμου $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Συμπεράνετε ὅτι, στὰ μονοπάτια, ὁ λόγος τοῦ πληθαρίθμου ἑνὸς

ἐλαχιστικοῦ πρὸς ἐκεῖνον ἑνὸς ἐλάχιστου συνόλου κυριαρχίας μπορεῖ νὰ πλησιάσει αὐθαίρετα τὸ $3/2$.

14.6 (★★☆)**.** Τὸ *στεφάνι* $H \circ K_1$ ἑνὸς γραφήματος H προκύπτει ἂν προσθέσουμε σὲ κάθε κορυφὴ v τοῦ H μιὰ νέα γειτονικὴ κορυφὴ u_v βαθμοῦ 1. Δεῖξτε ὅτι $\mathbf{ds}(H \circ K_1) = n(H)$, δηλαδὴ ὅτι τὰ στεφάνια πιάνουν τὸ φράγμα τοῦ Ore.

14.7 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G ἰσχύει $\mathbf{ds}(G) \geq n(G) - m(G)$. Πότε πιάνεται ἡ ἰσότητα;

14.8 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι ἂν $G_1, \ldots, G_k$ εἶναι οἱ συνεκτικὲς συνιστῶσες ἑνὸς γραφήματος G, τότε $\mathbf{ds}(G) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{ds}(G_i)$.

14.9 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι κάθε συνεκτικὸ γράφημα G ἱκανοποιεῖ

$$\mathbf{ds}(G) \geq \frac{\textbf{διάμετρος}(G) + 1}{3},$$

καὶ βρεῖτε μιὰ ἄπειρη οἰκογένεια γραφημάτων γιὰ τὴν ὁποία ἰσχύει ἡ ἰσότητα.

14.10 (★☆☆)**.** Ἔστω G τὸ γράφημα μὲ $V(G) = \{u, a, b, c, w, x, y, z\}$ καὶ

$$E(G) = \big\{\{u,a\},\{u,b\},\{u,c\},\{a,x\},\{a,y\},\{a,z\},\{w,x\},\{w,y\},\{w,z\}\big\}.$$

Δεῖξτε ὅτι $\mathbf{ds}(G) = 2$, ἐνῶ ὁ ἄπληστος ἀλγόριθμος τῆς Ἑνότητας 14.6 ἐπιστρέφει σύνολο κυριαρχίας μὲ τρεῖς κορυφές, ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο λύνονται οἱ ἰσοπαλίες.

14.11 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι ὁ κύκλος C_n ἔχει τέλειο σύνολο κυριαρχίας ἂν καὶ μόνο ἂν ὁ 3 διαιρεῖ τὸν n.

14.12 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι κάθε δέντρο T μὲ $n(T) \geq 3$ ἱκανοποιεῖ $\mathbf{ds}(T) \geq s(T)$, ὅπου $s(T)$ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν στηρικτικῶν κορυφῶν τοῦ T.

14.13 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε δύο γραφήματα G καὶ H ἰσχύει

$$\mathbf{ds}(G \square H) \leq \min\big\{\mathbf{ds}(G) \cdot n(H),\ \mathbf{ds}(H) \cdot n(G)\big\}.$$

14.14 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι κάθε ἐλαχιστικὸ σύνολο κυριαρχίας D ἑνὸς γραφήματος G χωρὶς ἀπομονωμένες κορυφὲς ἱκανοποιεῖ $|D| \leq n(G) - \mathbf{ds}(G)$.

14.15 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι κάθε γράφημα G χωρὶς ἀπομονωμένες κορυφὲς ἱκανοποιεῖ $\mathbf{ds}(G) \leq \mu(G)$, ὅπου $\mu(G)$ εἶναι ὁ πληθάριθμος ἑνὸς μέγιστου ταιριάσματος τοῦ G. Συμπεράνετε μιὰ δεύτερη ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος τοῦ Ore.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15

ΡΟΕΣ

Μέχρι τώρα οἱ ἀκμὲς ἑνὸς γραφήματος ἦταν ὅλες ἰσοδύναμες μεταξύ τους. Στὸ κεφάλαιο αὐτό τους ἀναθέτουμε κατεύθυνση καὶ χωρητικότητα, καὶ ῥωτᾶμε πόσο ὑλικὸ μπορεῖ νὰ μεταφερθεῖ ἀπὸ μιὰ κορυφὴ σὲ μιὰ ἄλλη. Ἡ ἀπάντηση δίνεται ἀπὸ ἕνα ἀκόμη μεγιστοελάχιστο θεώρημα τὸ ὁποῖο, ὅπως θὰ δοῦμε, περιέχει ὡς εἰδικὲς περιπτώσεις τόσο τὸ θεώρημα τοῦ Menger, στὴν ἀκμική του μορφή, ὅσο καὶ ἐκεῖνο τοῦ Kőnig.

15.1 Δίκτυα καὶ ῥοές

Ὁρισμός 15.1. Καλοῦμε *δίκτυο* κάθε τετράδα $N = (D, s, t, c)$ ὅπου τὸ D εἶναι ἕνα διατεταγμένο γράφημα (βλ. Ὁρισμὸ 1.19), τὰ s καὶ t εἶναι δύο διαφορετικὲς κορυφὲς τοῦ D ποὺ καλοῦμε *πηγή* καὶ *καταβόθρα* ἀντίστοιχα, καὶ $c : E(D) \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ εἶναι μιὰ συνάρτηση ποὺ ἀναθέτει σὲ κάθε ἀκμὴ e τὴν *χωρητικότητα* τῆς $c(e)$.

Γιὰ μιὰ κορυφὴ v τοῦ D συμβολίζουμε μὲ $E_D^+(v)$ τὸ σύνολο τῶν ἀκμῶν ποὺ ἔχουν τὴν v ὡς πρῶτο ἄκρο καὶ μὲ $E_D^-(v)$ τὸ σύνολο τῶν ἀκμῶν ποὺ ἔχουν τὴν v ὡς δεύτερο ἄκρο. Ἐπίσης, γιὰ κάθε συνάρτηση $g : E(D) \to \mathbb{R}$ καὶ κάθε $F \subseteq E(D)$, γράφουμε $g(F) = \sum_{e \in F} g(e)$.

Ὁρισμός 15.2. Ἔστω $N = (D, s, t, c)$ δίκτυο. Καλοῦμε *ῥοή* τοῦ N κάθε συνάρτηση $f : E(D) \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ γιὰ τὴν ὁποία ἰσχύουν τὰ ἀκόλουθα:

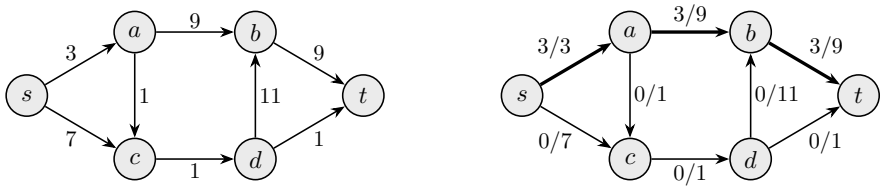
(i) γιὰ κάθε $e \in E(D)$, $0 \leq f(e) \leq c(e)$ (περιορισμὸς χωρητικότητας) καί

(ii) γιὰ κάθε $v \in V(D)\backslash\{s,t\}$, $f(E_D^-(v)) = f(E_D^+(v))$ (διατήρηση τῆς ῥοῆς).

Ἡ *τιμή* τῆς f εἶναι ὁ ἀριθμὸς

$$\textbf{τιμὴ}(f) = f(E_D^+(s)) - f(E_D^-(s)).$$

Μιὰ ῥοὴ f τοῦ N εἶναι *μέγιστη* ἂν καμία ῥοὴ τοῦ N δὲν ἔχει τιμὴ μεγαλύτερη ἀπὸ **τιμή**(f).



(α) (β)

Σχῆμα 15.1: Ἕνα δίκτυο $N = (D, s, t, c)$, ὅπου κάθε ἀκμὴ εἶναι σημειωμένη μὲ τὴν χωρητικότητά της (α), καὶ μιὰ ῥοὴ f τοῦ N μὲ **τιμή**$(f) = 3$, ὅπου κάθε ἀκμὴ e εἶναι σημειωμένη μὲ τὸ ζεῦγος $f(e)/c(e)$ (β).

Ἡ σταθερὴ συνάρτηση $f(e) = 0$ εἶναι πάντοτε ῥοή, μὲ τιμὴ 0. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι τὸ σύνολο τῶν ῥοῶν ἑνὸς δικτύου εἶναι κλειστὸ καὶ φραγμένο ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^{|E(D)|}$, ἐνῶ ἡ **τιμή** εἶναι συνεχὴς σὲ αὐτό. Ἄρα κάθε δίκτυο ἔχει μέγιστη ῥοή, κάτι ποὺ στὸ ἑξῆς θὰ τὸ χρησιμοποιοῦμε χωρὶς ἰδιαίτερη μνεία.

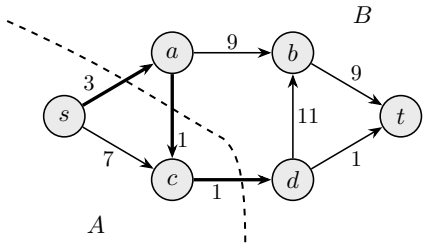
Παρατήρηση 15.3. Ἂν f εἶναι ῥοὴ τοῦ $N = (D, s, t, c)$, τότε **τιμή**$(f) = f(E_D^-(t)) - f(E_D^+(t))$.

Ἀπόδειξη. Ἀθροίζουμε τὴν ποσότητα $f(E_D^+(v)) - f(E_D^-(v))$ γιὰ ὅλες τὶς κορυφὲς v τοῦ D. Κάθε ἀκμὴ συνεισφέρει στὸ ἄθροισμα μιὰ φορὰ μὲ πρόσημο $+$ (γιὰ τὸ πρῶτο ἄκρο της) καὶ μιὰ φορὰ μὲ πρόσημο $-$ (γιὰ τὸ δεύτερο ἄκρο της), ἄρα τὸ ἄθροισμα εἶναι 0. Ἀπὸ τὴν διατήρηση τῆς ῥοῆς, ὅλοι οἱ προσθετέοι ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ κορυφὲς διαφορετικὲς τῶν s καὶ t εἶναι μηδενικοί, ὁπότε **τιμή**$(f) + \big(f(E_D^+(t)) - f(E_D^-(t))\big) = 0$. □

15.2 Τομές

Ἡ τιμὴ μιᾶς ῥοῆς μετρήθηκε παραπάνω στὴν πηγὴ καί, ὅπως μόλις εἴδαμε, τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα δίνει καὶ ἡ μέτρησή της στὴν καταβόθρα. Θὰ δοῦμε τώρα ὅτι τὸ ἴδιο συμβαίνει σὲ κάθε "ἐγκάρσια τομή" τοῦ δικτύου.

Ὁρισμός 15.4. Ἔστω $N = (D, s, t, c)$ δίκτυο. Καλοῦμε (s,t)-*τομή* τοῦ N κάθε διαμέριση (A, B) τοῦ $V(D)$ γιὰ τὴν ὁποία $s \in A$ καὶ $t \in B$. Συμβολίζουμε μὲ $E(A, B)$ τὸ σύνολο τῶν ἀκμῶν τοῦ D ποὺ ἔχουν τὸ πρῶτο ἄκρο τους στὸ A καὶ τὸ δεύτερο στὸ B, καὶ ὁρίζουμε τὴν *χωρητικότητα* τῆς τομῆς ὡς $c(A, B) = c(E(A, B))$. Μιὰ (s,t)-τομὴ εἶναι *ἐλάχιστη* ἂν καμία (s,t)-τομὴ τοῦ N δὲν ἔχει μικρότερη χωρητικότητα.



Σχῆμα 15.2: Ἡ (s,t)-τομὴ (A, B) τοῦ δικτύου τοῦ Σχήματος 15.1, ὅπου $A = \{s, c\}$ καὶ $B = \{a, b, d, t\}$. Οἱ τρεῖς ἀκμὲς ποὺ τὴν διασχίζουν εἶναι σημειωμένες μὲ ἔντονη γραμμή, ἐνῶ $c(A, B) = c\big((s, a)\big) + c\big((c, d)\big) = 4$.

Λῆμμα 15.5. Ἔστω f ῥοὴ τοῦ δικτύου $N = (D, s, t, c)$ καὶ ἔστω (A, B) μιὰ (s,t)-τομὴ τοῦ N. Τότε $\textbf{τιμή}(f) = f(E(A, B)) - f(E(B, A))$.

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ ὅλοι οἱ προσθετέοι ἐκτὸς ἀπὸ ἐκεῖνον τῆς s εἶναι μηδενικοί,

$$\textbf{τιμή}(f) = \sum_{v \in A} \big(f(E_D^+(v)) - f(E_D^-(v))\big).$$

Μετρᾶμε τώρα τὴν συνεισφορὰ κάθε ἀκμῆς e τοῦ D στὸ παραπάνω ἄθροισμα. Ἂν καὶ τὰ δύο ἄκρα τῆς e βρίσκονται στὸ A, τότε ἡ e συνεισφέρει $f(e) - f(e) = 0$, ἐνῶ ἂν κανένα ἄκρο της δὲν βρίσκεται στὸ A δὲν συνεισφέρει καθόλου. Ἂν $e \in E(A, B)$ τότε συνεισφέρει $f(e)$, καὶ ἂν $e \in E(B, A)$ συνεισφέρει $-f(e)$. Ἀθροίζοντας, παίρνουμε τὸ ζητούμενο. □

Πόρισμα 15.6. Γιὰ κάθε ῥοὴ f καὶ κάθε (s,t)-τομὴ (A, B) ἑνὸς δικτύου ἰσχύει ὅτι $\textbf{τιμή}(f) \leq c(A, B)$.

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 15.5, $\textbf{τιμή}(f) = f(E(A, B)) - f(E(B, A)) \leq f(E(A, B)) \leq c(E(A, B)) = c(A, B)$, ὅπου ἡ πρώτη ἀνισότητα ἰσχύει ἐπειδὴ ἡ f παίρνει μὴ-ἀρνητικὲς τιμὲς καὶ ἡ δεύτερη ἀπὸ τὸν περιορισμὸ χωρητικότητας. □

Τὸ Πόρισμα 15.6 μᾶς λέει ὅτι ἡ μέγιστη τιμὴ ροῆς δὲν ξεπερνᾶ τὴν ἐλάχιστη χωρητικότητα τομῆς. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι ἂν βρεθοῦν κάποια ροὴ f καὶ κάποια τομὴ (A, B) μὲ **τιμή**$(f) = c(A, B)$, τότε ἀναγκαστικὰ ἡ f εἶναι μέγιστη καὶ ἡ (A, B) ἐλάχιστη. Στὴν ἑπόμενη ἑνότητα δείχνουμε ὅτι ἕνα τέτοιο ζεῦγος ὑπάρχει πάντοτε.

15.3 Ἐπαυξήσεις

Ἡ κεντρικὴ ἰδέα εἶναι ὅτι μιὰ ροὴ ποὺ δὲν εἶναι μέγιστη μπορεῖ νὰ βελτιωθεῖ στέλνοντας ἐπιπλέον ὑλικὸ κατὰ μῆκος ἑνὸς μονοπατιοῦ — μὲ τὴν προϋπόθεση ὅτι ἐπιτρέπουμε στὸ μονοπάτι αὐτὸ νὰ διασχίζει ἀκμὲς καὶ ἀντίστροφα, ἀκυρώνοντας ροὴ ποὺ εἶχε σταλεῖ προηγουμένως.

Ὁρισμός 15.7. Ἔστω f ροὴ τοῦ δικτύου $N = (D, s, t, c)$. Τὸ *ὑπολειπόμενο γράφημα* τῆς f εἶναι τὸ διατεταγμένο γράφημα D_f μὲ $V(D_f) = V(D)$ ὅπου, γιὰ κάθε ἀκμὴ $e = (u, v)$ τοῦ D,

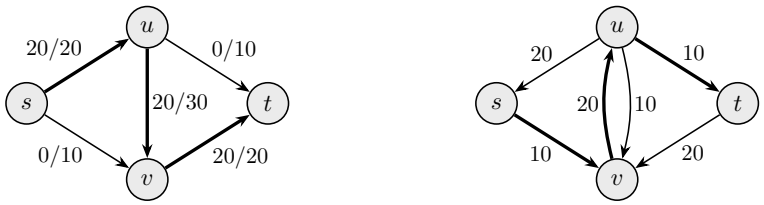
(i) ἂν $f(e) < c(e)$, τὸ D_f περιέχει τὴν ἀκμὴ (u, v) μὲ *ὑπολειπόμενη χωρητικότητα* $c(e) - f(e)$ καί

(ii) ἂν $f(e) > 0$, τὸ D_f περιέχει τὴν ἀκμὴ (v, u) μὲ ὑπολειπόμενη χωρητικότητα $f(e)$.

Κάθε ἀκμὴ τοῦ D_f «θυμᾶται» τὴν ἀκμὴ e τοῦ D καὶ τὸν κανόνα, (i) ἢ (ii), ἀπὸ τὸν ὁποῖο προέκυψε. Ἔτσι, ἂν τὸ D περιέχει καὶ τὴν (u, v) καὶ τὴν (v, u), τὸ D_f μπορεῖ νὰ περιέχει δύο διαφορετικὲς ἀκμὲς ἀπὸ τὴν u στὴν v, καὶ τὸ D_f εἶναι γενικὰ διατεταγμένο πολυγράφημα. Καλοῦμε *μονοπάτι ἐπαύξησης* τῆς f κάθε κατευθυνόμενο (s, t)-μονοπάτι τοῦ D_f καὶ ὁρίζουμε τὴν *στένωση* ἑνὸς μονοπατιοῦ ἐπαύξησης ὡς τὴν ἐλάχιστη ὑπολειπόμενη χωρητικότητα ἀκμῆς του.

Λῆμμα 15.8. Ἔστω f ροὴ τοῦ $N = (D, s, t, c)$ καὶ ἔστω P ἕνα μονοπάτι ἐπαύξησης τῆς f μὲ στένωση θ. Τότε ὑπάρχει ροὴ f' τοῦ N μὲ **τιμή**$(f') =$ **τιμή**$(f) + \theta$.

Ἀπόδειξη. Ὁρίζουμε τὴν f' ὡς ἑξῆς: γιὰ κάθε ἀκμὴ $e = (u, v)$ τοῦ D, θέτουμε $f'(e) = f(e) + \theta$ ἂν τὸ P χρησιμοποιεῖ τὴν ἀκμὴ (u, v) τοῦ D_f ποὺ προέκυψε ἀπὸ τὴν e μὲ τὸν κανόνα (i), $f'(e) = f(e) - \theta$ ἂν τὸ P χρησιμοποιεῖ τὴν ἀκμὴ (v, u) τοῦ D_f ποὺ προέκυψε ἀπὸ τὴν e μὲ τὸν κανόνα (ii), καὶ $f'(e) = f(e)$ σὲ κάθε ἄλλη



(α) (β)

Σχῆμα 15.3: Μιὰ ῥοὴ f μὲ **τιμή**$(f) = 20$ (α) καὶ τὸ ὑπολειπόμενο γράφημα D_f (β). Τὸ μονοπάτι ἐπαύξησης $[s, v, u, t]$ ἔχει στένωση 10 καὶ ἡ δεύτερη ἀκμή του ἀντιστοιχεῖ σὲ ἀκύρωση ῥοῆς τῆς ἀκμῆς (u, v).

περίπτωση. Ὁ ὁρισμὸς εἶναι μονοσήμαντος γιατὶ τὸ P εἶναι μονοπάτι καὶ ἄρα δὲν μπορεῖ νὰ χρησιμοποιεῖ καὶ τὶς δύο ἀκμὲς τοῦ D_f ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὴν e.

Ὁ περιορισμὸς χωρητικότητας ἰσχύει, ἀφοῦ ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς στένωσης ἔχουμε $\theta \leq c(e) - f(e)$ στὴν πρώτη περίπτωση καὶ $\theta \leq f(e)$ στὴν δεύτερη. Γιὰ τὴν διατήρηση τῆς ῥοῆς, ἔστω v ἐσωτερικὴ κορυφὴ τοῦ P καὶ ἔστω e_1, e_2 οἱ δύο ἀκμὲς τοῦ P ποὺ προσπίπτουν στὴν v. Καθεμιὰ ἀπὸ αὐτὲς εἴτε αὐξάνει κατὰ θ τὴν ῥοὴ μιᾶς ἀκμῆς ποὺ εἰσέρχεται στὴν v, εἴτε τὴν μειώνει κατὰ θ γιὰ κάποια ποὺ ἐξέρχεται ἀπὸ αὐτήν, καὶ στὶς τέσσερις περιπτώσεις οἱ μεταβολὲς τῶν $f(E_D^-(v))$ καὶ $f(E_D^+(v))$ εἶναι ἴσες μεταξύ τους. Οἱ ὑπόλοιπες κορυφὲς δὲν ἐπηρεάζονται. Τέλος, ἡ πρώτη ἀκμὴ τοῦ P αὐξάνει τὴν τιμὴ τῆς ῥοῆς κατὰ θ καὶ ἄρα **τιμή**$(f') =$ **τιμή**$(f) + \theta$. □

Τὸ παρακάτω θεώρημα ἀποδείχτηκε ἀπὸ τοὺς L. R. Ford καὶ D. R. Fulkerson τὸ 1956 στὴν [41].

Θεώρημα 15.9 (Ford & Fulkerson, 1956 [41])**.** Ἔστω f ῥοὴ ἑνὸς δικτύου $N = (D, s, t, c)$. Τὰ ἀκόλουθα εἶναι ἰσοδύναμα:

(i) ἡ f εἶναι μέγιστη,

(ii) ἡ f δὲν ἔχει μονοπάτι ἐπαύξησης καί

(iii) ὑπάρχει (s, t)-τομὴ (A, B) τοῦ N μὲ **τιμή**$(f) = c(A, B)$.

Ἀπόδειξη. Δείχνουμε ὅτι (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i).

Ἂν ἡ f ἔχει μονοπάτι ἐπαύξησης P, τότε ἡ στένωση τοῦ P εἶναι θετική, ἀφοῦ κάθε ἀκμὴ τοῦ D_f ἔχει ἐξ ὁρισμοῦ θετικὴ ὑπολειπόμενη χωρητικότητα. Ἀπὸ τὸ

Λῆμμα 15.8 ὑπάρχει ροὴ μὲ μεγαλύτερη τιμή, ἄρα ἡ f δὲν εἶναι μέγιστη, πρᾶγμα ποὺ ἀποδεικνύει τὴν (i)⇒(ii).

Ἔστω τώρα ὅτι ἡ f δὲν ἔχει μονοπάτι ἐπαύξησης. Θέτουμε A τὸ σύνολο τῶν κορυφῶν τοῦ D_f ποὺ εἶναι προσβάσιμες ἀπὸ τὴν s μὲ κατευθυνόμενο μονοπάτι καὶ $B = V(D)\backslash A$. Προφανῶς $s \in A$ καί, ἀπὸ τὴν ὑπόθεση, $t \in B$, ἄρα τὸ (A, B) εἶναι (s, t)-τομή. Ἔστω $e = (u, v) \in E(A, B)$. Ἂν ἦταν $f(e) < c(e)$, τότε ἡ (u, v) θὰ ἦταν ἀκμὴ τοῦ D_f καὶ ἡ v θὰ ἦταν προσβάσιμη ἀπὸ τὴν s, ἄτοπο. Ἄρα $f(e) = c(e)$. Ὁμοίως, ἂν $e = (u, v) \in E(B, A)$ καὶ ἦταν $f(e) > 0$, τότε ἡ (v, u) θὰ ἦταν ἀκμὴ τοῦ D_f καὶ ἡ u θὰ ἦταν προσβάσιμη ἀπὸ τὴν s, ἄτοπο. Ἄρα $f(e) = 0$. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 15.5,

$$\textbf{τιμή}(f) = f(E(A, B)) - f(E(B, A)) = c(E(A, B)) - 0 = c(A, B),$$

ποὺ ἀποδεικνύει τὴν (ii)⇒(iii).

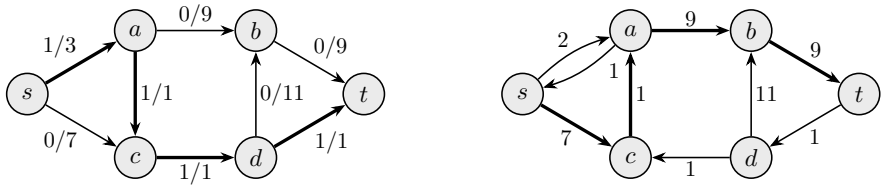
Τέλος, ἂν **τιμή**$(f) = c(A, B)$ γιὰ κάποια (s, t)-τομὴ (A, B), τότε ἀπὸ τὸ Πόρισμα 15.6 καμία ροὴ δὲν μπορεῖ νὰ ἔχει τιμὴ μεγαλύτερη ἀπὸ $c(A, B) =$ **τιμή**(f), ἄρα ἡ f εἶναι μέγιστη. □

Πόρισμα 15.10 (μέγιστης ροῆς–ἐλάχιστης τομῆς)**.** Σὲ κάθε δίκτυο, ἡ μέγιστη τιμὴ ροῆς ἰσοῦται μὲ τὴν ἐλάχιστη χωρητικότητα (s, t)-τομῆς.

Ἀπόδειξη. Ἔστω f μέγιστη ροή. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 15.9 ὑπάρχει (s, t)-τομὴ (A, B) μὲ **τιμή**$(f) = c(A, B)$, ἐνῶ ἀπὸ τὸ Πόρισμα 15.6 καμία (s, t)-τομὴ δὲν ἔχει χωρητικότητα μικρότερη ἀπὸ **τιμή**(f). □

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ Πόρισμα 15.10 εἶναι, ὅπως καὶ τὸ θεώρημα τοῦ Menger, ἕνα μεγιστοελάχιστο θεώρημα, καὶ ὅτι ἡ ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 15.9 εἶναι κατασκευαστική: ξεκινᾶμε ἀπὸ τὴν μηδενικὴ ροὴ καί, ὅσο ὑπάρχει μονοπάτι ἐπαύξησης, ἐπαυξάνουμε κατὰ τὴν στένωσή του. Ἡ διαδικασία αὐτὴ εἶναι γνωστὴ ὡς *μέθοδος ἐπαύξησης*. Ὅταν οἱ χωρητικότητες εἶναι ἀκέραιες, κάθε ἐπαύξηση αὐξάνει τὴν τιμὴ τῆς ροῆς κατὰ τουλάχιστον 1 καὶ ἄρα ἡ μέθοδος τερματίζει μετὰ ἀπὸ τὸ πολὺ $c(E_D^+(s))$ ἐπαυξήσεις. Χωρὶς τὴν ὑπόθεση αὐτή, ὁ τερματισμὸς δὲν εἶναι ἐξασφαλισμένος (βλ. Ἄσκηση 15.13).

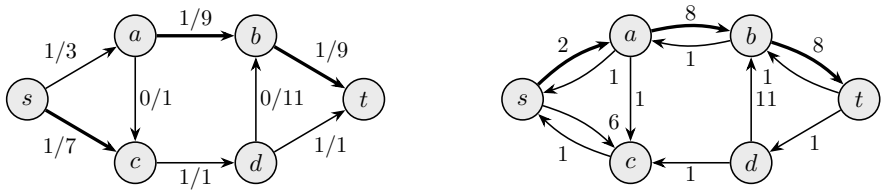
Ἂς δοῦμε τὴν μέθοδο σὲ λειτουργία στὸ δίκτυο τοῦ Σχήματος 15.1, ξεκινώντας ἀπὸ τὴν μηδενικὴ ροή. Ὡς πρῶτο μονοπάτι ἐπαύξησης ἐπιλέγουμε τὸ $[s, a, c, d, t]$, τοῦ ὁποίου ἡ στένωση εἶναι $\min\{3, 1, 1, 1\} = 1$. Ἡ ροὴ f_1 ποὺ προκύπτει ἔχει τιμὴ 1 καὶ φαίνεται, μαζὶ μὲ τὸ ὑπολειπόμενο γράφημά της, στὸ Σχῆμα 15.4.



(α) (β)

Σχῆμα 15.4: Ἡ ῥοὴ f_1 μὲ **τιμή**$(f_1) = 1$ (α) καὶ τὸ ὑπολειπόμενο γράφημα D_{f_1} (β), ὅπου εἶναι σημειωμένο τὸ ἑπόμενο μονοπάτι ἐπαύξησης $[s, c, a, b, t]$.

Στὸ D_{f_1} ἐπιλέγουμε τὸ μονοπάτι ἐπαύξησης $[s, c, a, b, t]$, μὲ στένωση $\min\{7, 1, 9, 9\} = 1$. Ἡ δεύτερη ἀκμή του εἶναι ἀντίστροφη τῆς ἀκμῆς (a, c) τοῦ D, ὁπότε ἡ ἐπαύξηση *μειώνει* τὴν ῥοὴ τῆς (a, c) ἀπὸ 1 σὲ 0. Ἡ ῥοὴ f_2 ποὺ προκύπτει ἔχει τιμὴ 2 (Σχῆμα 15.5).

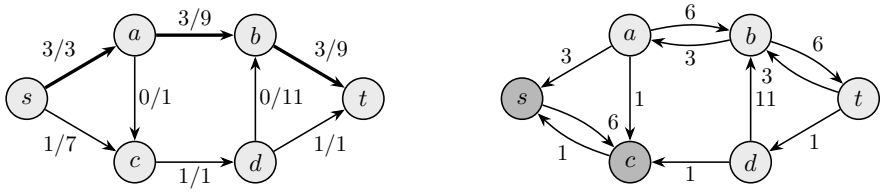


(α) (β)

Σχῆμα 15.5: Ἡ ῥοὴ f_2 μὲ **τιμή**$(f_2) = 2$ (α) καὶ τὸ ὑπολειπόμενο γράφημα D_{f_2} (β), ὅπου εἶναι σημειωμένο τὸ μονοπάτι ἐπαύξησης $[s, a, b, t]$.

Ἡ τρίτη ἐπαύξηση γίνεται κατὰ μῆκος τοῦ $[s, a, b, t]$, μὲ στένωση $\min\{2, 8, 8\} = 2$, καὶ δίνει τὴν ῥοὴ f_3 μὲ **τιμή**$(f_3) = 4$. Στὸ ὑπολειπόμενο γράφημα D_{f_3} οἱ μόνες κορυφὲς ποὺ εἶναι προσβάσιμες ἀπὸ τὴν s εἶναι οἱ s καὶ c, ὁπότε δὲν ὑπάρχει μονοπάτι ἐπαύξησης καὶ ἡ f_3 εἶναι μέγιστη. Σύμφωνα μὲ τὴν ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 15.9, τὸ ζεῦγος $(\{s, c\}, \{a, b, d, t\})$ εἶναι ἐλάχιστη (s, t)-τομή, καὶ εἶναι ἀκριβῶς ἡ τομὴ τοῦ Σχήματος 15.2, μὲ χωρητικότητα $3 + 1 = 4 =$ **τιμή**(f_3).

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ῥοὴ τοῦ Σχήματος 15.1(β), ἂν καὶ ἔχει τιμὴ 3, δὲν εἶναι μέγιστη: τὸ $[s, c, d, t]$ εἶναι μονοπάτι ἐπαύξησής της μὲ στένωση 1. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι δύο μόνο ἐπαυξήσεις ἀρκοῦν γιὰ νὰ φτάσουμε στὴν f_3, ἂν ἐπιλέξουμε τὰ μονοπάτια $[s, a, b, t]$ καὶ $[s, c, d, t]$.



Σχῆμα 15.6: Ἡ μέγιστη ῥοὴ f_3 μὲ **τιμή**$(f_3) = 4$ (α) καὶ τὸ ὑπολειπόμενο γράφημα D_{f_3} (β), ὅπου εἶναι σκιασμένες οἱ κορυφὲς ποὺ εἶναι προσβάσιμες ἀπὸ τὴν s.

15.4 Ἀκέραιες ῥοές

Ἡ ἑπόμενη ἰδιότητα, ἂν καὶ προκύπτει σχεδὸν ἀμέσως ἀπὸ τὰ παραπάνω, εἶναι ἐκείνη ποὺ καθιστᾶ τὶς ῥοὲς ἐργαλεῖο τῆς θεωρίας γραφημάτων καὶ ὄχι μόνο τῆς βελτιστοποίησης: ὅταν οἱ χωρητικότητες εἶναι ἀκέραιες, ἡ μέγιστη ῥοὴ μπορεῖ νὰ ἐπιλεγεῖ ἀκέραια καὶ ἄρα νὰ ἑρμηνευτεῖ ὡς συλλογὴ μονοπατιῶν ἢ ὡς σύνολο ἀκμῶν.

Θεώρημα 15.11. Κάθε δίκτυο $N = (D, s, t, c)$ τοῦ ὁποίου ἡ c παίρνει ἀκέραιες τιμὲς ἔχει μέγιστη ῥοὴ ποὺ παίρνει ἀκέραιες τιμές.

Ἀπόδειξη. Ἐφαρμόζουμε τὴν μέθοδο ἐπαύξησης ξεκινώντας ἀπὸ τὴν μηδενικὴ ῥοὴ καὶ δείχνουμε ἐπαγωγικὰ ὅτι κάθε ῥοὴ ποὺ παράγεται παίρνει ἀκέραιες τιμές. Αὐτὸ ἰσχύει γιὰ τὴν μηδενικὴ ῥοή. Ἂν ἰσχύει γιὰ τὴν f, τότε ὅλες οἱ ὑπολειπόμενες χωρητικότητες τοῦ D_f εἶναι ἀκέραιες, ἄρα τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τὴν στένωση κάθε μονοπατιοῦ ἐπαύξησης καί, σύμφωνα μὲ τὴν ἀπόδειξη τοῦ Λήμματος 15.8, καὶ γιὰ τὴν νέα ῥοή. Ὅπως παρατηρήσαμε παραπάνω, ἡ διαδικασία τερματίζει, καὶ ἀπὸ τὸ Θεώρημα 15.9 ἡ ῥοὴ στὴν ὁποία καταλήγει εἶναι μέγιστη. □

Ὡς πρώτη ἐφαρμογὴ δίνουμε τὴν ἀκμικὴ μορφὴ τοῦ θεωρήματος τοῦ Menger. Λέμε ὅτι δύο μονοπάτια εἶναι *ἀκμοξένα* ἂν δὲν ἔχουν κοινὲς ἀκμὲς καὶ ὅτι ἕνα σύνολο ἀκμῶν F εἶναι (s,t)-*ἀκμοδιαχωριστὴς* τοῦ G ἂν τὸ $G - F$ δὲν περιέχει (s,t)-μονοπάτι.

Θεώρημα 15.12 (Menger, ἀκμικὴ μορφή)**.** Ἔστω G γράφημα καὶ s, t δύο διαφορετικὲς κορυφές του. Τότε ὁ μέγιστος ἀριθμὸς ἀνὰ δύο ἀκμοξένων (s,t)-μονοπατιῶν τοῦ G ἰσοῦται μὲ τὸ ἐλάχιστο μέγεθος ἑνὸς (s,t)-ἀκμοδιαχωριστὴ τοῦ G.

Ἀπόδειξη. Κατασκευάζουμε τὸ δίκτυο $N = (D, s, t, c)$, ὅπου τὸ D προκύπτει ἀπὸ τὸ G ἀντικαθιστώντας κάθε ἀκμὴ $\{u, v\}$ μὲ τὶς δύο ἀκμὲς (u, v) καὶ (v, u), καὶ ὅπου $c(e) = 1$ γιὰ κάθε $e \in E(D)$.

Δείχνουμε πρῶτα ὅτι ἡ ἐλάχιστη χωρητικότητα (s, t)-τομῆς τοῦ N ἰσοῦται μὲ τὸ ἐλάχιστο μέγεθος (s, t)-ἀκμοδιαχωριστὴ τοῦ G. Ἂν (A, B) εἶναι (s, t)-τομὴ τοῦ N, τότε τὸ σύνολο $F = \{\{u, v\} \in E(G) \mid u \in A \text{ καὶ } v \in B\}$ εἶναι (s, t)-ἀκμοδιαχωριστὴς τοῦ G, γιατὶ κάθε (s, t)-μονοπάτι τοῦ G πρέπει κάποια στιγμὴ νὰ περάσει ἀπὸ τὸ A στὸ B, καὶ $|F| = c(A, B)$. Ἀντίστροφα, ἂν F εἶναι (s, t)-ἀκμοδιαχωριστὴς τοῦ G καὶ A εἶναι τὸ σύνολο τῶν κορυφῶν ποὺ εἶναι προσβάσιμες ἀπὸ τὴν s στὸ $G - F$, τότε τὸ $(A, V(G)\backslash A)$ εἶναι (s, t)-τομὴ τοῦ N καὶ κάθε ἀκμὴ ποὺ τὴν διασχίζει προέρχεται ἀπὸ ἀκμὴ τοῦ F, ὁπότε $c(A, V(G)\backslash A) \leq |F|$.

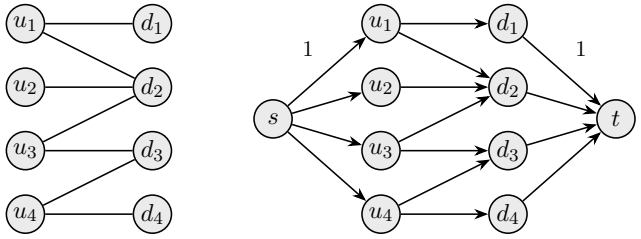
Ἔστω τώρα f ἀκέραια μέγιστη ῥοὴ τοῦ N, ἡ ὁποία ὑπάρχει ἀπὸ τὸ Θεώρημα 15.11, καὶ ἔστω $k =$ **τιμή**(f). Ἀφοῦ ὅλες οἱ χωρητικότητες εἶναι μονάδες, ἡ f παίρνει τιμὲς στὸ $\{0, 1\}$. Μποροῦμε ἐπιπλέον νὰ ὑποθέσουμε ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀκμὴ $\{u, v\}$ τοῦ G μὲ $f((u, v)) = f((v, u)) = 1$, γιατὶ ἀλλιῶς θέτοντας καὶ τὶς δύο αὐτὲς τιμὲς ἴσες μὲ 0 παίρνουμε ῥοὴ μὲ τὴν ἴδια τιμή. Θεωροῦμε τὸ ὑπογράφημα H τοῦ D ποὺ ἐνάγουν οἱ ἀκμὲς e μὲ $f(e) = 1$. Ἀπὸ τὴν διατήρηση τῆς ῥοῆς, σὲ κάθε κορυφὴ τοῦ H διαφορετικὴ τῶν s καὶ t τὸ πλῆθος τῶν εἰσερχόμενων ἀκμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν ἐξερχόμενων, ἐνῶ στὴν s οἱ ἐξερχόμενες ὑπερτεροῦν κατὰ k.

Θὰ δείξουμε, μὲ ἐπαγωγὴ στὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν τοῦ H, ὅτι τὸ H περιέχει k ἀνὰ δύο ἀκμοξένα κατευθυνόμενα (s, t)-μονοπάτια. Ἂν $k = 0$ δὲν ἔχουμε τίποτε νὰ δείξουμε. Ἂν τὸ H περιέχει κατευθυνόμενο κύκλο C, τότε τὸ $H - E(C)$ ἱκανοποιεῖ τὶς ἴδιες συνθῆκες γιὰ τὸ ἴδιο k καὶ ἔχει λιγότερες ἀκμές, ὁπότε τὸ ζητούμενο προκύπτει ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση. Ἔστω λοιπὸν ὅτι τὸ H εἶναι ἄκυκλο καὶ $k \geq 1$. Ξεκινᾶμε ἀπὸ τὴν s καὶ ἀκολουθοῦμε κάθε φορὰ μιὰ ἐξερχόμενη ἀκμή. Δὲν μποροῦμε νὰ συναντήσουμε κορυφὴ στὴν ὁποία ἔχουμε ἤδη βρεθεῖ, γιατὶ τὸ H εἶναι ἄκυκλο, οὔτε νὰ σταματήσουμε σὲ κορυφὴ $v \notin \{s, t\}$, γιατὶ σὲ αὐτὴν οἱ ἐξερχόμενες ἀκμὲς εἶναι τόσες ὅσες καὶ οἱ εἰσερχόμενες, ἀπὸ τὶς ὁποῖες μία μόλις χρησιμοποιήθηκε. Ἄρα καταλήγουμε στὴν t καὶ βρίσκουμε κατευθυνόμενο (s, t)-μονοπάτι P, ἐνῶ τὸ $H - E(P)$ ἱκανοποιεῖ τὶς ἴδιες συνθῆκες γιὰ $k - 1$. Τὰ k μονοπάτια ποὺ προκύπτουν εἶναι ἀκμοξένα ὡς πρὸς τὶς ἀκμὲς τοῦ D, ἄρα, λόγῳ τῆς παραπάνω ὑπόθεσης, καὶ ὡς πρὸς τὶς ἀκμὲς τοῦ G.

Καταλήγουμε ὅτι τὸ G περιέχει k ἀνὰ δύο ἀκμοξένα (s, t)-μονοπάτια. Δὲν μπορεῖ νὰ περιέχει περισσότερα, γιατὶ καθένα ἀπὸ αὐτὰ χρησιμοποιεῖ τουλάχιστον μία ἀκμὴ κάθε (s, t)-ἀκμοδιαχωριστή. Τὸ θεώρημα προκύπτει τώρα ἀπὸ τὸ Πόρι-

σμα 15.10. □

Ἐπιστρέφουμε τώρα στὰ καλύμματα καὶ τὰ ταιριάσματα. Τὸ θεώρημα τοῦ Kőnig (Θεώρημα 10.17) προκύπτει καὶ αὐτὸ ὡς εἰδικὴ περίπτωση τοῦ Πορίσματος 15.10, μὲ τὴν κατασκευὴ ποὺ φαίνεται στὸ Σχῆμα 15.7.



Σχῆμα 15.7: Ἕνα διμερὲς γράφημα G μὲ μέρη U καὶ D (α) καὶ τὸ δίκτυο N_G πού του ἀντιστοιχεῖ (β). Οἱ ἀκμὲς ποὺ προσπίπτουν στὴν πηγὴ καὶ στὴν καταβόθρα ἔχουν χωρητικότητα 1, ἐνῶ οἱ ὑπόλοιπες χωρητικότητα $|U| + 1$.

Θεώρημα 15.13. Γιὰ κάθε διμερὲς γράφημα G ἰσχύει ὅτι $\mu(G) = \mathbf{vc}(G)$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω U καὶ D τὰ μέρη τοῦ G. Κατασκευάζουμε τὸ δίκτυο $N_G = (H, s, t, c)$ ὡς ἑξῆς: τὸ $V(H)$ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὶς κορυφὲς τοῦ G μαζὶ μὲ δύο νέες κορυφὲς s καὶ t, ἐνῶ τὸ $E(H)$ περιέχει τὴν ἀκμὴ (s, u) γιὰ κάθε $u \in U$, τὴν ἀκμὴ (d, t) γιὰ κάθε $d \in D$, καὶ τὴν ἀκμὴ (u, d) γιὰ κάθε $\{u, d\} \in E(G)$ μὲ $u \in U$ καὶ $d \in D$. Θέτουμε $c(e) = 1$ γιὰ τὶς ἀκμὲς τῶν δύο πρώτων εἰδῶν καὶ $c(e) = |U| + 1$ γιὰ τὶς ὑπόλοιπες.

Ἔστω f ἀκέραια μέγιστη ῥοὴ τοῦ N_G. Οἱ τιμές της εἶναι στὸ $\{0, 1\}$, ἀφοῦ ἡ ῥοὴ κάθε ἀκμῆς (u, d) φράσσεται ἀπὸ τὴν ῥοὴ τῆς (s, u). Τὸ σύνολο $M = \{\{u, d\} \in E(G) \mid f((u, d)) = 1\}$ εἶναι ταίριασμα, γιατὶ κάθε $u \in U$ ἔχει εἰσερχόμενη ῥοὴ τὸ πολὺ 1 καὶ κάθε $d \in D$ ἐξερχόμενη ῥοὴ τὸ πολὺ 1. Ἐπίσης $|M| = \textbf{τιμή}(f)$ καί, ἀντίστροφα, κάθε ταίριασμα τοῦ G δίνει ῥοὴ τοῦ N_G μὲ τιμὴ τὸ μέγεθός του. Ἄρα $\textbf{τιμή}(f) = \mu(G)$.

Ἔστω τώρα (A, B) ἐλάχιστη (s, t)-τομὴ τοῦ N_G. Ἀφοῦ ἡ τομὴ $(\{s\}, V(H)\backslash\{s\})$ ἔχει χωρητικότητα $|U|$, ἔχουμε $c(A, B) \leq |U| < |U| + 1$, καὶ ἄρα καμία ἀκμὴ τοῦ τρίτου εἴδους δὲν διασχίζει τὴν τομή, δηλαδὴ δὲν ὑπάρχει $\{u, d\} \in E(G)$ μὲ $u \in A \cap U$ καὶ $d \in B \cap D$. Ἰσοδύναμα, τὸ σύνολο $S = (U \cap B) \cup (D \cap A)$ εἶναι κάλυμμα κορυφῶν τοῦ G, καὶ $|S| = c(A, B)$. Ἀντίστροφα, κάθε κάλυμμα

κορυφῶν S τοῦ G δίνει τὴν (s,t)-τομὴ μὲ $A = \{s\} \cup (U\backslash S) \cup (D \cap S)$, τῆς ὁποίας ἡ χωρητικότητα εἶναι $|S|$. Ἄρα ἡ ἐλάχιστη χωρητικότητα (s,t)-τομῆς τοῦ N_G ἰσοῦται μὲ $\mathbf{vc}(G)$ καὶ τὸ θεώρημα προκύπτει ἀπὸ τὸ Πόρισμα 15.10. □

Παρατήρηση 15.14. Ἡ κατασκευὴ τῆς ἀπόδειξης τοῦ Θεωρήματος 15.13, μαζὶ μὲ τὸ Θεώρημα 15.11, δίνει καὶ δεύτερη ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος τοῦ Hall (Θεώρημα 10.18). Πράγματι, ἔστω ὅτι $|N_G(X)| \geq |X|$ γιὰ κάθε $X \subseteq U$ καὶ ἔστω S ἕνα κάλυμμα κορυφῶν τοῦ G. Κάθε ἀκμὴ ποὺ προσπίπτει σὲ κορυφὴ τοῦ $U\backslash S$ πρέπει νὰ καλύπτεται ἀπὸ τὸ $S \cap D$, ἄρα $N_G(U\backslash S) \subseteq S \cap D$ καὶ

$$|S| = |S \cap U| + |S \cap D| \geq |S \cap U| + |N_G(U\backslash S)| \geq |S \cap U| + |U\backslash S| = |U|.$$

Ἄρα $\mathbf{vc}(G) \geq |U|$, καὶ ἀπὸ τὸ Θεώρημα 15.13, $\mu(G) = \mathbf{vc}(G) \geq |U|$, δηλαδὴ τὸ G ἔχει ταίριασμα ποὺ καλύπτει τὸ U.

Ἀσκήσεις Κεφαλαίου

15.1 (★☆☆). Δεῖξτε ὅτι σὲ ἕνα δίκτυο $N = (D, s, t, c)$ ἡ μηδενικὴ ῥοὴ εἶναι μέγιστη ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ D δὲν περιέχει κατευθυνόμενο (s,t)-μονοπάτι τοῦ ὁποίου ὅλες οἱ ἀκμὲς ἔχουν θετικὴ χωρητικότητα.

15.2 (★☆☆). Δεῖξτε ὅτι καμία μέγιστη ῥοὴ τοῦ δικτύου τοῦ Σχήματος 15.1(α) δὲν προκύπτει ἀπὸ τὴν μηδενικὴ ῥοὴ μὲ μία μόνο ἐπαύξηση.

15.3 (★☆☆). Βρεῖτε ἕνα δίκτυο μὲ δεκαπέντε ἀκμές, ὅλες οἱ χωρητικότητες τοῦ ὁποίου εἶναι περιττοὶ ἀκέραιοι, ἐνῶ ἡ τιμὴ κάθε μέγιστης ῥοῆς του εἶναι ἄρτια. Δεῖξτε ἐπιπλέον ὅτι γιὰ κάθε μέγιστη ῥοὴ f τοῦ δικτύου ποὺ κατασκευάσατε ὑπάρχει ἀκμὴ e μὲ $f(e)$ ἄρτιο.

15.4 (★☆☆). Ἔστω δίκτυο στὸ ὁποῖο, ἐκτὸς ἀπὸ τὶς ἀκμές, χωρητικότητα $c(v) \geq 0$ ἔχει καὶ κάθε κορυφὴ $v \in V(D)\backslash\{s,t\}$, καὶ ὅπου ἀπὸ μιὰ ῥοὴ ἀπαιτοῦμε ἐπιπλέον ὅτι $f(E_D^-(v)) \leq c(v)$ γιὰ κάθε τέτοια κορυφὴ v. Δεῖξτε ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς εὕρεσης μέγιστης ῥοῆς σὲ ἕνα τέτοιο δίκτυο ἀνάγεται στὸ συνηθισμένο, ἀντικαθιστώντας κάθε κορυφὴ v μὲ δύο κορυφὲς v^- καὶ v^+ καὶ μιὰ ἀκμὴ ἀνάμεσά τους.

15.5 (★☆☆). Ἕνα παγωτοπωλεῖο διαθέτει m γεύσεις καὶ ἀπὸ τὴν γεύση g_j μποροῦν νὰ παρασκευαστοῦν ἀκριβῶς p_j κύπελλα. Καθένας ἀπὸ n πελάτες $\pi_1, \ldots, \pi_n$ δηλώνει ἕνα μὴ-κενὸ σύνολο C_i γεύσεων πού του ἀρέσουν καὶ δικαιοῦται τὸ πολὺ

ἕνα κύπελλο. Δεῖξτε ὅτι ὁ μέγιστος ἀριθμὸς πελατῶν ποὺ μποροῦν νὰ ἐξυπηρετηθοῦν μὲ γεύση τῆς ἀρεσκείας τους ἰσοῦται μὲ τὴν τιμὴ μιᾶς μέγιστης ροῆς κατάλληλου δικτύου.

15.6 (★★☆)**.** Ἔστω σκακιέρα $n \times n$ ἀπὸ τὴν ὁποία ἔχουν ἀφαιρεθεῖ κάποια τετράγωνα. Ἕνα ντόμινο καλύπτει δύο γειτονικὰ μὴ-ἀφαιρεμένα τετράγωνα, ὁριζόντια ἢ κατακόρυφα, καὶ δύο ντόμινο δὲν ἐπιτρέπεται νὰ ἐπικαλύπτονται. Δεῖξτε ὅτι ὁ μέγιστος ἀριθμὸς ντόμινο ποὺ μποροῦν νὰ τοποθετηθοῦν ἰσοῦται μὲ τὴν τιμὴ μιᾶς μέγιστης ροῆς κατάλληλου δικτύου μὲ μοναδιαῖες χωρητικότητες.

15.7 (★★☆)**.** Ἔστω πίνακας A διαστάσεων $n \times m$ μὲ μὴ-ἀρνητικὰ πραγματικὰ στοιχεῖα, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα κάθε γραμμῆς καὶ κάθε στήλης εἶναι ἀκέραιος. Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει πίνακας B διαστάσεων $n \times m$ μὲ μὴ-ἀρνητικὰ ἀκέραια στοιχεῖα, τὰ ἀθροίσματα γραμμῶν καὶ στηλῶν τοῦ ὁποίου συμπίπτουν μὲ ἐκεῖνα τοῦ A.

15.8 (★★☆)**.** Δίνονται δύο ἀκολουθίες θετικῶν ἀκεραίων $\ell_1, \ldots, \ell_n$ καὶ $c_1, \ldots, c_n$. Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει τετραγωνικὸς πίνακας $n \times n$ μὲ θετικὰ ἀκέραια στοιχεῖα, ὅπου τὸ ἄθροισμα τῆς i-ὀστῆς γραμμῆς εἶναι ℓ_i καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς i-ὀστῆς στήλης εἶναι c_i, ἂν καὶ μόνο ἂν $\sum_i \ell_i = \sum_i c_i$ καὶ $\ell_i, c_i \geq n$ γιὰ κάθε i.

15.9 (★★☆)**.** Ἔστω δίκτυο $N = (D, s, t, c)$ καὶ θετικὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς a, καὶ ἔστω $c'(e) = a \cdot c(e)$ γιὰ κάθε $e \in E(D)$. Δεῖξτε ὅτι τὸ N ἔχει ροὴ τιμῆς $\geq k$ ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ (D, s, t, c') ἔχει ροὴ τιμῆς $\geq a \cdot k$. Συμπεράνετε ὅτι κάθε δίκτυο τοῦ ὁποίου οἱ χωρητικότητες εἶναι ἡμιακέραιες ἔχει μέγιστη ροὴ ποὺ παίρνει ἡμιακέραιες τιμές. (Ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς εἶναι *ἡμιακέραιος* ἂν εἶναι τῆς μορφῆς $x/2$ γιὰ κάποιον $x \in \mathbb{N}$.)

15.10 (★★☆)**.** Χρησιμοποιώντας ροές, δῶστε μιὰ δεύτερη ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 5.29.

15.11 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι ἂν (A_1, B_1) καὶ (A_2, B_2) εἶναι ἐλάχιστες (s, t)-τομὲς ἑνὸς δικτύου, τότε ἐλάχιστες εἶναι καὶ οἱ τομὲς $(A_1 \cap A_2, B_1 \cup B_2)$ καὶ $(A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2)$.

15.12 (★★☆)**.** Γιὰ κάθε θετικὸ ἀκέραιο κατασκευάστε δίκτυο μὲ τέσσερις κορυφές, ἀκέραιες χωρητικότητες, καὶ μιὰ ἀκολουθία μονοπατιῶν ἐπαύξησης μὲ πλῆθος τουλάχιστον ἴσο μὲ τὸν ἀκέραιο αὐτό, στὸ τέλος τῆς ὁποίας ἡ μέθοδος ἐπαύξησης καταλήγει σὲ μέγιστη ροή.

15.13 (★★★)**.** Δῶστε ἕνα δίκτυο μὲ μὴ-ῥητὲς χωρητικότητες καὶ μιὰ ἀκολουθία μονοπατιῶν ἐπαύξησης γιὰ τὴν ὁποία ἡ μέθοδος ἐπαύξησης δὲν τερματίζει. Δεῖξτε ἐπιπλέον ὅτι στὸ παράδειγμά σας οἱ τιμὲς τῶν ῥοῶν ποὺ παράγονται συγκλίνουν σὲ ἀριθμὸ γνησίως μικρότερο ἀπὸ τὴν τιμὴ τῆς μέγιστης ῥοῆς.

15.14 (★★☆)**.** Δεῖξτε ὅτι κάθε δίκτυο τοῦ ὁποίου ὅλες οἱ χωρητικότητες εἶναι ῥητοὶ ἀριθμοὶ ἔχει μέγιστη ῥοὴ ποὺ παίρνει ῥητὲς τιμές, καὶ ὅτι ἡ μέθοδος ἐπαύξησης, ἐφαρμοσμένη σὲ ἕνα τέτοιο δίκτυο, τερματίζει ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴν ἐπιλογὴ τῶν μονοπατιῶν ἐπαύξησης.

15.15 (★★☆)**.** Ἔστω γράφημα G καὶ ἔστω S καὶ T δύο ξένα μεταξύ τους μὴ-κενὰ ὑποσύνολα τοῦ $V(G)$. Καλοῦμε (S,T)-*μονοπάτι* κάθε μονοπάτι τοῦ G μὲ τὸ ἕνα ἄκρο στὸ S καὶ τὸ ἄλλο στὸ T, καὶ (S,T)-*ἀκμοδιαχωριστὴ* κάθε $F \subseteq E(G)$ γιὰ τὸ ὁποῖο τὸ $G - F$ δὲν περιέχει (S,T)-μονοπάτι. Δεῖξτε ὅτι ὁ μέγιστος ἀριθμὸς ἀνὰ δύο ἀκμοξένων (S,T)-μονοπατιῶν τοῦ G ἰσοῦται μὲ τὸ ἐλάχιστο μέγεθος (S,T)-ἀκμοδιαχωριστὴ τοῦ G.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16

ΚΑΛΗ ΜΕΡΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΕ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Σὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιο θὰ ἀσχοληθοῦμε μὲ τὴν *εἰκασία τοῦ Wagner* καὶ τοὺς λεγόμενους *χαρακτηρισμοὺς Kuratowski*. Θὰ χρειαστεῖ πρῶτα νὰ θυμηθοῦμε κάποιες βασικὲς ἔννοιες ἀπὸ τὴν *Θεωρία Διάταξης* καὶ νὰ μελετήσουμε ἴσως τὸ πιὸ γνωστὸ ἀποτέλεσμα σὲ αὐτὴν (καὶ γενικότερα ἕνα ἀπὸ τὰ πιὸ σημαντικὰ καὶ βαθιὰ ἀποτελέσματα στὰ Μαθηματικά) τὸ *Θεώρημα Ἐλασσόνων Γραφημάτων*. Μιὰ πολὺ συνοπτικὴ διατύπωση τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ εἶναι ἡ ἀκόλουθη:

> *Σὲ ὁποιοδήποτε ἄπειρο σύνολο γραφημάτων ὑπάρχουν δύο γραφήματα ποὺ τὸ ἕνα εἶναι ἔλασσον τοῦ ἄλλου.*

Αὐτὸ τὸ θεώρημα ἔχει πολὺ σημαντικὲς ἐπιπτώσεις (θεωρητικὲς ἀλλὰ καὶ ἀλγοριθμικές) μερικὲς ἀπὸ τὶς ὁποῖες θὰ μελετήσουμε στὴ συνέχεια. Ἀποτελεῖ τὸ ἐπιστέγασμα τοῦ τιτάνιου ἔργου τῶν Neil Robertson καὶ Paul D. Seymour ποὺ μέσα ἀπὸ μιὰ σειρὰ ἀπὸ 23 πολὺ πυκνογραμμένες ἐρευνητικὲς ἐργασίες (καὶ ἀθροιστικὰ πάνω ἀπὸ 500 σελίδες), γνωστὴ στὴ βιβλιογραφία ὡς *Graph Minors* κατάφεραν, ὄχι μόνο νὰ ὁδηγηθοῦν στὴν ἀπόδειξη του, ἀλλὰ νὰ εἰσάγουν μία πληθώρα ἰδεῶν ποὺ ἔμελλε νὰ ἀλλάξουν ριζικὰ τὴν ἔρευνα σὲ πολλοὺς τομεῖς τῆς Θεωρίας Γραφημάτων καὶ νὰ ὁδηγήσουν σὲ πολλὰ καὶ σημαντικὰ ἀποτελέσματα.

Θὰ ξεκινήσουμε βλέποντας δύο Θεωρήματα ἀπὸ τὸ Κεφάλαιο 7 μὲ διαφορετικὴ ματιά.

16.1 Χαρακτηρισμοὶ Kuratowski

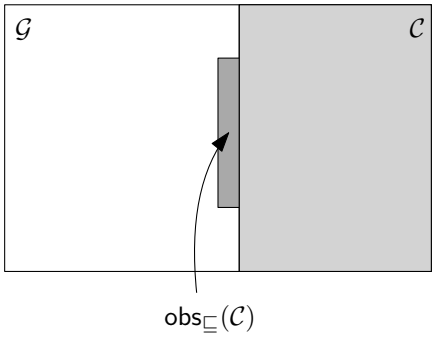
Στὸ Θεώρημα 7.59 δώσαμε ἕναν πλήρη χαρακτηρισμὸ γιὰ τὰ ἐπίπεδα γραφήματα, ἕναν χαρακτηρισμὸ ποὺ δὲν ἐμπεριέχει καμία ἀπολύτως ἔννοια ἀπὸ τὴν τοπολογία: Τὸ μόνο ποὺ χρειάζεται γιὰ νὰ εἶναι ἕνα γράφημα ἐπίπεδο εἶναι νὰ μὴν περιέχει κανένα ἀπὸ τὰ K_5, $K_{3,3}$ ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον. Ἀντιλαμβάνεστε πόσο πιὸ ἁπλὸς γίνεται πλέον ὁ ἔλεγχος γιὰ τὸ ἂν ἕνα γράφημα εἶναι ἐπίπεδο ἢ ὄχι. Θὰ ἦταν συνεπῶς ἰδιαίτερα ἐπιθυμητὸ νὰ βρίσκαμε τέτοιους χαρακτηρισμοὺς καὶ γιὰ ἄλλες κλάσεις γραφημάτων, ὅπως κάναμε γιὰ παράδειγμα γιὰ τὰ ἐξωεπίπεδα γραφήματα στὸ Θεώρημα 7.62. Θὰ ἀποκαλοῦμε τὰ θεωρήματα ποὺ ἔχουν αὐτὴν τὴν ὑφὴ *Χαρακτηρισμοὺς Kuratowski* γιὰ μιὰ κλάση γραφημάτων, πρὸς τιμὴν τοῦ Kazimierz Kuratowski ποὺ (μαζὶ μὲ τὸν Лев Семёнович Понтрягин) εἰσήγαγαν αὐτὴν τὴν ἰδέα: Ὁρίζουμε τὴν κλάση γραφημάτων μὲ συνδυαστικὸ τρόπο «ἀπαγορεύοντας» κάποια γραφήματα.

Ἂς δοῦμε τὰ βασικὰ στοιχεῖα ἑνὸς χαρακτηρισμοῦ Kuratowski. Ἂς θεωρήσουμε μία κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}$ (μπορεῖτε γιὰ παράδειγμα νὰ θεωρήσετε ὅτι ἡ $\mathcal{C}$ περιέχει ἀκριβῶς τὰ ἐπίπεδα γραφήματα). Ἂς πάρουμε ἐπίσης μία σχέση μερικῆς διάταξης $\sqsubseteq$ ἀπὸ αὐτὲς ποὺ εἴδαμε στὸ Κεφάλαιο 2 (γιὰ τὸ παράδειγμά μας μποροῦμε νὰ ἐπιλέξουμε τὴ σχέση $\leq_{\tau\pi}$ ἢ τὴ $\leq_{\epsilon\lambda}$). Θὰ ἀποκαλοῦμε τὰ γραφήματα ποὺ ἀπαγορεύει ὁ χαρακτηρισμὸς Kuratowski *ἀπαγορευμένα γραφήματα γιὰ τὴ* $\mathcal{C}$. Τὸ σύνολο ποὺ τὰ ἀπαρτίζει θὰ τὸ συμβολίζουμε μὲ $\mathsf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{C})$ καὶ θὰ τὸ ἀποκαλοῦμε *σύνολο παρεμπόδισης τῆς* $\mathcal{C}$ *ὡς πρὸς τὴν* $\sqsubseteq$ (στὸ παράδειγμά μας $\mathsf{obs}_{\leq_{\tau\pi}}(\mathcal{C}) = \mathsf{obs}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\mathcal{C}) = \{K_5, K_{3,3}\}$). Σύμφωνα μὲ αὐτὸν τὸν συμβολισμό, ἐξαιτίας τοῦ χαρακτηρισμοῦ Kuratowski ἔπεται ὅτι $G \in \mathcal{C}$ ἂν καὶ μόνο ἂν $O \not\sqsubseteq G$ γιὰ κάθε $O \in \mathsf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{C})$.

Παρατηρῆστε ὅτι ἕνας χαρακτηρισμὸς Kuratowski προϋποθέτει ὅτι ἡ κλάση $\mathcal{C}$ εἶναι κλειστὴ ὡς πρὸς τὴ σχέση $\sqsubseteq$, καθὼς ἀλλιῶς ὑπάρχει τὸ ἐνδεχόμενο $O \sqsubseteq G$ γιὰ κάποιο $O \in \mathsf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{C})$ ἀλλὰ τελικὰ νὰ ἰσχύει ὅτι $G \in \mathcal{C}$.

Γιὰ λόγους καθαρότητας θὰ ἀπαιτήσουμε ὅτι ἂν $O_1, O_2 \in \mathsf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{C})$ τότε $O_1 \not\sqsubseteq O_2$ καὶ $O_2 \not\sqsubseteq O_1$. Παρατηρῆστε ὅτι γιὰ κάθε γράφημα G ποὺ δὲν ἀνήκει στὴν κλάση $\mathcal{C}$ ἀναγκαστικὰ θὰ ὑπάρχει $O \in \mathsf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{C})$ μὲ $O \sqsubseteq G$. Συνεπῶς (ἀπὸ τὴν προηγούμενη ἀπαίτηση) συμπεραίνουμε ὅτι τὰ γραφήματα τοῦ συνόλου παρεμπόδισης εἶναι ἀκριβῶς τὰ ἐλαχιστικὰ ὡς πρὸς τὴ σχέση $\sqsubseteq$ γραφήματα ποὺ δὲν ἀνήκουν στὴν κλάση $\mathcal{C}$ (δὲς Σχῆμα 16.1).

Κλείνοντας αὐτὴν τὴν παράγραφο νὰ τονίσουμε τὸ γεγονὸς ὅτι τὸ ἐπιθυμητὸ (καὶ ἀπαραίτητο γιὰ τὶς ἀλγοριθμικὲς ἐφαρμογές) εἶναι τὸ σύνολο παρεμπόδισης



Σχῆμα 16.1: Ἔστω $\mathcal{G}$ ἡ κλάση ὅλων τῶν γραφημάτων. Παρατηρῆστε ὅτι τὸ σύνολο $\mathsf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{C})$ περιέχει τὰ ἐλαχιστικὰ ὡς πρὸς τὴ σχέση $\sqsubseteq$ γραφήματα τῆς κλάσης $\mathcal{G}\backslash\mathcal{C}$.

νὰ εἶναι πεπερασμένο.

Παράδειγμα 16.1. Ἂς θεωρήσουμε τὴν κλάση $\mathcal{T}$ τῶν δασῶν (δηλαδὴ τῶν γραφημάτων χωρὶς κύκλους) καὶ ἂς μελετήσουμε ποιὰ εἶναι τὰ σύνολα παρεμπόδισης γιὰ τὶς σχέσεις $\{\subseteq_{\upsilon\pi}, \subseteq_{\epsilon\nu}, \subseteq_{\pi\alpha}, \leq_{\tau\pi}, \leq_{\epsilon\lambda}\}$ (προφανῶς ἡ $\mathcal{T}$ εἶναι κλειστὴ ὡς πρὸς ὅλες αὐτὲς τὶς σχέσεις). Πεπερασμένους χαρακτηρισμοὺς Kuratowski ἔχουμε μόνο γιὰ τὶς σχέσεις $\leq_{\tau\pi}, \leq_{\epsilon\lambda}$ καθὼς $\mathsf{obs}_{\leq_{\tau\pi}}(\mathcal{T}) = \mathsf{obs}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\mathcal{T}) = \{K_3\}$. Γιὰ τὴ σχέση $\subseteq_{\pi\alpha}$ τὸ σύνολο παρεμπόδισης περιέχει ὅλα τὰ γραφήματα ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὴ διακεκριμένη ἕνωση ἑνὸς κύκλου (ὁποιουδήποτε μεγέθους) μαζὶ (ἴσως) μὲ κάποιες ἀπομονωμένες κορυφές, ἐνῶ γιὰ τὶς σχέσεις $\subseteq_{\upsilon\pi}$ καὶ $\subseteq_{\epsilon\nu}$ περιέχει ὅλους τοὺς κύκλους.

16.2 Εἰκασία Wagner

Ξεκινᾶμε μὲ ἕναν ὁρισμό.

Ὁρισμός 16.2. Μία σχέση μερικῆς διάταξης $\sqsubseteq$ σὲ ἕνα σύνολο X εἶναι *καλὴ-μερικὴ-διάταξη* (ἰσοδύναμα, τὸ X εἶναι *καλῶς-μερικὰ-διατεταγμένο* ὡς πρὸς τὴν $\sqsubseteq$) ἂν καὶ μόνο ἂν γιὰ κάθε ἄπειρη ἀκολουθία $x_0, x_1, \ldots$ στοιχείων τοῦ X ὑπάρχουν δεῖκτες $i < j$ τέτοιοι ὥστε $x_i \sqsubseteq x_j$. Τὸ ζευγάρι (x_i, x_j) καλεῖται *καλὸ ζευγάρι* γιὰ τὴν ἀκολουθία. Ἂν ἡ ἀκολουθία δὲν περιέχει καλὸ ζευγάρι τότε καλεῖται *κακὴ* ἀκολουθία.

Μὲ ἄλλα λόγια, μία σχέση μερικῆς διάταξης εἶναι καλὴ-μερικὴ-διάταξη ἂν καὶ μόνο ἂν γιὰ κάθε ἄπειρη ἀκολουθία στοιχείων ὑπάρχει καλὸ ζευγάρι στοιχείων ἢ

ἰσοδύναμα δὲν ὑπάρχει κακὴ ἀκολουθία. Ὁ παραπάνω ὁρισμὸς εἶναι ἀρκετὸς γιὰ νὰ διατυπώσουμε τὴν εἰκασία τοῦ Wagner. Γιὰ νὰ τὴ συνδέσουμε ὅμως μὲ ὅσα μελετήσαμε στὴν προηγούμενη παράγραφο θὰ χρειαστοῦμε μερικοὺς ἀκόμα ὁρισμούς.

Εἰκασία 16.3 (Wagner)**.** Ἡ κλάση ὅλων τῶν γραφημάτων εἶναι καλῶς-μερικὰ-διατεταγμένη ὡς πρὸς τὴ σχέση $\leq_{\epsilon\lambda}$.

Ὅπως προείπαμε στὴν εἰσαγωγὴ τοῦ κεφαλαίου ἡ εἰκασία αὐτὴ ἔχει ἀποδειχθεῖ καὶ πλέον εἶναι γνωστὴ στὴ βιβλιογραφία ὡς *Θεώρημα Ἐλασσόνων Γραφημάτων*.

Θεώρημα 16.4 (Robertson καὶ Seymour, 2004 [92])**.** Ἔστω $\mathcal{C}$ κλάση γραφημάτων ποὺ περιέχει ἄπειρα μὴ ἰσόμορφα ἀνὰ δύο γραφήματα. Ὑπάρχουν μὴ ἰσόμορφα $H_1, H_2 \in \mathcal{C}$ τέτοια ὥστε $H_1 \leq_{\epsilon\lambda} H_2$.

Ὁρισμός 16.5. Ἔστω σύνολο X καὶ $\sqsubseteq$ σχέση μερικῆς διάταξης σὲ αὐτό. Μία ἀκολουθία $x_0, x_1, \ldots$ στοιχείων τοῦ X καλεῖται *ἀντιαλυσίδα* γιὰ τὴν $\sqsubseteq$ ἂν καὶ μόνο ἂν γιὰ κάθε $i, j \in \mathbb{N}$ μὲ $i \neq j$ ἰσχύει ὅτι $x_i \not\sqsubseteq x_j$ καὶ $x_j \not\sqsubseteq x_i$.

Παράδειγμα 16.6. Ἂς θυμηθοῦμε τὸ Παράδειγμα 16.1. Παρατηρῆστε ὅτι τὰ σύνολα παρεμπόδισης γιὰ τὶς σχέσεις μερικῆς διάταξης ποὺ μελετήσαμε ἀποτελοῦν ἀντιαλυσίδες γιὰ τὴν ἑκάστοτε σχέση, καθὼς γιὰ παράδειγμα κανένας κύκλος δὲν περιέχει ὡς ὑπογράφημα κάποιον ἄλλον (διαφορετικό) κύκλο.

Παρατήρηση 16.7. Ἔστω κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}$ κλειστὴ ὡς πρὸς τὴ σχέση μερικῆς διάταξης $\sqsubseteq$. Τότε τὸ σύνολο $\mathsf{obs}_{\sqsubseteq}(\mathcal{C})$ ἀποτελεῖ ἀντιαλυσίδα γιὰ τὴ $\sqsubseteq$.

Θεώρημα 16.8. Μιὰ σχέση μερικῆς διάταξης $\sqsubseteq$ σὲ ἕνα σύνολο X εἶναι καλὴ-μερικὴ-διάταξη ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ X δὲν περιέχει ἄπειρη ἀντιαλυσίδα ἢ ἄπειρη γνησίως φθίνουσα ἀκολουθία $x_0 \sqsupset x_1 \sqsupset \ldots$.

Ἀπόδειξη. Κάθε ἄπειρη ἀντιαλυσίδα ἢ ἄπειρη γνησίως φθίνουσα ἀκολουθία δὲν περιέχει καλὸ ζευγάρι στοιχείων, συνεπῶς ἡ ὕπαρξή της βεβαιώνει ὅτι ἡ μερικὴ διάταξη δὲν εἶναι καλή.

Γιὰ τὴν ἀντίστροφη κατεύθυνση τοῦ Θεωρήματος, θὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν ἄπειρη ἐκδοχὴ τοῦ θεωρήματος τοῦ Ramsey [86]: ἂν χρωματίσουμε κάθε ζεῦγος $\{i, j\}$ φυσικῶν ἀριθμῶν μὲ ἕνα ἀπὸ πεπερασμένο πλῆθος χρωμάτων, τότε ὑπάρχει ἄπειρο σύνολο $I \subseteq \mathbb{N}$ τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ ζεύγη ἔχουν τὸ ἴδιο χρῶμα. Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι τὸ X δὲν περιέχει ἄπειρη ἀντιαλυσίδα ἢ ἄπειρη γνησίως φθίνουσα ἀκολουθία. Ἔστω $x_0, x_1, \ldots$ ἀκολουθία στοιχείων τοῦ X. Γιὰ κάθε $i < j$ χρωματίζουμε τὸ ζεῦγος $\{i, j\}$ μὲ τὸ χρῶμα 1 ἂν $x_i \sqsubseteq x_j$, μὲ τὸ χρῶμα 2 ἂν $x_i \not\sqsubseteq x_j$ καὶ

$x_j \sqsubseteq x_i$ (δηλαδὴ $x_j \sqsubset x_i$), καὶ μὲ τὸ χρῶμα 3 ἂν τὰ x_i καὶ x_j εἶναι μὴ συγκρίσιμα. Ἔστω $I = \{i_0 < i_1 < \cdots\}$ ἕνα ἄπειρο σύνολο δεικτῶν τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ ζεύγη ἔχουν τὸ ἴδιο χρῶμα. Ἂν τὸ χρῶμα αὐτὸ ἦταν τὸ 2, τότε ἡ $x_{i_0} \sqsupset x_{i_1} \sqsupset \cdots$ θὰ ἦταν ἄπειρη γνησίως φθίνουσα ἀκολουθία, ἐνῶ ἂν ἦταν τὸ 3, τότε ἡ $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots$ θὰ ἦταν ἄπειρη ἀντιαλυσίδα. Ἄρα τὸ χρῶμα εἶναι τὸ 1, δηλαδὴ $x_{i_0} \sqsubseteq x_{i_1} \sqsubseteq \cdots$, καὶ εἰδικότερα ἡ ἀκολουθία περιέχει καλὸ ζευγάρι. □

Παρατήρηση 16.9. Στὴν παραπάνω ἀπόδειξη δείξαμε κάτι ἰσχυρότερο ἀπὸ αὐτὸ ποὺ ζητοῦσε τὸ Θεώρημα 16.8. Δείξαμε ὅτι ἂν τὸ X εἶναι καλῶς-μερικὰ-διατεταγμένο τότε κάθε ἄπειρη ἀκολουθία στοιχείων περιέχει ἄπειρη αὔξουσα ὑπακολουθία $x_{i_0} \sqsubseteq x_{i_1} \sqsubseteq \cdots$ (ὄχι κατ' ἀνάγκη γνησίως αὔξουσα, ὅπως δείχνει μιὰ σταθερὴ ἀκολουθία).

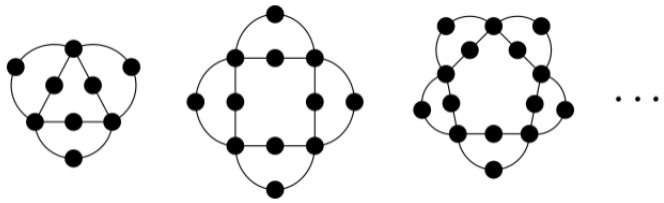
Συνδυάζοντας τὸ Θεώρημα 16.8 μὲ τὴν Παρατήρηση 16.7 καὶ τὸ Θεώρημα Ἐλασσόνων Γραφημάτων καταλήγουμε στὸ ἀκόλουθο:

Πόρισμα 16.10. Ὁποιαδήποτε κλάση γραφημάτων κλειστὴ ὡς πρὸς ἐλάσσονα ἐπιδέχεται πεπερασμένο χαρακτηρισμὸ Kuratowski

Αὐτὸ τὸ γεγονὸς ἔχει πολὺ σημαντικὲς ἐπιπτώσεις καθὼς ἐν ὀλίγοις μᾶς λέει ὅτι ἂν ἡ κλάση γραφημάτων $\mathcal{C}$ εἶναι κλειστὴ ὡς πρὸς τὴ σχέση $\leq_{\epsilon\lambda}$ ὑπάρχει πάντα χαρακτηρισμὸς μέσῳ κάποιων πεπερασμένων τὸ πλῆθος ἀπαγορευμένων γραφημάτων. Συνεπῶς γιὰ νὰ ἀπαντήσουμε στὸ ἐρώτημα ἂν ἕνα γράφημα G ἀνήκει στὴν κλάση $\mathcal{C}$ ἀρκεῖ νὰ ἐλέγξουμε ἂν τὸ G περιέχει ὡς ἔλασσον κάποιο ἀπὸ τὰ ἀπαγορευμένα γραφήματα. Γιὰ νὰ μπορέσει νὰ λυθεῖ τὸ πρόβλημα του ἀνήκειν στὴ $\mathcal{C}$ ἀλγοριθμικά, μὲ τὸν τρόπο ποὺ μόλις περιγράψαμε, ἀπαιτοῦνται δύο πράγματα: Ἕνας ἀλγόριθμος ποὺ ἐλέγχει ἂν ἕνα γράφημα εἶναι ἔλασσον ἑνὸς ἄλλου, καὶ ἡ ἐκ τῶν προτέρων γνώση τοῦ συνόλου παρεμπόδισης. Ἂν ἱκανοποιοῦνται αὐτὲς οἱ συνθῆκες ἔχουμε στὰ χέρια μας ἕναν *μετα-ἀλγόριθμο* ποὺ δέχεται ὡς εἴσοδο τὸν (πεπερασμένο) χαρακτηρισμὸ Kuratowski γιὰ τὴ $\mathcal{C}$ (τὸ $\mathsf{obs}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\mathcal{C})$ δηλαδή) καὶ τὸ ὑπὸ μελέτη γράφημα G καὶ ἀπαντάει στὸ ἐρώτημα ἂν $G \in \mathcal{C}$.

Ὅσον ἀφορᾶ τὴν πρώτη προϋπόθεση τὰ νέα εἶναι καλὰ καθὼς ὄντως ὑπάρχει τέτοιος ἀλγόριθμος. Μάλιστα ὁ πρῶτος ποὺ παρουσιάστηκε στὴ βιβλιογραφία ἀποτελοῦσε μέρος τῆς ἀπόδειξης τοῦ Θεωρήματος Ἐλασσόνων Γραφημάτων (ἐμφανίστηκε στὴν 13^{η} ἐργασία τῆς σειρᾶς). Παραθέτουμε ἐδῶ τὸ ἀποτέλεσμα χωρὶς ἀπόδειξη.

Θεώρημα 16.11. Ὑπάρχει ἀλγόριθμος ποὺ ἐλέγχει ἂν ἕνα (σταθερό) γράφημα H εἶναι ἔλασσον ἑνὸς γραφήματος εἰσόδου G σὲ χρόνο $f(n(H)) \cdot n(G)^3$, ὅπου f μία



Σχῆμα 16.2: Κανένα ἀπὸ αὐτὰ τὰ γραφήματα δὲν εἶναι τοπολογικὸ ἔλασσον κάποιου ἄλλου.

ἀναδρομικὴ συνάρτηση.

Ἑπομένως ἀπομένει μόνο ἡ ἐκ τῶν προτέρων γνώση τοῦ συνόλου παρεμπόδισης γιὰ νὰ μπορέσουμε νὰ θέσουμε σὲ ἐφαρμογὴ τὸν μετα-ἀλγόριθμό μας. Ἕνα ἀπολύτως φυσικὸ ἐρώτημα εἶναι ἂν μπορεῖ νὰ ἀντικατασταθεῖ αὐτὴ ἡ προϋπόθεση στὸν μετα-ἀλγόριθμο μὲ κάποιον ἄλλον ἀλγόριθμο ποὺ μέσῳ μιᾶς περιγραφῆς τῆς κλάσης $\mathcal{C}$ μπορεῖ νὰ ὑπολογίσει τὸ σύνολο $\mathsf{obs}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\mathcal{C})$. Ἡ ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 16.4 δὲν βοηθᾶ σὲ αὐτό, καθὼς δὲν εἶναι κατασκευαστική: ἐξασφαλίζει ὅτι τὸ σύνολο παρεμπόδισης εἶναι πεπερασμένο, ἀλλὰ δὲν δίνει τρόπο νὰ τὸ κατασκευάσουμε. Καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι οὐσιαστικό: ἔχει ἀποδειχθεῖ ὅτι, γενικά, δὲν ὑπάρχει ἀλγόριθμος πού, δεδομένου ἑνὸς ἀλγορίθμου ποὺ ἀναγνωρίζει τὰ μέλη μιᾶς κλάσης κλειστῆς ὡς πρὸς ἐλάσσονα, ὑπολογίζει τὸ σύνολο παρεμπόδισής της. Ἐπιπλέον, οἱ Friedman, Robertson καὶ Seymour ἔδειξαν ὅτι τὸ Θεώρημα 16.4 δὲν μπορεῖ νὰ ἀποδειχθεῖ μέσα σὲ ὁρισμένα ἀσθενῆ ὑποσυστήματα τῆς ἀριθμητικῆς δεύτερης τάξης, κάτι ποὺ ἐξηγεῖ ἐν μέρει γιατὶ ἡ ἀπόδειξή του εἶναι τόσο μακροσκελής.

Ἡ θετικὴ ἀπάντηση στὴν εἰκασία τοῦ Wagner μᾶς ἄνοιξε τὴν ὄρεξη νὰ μελετήσουμε τί συμβαίνει μὲ τὶς ἄλλες σχέσεις μερικῆς διάταξης ποὺ συναντήσαμε σὲ αὐτὲς τὶς σημειώσεις. Γιὰ τὶς σχέσεις $\subseteq_{\upsilon\pi}, \subseteq_{\epsilon\nu}, \subseteq_{\pi\alpha}$ ἡ ἀπάντηση εἶναι ἀρνητικὴ καθὼς μποροῦμε νὰ βροῦμε ἄπειρες ἀντιαλυσίδες στὴν κλάση ὅλων τῶν γραφημάτων (δὲς τὸ Παράδειγμα 16.6). Ἡ ἀπάντηση εἶναι ἐπίσης ἀρνητικὴ γιὰ τὴ σχέση τοῦ τοπολογικοῦ ἐλάσσονος καθὼς τὰ γραφήματα στὸ Σχῆμα 16.2 ἀποτελοῦν ἀντιαλυσίδα.

Γιὰ τὴ σχέση $\leq_{\epsilon\mu}$ τῶν ἐμβυθίσεων γραφήματος τὸ ἐρώτημα δὲν ἐπιδέχεται τετριμμένη ἀπάντηση. Στὴν βιβλιογραφία ἀναφέρεται ὡς *Εἰκασία Ἐμβυθίσεων τοῦ Nash-Williams* καὶ ἀπασχόλησε τοὺς ἐρευνητὲς γιὰ πάνω ἀπὸ σαράντα χρόνια. Ἐδῶ ἡ ἀπάντηση εἶναι θετικὴ καὶ δόθηκε στὴν τελευταία ἐργασία τῆς σειρᾶς Graph Minors τῶν Robertson καὶ Seymour (τὴν 23^{η}) [93]:

Θεώρημα 16.12. Ἔστω $\mathcal{C}$ ἄπειρη κλάση γραφημάτων. Ὑπάρχουν $H_1, H_2 \in \mathcal{C}$ τέτοια ὥστε $H_1 \leq_{\epsilon\mu} H_2$.

Τέλος, νὰ ἀναφέρουμε ὅτι μὲ ἐντελῶς ἀντίστοιχο τρόπο καὶ αὐτὸ τὸ θεώρημα μᾶς δίνει μετα-ἀλγόριθμο γιὰ τὸν ἔλεγχο ἂν ἕνα γράφημα ἀνήκει σὲ μιὰ κλάση κλειστὴ ὡς πρὸς ἐμβυθίσεις (ἔχει βρεθεῖ ἀλγόριθμος ποὺ ἐλέγχει ἂν ἕνα γράφημα ἀποτελεῖ ἐμβύθιση ἑνὸς ἄλλου).

16.3 Τὸ Θεώρημα Ἐλασσόνων Γραφημάτων γιὰ δέντρα

Προφανῶς δὲν μποροῦμε νὰ συμπεριλάβουμε σὲ αὐτὲς τὶς σημειώσεις τὴν ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 16.4. Μποροῦμε ὅμως νὰ δοῦμε τὴν ἀπόδειξη γιὰ τὴν κλάση ὅλων τῶν δέντρων. Μάλιστα θὰ ἀποδείξουμε κάτι πιὸ ἰσχυρό.

Θεώρημα 16.13 (Kruskal, 1960)**.** Ἡ κλάση τῶν δέντρων εἶναι καλῶς-μερικὰ διατεταγμένη ὡς πρὸς τὴ σχέση τῶν τοπολογικῶν ἐλασσόνων γραφήματος.

Θὰ χρειαστοῦμε ἕνα πόρισμα τοῦ Θεωρήματος 16.8 (γιὰ τὴν ἀκρίβεια τῆς Παρατήρησης 16.9). Ἔστω ὅτι ἡ $\sqsubseteq$ εἶναι μερικὴ διάταξη στὸ σύνολο X. Μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε μιὰ μερικὴ διάταξη $\sqsubseteq^{\mathbb{N}}$ γιὰ τὸ σύνολο ὅλων τῶν πεπερασμένων ὑποσυνόλων τοῦ X, ἔστω $[X]^{\mathbb{N}}$, ὡς ἑξῆς: Ἂν $A, B \subseteq X$ τότε ἰσχύει ὅτι $A \sqsubseteq^{\mathbb{N}} B$ ἂν καὶ μόνο ἂν ὑπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : A \to B$ τέτοια ὥστε $a \sqsubseteq f(a)$ γιὰ κάθε $a \in A$.

Λῆμμα 16.14. Ἂν τὸ X εἶναι καλῶς-μερικὰ-διατεταγμένο ἀπὸ τὴν $\sqsubseteq$ τότε καὶ τὸ $[X]^{\mathbb{N}}$ εἶναι καλῶς μερικὰ διατεταγμένο ἀπὸ τὴν $\sqsubseteq^{\mathbb{N}}$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω, πρὸς ἄτοπο, ὅτι ἡ $\sqsubseteq$ εἶναι καλὴ-μερικὴ-διάταξη στὸ X ἀλλὰ ἡ $\sqsubseteq^{\mathbb{N}}$ δὲν εἶναι καλὴ-μερικὴ-διάταξη στὸ $[X]^{\mathbb{N}}$. Θὰ κατασκευάσουμε πρῶτα μιὰ κακὴ ἀκολουθία $A_0, A_1, \ldots$ στὸ $[X]^{\mathbb{N}}$ ὡς ἑξῆς. Ἔστω $n \in \mathbb{N}$ καὶ ἂς ὑποθέσουμε ἐπαγωγικὰ ὅτι ἔχουν ὁριστεῖ τὰ A_i γιὰ κάθε $i < n$ καὶ ὅτι ὑπάρχει κακὴ ἀκολουθία στὸ $[X]^{\mathbb{N}}$ ποὺ ξεκινάει μὲ τὰ $A_0, \ldots, A_{n-1}$. (Γιὰ $n = 0$ αὐτὸ ἰσχύει ἐξ ὑποθέσεως: τὸ $[X]^{\mathbb{N}}$ περιέχει κακὴ ἀκολουθία καὶ ἡ κενὴ ἀκολουθία εἶναι ἀρχικὸ τμῆμα της.) Ἐπιλέγουμε ὡς A_n ἕνα σύνολο τοῦ $[X]^{\mathbb{N}}$ γιὰ τὸ ὁποῖο κάποια κακὴ ἀκολουθία ξεκινάει μὲ τὰ $A_0, \ldots, A_n$ καὶ τὸ $|A_n|$ εἶναι τὸ μικρότερο δυνατό.

Ἡ ἀκολουθία $A_0, A_1, \ldots$ ποὺ προκύπτει εἶναι κακή: γιὰ κάθε j ὑπάρχει κακὴ ἀκολουθία ποὺ ξεκινάει μὲ τὰ $A_0, \ldots, A_j$, ἄρα κανένα ζευγάρι (A_i, A_j) μὲ $i < j$ δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι καλό. Εἰδικότερα $A_n \neq \emptyset$ γιὰ κάθε n, ἀφοῦ $\emptyset \sqsubseteq^{\mathbb{N}} B$ γιὰ κάθε

$B \in [X]^{\mathbb{N}}$. Ἐπιλέγουμε λοιπὸν γιὰ κάθε n ἕνα στοιχεῖο $a_n \in A_n$ καὶ θέτουμε $B_n = A_n \backslash \{a_n\}$.

Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 16.9, ἡ ἀκολουθία $a_0, a_1, \ldots$ στοιχείων τοῦ X περιέχει ἄπειρη αὔξουσα ὑπακολουθία $a_{n_0} \sqsubseteq a_{n_1} \sqsubseteq \ldots$. Θεωροῦμε τὴν ἀκολουθία

$$A_0, \ldots, A_{n_0-1}, B_{n_0}, B_{n_1}, B_{n_2}, \ldots$$

Ἀφοῦ $|B_{n_0}| < |A_{n_0}|$, ἡ ἐλαχιστότητα στὴν ἐπιλογὴ τοῦ A_{n_0} ἐπιβάλλει ὅτι ἡ ἀκολουθία αὐτὴ εἶναι καλή· ἔστω (P, Q) ἕνα καλό της ζευγάρι.

Τὸ (P, Q) δὲν εἶναι τῆς μορφῆς (A_i, A_j), γιατὶ ἡ $A_0, A_1, \ldots$ εἶναι κακή. Δὲν εἶναι οὔτε τῆς μορφῆς (A_i, B_{n_j}): ὁ ἐγκλεισμὸς $B_{n_j} \subseteq A_{n_j}$ δίνει $B_{n_j} \sqsubseteq^{\mathbb{N}} A_{n_j}$, ὁπότε ἀπὸ $A_i \sqsubseteq^{\mathbb{N}} B_{n_j}$ θὰ προέκυπτε $A_i \sqsubseteq^{\mathbb{N}} A_{n_j}$ μὲ $i < n_0 \leq n_j$, δηλαδὴ καλὸ ζευγάρι τῆς $A_0, A_1, \ldots$. Ἀπομένει τὸ (P, Q) νὰ εἶναι τῆς μορφῆς (B_{n_i}, B_{n_j}) μὲ $i < j$.

Ἔστω $f : B_{n_i} \to B_{n_j}$ ἡ ἀντίστοιχη 1-1 ἀπεικόνιση, μὲ $b \sqsubseteq f(b)$ γιὰ κάθε $b \in B_{n_i}$. Ἐπεκτείνουμε τὴν f σὲ μιὰ ἀπεικόνιση $\hat{f} : A_{n_i} \to A_{n_j}$ θέτοντας $\hat{f}(a_{n_i}) = a_{n_j}$. Ἡ $\hat{f}$ εἶναι 1-1, ἀφοῦ $a_{n_j} \notin B_{n_j}$, καὶ ἱκανοποιεῖ $a \sqsubseteq \hat{f}(a)$ γιὰ κάθε $a \in A_{n_i}$, ἀφοῦ $a_{n_i} \sqsubseteq a_{n_j}$. Ἑπομένως $A_{n_i} \sqsubseteq^{\mathbb{N}} A_{n_j}$ μὲ $n_i < n_j$, δηλαδὴ τὸ ζευγάρι (A_{n_i}, A_{n_j}) εἶναι καλὸ γιὰ τὴν $A_0, A_1, \ldots$, ἄτοπο. □

Γιὰ τὴν ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος θὰ δουλέψουμε μὲ ῥιζωμένα δέντρα. Ἕνα *ῥιζωμένο δέντρο* εἶναι ἕνα δέντρο T μαζὶ μὲ μιὰ ἐπιλεγμένη κορυφή του, τὴν *ῥίζα* τοῦ $r(T)$. Γιὰ $x, y \in V(T)$ γράφουμε $x \preceq y$ ἂν ἡ x ἀνήκει στὸ $(r(T), y)$-μονοπάτι τοῦ T (καὶ $x \prec y$ ἂν ἐπιπλέον $x \neq y$), καὶ συμβολίζουμε μὲ $x \wedge y$ τὴν τελευταία κοινὴ κορυφὴ τοῦ $(r(T), x)$-μονοπατιοῦ καὶ τοῦ $(r(T), y)$-μονοπατιοῦ. Ἂν $x \prec y$ καὶ $\{x, y\} \in E(T)$, λέμε ὅτι ἡ y εἶναι *παιδὶ* τῆς x. Γιὰ κάθε $x \in V(T)$, συμβολίζουμε μὲ T^x τὸ ῥιζωμένο δέντρο $T[\{y \mid x \preceq y\}]$ μὲ ῥίζα τὴν x. Γιὰ δύο ῥιζωμένα δέντρα T καὶ T' γράφουμε $T \trianglelefteq T'$ ἂν ὑπάρχει 1-1 ἀπεικόνιση $\varphi : V(T) \to V(T')$ τέτοια ὥστε $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$ γιὰ κάθε $x, y \in V(T)$.

Ἡ σχέση $\trianglelefteq$ εἶναι ἀνακλαστικὴ καὶ μεταβατικὴ (ἡ σύνθεση δύο τέτοιων ἀπεικονίσεων εἶναι ἐπίσης τέτοια ἀπεικόνιση), ἀλλὰ δὲν εἶναι ἀντισυμμετρικὴ (διαφορετικὰ ἰσόμορφα ῥιζωμένα δέντρα σχετίζονται καὶ πρὸς τὶς δύο κατευθύνσεις). Αὐτὸ δὲν μᾶς ἐνοχλεῖ, ἀφοῦ οἱ ἀποδείξεις τοῦ Θεωρήματος 16.8, τῆς Παρατήρησης 16.9 καὶ τοῦ Λήμματος 16.14 χρησιμοποιοῦν μόνο τὴν ἀνακλαστικότητα καὶ τὴν μεταβατικότητα. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι $T^x \trianglelefteq T$ γιὰ κάθε $x \in V(T)$ (μέσῳ τῆς ταυτοτικῆς ἀπεικόνισης).

Λῆμμα 16.15. Ἂν $T \trianglelefteq T'$ τότε $T \leq_{\tau\pi} T'$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω φ μιὰ ἀπεικόνιση ὅπως στὸν ὁρισμὸ τῆς $\trianglelefteq$. Γιὰ κάθε ἀκμὴ $\{p, c\}$ τοῦ T, ὅπου ἡ c εἶναι παιδὶ τῆς p, ἔχουμε $\varphi(p) = \varphi(p \wedge c) = \varphi(p) \wedge \varphi(c)$, δηλαδὴ $\varphi(p) \preceq \varphi(c)$, καὶ ἀντιστοιχίζουμε στὴν ἀκμὴ $\{p, c\}$ τὸ $(\varphi(p), \varphi(c))$-μονοπάτι P_{pc} τοῦ T'. Ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι οἱ ἐσωτερικὲς κορυφὲς αὐτῶν τῶν μονοπατιῶν δὲν εἶναι εἰκόνες κορυφῶν τοῦ T καὶ ὅτι δύο διαφορετικὰ τέτοια μονοπάτια δὲν ἔχουν κοινὲς ἐσωτερικὲς κορυφές· τότε ἡ ἕνωσή τους εἶναι μιὰ ὑποδιαίρεση τοῦ T μέσα στὸ T'.

Ἂν μιὰ ἐσωτερικὴ κορυφὴ τοῦ P_{pc} ἦταν ἡ $\varphi(x)$, τότε $\varphi(p) \prec \varphi(x) \prec \varphi(c)$, ἄρα $\varphi(p \wedge x) = \varphi(p)$ καὶ $\varphi(x \wedge c) = \varphi(x)$. Ἀφοῦ ἡ φ εἶναι 1-1, $p \wedge x = p$ καὶ $x \wedge c = x$, δηλαδὴ $p \prec x \prec c$, ἄτοπο ἀφοῦ ἡ c εἶναι παιδὶ τῆς p. Ἔστω τώρα ὅτι δύο διαφορετικὰ μονοπάτια P_{pc} καὶ $P_{p'c'}$ ἔχουν κοινὴ ἐσωτερικὴ κορυφὴ z. Τότε $c \neq c'$, καὶ $z \preceq \varphi(c) \wedge \varphi(c') = \varphi(m)$, ὅπου $m = c \wedge c'$. Χωρὶς βλάβη τῆς γενικότητας $m \neq c$, ὁπότε ἡ m εἶναι πρόγονος τῆς c διαφορετικὸς ἀπὸ τὴν c καὶ ἄρα $m \preceq p$. Τότε $\varphi(m) = \varphi(m \wedge p) = \varphi(m) \wedge \varphi(p)$, δηλαδὴ $\varphi(m) \preceq \varphi(p)$, καὶ ἑπομένως $z \preceq \varphi(m) \preceq \varphi(p) \prec z$, ἄτοπο. □

Πλέον εἴμαστε σὲ θέση νὰ δοῦμε τὴν ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος.

Ἀπόδειξη Θεωρήματος 16.13. Λόγῳ τοῦ Λήμματος 16.15, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι κάθε ἄπειρη ἀκολουθία ῥιζωμένων δέντρων $T_0, T_1, \ldots$ περιέχει δεῖκτες $i < j$ μὲ $T_i \trianglelefteq T_j$ (γιὰ μιὰ ἀκολουθία δέντρων, ἐπιλέγουμε αὐθαίρετα μιὰ ῥίζα σὲ καθένα). Λέμε ὅτι ἕνα τέτοιο ζευγάρι εἶναι καλὸ καὶ ὅτι ἡ ἀκολουθία εἶναι κακὴ ἂν δὲν ἔχει καλὸ ζευγάρι.

Ἔστω (πρὸς ἄτοπο) ὅτι ὑπάρχουν κακὲς ἀκολουθίες ῥιζωμένων δέντρων. Ἀπ' ὅλες αὐτὲς ἐπιλέγουμε ἀκολουθία $T_0, T_1, \ldots$ τέτοια ὥστε, γιὰ κάθε $n \geq 0$, τὸ T_n νὰ ἔχει τὸ ἐλάχιστο πλῆθος κορυφῶν ἀπ' ὅλα τὰ ῥιζωμένα δέντρα T γιὰ τὰ ὁποία ὑπάρχει κακὴ ἀκολουθία ποὺ ξεκινάει μὲ τὰ $T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}, T$. Γιὰ κάθε n, ὁρίζουμε τὸ σύνολο $A_n = \{T_n^c \mid c \text{ παιδὶ τῆς } r(T_n)\}$ (τὰ στοιχεῖα τοῦ A_n εἶναι διαφορετικὰ ὑπογραφήματα τοῦ T_n, ἀκόμα κι ἂν κάποια ἀπὸ αὐτὰ εἶναι ἰσόμορφα).

Θὰ δείξουμε ὅτι τὸ σύνολο $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ εἶναι καλῶς-μερικὰ-διατεταγμένο ὡς πρὸς τὴ σχέση $\trianglelefteq$. Ἔστω $T_0^A, T_1^A, \ldots$ ἀκολουθία δέντρων τοῦ A καὶ ἔστω $n(i)$ ὁ δείκτης γιὰ τὸν ὁποῖο $T_i^A \in A_{n(i)}$. Ἐπιλέγουμε i_0 τέτοιο ὥστε τὸ $n(i_0)$ νὰ εἶναι τὸ μικρότερο δυνατό. Ἡ ἀκολουθία $T_0, \ldots, T_{n(i_0)-1}, T_{i_0}^A, T_{i_0+1}^A, \ldots$ εἶναι καλή, καθὼς τὸ $T_{i_0}^A$ ἔχει λιγότερες κορυφὲς ἀπὸ τὸ $T_{n(i_0)}$, τὸ ὁποῖο ἔχει ἐπιλεγεῖ μὲ τὸ ἐλάχιστο πλῆθος κορυφῶν. Ἔστω (T, T') καλὸ ζευγάρι αὐτῆς τῆς ἀκολουθίας. Ἂν τὸ T εἶναι μεταξὺ τῶν δέντρων $T_0, \ldots, T_{n(i_0)-1}$ τότε τὸ T' θὰ εἶναι ἕνα T_j^A μὲ $j \geq i_0$ (ἀλλιῶς τὸ (T, T') θὰ εἶναι καλὸ ζευγάρι τῆς ἀρχικῆς κακῆς ἀκολουθίας). Ὅμως

τότε $T \trianglelefteq T^A_j \trianglelefteq T_{n(j)}$ μὲ $n(j) \geq n(i_0)$, ἄρα τὸ ζευγάρι $(T, T_{n(j)})$ εἶναι καλὸ ζευγάρι τῆς ἀρχικῆς κακῆς ἀκολουθίας, ἄτοπο. Ἀναγκαστικὰ λοιπὸν τόσο τὸ T ὅσο καὶ τὸ T' εἶναι μεταξὺ τῶν $T^A_{i_0}, T^A_{i_0+1}, \ldots$, ὁπότε ἡ ἀκολουθία $T^A_0, T^A_1, \ldots$ περιέχει τὸ καλὸ ζευγάρι (T, T').

Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 16.14 ἔπεται ὅτι τὸ σύνολο $[A]^{\mathbb{N}}$ τῶν πεπερασμένων ὑποσυνόλων τοῦ A εἶναι καλῶς-μερικὰ-διατεταγμένο ὡς πρὸς τὴν $\trianglelefteq^{\mathbb{N}}$. Συνεπῶς ἡ ἀκολουθία $A_0, A_1, \ldots$ περιέχει καλὸ ζευγάρι (A_i, A_j), $i < j$, δηλαδὴ ὑπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : A_i \to A_j$ τέτοια ὥστε $S \trianglelefteq f(S)$ γιὰ κάθε $S \in A_i$. Γιὰ κάθε $S \in A_i$ ἔστω $\varphi_S : V(S) \to V(f(S))$ μιὰ ἀπεικόνιση ποὺ μαρτυρᾶ ὅτι $S \trianglelefteq f(S)$. Ὁρίζουμε $\varphi : V(T_i) \to V(T_j)$ θέτοντας $\varphi(r(T_i)) = r(T_j)$ καὶ $\varphi(x) = \varphi_S(x)$ γιὰ κάθε $x \in V(S)$, $S \in A_i$. Ἡ φ εἶναι 1-1, ἀφοῦ τὰ δέντρα $f(S)$, $S \in A_i$, εἶναι ἀνὰ δύο ξένα καὶ δὲν περιέχουν τὴν $r(T_j)$. Ἐπίσης, $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$ γιὰ κάθε $x, y \in V(T_i)$: ἂν τὰ x, y ἀνήκουν στὸ ἴδιο $S \in A_i$, αὐτὸ προκύπτει ἀπὸ τὴν φ_S (οἱ κοινοὶ πρόγονοι μέσα στὰ S καὶ $f(S)$ εἶναι οἱ ἴδιοι μὲ αὐτοὺς μέσα στὰ T_i καὶ T_j), ἐνῶ διαφορετικὰ $x \wedge y = r(T_i)$ καί, ἀφοῦ τὰ $\varphi(x), \varphi(y)$ εἴτε ἀνήκουν σὲ διαφορετικὰ ὑποδέντρα $f(S) \neq f(S')$ παιδιῶν τῆς $r(T_j)$ εἴτε κάποιο ἀπὸ αὐτὰ εἶναι ἡ $r(T_j)$, $\varphi(x) \wedge \varphi(y) = r(T_j)$. Ἔπεται ὅτι $T_i \trianglelefteq T_j$, ποὺ εἶναι ἄτοπο καθὼς τότε τὸ ζευγάρι (T_i, T_j) εἶναι καλὸ ζευγάρι γιὰ τὴν ἀρχικὴ κακὴ ἀκολουθία. □

Ἡ ἀπόδειξη ποὺ δώσαμε ὀφείλεται στὸν Nash-Williams καὶ ἡ τεχνικὴ τῆς «ἐλάχιστης κακῆς ἀκολουθίας» ποὺ χρησιμοποιεῖ εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ βασικὰ ἐργαλεῖα τῆς θεωρίας τῶν καλῶν μερικῶν διατάξεων.

16.4 Παρεμποδίσεις

Ἀσκήσεις Κεφαλαίου

16.1 (★☆☆). Δεῖξτε ὅτι ἡ σχέση $\subseteq_{\upsilon\pi}$ δὲν εἶναι καλὴ-μερικὴ-διάταξη στὴν κλάση ὅλων τῶν γραφημάτων.

16.2 (★☆☆). Δεῖξτε ὅτι ἡ κλάση τῶν δασῶν εἶναι κλειστὴ ὡς πρὸς ἐλάσσονα καὶ ὅτι τὸ μοναδικὸ ἐλαχιστικὸ ἀπαγορευμένο ἔλασσόν της εἶναι τὸ K_3.

16.3 (★★☆). Δεῖξτε ὅτι ἂν ἡ $\sqsubseteq$ εἶναι καλὴ-μερικὴ-διάταξη στὸ X, τότε κάθε ἄπειρη ἀκολουθία στοιχείων τοῦ X περιέχει ἄπειρη αὔξουσα ὑπακολουθία.

16.4 (★★☆). Δεῖξτε ὅτι μιὰ σχέση μερικῆς διάταξης εἶναι καλὴ-μερικὴ-διάταξη ἂν καὶ μόνο ἂν δὲν περιέχει οὔτε ἄπειρη γνησίως φθίνουσα ἀκολουθία οὔτε ἄπειρη

ἀντιαλυσίδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 17

ΔΕΝΤΡΟΠΛΑΤΟΣ

Μία ἀπὸ τὶς βασικὲς ἰδέες ποὺ εἰσήγαγαν οἱ Robertson καὶ Seymour στὰ Graph Minors εἶναι ἡ παράμετρος τοῦ *Δεντροπλάτους* ἑνὸς γραφήματος. Ἐντελῶς διαισθητικὰ θὰ μπορούσαμε νὰ ποῦμε ὅτι ἂν ἡ τιμὴ αὐτὴ τῆς παραμέτρου εἶναι $k \in \mathbb{N}$ τότε ἂν «ἀπομακρυνθοῦμε» k βήματα ἀπὸ τὸ γράφημά μας τότε αὐτὸ θὰ μοιάζει μὲ δέντρο (ἂς ὑποθέσουμε ὅτι τὸ γράφημά μας εἶναι συνεκτικό). Μετράει ἐν ὀλίγοις τὸν βαθμὸ ἀφαίρεσης (πιὸ σωστά, «ὁμαδοποίησης κορυφῶν») ποὺ θὰ χρειαστεῖ νὰ κάνουμε ἔτσι ὥστε νὰ μποροῦμε νὰ ἀντιμετωπίσουμε τὸ γράφημά μας σὰν δέντρο. Ὅμως γιατὶ εἶναι ἐπιθυμητὴ ἡ ὁμοιότητα τοῦ γραφήματος μὲ ἕνα δέντρο; Ἔχει ἀποδειχθεῖ ὅτι ὅταν ἡ παράμετρος τοῦ δεντροπλάτους εἶναι μικρὴ τότε μποροῦμε νὰ σχεδιάσουμε ἀρκετὰ ἀποδοτικοὺς ἀλγόριθμους ποὺ ἐλέγχουν τὸ κατὰ πόσο ἰσχύουν διάφορες ἰδιότητες γιὰ τὸ γράφημά μας (οἱ ἀλγόριθμοι εἶναι ἀποδοτικοὶ ἐκτιμώντας τὴν πολυπλοκότητά τους ὡς πρὸς δύο μέτρα: τὸ μέγεθος τοῦ γραφήματος καὶ τὸ δεντροπλάτος [1]). Ἐκτὸς αὐτοῦ, ἡ ἀναπαράσταση τοῦ γραφήματος μέσῳ ἑνὸς δέντρου διευκολύνει τὴν ἀπόδειξη πολλῶν δομικῶν ἀποτελεσμάτων τῆς Θεωρίας Γραφημάτων.

[1] Ὁ κλάδος ποὺ μελετάει τὴν πολυμεταβλητὴ πολυπλοκότητα ἀλγορίθμων ὀνομάζεται *Παραμετρικὴ Πολυπλοκότητα*.

17.1 Δεντρο-ἀποσυνθέσεις καὶ δεντροπλάτος

Ὁ τρόπος ποὺ θὰ γίνουν ἐφικτὰ ὅσα ἀναφέραμε στὴν εἰσαγωγὴ εἶναι ὁ ἑξῆς: Θὰ ἐπιλέξουμε ἕνα δέντρο T μέσῳ τοῦ ὁποίου θὰ ἀναπαραστήσουμε τὸ γράφημά μας, ἔστω G. Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι οἱ κορυφὲς τοῦ T εἶναι «τσάντες» ποὺ θὰ περιέχουν τὶς κορυφὲς τοῦ G. Νὰ ἀναφέρουμε ἐδῶ ὅτι τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν τοῦ T δὲν θὰ ἔχει σημασία (τὸ πλῆθος τσαντῶν δηλαδή), ἡ μετρήσιμη ποσότητα ποὺ θὰ ἔχει σημασία γιὰ νὰ ὁρίσουμε τὸ δεντροπλάτος θὰ εἶναι τὸ «μέγεθος» τῆς κάθε τσάντας, δηλαδὴ τὸ πλῆθος κορυφῶν τοῦ G ποὺ θὰ περιέχει. Τὸ σημαντικὸ κομμάτι τῆς δενδρικῆς αὐτῆς ἀναπαράστασης ὅπως προείπαμε εἶναι ὅτι μᾶς δίνει τὸ δικαίωμα νὰ ἀντιμετωπίσουμε τὸ G ὡς δέντρο. Συνεπῶς θὰ πρέπει νὰ θέσουμε καὶ κάποιους περιορισμοὺς συνεκτικότητας στὴν ἐπιλογὴ τοῦ T καὶ τοῦ περιεχόμενου τῶν τσαντῶν. Θὰ ζητήσουμε, πρῶτον, τὰ ἄκρα κάθε ἀκμῆς τοῦ G νὰ περιέχονται σὲ κάποια τσάντα καί, δεύτερον, ἂν ἐπιλέξουμε μία κορυφὴ u τοῦ G καὶ πάρουμε τὶς τσάντες τοῦ T ποὺ τὴν περιέχουν τότε αὐτὲς θὰ πρέπει νὰ ἐνάγουν ἕνα συνεκτικὸ γράφημα στὸ T (ἕνα ὑποδέντρο του δηλαδή). Θὰ μπορούσαμε περιφραστικὰ νὰ περιγράψουμε τὴν τελευταία προϋπόθεση λέγοντας ὅτι ἀπαιτοῦμε ὅτι τὸ «ἴχνος» τῆς κάθε κορυφῆς τοῦ G στὸ T νὰ εἶναι «συνεχές». Ὁ τυπικὸς ὁρισμὸς εἶναι ὁ ἀκόλουθος:

Ὁρισμός 17.1. Μιὰ *δεντρο-ἀποσύνθεση* ἑνὸς γραφήματος G εἶναι ἕνα ζεῦγος $(T, (V_t)_{t\in V(T)})$, ὅπου τὸ T εἶναι δέντρο καὶ κάθε V_t εἶναι ὑποσύνολο τοῦ $V(G)$, τέτοιο ὥστε:

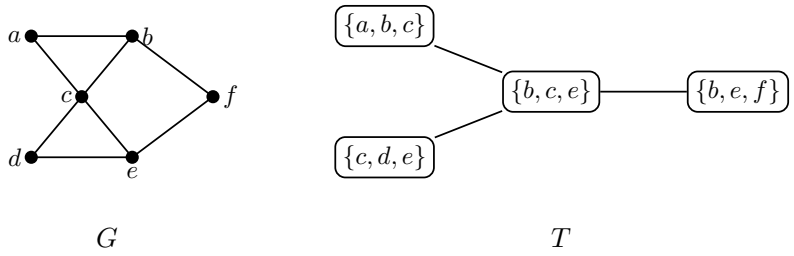
(Δ1) $\bigcup_{t\in V(T)} V_t = V(G)$·

(Δ2) γιὰ κάθε ἀκμὴ $\{u, v\} \in E(G)$ ὑπάρχει $t \in V(T)$ μὲ $u, v \in V_t$·

(Δ3) γιὰ κάθε $v \in V(G)$, τὸ σύνολο $\{t \in V(T) \mid v \in V_t\}$ ἐνάγει ὑποδέντρο τοῦ T.

Τὰ σύνολα V_t τὰ λέμε *μέρος* τῆς ἀποσύνθεσης. Τὸ *πλάτος* τῆς ἀποσύνθεσης εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\max_{t\in V(T)} |V_t| - 1$, καὶ τὸ *δεντροπλάτος* **δεντροπλάτος**(G) τοῦ G εἶναι τὸ ἐλάχιστο πλάτος μιᾶς δεντρο-ἀποσύνθεσής του.

Ἡ ἀφαίρεση τῆς μονάδας στὸν ὁρισμὸ τοῦ πλάτους εἶναι σύμβαση ποὺ κάνει τὰ δέντρα (μὲ τουλάχιστον μία ἀκμή) νὰ ἔχουν δεντροπλάτος 1: Πράγματι, ἂν τὸ T εἶναι δέντρο, παίρνουμε ὡς δέντρο τῆς ἀποσύνθεσης τὴν ὑποδιαίρεση τοῦ T ποὺ προκύπτει ἂν ὑποδιαιρέσουμε κάθε ἀκμή του μία φορά, καὶ ὡς μέρη τὸ $\{v\}$ γιὰ τὸν κόμβο ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ μιὰ κορυφὴ v τοῦ T καὶ τὸ $\{u, v\}$ γιὰ τὸν κόμβο



G T

Σχῆμα 17.1: Ἕνα γράφημα G καὶ μιὰ δεντρο-ἀποσύνθεσή του πλάτους 2. Κάθε κορυφὴ ἐμφανίζεται σὲ ἕνα ὑποδέντρο τοῦ T καὶ κάθε ἀκμὴ τοῦ G μέσα σὲ κάποιο μέρος.

ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ μιὰ ἀκμὴ $\{u, v\}$ τοῦ T. Ἀπὸ τὴν ἄλλη, λόγῳ τοῦ $(\Delta 2)$, κάθε γράφημα μὲ τουλάχιστον μία ἀκμὴ ἔχει δεντροπλάτος τουλάχιστον 1.

Παράδειγμα 17.2. Γιὰ κάθε $n \geq 1$ ἰσχύει ὅτι **δεντροπλάτος**$(K_n) \leq n - 1$, καθὼς ἡ ἀποσύνθεση μὲ ἕνα μοναδικὸ κόμβο καὶ μέρος ὁλόκληρο τὸ $V(K_n)$ ἱκανοποιεῖ τὰ $(\Delta 1)$–$(\Delta 3)$. Θὰ δοῦμε παρακάτω ὅτι ἰσχύει καὶ ἡ ἰσότητα.

Στὸ κεφάλαιο αὐτὸ θὰ χρειαστοῦμε μονοπάτια καὶ διαχωριστὲς μεταξὺ συνόλων κορυφῶν.

Ὁρισμός 17.3. Ἔστω γράφημα G καὶ $A, B \subseteq V(G)$. Ἕνα (A, B)-*μονοπάτι* εἶναι ἕνα μονοπάτι $P = [x_0, \ldots, x_r]$ τοῦ G μὲ $V(P) \cap A = \{x_0\}$ καὶ $V(P) \cap B = \{x_r\}$ (γιὰ $r = 0$, ἡ μοναδικὴ κορυφὴ τοῦ P ἀνήκει στὸ $A \cap B$). Λέμε ὅτι ἕνα σύνολο $Y \subseteq V(G)$ *διαχωρίζει* τὸ A ἀπὸ τὸ B στὸ G, ἢ ὅτι εἶναι (A, B)-*διαχωριστὴς* τοῦ G, ἂν κάθε (A, B)-μονοπάτι τοῦ G ἔχει κορυφὴ στὸ Y.

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ Y διαχωρίζει τὸ A ἀπὸ τὸ B ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ $G - Y$ δὲν περιέχει μονοπάτι ἀπὸ κορυφὴ τοῦ A σὲ κορυφὴ τοῦ B, ἀφοῦ κάθε τέτοιο μονοπάτι περιέχει ἕνα (A, B)-μονοπάτι ὡς ὑπομονοπάτι. Ἡ ἑπόμενη μορφὴ τοῦ Θεωρήματος τοῦ Menger προκύπτει ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.29.

Θεώρημα 17.4. Γιὰ κάθε γράφημα G καὶ $A, B \subseteq V(G)$, τὸ ἐλάχιστο μέγεθος ἑνὸς (A, B)-διαχωριστὴ τοῦ G ἰσοῦται μὲ τὸ μέγιστο πλῆθος ἀνὰ δύο ξένων (A, B)-μονοπατιῶν τοῦ G.

Ἀπόδειξη. Ἔστω k τὸ ἐλάχιστο μέγεθος ἑνὸς (A, B)-διαχωριστή. Ἀφοῦ κάθε (A, B)-μονοπάτι τέμνει ἕναν τέτοιο διαχωριστὴ καὶ τὰ μονοπάτια εἶναι ἀνὰ δύο

ξένα, δὲν ὑπάρχουν περισσότερα ἀπὸ k ἀνὰ δύο ξένα (A,B)-μονοπάτια. Ἂν $k=0$, δὲν ἔχουμε τίποτε ἄλλο νὰ δείξουμε. Ἔστω λοιπὸν $k \geq 1$ καὶ ἔστω G' τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸ G ἂν προσθέσουμε δύο νέες κορυφὲς s καὶ t, τὴν s γειτονικὴ μὲ ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ A καὶ τὴν t γειτονικὴ μὲ ὅλες τὶς κορυφὲς τοῦ B. Οἱ s,t δὲν εἶναι γειτονικὲς καί, ἀφοῦ ὑπάρχει (A,B)-μονοπάτι, ἀνήκουν στὴν ἴδια συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ G'. Ἕνα σύνολο $Y \subseteq V(G)$ εἶναι (s,t)-διαχωριστὴς τοῦ G' ἂν καὶ μόνο ἂν εἶναι (A,B)-διαχωριστὴς τοῦ G: κάθε (s,t)-μονοπάτι τοῦ G' περιέχει ἕνα (A,B)-μονοπάτι τοῦ G, καὶ ἀντίστροφα κάθε (A,B)-μονοπάτι τοῦ G, μαζὶ μὲ τὶς s καὶ t, δίνει ἕνα (s,t)-μονοπάτι τοῦ G'. Ἑπομένως, ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.29, ὑπάρχουν k ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (s,t)-μονοπάτια στὸ G'. Καθένα ἀπὸ αὐτὰ περιέχει ἕνα (A,B)-μονοπάτι τοῦ G, καὶ τὰ (A,B)-μονοπάτια αὐτὰ εἶναι ἀνὰ δύο ξένα. □

Θὰ χρησιμοποιοῦμε συνεχῶς τὴν ἀκόλουθη παρατήρηση, ἡ ὁποία λέει ὅτι κάθε ἀκμὴ τοῦ δέντρου T ἀντιστοιχεῖ σὲ ἕναν διαχωριστὴ τοῦ G. Γιὰ κόμβους $t,t' \in V(T)$ συμβολίζουμε μὲ $t\,T\,t'$ τὸ μοναδικὸ (t,t')-μονοπάτι τοῦ T. Μὲ ἄλλα λόγια ἡ δεντρο-ἀποσύνθεση μεταφέρει τὴν ἰδιότητα τῆς «διαχωρισιμότητας» τῶν κορυφῶν τοῦ δέντρου στὸ ἀρχικὸ γράφημα. Αὐτὴν ἀκριβῶς τὴν ἰδιότητα ἐκμεταλλευόμαστε στὶς περισσότερες ἐφαρμογὲς τοῦ δεντροπλάτους.

Λῆμμα 17.5. Ἔστω $(T,(V_t)_{t\in V(T)})$ δεντρο-ἀποσύνθεση τοῦ G, ἔστω $\{t_1,t_2\}$ ἀκμὴ τοῦ T, καὶ ἔστω T_1,T_2 οἱ δύο συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ $T-\{t_1,t_2\}$, μὲ $t_i \in V(T_i)$. Θέτουμε $U_i = \bigcup_{t\in V(T_i)} V_t$. Τότε

$$U_1 \cap U_2 = V_{t_1} \cap V_{t_2},$$

δὲν ὑπάρχει ἀκμὴ τοῦ G μὲ τὸ ἕνα ἄκρο στὸ $U_1 \backslash U_2$ καὶ τὸ ἄλλο στὸ $U_2 \backslash U_1$, καὶ ἑπομένως τὸ $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ διαχωρίζει τὸ U_1 ἀπὸ τὸ U_2 στὸ G.

Ἀπόδειξη. Ὁ ἐγκλεισμὸς $V_{t_1} \cap V_{t_2} \subseteq U_1 \cap U_2$ εἶναι ἄμεσος, ἀφοῦ $t_i \in V(T_i)$. Ἀντιστρόφως, ἔστω $v \in U_1 \cap U_2$, δηλαδὴ $v \in V_t$ γιὰ κάποιο $t \in V(T_1)$ καὶ $v \in V_{t'}$ γιὰ κάποιο $t' \in V(T_2)$. Τὸ μονοπάτι $t\,T\,t'$ χρησιμοποιεῖ τὴν ἀκμὴ $\{t_1,t_2\}$, ὁπότε περνάει καὶ ἀπὸ τὶς δύο t_1,t_2. Ἀπὸ τὸ $(\Delta 3)$ οἱ κόμβοι ποὺ περιέχουν τὴν v ἐνάγουν ὑποδέντρο, ἄρα $v \in V_{t_1} \cap V_{t_2}$.

Ἔστω τώρα $\{x,y\} \in E(G)$. Ἀπὸ τὸ $(\Delta 2)$ ὑπάρχει t μὲ $x,y \in V_t$, καὶ ὁ t ἀνήκει εἴτε στὸ T_1 εἴτε στὸ T_2· ἄρα οἱ x,y ἀνήκουν ταυτόχρονα στὸ U_1 ἢ ταυτόχρονα στὸ U_2. Ἑπομένως δὲν ὑπάρχει ἀκμὴ ἀνάμεσα στὰ $U_1 \backslash U_2$ καὶ $U_2 \backslash U_1$.

Τέλος, ἀπὸ τὸ $(\Delta 1)$ ἰσχύει $V(G) = U_1 \cup U_2$. Ἔστω P ἕνα (U_1,U_2)-μονοπάτι ποὺ ἀποφεύγει τὸ $V_{t_1} \cap V_{t_2} = U_1 \cap U_2$. Τότε κάθε κορυφὴ τοῦ P ἀνήκει εἴτε στὸ

$U_1 \backslash U_2$ εἴτε στὸ $U_2 \backslash U_1$, ἐνῶ τὸ πρῶτο ἄκρο του ἀνήκει στὸ πρῶτο σύνολο καὶ τὸ τελευταῖο στὸ δεύτερο· ἄρα τὸ P θὰ εἶχε ἀκμὴ ἀνάμεσά τους, ἄτοπο. □

Πόρισμα 17.6. Ἔστω $(T, (V_t)_{t \in V(T)})$ δεντρο-ἀποσύνθεση τοῦ G καὶ ἔστω $t \in V(t_1\, T\, t_2)$. Τότε τὸ V_t διαχωρίζει τὸ V_{t_1} ἀπὸ τὸ V_{t_2} στὸ G. Εἰδικότερα, κάθε συνεκτικὸ $B \subseteq V(G)$ ποὺ τέμνει τόσο τὸ V_{t_1} ὅσο καὶ τὸ V_{t_2} τέμνει καὶ τὸ V_t.

Ἀπόδειξη. Ἂν $t = t_1$ ἢ $t = t_2$ τὸ ζητούμενο εἶναι προφανές, ἀφοῦ κάθε (V_{t_1}, V_{t_2})-μονοπάτι ἔχει ἄκρο στὸ V_t. Διαφορετικά, ἔστω t' ὁ γείτονας τῆς t πάνω στὸ μονοπάτι $t\, T\, t_2$. Τὸ $T - \{t, t'\}$ ἔχει δύο συνιστῶσες, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία περιέχει τὴν t_1 καὶ ἡ ἄλλη τὴν t_2. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 17.5, τὸ $V_t \cap V_{t'}$ διαχωρίζει τὴ μία ἕνωση ἀπὸ τὴν ἄλλη· ἀφοῦ $V_t \cap V_{t'} \subseteq V_t$, τὸ ἴδιο κάνει καὶ τὸ V_t.

Γιὰ τὸ δεύτερο σκέλος, ἔστω B συνεκτικὸ σύνολο μὲ $B \cap V_{t_1} \neq \emptyset$ καὶ $B \cap V_{t_2} \neq \emptyset$. Τὸ $G[B]$ εἶναι συνεκτικό, ὁπότε περιέχει μονοπάτι ἀπὸ κορυφὴ τοῦ $B \cap V_{t_1}$ σὲ κορυφὴ τοῦ $B \cap V_{t_2}$· τὸ μονοπάτι αὐτὸ εἶναι (V_{t_1}, V_{t_2})-μονοπάτι καὶ ἄρα τέμνει τὸ V_t. □

Ἡ παράμετρος τοῦ δεντροπλάτους εἶναι κλειστὴ ὡς πρὸς ἐλάσσονα.

Θεώρημα 17.7. Ἂν $H \leq_{\epsilon\lambda} G$ τότε **δεντροπλάτος**$(H) \leq$ **δεντροπλάτος**(G).

Ἀπόδειξη. Κάθε ἔλασσον προκύπτει μὲ διαδοχικὲς ἀφαιρέσεις κορυφῶν, ἀφαιρέσεις ἀκμῶν, καὶ συνθλίψεις ἀκμῶν, ὁπότε ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι καμία ἀπὸ τὶς τρεῖς πράξεις δὲν αὐξάνει τὸ δεντροπλάτος. Ἔστω $(T, (V_t)_{t \in V(T)})$ δεντρο-ἀποσύνθεση τοῦ G πλάτους **δεντροπλάτος**(G).
Ὑπογραφήματα. Ἔστω H ὑπογράφημα τοῦ G καὶ ἔστω $W_t = V_t \cap V(H)$. Τὸ $(\Delta 1)$ ἰσχύει ἀφοῦ κάθε κορυφὴ τοῦ H εἶναι κορυφὴ τοῦ G. Τὸ $(\Delta 2)$ ἰσχύει ἀφοῦ κάθε ἀκμὴ τοῦ H εἶναι ἀκμὴ τοῦ G καὶ τὰ δύο ἄκρα της ἀνήκουν στὸ $V(H)$. Τὸ $(\Delta 3)$ ἰσχύει ἀφοῦ γιὰ $v \in V(H)$ ἔχουμε $\{t \mid v \in W_t\} = \{t \mid v \in V_t\}$. Τέλος $|W_t| \leq |V_t|$ γιὰ κάθε t, ὁπότε τὸ πλάτος δὲν αὐξήθηκε. Οἱ ἀφαιρέσεις κορυφῶν καὶ ἀκμῶν καλύπτονται καὶ οἱ δύο ἀπὸ αὐτὴ τὴν περίπτωση.
Συνθλίψεις. Ἔστω $e = \{u, v\} \in E(G)$ καὶ ἔστω w ἡ νέα κορυφὴ τοῦ G/e. Θέτουμε

$$W_t = \begin{cases} V_t, & \text{ἂν } V_t \cap \{u, v\} = \emptyset, \\ \big(V_t \backslash \{u, v\}\big) \cup \{w\}, & \text{ἀλλιῶς,} \end{cases}$$

ὁπότε $|W_t| \leq |V_t|$ γιὰ κάθε t.

Γιὰ τὸ $(\Delta 1)$: κάθε κορυφὴ τοῦ G/e διαφορετικὴ τῆς w εἶναι κορυφὴ τοῦ G καὶ ἀνήκει σὲ κάποιο V_t, ἄρα καὶ στὸ ἀντίστοιχο W_t· ἐνῶ ἡ w ἀνήκει σὲ κάθε W_t μὲ $V_t \cap \{u, v\} \neq \emptyset$, καὶ τέτοιο t ὑπάρχει.

Γιὰ τὸ $(\Delta 2)$: ἔστω ἀκμὴ τοῦ G/e. Ἂν δὲν προσπίπτει στὴν w, τότε εἶναι ἀκμὴ $\{x, y\}$ τοῦ G μὲ $x, y \notin \{u, v\}$, ὁπότε κάποιο V_t τὴν περιέχει καὶ τὸ ἴδιο κάνει καὶ τὸ W_t. Ἂν προσπίπτει στὴν w, τότε εἶναι τῆς μορφῆς $\{w, x\}$ καὶ προέρχεται ἀπὸ ἀκμὴ $\{u, x\}$ ἢ $\{v, x\}$ τοῦ G· κάποιο V_t περιέχει τὰ δύο ἄκρα ἐκείνης, ὁπότε τὸ W_t περιέχει τὰ w καὶ x.

Γιὰ τὸ $(\Delta 3)$: γιὰ $x \neq w$ ἰσχύει $\{t \mid x \in W_t\} = \{t \mid x \in V_t\}$, ποὺ ἐνάγει ὑποδέντρο. Γιὰ τὴν w ἔχουμε

$$\{t \mid w \in W_t\} = \{t \mid u \in V_t\} \cup \{t \mid v \in V_t\},$$

ἕνωση δύο ὑποδέντρων. Ἀπὸ τὸ $(\Delta 2)$ γιὰ τὴν ἀκμὴ e ὑπάρχει t μὲ $u, v \in V_t$, ὁπότε τὰ δύο ὑποδέντρα τέμνονται καὶ ἡ ἕνωσή τους εἶναι πάλι ὑποδέντρο. □

Τὸ Θεώρημα 16.13 ἀπέδειξε ὅτι ἡ κλάση τῶν δέντρων εἶναι καλῶς-μερικὰ διατεταγμένη ὡς πρὸς τὴ σχέση τῶν τοπολογικῶν ἐλασσόνων γραφήματος (καὶ ἄρα καὶ ὡς πρὸς τὴ σχέση τῶν ἐλασσόνων). Ἐκμεταλλευόμενοι τὴν ὁμοιότητα ποὺ ἔχουν τὰ γραφήματα μὲ μικρὸ δεντροπλάτος μὲ τὸ δέντρο τῆς ἀποσύνθεσης ποὺ πετυχαίνει τὸ μικρὸ πλάτος, οἱ Robertson καὶ Seymour ἐπέκτειναν αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα, γιὰ τὴ σχέση τῶν ἐλασσόνων, σὲ μία γενικότερη τῶν δέντρων κλάση γραφημάτων: τὰ γραφήματα ποὺ μοιάζουν μὲ δέντρα, ποὺ ἔχουν δηλαδὴ φραγμένο δεντροπλάτος.

Θεώρημα 17.8 (Robertson καὶ Seymour, 1990 [91])**.** Ἡ κλάση τῶν γραφημάτων μὲ δεντροπλάτος τὸ πολὺ k, γιὰ κάθε φυσικὸ ἀριθμὸ $k \geq 1$, εἶναι καλῶς-μερικὰ διατεταγμένη ὡς πρὸς τὴ σχέση τῶν ἐλασσόνων γραφήματος.

Τὸ ἀνάλογο ἀποτέλεσμα γιὰ τὴ σχέση τῶν τοπολογικῶν ἐλασσόνων δὲν ἰσχύει γιὰ $k \geq 2$: τὰ γραφήματα τοῦ Σχήματος 16.2 ἔχουν ὅλα δεντροπλάτος 2 καὶ ἀποτελοῦν ἀντιαλυσίδα ὡς πρὸς τὴ σχέση $\leq_{\tau\pi}$.

17.2 Δεντροπλάτος καὶ χαρακτηρισμοὶ Kuratowski

Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 17.7 προκύπτει ὅτι οἱ κλάσεις $\mathcal{C}_k$ τῶν γραφημάτων μὲ δεντροπλάτος τὸ πολὺ k, γιὰ κάθε φυσικὸ $k \geq 1$, εἶναι κλειστὲς ὡς πρὸς ἐλάσσονα. Σύμφωνα μὲ ὅσα συζητήσαμε στὸ Κεφάλαιο 16 ἔπεται ὅτι ἐπιδέχονται πεπερασμένο

χαρακτηρισμὸ Kuratowski, ἢ ἀλλιῶς ὅτι τὸ σύνολο $\mathsf{obs}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\mathcal{C}_k)$ εἶναι πεπερασμένο. Στὸ Παράδειγμα 16.1 εἴδαμε ὅτι $\mathsf{obs}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\mathcal{C}_1) = \{K_3\}$. Ἔχει ἀποδειχθεῖ ὅτι τὸ σύνολο παρεμπόδισης γιὰ τὰ γραφήματα μὲ δεντροπλάτος τὸ πολὺ δύο ἀποτελεῖται ἐπίσης ἀπὸ μόνο ἕνα γράφημα, τὸ K_4.

Θεώρημα 17.9. Ἰσχύει ὅτι $\mathsf{obs}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\mathcal{C}_2) = \{K_4\}$.

Ἀπόδειξη. Εὔκολα μποροῦμε νὰ ἐλέγξουμε ὅτι **δεντροπλάτος**$(K_4) = 3$ (δεῖτε καὶ τὸ Πόρισμα 17.23), συνεπῶς λόγῳ τοῦ Θεωρήματος 17.7 ἂν γιὰ ἕνα γράφημα G ἰσχύει ὅτι $K_4 \leq_{\epsilon\lambda} G$ τότε **δεντροπλάτος**$(G) \geq 3$, καὶ ἄρα $G \notin \mathcal{C}_2$.

Ἀντίστροφα, θὰ δείξουμε μὲ ἐπαγωγὴ στὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν ὅτι ἂν γιὰ ἕνα γράφημα G ἰσχύει ὅτι $K_4 \not\leq_{\epsilon\lambda} G$ τότε **δεντροπλάτος**$(G) \leq 2$. Ἂν τὸ G ἔχει τὸ πολὺ δύο κορυφὲς τὸ ζητούμενο ἔπεται ἄμεσα. Ἔστω ὅτι τὸ G ἔχει n κορυφές. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 5.48 γνωρίζουμε ὅτι στὸ G ὑπάρχει κορυφὴ μὲ βαθμὸ τὸ πολὺ δύο, ἔστω ἡ u. Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ u ἔχει βαθμὸ ἀκριβῶς δύο καὶ ὅτι οἱ γείτονές της στὸ G εἶναι οἱ x καὶ y (ἂν ὁ βαθμός της εἶναι γνήσια μικρότερος τοῦ δύο ἡ ἀπόδειξη εἶναι παρόμοια). Συνθλίβουμε τὴν ἀκμὴ $\{u, x\}$ καὶ παίρνουμε τὸ γράφημα G', ποὺ ὡς ἔλασσον τοῦ G, συνεχίζει νὰ μὴν περιέχει ὡς ἔλασσον τὸ K_4 καί, καθὼς ἔχει $n - 1$ κορυφές, ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση ἔπεται ὅτι **δεντροπλάτος**$(G') \leq 2$. Ἔστω $(T, (V_t)_{t \in V(T)})$ μία δεντρο-ἀποσύνθεση τοῦ G' μὲ πλάτος τὸ πολὺ δύο καὶ ἔστω V_t ἕνα μέρος της ποὺ περιέχει τὴν ἀκμὴ $\{v_{ux}, y\}$, ὅπου v_{ux} ἡ κορυφὴ ποὺ δημιουργεῖται ἀπὸ τὴ σύνθλιψη τῆς ἀκμῆς $\{u, x\}$ στὸ G. Κατασκευάζουμε μία δεντρο-ἀποσύνθεση $(T', (V'_s)_{s \in V(T')})$ γιὰ τὸ G ὡς ἑξῆς: Τὸ T' περιέχει μία παραπάνω κορυφὴ ἀπὸ τὸ T, ἔστω t', ποὺ συνδέεται μόνο μὲ τὴν κορυφὴ t ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ μέρος V_t τῆς ἀποσύνθεσης τοῦ G'. Ὁρίζουμε $V'_{t'} = \{u, x, y\}$ καί, γιὰ κάθε $s \in V(T)$, ὁρίζουμε τὸ V'_s ἀντικαθιστώντας στὸ V_s τὴν κορυφὴ v_{ux} (ἂν ἀνήκει σὲ αὐτό) μὲ τὴν κορυφὴ x. Παρατηρῆστε ὅτι ἡ $(T', (V'_s)_{s \in V(T')})$ εἶναι ὄντως δεντρο-ἀποσύνθεση τοῦ G καὶ ὅτι ἔχει πλάτος δύο: οἱ ἀκμὲς τοῦ G ποὺ δὲν προσπίπτουν στὴν u καλύπτονται ὅπως οἱ ἀντίστοιχες ἀκμὲς τοῦ G', οἱ ἀκμὲς $\{u, x\}$ καὶ $\{u, y\}$ καλύπτονται ἀπὸ τὸ $V'_{t'}$, ἡ u ἀνήκει μόνο στὸ $V'_{t'}$, ἐνῶ οἱ x καὶ y ἀνήκουν καὶ στὸ V'_t, ποὺ εἶναι γειτονικὸ τοῦ $V'_{t'}$. □

Τὸ ἀκριβὲς σύνολο παρεμπόδισης εἶναι γνωστὸ μέχρι καὶ γιὰ δεντροπλάτος τὸ πολὺ 3: ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσερα γραφήματα, ἕνα ἐκ τῶν ὁποίων εἶναι τὸ K_5 [7].

Ἂς ἀσχοληθοῦμε τώρα μὲ τὸ ἀντίστροφο ἐρώτημα καὶ ἂς σκεφτοῦμε ποιὸ γράφημα H θὰ πρέπει νὰ ἀπαγορεύσουμε ἔτσι ὥστε ἡ κλάση τῶν γραφημάτων ποὺ δὲν περιέχουν τὸ H ὡς ἔλασσον νὰ ἔχει φραγμένο δεντροπλάτος. Κάποιος θὰ ἀναρωτιέται ἂν ὑπάρχουν κλάσεις γραφημάτων μὲ μὴ φραγμένο δεντροπλάτος, δηλαδὴ

ἂν ὑπάρχει κλάση $\mathcal{C}$ τέτοια ὥστε γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$ νὰ ὑπάρχει γράφημα $G \in \mathcal{C}$ μὲ **δεντροπλάτος**$(G) \geq n$. Θὰ δοῦμε στὴν ἑπόμενη παράγραφο ὅτι παραδείγματα τέτοιων κλάσεων εἶναι ἡ κλάση ὅλων τῶν κλικῶν (Πόρισμα 17.23) καὶ ἡ κλάση ὅλων τῶν σχαρῶν (Παράδειγμα 17.17).

Πρωτοῦ συνεχίσουμε ἂς ἐκφράσουμε πιὸ τυπικὰ αὐτὸ τὸ ἐρώτημα.

Ὁρισμός 17.10. Ἔστω $\mathcal{A}$ ἕνα σύνολο γραφημάτων. Συμβολίζουμε μὲ

$$\mathsf{excl}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\mathcal{A}) = \{G \mid H \not\leq_{\epsilon\lambda} G \text{ γιὰ κάθε } H \in \mathcal{A}\}$$

τὴν κλάση τῶν γραφημάτων ποὺ ἀποκλείουν κάθε γράφημα τοῦ $\mathcal{A}$ ὡς ἔλασσον.

Παρατηρῆστε ὅτι τὸ ὅρισμα καὶ τῶν δύο τελεστῶν εἶναι πάντοτε σύνολο γραφημάτων: ὁ $\mathsf{obs}_{\leq_{\epsilon\lambda}}$ δέχεται μιὰ κλάση καὶ ἐπιστρέφει τὸ σύνολο τῶν ἐλαχιστικῶν παρεμποδίσεών της, ἐνῶ ὁ $\mathsf{excl}_{\leq_{\epsilon\lambda}}$ δέχεται ἕνα σύνολο παρεμποδίσεων καὶ ἐπιστρέφει τὴν κλάση ποὺ αὐτὲς ὁρίζουν. Οἱ δύο τελεστὲς εἶναι ἀντίστροφοι ὁ ἕνας τοῦ ἄλλου μὲ τὴν ἀκόλουθη ἔννοια.

Παρατήρηση 17.11. Γιὰ κάθε κλάση γραφημάτων $\mathcal{A}$ κλειστὴ ὡς πρὸς ἐλάσσονα ἰσχύει ὅτι

$$\mathcal{A} = \mathsf{excl}_{\leq_{\epsilon\lambda}}\big(\mathsf{obs}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\mathcal{A})\big).$$

Ἀπόδειξη. ($\subseteq$) Ἔστω $G \in \mathcal{A}$ καὶ ἔστω $H \in \mathsf{obs}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\mathcal{A})$. Ἂν ἴσχυε $H \leq_{\epsilon\lambda} G$, τότε ἀπὸ τὴν κλειστότητα τῆς $\mathcal{A}$ θὰ εἴχαμε $H \in \mathcal{A}$, ἐνῶ οἱ παρεμποδίσεις ἐξ ὁρισμοῦ δὲν ἀνήκουν στὴν $\mathcal{A}$. Ἄρα $H \not\leq_{\epsilon\lambda} G$ γιὰ κάθε τέτοιο H, δηλαδὴ $G \in \mathsf{excl}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\mathsf{obs}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\mathcal{A}))$.

($\supseteq$) Ἔστω $G \notin \mathcal{A}$. Στὸ σύνολο τῶν ἐλασσόνων τοῦ G ποὺ δὲν ἀνήκουν στὴν $\mathcal{A}$ — μὴ κενό, ἀφοῦ περιέχει τὸ ἴδιο τὸ G — ἐπιλέγουμε ἕνα ἐλαχιστικὸ ὡς πρὸς $\leq_{\epsilon\lambda}$ στοιχεῖο H. Κάθε γνήσιο ἔλασσον τοῦ H ἀνήκει τότε στὴν $\mathcal{A}$, ὁπότε τὸ H εἶναι ἐλαχιστικὸ γράφημα ἐκτὸς τῆς $\mathcal{A}$, δηλαδὴ $H \in \mathsf{obs}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\mathcal{A})$. Ἀφοῦ $H \leq_{\epsilon\lambda} G$, ἕπεται ὅτι $G \notin \mathsf{excl}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\mathsf{obs}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\mathcal{A}))$. □

Παράδειγμα 17.12. Μὲ τὸν συμβολισμὸ αὐτόν, ὅσα εἴδαμε παραπάνω γράφονται

$$\mathcal{C}_1 = \mathsf{excl}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\{K_3\}) \qquad \text{καὶ} \qquad \mathcal{C}_2 = \mathsf{excl}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\{K_4\}),$$

ἐνῶ γιὰ τὸ δεντροπλάτος τὸ πολὺ 3 τὸ σύνολο $\mathsf{obs}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\mathcal{C}_3)$ δὲν εἶναι μονοσύνολο: ἀποτελεῖται ἀπὸ τέσσερα γραφήματα, ἕνα ἀπὸ τὰ ὁποία εἶναι τὸ K_5 [7].

Σύμφωνα μὲ τὸν παραπάνω ὁρισμὸ τὸ ἐρώτημα ποὺ θέτουμε εἶναι τὸ ἑξῆς: γιὰ ποιὰ γραφήματα H ἡ κλάση $\mathsf{excl}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\{H\})$ ἔχει φραγμένο δεντροπλάτος;

Παρατηρῆστε ὅτι ἂν ἀπαγορεύσουμε ἕνα γράφημα H ποὺ δὲν εἶναι ἐπίπεδο τότε ἡ κλάση $\mathsf{excl}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\{H\})$ θὰ περιέχει ὅλα τὰ ἐπίπεδα γραφήματα (ἂν τὸ γράφημα G εἶναι ἐπίπεδο καὶ ἡ κλάση τῶν ἐπίπεδων γραφημάτων εἶναι κλειστὴ ὡς πρὸς ἐλάσσονα ἔπεται ὅτι $H \not\leq_{\epsilon\lambda} G$). Ἑπομένως ἡ κλάση $\mathsf{excl}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\{H\})$ θὰ περιέχει καὶ ὅλες τὶς σχάρες (καθὼς αὐτὲς εἶναι ἐπίπεδα γραφήματα) καὶ ἄρα δὲν θὰ ἔχει φραγμένο δεντροπλάτος. Συνεπῶς τὸ ἐρώτημα ἔχει νόημα μόνο ὅταν τὸ γράφημα H ποὺ θὰ ἀπαγορεύσουμε θὰ εἶναι ἐπίπεδο. Ἕνα ἀπὸ τὰ πολὺ σημαντικὰ ἀποτελέσματα τῶν Graph Minors τῶν Robertson καὶ Seymour εἶναι ὅτι ἀρκεῖ νὰ ἀπαγορεύσουμε ὁποιοδήποτε ἐπίπεδο γράφημα. Μάλιστα ἀπέδειξαν τὸ ἀκόλουθο πιὸ ἰσχυρὸ ἀποτέλεσμα.

Θεώρημα 17.13 (Robertson & Seymour, 1986 [90])**.** Γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$ ὑπάρχει $k(n) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ὥστε κάθε γράφημα G μὲ **δεντροπλάτος**$(G) \geq k(n)$ περιέχει τὴν (n, n)-σχάρα ὡς ἔλασσον.

Συνδυάζοντας τὸ παραπάνω Θεώρημα μὲ τὸ γεγονὸς ὅτι κάθε ἐπίπεδο γράφημα περιέχεται ὡς ἔλασσον σὲ μία ἀρκετὰ μεγάλη σχάρα (ἄρα ἀρκεῖ νὰ ἀπαγορεύσουμε μία σχάρα ἀντὶ γιὰ ἕνα ἐπίπεδο γράφημα) μᾶς ὁδηγεῖ στὸ ἀκόλουθο.

Θεώρημα 17.14 (Robertson & Seymour, 1986 [90])**.** Ἔστω γράφημα H. Ἡ κλάση $\mathsf{excl}_{\leq_{\epsilon\lambda}}(\{H\})$ ἔχει φραγμένο δεντροπλάτος ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ H εἶναι ἐπίπεδο.

17.3 Βάτα καὶ τὸ θεώρημα δυϊσμοῦ

Τὸ δεντροπλάτος ὁρίζεται μέσῳ ἐλαχιστοποίησης: Γιὰ νὰ δείξουμε ὅτι γιὰ τὸ γράφημα G ἰσχύει ὅτι **δεντροπλάτος**$(G) \leq k$ ἀρκεῖ νὰ παρουσιάσουμε μία δεντρο-ἀποσύνθεση πλάτους k. Τὸ νὰ δείξουμε ὅμως ὅτι **δεντροπλάτος**$(G) \geq k$ ἀπαιτεῖ, ἐκ πρώτης ὄψεως, νὰ ἐλέγξουμε *ὅλες* τὶς δεντρο-ἀποσυνθέσεις. Στὴν ἑνότητα αὐτὴ δίνουμε ἕνα ἀντικείμενο ποὺ πιστοποιεῖ μεγάλο δεντροπλάτος μὲ τὸν ἴδιο εὔκολο τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο μιὰ δεντρο-ἀποσύνθεση πιστοποιεῖ μικρό: τὸ *βάτο*. Τὸ κεντρικὸ ἀποτέλεσμα, ποὺ ὀφείλεται στοὺς Seymour καὶ Thomas, λέει ὅτι τὰ δύο μεγέθη ταιριάζουν ἀκριβῶς.

Ἡ ἀπόδειξη ποὺ ἀκολουθεῖ εἶναι ἐκείνη τῶν Bellenbaum καὶ Diestel [9], γραμμένη ἐδῶ πιὸ ἀναλυτικά.

Βάτα

Ὁρισμός 17.15. Δύο ὑποσύνολα A, B τοῦ $V(G)$ *ἐφάπτονται* ἂν $A \cap B \neq \emptyset$ ἢ ἂν ὑπάρχει ἀκμὴ τοῦ G μὲ τὸ ἕνα ἄκρο στὸ A καὶ τὸ ἄλλο στὸ B. Ἕνα *βάτο* τοῦ G εἶναι ἕνα σύνολο $\mathcal{B}$ ἀπὸ μὴ κενά, συνεκτικὰ ὑποσύνολα τοῦ $V(G)$ ποὺ ἀνὰ δύο ἐφάπτονται.

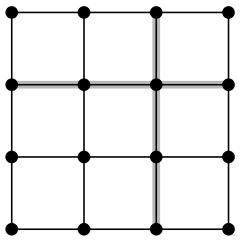
Ἕνα σύνολο $S \subseteq V(G)$ *καλύπτει* τὸ $\mathcal{B}$ ἂν τέμνει κάθε στοιχεῖο του. Ἡ *τάξη* τοῦ $\mathcal{B}$ εἶναι ὁ ἐλάχιστος πληθάριθμος ἑνὸς καλύμματός του, καὶ ὁ *ἀριθμὸς βάτου* τοῦ G εἶναι ἡ μέγιστη τάξη ἑνὸς βάτου τοῦ G.

Τὸ κενὸ σύνολο εἶναι καὶ αὐτὸ βάτο, τετριμμένα, καὶ ἡ τάξη του εἶναι 0, ἀφοῦ τὸ $\emptyset$ τὸ καλύπτει κενολογικά.

Παράδειγμα 17.16. Στὸ K_n τὰ μονοσύνολα $\{v\}$, $v \in V(K_n)$, σχηματίζουν βάτο: τὸ καθένα εἶναι συνεκτικὸ καὶ ἀνὰ δύο ἐφάπτονται, ἀφοῦ κάθε δύο κορυφὲς τοῦ K_n εἶναι γειτονικές. Ἕνα κάλυμμα ὀφείλει νὰ περιέχει κάθε κορυφή, ὁπότε ἡ τάξη τοῦ βάτου αὐτοῦ εἶναι n.

Παράδειγμα 17.17. Ἕνα *σταυροειδὲς* σύνολο μιᾶς (n, n)-σχάρας εἶναι ἕνωση μιᾶς γραμμῆς καὶ μιᾶς στήλης. Τὸ *κέντρο* ἑνὸς σταυροειδοῦς συνόλου εἶναι ἡ κοινὴ κορυφὴ τῆς γραμμῆς καὶ τῆς στήλης. Ὑπάρχουν n^2 τέτοια σταυροειδῆ σύνολα συνολικά. Ἔστω $n \geq 3$ καὶ ἔστω Q ἡ ἐσωτερικὴ $(n-2, n-2)$-ὑποσχάρα, δηλαδὴ αὐτὴ ποὺ προκύπτει ἂν ἀφαιρέσουμε τὶς κορυφὲς τῆς περιμέτρου. Θεωρῆστε τὰ $(n-2)^2$ *σταυροειδῆ* σύνολα τῆς Q (δηλαδὴ τὶς ἑνώσεις μιᾶς γραμμῆς καὶ μιᾶς στήλης τῆς Q). Θεωρῆστε ἐπίσης τρία μονοπάτια $P_{\text{κάτω}}$, $P_{\text{ἀριστερὰ}}$, καὶ $P_{\text{πάνω δεξιὰ}}$ τῶν ὁποίων οἱ κορυφὲς σχηματίζουν διαμέριση τῶν κορυφῶν τῆς περιμέτρου. Τὸ $P_{\text{κάτω}}$ εἶναι ἡ χαμηλότερη γραμμή, τὸ $P_{\text{ἀριστερὰ}}$ εἶναι ἡ ἀριστερότερη στήλη ἐκτὸς ἀπὸ τὴν γωνιακή της κορυφὴ ποὺ ἀνήκει στὸ $P_{\text{κάτω}}$, καὶ τὸ $P_{\text{πάνω δεξιὰ}}$ εἶναι τὸ μονοπάτι τῆς περιμέτρου ποὺ περιέχει τὶς ὑπόλοιπες κορυφές. Δύο σταυροειδῆ σύνολα τῆς Q τέμνονται, καὶ κάθε σταυροειδὲς σύνολο τῆς Q περιέχει κορυφὲς γειτονικὲς σὲ καθένα ἀπὸ τὰ τρία μονοπάτια (ἡ στήλη του φτάνει στὴ δεύτερη καὶ στὴν προτελευταία γραμμή, καὶ ἡ γραμμή του στὴ δεύτερη στήλη), ἐνῶ τὰ τρία μονοπάτια ἐφάπτονται ἀνὰ δύο. Ἄρα ὅλα αὐτὰ τὰ σύνολα σχηματίζουν βάτο. Ἕνα κάλυμμά του πρέπει νὰ περιέχει μιὰ κορυφὴ ἀπὸ κάθε γραμμὴ τῆς Q ἢ μιὰ κορυφὴ ἀπὸ κάθε στήλη τῆς Q (διαφορετικά, ἂν δὲν τέμνει οὔτε τὴν i-ὀστὴ γραμμὴ οὔτε τὴν j-ὀστὴ στήλη τῆς Q, δὲν τέμνει τὸ ἀντίστοιχο σταυροειδὲς σύνολο), δηλαδὴ τουλάχιστον $n-2$ κορυφὲς τῆς Q, καὶ ἐπιπλέον μιὰ κορυφὴ ἀπὸ καθένα ἀπὸ τὰ τρία ἀνὰ δύο ξένα μονοπάτια. Ἀφοῦ μιὰ στήλη τῆς Q μαζὶ μὲ μία κορυφὴ ἀπὸ κάθε μονοπάτι εἶναι

κάλυμμα, τὸ βάτο αὐτὸ ἔχει τάξη $n+1$ καὶ δείχνει, μέσῳ τοῦ Θεωρήματος 17.20, ὅτι ἡ (n,n)-σχάρα ἔχει δεντροπλάτος τουλάχιστον n.



Σχῆμα 17.2: Ἕνα σταυροειδὲς σύνολο τῆς $(4,4)$-σχάρας. Δύο ὁποιαδήποτε τέτοια σύνολα ἐφάπτονται, ἀφοῦ ἡ γραμμὴ τοῦ ἑνὸς τέμνει τὴ στήλη τοῦ ἄλλου.

Τὸ ἑπόμενο λῆμμα εἶναι μικρὸ ἀλλὰ καθοριστικό: ἐξηγεῖ γιατὶ τὰ βάτα συμπεριφέρονται καλὰ ὡς πρὸς τοὺς διαχωριστές.

Λῆμμα 17.18. Ἔστω $\mathcal{B}$ βάτο τοῦ G καὶ ἔστω S_1, S_2 δύο καλύμματά του. Κάθε σύνολο $Y \subseteq V(G)$ ποὺ διαχωρίζει τὸ S_1 ἀπὸ τὸ S_2 στὸ G καλύπτει καὶ αὐτὸ τὸ $\mathcal{B}$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $B \in \mathcal{B}$. Ἀφοῦ τὰ S_1, S_2 εἶναι καλύμματα, ὑπάρχουν $u \in B \cap S_1$ καὶ $w \in B \cap S_2$. Τὸ B εἶναι συνεκτικό, ὁπότε τὸ $G[B]$ περιέχει (u,w)-μονοπάτι· αὐτὸ εἶναι (S_1,S_2)-μονοπάτι καὶ ἄρα τέμνει τὸ Y. Ἑπομένως $B \cap Y \neq \emptyset$. □

Ἀμαλγαμάτωση δεντρο-ἀποσυνθέσεων

Ἡ βασικὴ τεχνικὴ γιὰ τὴν κατασκευὴ δεντρο-ἀποσυνθέσεων εἶναι ἡ *ἀμαλγαμάτωση*: χωρίζουμε τὸ γράφημα μὲ ἕναν διαχωριστὴ X, βρίσκουμε δεντρο-ἀποσυνθέσεις τῶν κομματιῶν, καὶ τὶς συγκολλᾶμε κατὰ μῆκος τοῦ X. Γιὰ νὰ λειτουργήσει, τὸ X πρέπει νὰ περιέχεται σὲ κάποιο μέρος κάθε ἐπιμέρους ἀποσύνθεσης. Τὸ νὰ τὸ ἐπιβάλουμε αὐτὸ κοστίζει γενικὰ αὔξηση τοῦ πλάτους· τὸ ἀκόλουθο λῆμμα δίνει μιὰ συνθήκη ὑπὸ τὴν ὁποία δὲν κοστίζει τίποτα.

Ἔστω G γράφημα, $X \subseteq V(G)$, ἔστω C μιὰ ἕνωση συνεκτικῶν συνιστωσῶν τοῦ $G - X$, καὶ ἔστω $H := G[C \cup X]$. Ἔστω ἀκόμη $D = (T, (V_t)_{t \in V(T)})$ δεντροαποσύνθεση τοῦ G καὶ $s \in V(T)$. Γιὰ κάθε $x \in X$ ἐπιλέγουμε ἕναν *κόμβο-ἑστία* $t_x \in V(T)$ μὲ $x \in V_{t_x}$, καὶ γιὰ κάθε $t \in V(T)$ θέτουμε

$$W_t := \big(V_t \cap V(H)\big) \cup \{x \in X \mid t \in V(t_x\, T\, s)\}.$$

Συμβολίζουμε μὲ $D_s(H)$ τὸ ζεῦγος $(T, (W_t)_{t\in V(T)})$.

Διαισθητικά, τὸ $D_s(H)$ προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀποσύνθεση ποὺ ἐπάγει τὸ D στὸ H ἂν «σύρουμε» κάθε κορυφὴ $x \in X$ κατὰ μῆκος τοῦ μονοπατιοῦ ἀπὸ τὸν κόμβο-ἑστία της ὡς τὸν s, ὥστε στὸ τέλος ὅλο τὸ X νὰ βρίσκεται στὸ μέρος W_s.

Λῆμμα 17.19. Τὸ $D_s(H)$ εἶναι δεντρο-ἀποσύνθεση τοῦ H μὲ $X \subseteq W_s$. Ἂν ἐπιπλέον τὸ $G - C$ περιέχει σύνολο $\{P_x \mid x \in X\}$ ἀπὸ ἀνὰ δύο ξένα (X, V_s)-μονοπάτια μὲ $x \in V(P_x)$ γιὰ κάθε x, τότε $|W_t| \leq |V_t|$ γιὰ κάθε $t \in V(T)$.

Ἀπόδειξη. Τὸ $D_s(H)$ εἶναι δεντρο-ἀποσύνθεση. Γιὰ τὸ $(\Delta 1)$: ἂν $v \in C$, τότε $v \in V_t$ γιὰ κάποιο t καὶ $v \in V(H)$, ἄρα $v \in W_t$· ἂν $v = x \in X$, τότε $x \in W_{t_x}$, ἀφοῦ $t_x \in V(t_x\, T\, s)$. Γιὰ τὸ $(\Delta 2)$: κάθε ἀκμὴ τοῦ H εἶναι ἀκμὴ τοῦ G, ὁπότε ὑπάρχει t μὲ τὰ δύο ἄκρα της στὸ V_t· τὰ ἄκρα ἀνήκουν στὸ $V(H)$, ἄρα καὶ στὸ W_t. Γιὰ τὸ $(\Delta 3)$: ἂν $v \in C$, τότε $\{t \mid v \in W_t\} = \{t \mid v \in V_t\}$, ποὺ ἐνάγει ὑποδέντρο· ἂν $v = x \in X$, τότε

$$\{t \mid x \in W_t\} = \{t \mid x \in V_t\} \cup V(t_x\, T\, s),$$

ἕνωση δύο ὑποδέντρων ποὺ ἔχουν κοινὸ τὸν κόμβο t_x, ἄρα πάλι ὑποδέντρο. Τέλος $X \subseteq W_s$ ἐξ ὁρισμοῦ.

Τὸ φράγμα γιὰ τὰ μεγέθη. Ἔστω $t \in V(T)$. Θὰ ὁρίσουμε μιὰ 1-1 ἀπεικόνιση ἀπὸ τὸ $W_t \backslash V_t$ στὸ $V_t \backslash W_t$· αὐτὸ δίνει $|W_t \backslash V_t| \leq |V_t \backslash W_t|$ καὶ ἑπομένως $|W_t| \leq |V_t|$.

Ἔστω $x \in W_t \backslash V_t$. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ W_t καὶ ἐπειδὴ $x \notin V_t$, ἡ x δὲν μπορεῖ νὰ προῆλθε ἀπὸ τὸ $V_t \cap V(H)$, ἄρα $x \in X$ καὶ $t \in V(t_x\, T\, s)$. Τὸ P_x εἶναι μονοπάτι ἀπὸ τὴν x σὲ κορυφὴ τοῦ V_s, μὲ $x \in V_{t_x}$. Ἀπὸ τὸ Πόρισμα 17.6 τὸ V_t διαχωρίζει τὸ V_{t_x} ἀπὸ τὸ V_s, ὁπότε τὸ P_x τέμνει τὸ V_t· καὶ ἀφοῦ $x \notin V_t$, ὑπάρχει κορυφὴ $y_x \in V(P_x) \cap V_t$ μὲ $y_x \neq x$.

Ἰσχυριζόμαστε ὅτι $y_x \notin W_t$. Πράγματι, τὸ P_x περιέχεται στὸ $G - C$, ἄρα $y_x \notin C$. Ἐπίσης τὸ P_x εἶναι (X, V_s)-μονοπάτι, ὁπότε τέμνει τὸ X μόνο στὸ πρῶτο του ἄκρο, δηλαδὴ στὴν x· ἄρα $y_x \notin X$. Συνεπῶς $y_x \notin C \cup X = V(H)$, ὁπότε $y_x \notin V_t \cap V(H)$, καὶ $y_x \notin X$, ὁπότε δὲν ἀνήκει οὔτε στὸ δεύτερο σκέλος τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ W_t. Ἄρα $y_x \in V_t \backslash W_t$.

Τέλος, τὰ μονοπάτια P_x εἶναι ἀνὰ δύο ξένα, ὁπότε ἡ ἀπεικόνιση $x \mapsto y_x$ εἶναι 1-1. □

Τὸ θεώρημα δυϊσμοῦ

Θεώρημα 17.20 (Seymour & Thomas, 1993 [95])**.** Ἔστω $k \geq 0$ ἀκέραιος. Ἕνα γράφημα ἔχει δεντροπλάτος τουλάχιστον k ἂν καὶ μόνο ἂν περιέχει βάτο τάξης μεγαλύτερης τοῦ k.

Ἀπόδειξη. Ἡ κατεύθυνση ($\Leftarrow$). Ἔστω $\mathcal{B}$ βάτο τοῦ G τάξης μεγαλύτερης τοῦ k. Θὰ δείξουμε ὅτι κάθε δεντρο-ἀποσύνθεση τοῦ G ἔχει μέρος ποὺ καλύπτει τὸ $\mathcal{B}$· ἕνα τέτοιο μέρος ἔχει τουλάχιστον $k+1$ κορυφές, ὁπότε κάθε δεντρο-ἀποσύνθεση ἔχει πλάτος τουλάχιστον k καὶ ἄρα **δεντροπλάτος**$(G) \geq k$.

Ἔστω λοιπὸν $(T, (V_t)_{t \in V(T)})$ δεντρο-ἀποσύνθεση τοῦ G. Γιὰ κάθε ἀκμὴ $e = \{t_1, t_2\}$ τοῦ T ἔστω T_1, T_2 οἱ συνιστῶσες τοῦ $T - e$ καὶ $U_i = \bigcup_{t \in V(T_i)} V_t$. Ἰσχυριζόμαστε ὅτι τουλάχιστον ἕνα ἀπὸ τὰ U_1, U_2 καλύπτει τὸ $\mathcal{B}$. Πράγματι, ἂν ὄχι, ὑπάρχουν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ μὲ $B_1 \cap U_1 = \emptyset$ καὶ $B_2 \cap U_2 = \emptyset$. Ἀφοῦ $V(G) = U_1 \cup U_2$, ἔχουμε $B_1 \subseteq U_2 \backslash U_1$ καὶ $B_2 \subseteq U_1 \backslash U_2$. Τὰ δύο αὐτὰ σύνολα εἶναι ξένα καί, ἀπὸ τὸ Λῆμμα 17.5, δὲν ὑπάρχει ἀκμὴ ἀνάμεσά τους· ἄρα τὰ B_1 καὶ B_2 δὲν ἐφάπτονται, ποὺ ἀντιβαίνει στὸν ὁρισμὸ τοῦ βάτου.

Προσανατολίζουμε λοιπὸν κάθε ἀκμὴ e τοῦ T πρὸς ἐκείνη τὴ συνιστῶσα τοῦ $T - e$ τῆς ὁποίας ἡ ἕνωση τῶν μερῶν καλύπτει τὸ $\mathcal{B}$ (ἂν καλύπτουν καὶ οἱ δύο, διαλέγουμε αὐθαίρετα). Ξεκινώντας ἀπὸ ὁποιονδήποτε κόμβο καὶ ἀκολουθώντας τοὺς προσανατολισμοὺς παίρνουμε διαδρομὴ ποὺ δὲν ἐπαναλαμβάνει κόμβο, ἀφοῦ τὸ T εἶναι ἄκυκλο· ἐπειδὴ τὸ T εἶναι πεπερασμένο, ἡ διαδρομὴ τερματίζει σὲ κόμβο s ὅλες οἱ προσκείμενες ἀκμὲς τοῦ ὁποίου εἶναι προσανατολισμένες πρὸς αὐτόν.

Θὰ δείξουμε ὅτι τὸ V_s καλύπτει τὸ $\mathcal{B}$. Ἔστω, πρὸς ἄτοπο, $B \in \mathcal{B}$ μὲ $B \cap V_s = \emptyset$. Ἔστω $T_1, \ldots, T_d$ οἱ συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ $T - s$ καὶ $U_i = \bigcup_{t \in V(T_i)} V_t$. Γιὰ $i \neq j$, κάθε κορυφὴ τοῦ $U_i \cap U_j$ ἀνήκει στὸ V_s (ἀπὸ τὸ $(\Delta 3)$, ἀφοῦ ὁ s βρίσκεται πάνω σὲ κάθε μονοπάτι τοῦ T ἀπὸ κόμβο τοῦ T_i σὲ κόμβο τοῦ T_j), καὶ καμία ἀκμὴ τοῦ G δὲν ἔχει τὸ ἕνα ἄκρο στὸ $U_i \backslash V_s$ καὶ τὸ ἄλλο στὸ $U_j \backslash V_s$ (ἀπὸ τὸ $(\Delta 2)$). Ἀφοῦ τὸ B εἶναι συνεκτικὸ καὶ ξένο πρὸς τὸ V_s, περιέχεται ἐξ ὁλοκλήρου σὲ ἕνα ἀπὸ τὰ $U_i \backslash V_s$, ἔστω στὸ $U_1 \backslash V_s$.

Ἔστω t_1 ὁ γείτονας τῆς s μέσα στὸ T_1 καὶ $e = \{s, t_1\}$. Ἡ ἀκμὴ e εἶναι προσανατολισμένη πρὸς τὴν s, δηλαδὴ ἡ ἕνωση U τῶν μερῶν τῆς συνιστώσας τοῦ $T - e$ ποὺ περιέχει τὴν s καλύπτει τὸ $\mathcal{B}$, ἄρα $U \cap B \neq \emptyset$. Ὅμως $B \subseteq U_1$ καί, ἀπὸ τὸ Λῆμμα 17.5 ἐφαρμοσμένο στὴν ἀκμὴ e, $U \cap U_1 = V_s \cap V_{t_1} \subseteq V_s$. Ἑπομένως $U \cap B \subseteq V_s \cap B = \emptyset$, ἄτοπο.

Ἡ κατεύθυνση ($\Rightarrow$). Δείχνουμε τὸ ἀντιθετοαντίστροφο: ὑποθέτουμε ὅτι τὸ G δὲν περιέχει βάτο τάξης μεγαλύτερης τοῦ k καὶ ἀποδεικνύουμε ὅτι

δεντροπλάτος$(G) < k$.

Ἂς ποῦμε ὅτι μιὰ δεντρο-ἀποσύνθεση τοῦ G εἶναι $\mathcal{B}$-*ἀποδεκτὴ* ἂν κανένα μέρος της μὲ περισσότερες ἀπὸ k κορυφὲς δὲν καλύπτει τὸ $\mathcal{B}$. Θὰ ἀποδείξουμε τὸν ἀκόλουθο ἰσχυρισμό:

Ἰσχυρισμός 17.21. Γιὰ κάθε βάτο $\mathcal{B}$ τοῦ G ὑπάρχει $\mathcal{B}$-ἀποδεκτὴ δεντρο-ἀποσύνθεση τοῦ G.

Ὁ Ἰσχυρισμὸς δίνει ἀμέσως τὸ ζητούμενο: ἐφαρμόζοντάς τον στὸ κενὸ βάτο $\mathcal{B} = \emptyset$, τὸ ὁποῖο καλύπτεται ἀπὸ κάθε σύνολο, παίρνουμε δεντρο-ἀποσύνθεση χωρὶς κανένα μέρος μὲ περισσότερες ἀπὸ k κορυφές, δηλαδὴ πλάτους τὸ πολὺ $k-1$.

Ἀπόδειξη Ἰσχυρισμοῦ 17.21. Χρησιμοποιοῦμε φθίνουσα ἐπαγωγὴ στὸ πλῆθος $|\mathcal{B}|$ τῶν στοιχείων τοῦ βάτου. Ἡ ἐπαγωγὴ εἶναι καλὰ θεμελιωμένη, ἀφοῦ κανένα βάτο τοῦ G δὲν ἔχει περισσότερα ἀπὸ $2^{n(G)}$ στοιχεῖα· ὑποθέτουμε λοιπὸν ὅτι γιὰ κάθε βάτο $\mathcal{B}'$ μὲ $|\mathcal{B}'| > |\mathcal{B}|$ ὑπάρχει $\mathcal{B}'$-ἀποδεκτὴ δεντρο-ἀποσύνθεση τοῦ G.

Ἔστω X ἕνα ἐλάχιστο κάλυμμα τοῦ $\mathcal{B}$ καὶ $\ell := |X|$ ἡ τάξη τοῦ $\mathcal{B}$. Ἀπὸ τὴν ὑπόθεση, $\ell \leq k$.

Ἂν $X = V(G)$, τότε ἡ ἀποσύνθεση μὲ ἕνα μοναδικὸ μέρος, τὸ X, εἶναι $\mathcal{B}$-ἀποδεκτή, ἀφοῦ $|X| \leq k$. Ἔστω λοιπὸν $X \neq V(G)$. Θὰ δείξουμε:

$(*)$ εἴτε τὸ G ἔχει $\mathcal{B}$-ἀποδεκτὴ δεντρο-ἀποσύνθεση, εἴτε γιὰ κάθε συνεκτικὴ συνιστῶσα C τοῦ $G-X$ τὸ γράφημα $H := G[C \cup X]$ ἔχει $\mathcal{B}$-ἀποδεκτὴ δεντρο-ἀποσύνθεση μὲ τὸ X ὡς μέρος.

Στὴ δεύτερη περίπτωση τοῦ $(*)$ ἀμαλγαματώνουμε: παίρνουμε τὶς δεντρο-ἀποσυνθέσεις ὅλων τῶν συνιστωσῶν καὶ ταυτίζουμε τοὺς κόμβους τους ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὸ μέρος X σὲ ἕναν κόμβο. Τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι δεντρο-ἀποσύνθεση τοῦ G: τὸ $(\Delta 1)$ ἰσχύει ἀφοῦ κάθε κορυφὴ ἀνήκει στὸ X ἢ σὲ κάποια συνιστῶσα· τὸ $(\Delta 2)$ ἰσχύει ἀφοῦ κάθε ἀκμὴ τοῦ G ἔχει καὶ τὰ δύο ἄκρα της μέσα σὲ κάποιο $C \cup X$· καὶ τὸ $(\Delta 3)$ ἰσχύει ἀφοῦ κάθε κορυφὴ τοῦ C ἐμφανίζεται μόνο στοὺς κόμβους τῆς ἀντίστοιχης ἀποσύνθεσης, ἐνῶ κάθε $x \in X$ ἐμφανίζεται σὲ μιὰ ἕνωση ὑποδέντρων ποὺ ὅλα περιέχουν τὸν κοινὸ κόμβο τοῦ X. Εἶναι $\mathcal{B}$-ἀποδεκτή, ἀφοῦ κάθε μέρος της μὲ περισσότερες ἀπὸ k κορυφὲς εἶναι μέρος κάποιας ἀπὸ τὶς ἐπιμέρους ἀποσυνθέσεις (τὸ ἴδιο τὸ X ἔχει $\ell \leq k$ κορυφές).

Μένει νὰ ἀποδείξουμε τὸ $(*)$. Ἔστω C συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ $G-X$, $H := G[C \cup X]$, καὶ $\mathcal{B}' := \mathcal{B} \cup \{C\}$, ὅπου μὲ C συμβολίζουμε καὶ τὸ σύνολο κορυφῶν τῆς συνιστώσας.

Περίπτωση 1: τὸ $\mathcal{B}'$ δὲν εἶναι βάτο. Τὸ C εἶναι μὴ κενὸ καὶ συνεκτικό, ὁπότε ὁ μόνος τρόπος νὰ ἀποτύχει τὸ $\mathcal{B}'$ εἶναι νὰ μὴν ἐφάπτεται τὸ C μὲ κάποιο $B \in \mathcal{B}$. Θέτουμε $Y := C \cup N_G(C)$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι $N_G(C) \subseteq X$, ἀφοῦ τὸ C εἶναι συνιστῶσα τοῦ $G - X$. Τὸ Y δὲν καλύπτει τὸ $\mathcal{B}$: πράγματι, $B \cap C = \emptyset$, ἐνῶ ἂν ὑπῆρχε κορυφὴ στὸ $B \cap N_G(C)$ αὐτὴ θὰ ἦταν γειτονικὴ μὲ κορυφὴ τοῦ C καὶ τὰ B, C θὰ ἐφάπτονταν.

Θεωροῦμε τὴ δεντρο-ἀποσύνθεση τοῦ H μὲ δύο κόμβους, ἑνωμένους μὲ ἀκμή, καὶ μέρη τὰ X καὶ Y. Ἱκανοποιεῖ τὸ $(\Delta 1)$, ἀφοῦ $X \cup Y = X \cup C = V(H)$· τὸ $(\Delta 2)$, ἀφοῦ κάθε ἀκμὴ τοῦ H εἴτε ἔχει καὶ τὰ δύο ἄκρα στὸ X, εἴτε ἔχει τουλάχιστον ἕνα ἄκρο στὸ C καὶ τότε καὶ τὰ δύο ἄκρα της ἀνήκουν στὸ $C \cup N_G(C) = Y$· καὶ τὸ $(\Delta 3)$ τετριμμένα, ἀφοῦ τὸ T ἔχει δύο κόμβους. Εἶναι $\mathcal{B}$-ἀποδεκτή, ἀφοῦ τὸ X ἔχει $\ell \leq k$ κορυφὲς καὶ τὸ Y δὲν καλύπτει τὸ $\mathcal{B}$. Καὶ ἔχει τὸ X ὡς μέρος.

Περίπτωση 2: τὸ $\mathcal{B}'$ εἶναι βάτο. Ἀφοῦ τὸ X καλύπτει τὸ $\mathcal{B}$ καὶ $X \cap C = \emptyset$, ἔχουμε $C \notin \mathcal{B}$ καὶ ἄρα $|\mathcal{B}'| = |\mathcal{B}| + 1 > |\mathcal{B}|$. Ἀπὸ τὴν ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση ὑπάρχει $\mathcal{B}'$-ἀποδεκτὴ δεντρο-ἀποσύνθεση $D = (T, (V_t)_{t \in V(T)})$ τοῦ G.

Ἂν ἡ D εἶναι καὶ $\mathcal{B}$-ἀποδεκτή, ἰσχύει τὸ πρῶτο σκέλος τοῦ $(*)$ καὶ τελειώσαμε. Ἔστω λοιπὸν ὅτι δὲν εἶναι: ὑπάρχει $s \in V(T)$ μὲ $|V_s| > k$ καὶ τὸ V_s καλύπτει τὸ $\mathcal{B}$.

Ἀφοῦ ἡ D εἶναι $\mathcal{B}'$-ἀποδεκτὴ καὶ $|V_s| > k$, τὸ V_s δὲν καλύπτει τὸ $\mathcal{B}'$· ἐπειδὴ ὅμως καλύπτει τὸ $\mathcal{B}$, τὸ στοιχεῖο πού του ξεφεύγει εἶναι τὸ C, δηλαδὴ $V_s \cap C = \emptyset$.

Τὰ V_s καὶ X εἶναι καὶ τὰ δύο καλύμματα τοῦ $\mathcal{B}$. Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 17.18, κάθε (V_s, X)-διαχωριστὴς τοῦ G καλύπτει τὸ $\mathcal{B}$ καὶ ἄρα ἔχει τουλάχιστον ℓ κορυφές. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 17.4, ὑπάρχουν ℓ ἀνὰ δύο ξένα (V_s, X)-μονοπάτια· ἀφοῦ $|X| = \ell$, κάθε κορυφὴ τοῦ X εἶναι ἄκρο ἀκριβῶς ἑνὸς ἀπὸ αὐτά, ὁπότε γράφουμε $\{P_x \mid x \in X\}$ μὲ $x \in V(P_x)$.

Τὰ μονοπάτια αὐτὰ ἀποφεύγουν τὸ C. Πράγματι, ἔστω ὅτι τὸ P_x ἔχει κορυφὴ στὸ C καὶ ἔστω y ἡ πρώτη τέτοια, ξεκινώντας ἀπὸ τὴν x. Τὸ ὑπόλοιπο τοῦ P_x καταλήγει σὲ κορυφὴ τοῦ V_s, ἡ ὁποία δὲν ἀνήκει στὸ C, ὁπότε κάποια στιγμὴ τὸ μονοπάτι ἐγκαταλείπει τὸ C καὶ ἄρα περνάει ἀπὸ τὸ $N_G(C) \subseteq X$. Ὅμως τὸ P_x εἶναι (X, V_s)-μονοπάτι καὶ τέμνει τὸ X μόνο στὴν x, ἡ ὁποία προηγεῖται τῆς y, ἄτοπο.

Ἐπιλέγουμε τώρα γιὰ κάθε $x \in X$ ἕναν κόμβο-ἑστία t_x μὲ $x \in V_{t_x}$ καὶ σχηματίζουμε τὸ $D_s(H) = (T, (W_t)_{t \in V(T)})$ ὅπως πρὶν ἀπὸ τὸ Λῆμμα 17.19. Παρατηροῦμε ὅτι

$$W_s = \big(V_s \cap V(H)\big) \cup X = \big(V_s \cap (C \cup X)\big) \cup X = X,$$

ἀφοῦ $V_s \cap C = \emptyset$. Ἄρα τὸ X εἶναι μέρος τοῦ $D_s(H)$, καὶ ἀπὸ τὸ Λῆμμα 17.19

ἰσχύει $|W_t| \leq |V_t|$ γιὰ κάθε t.

Μένει νὰ δείξουμε ὅτι τὸ $D_s(H)$ εἶναι $\mathcal{B}$-ἀποδεκτό. Ἔστω $t \in V(T)$ μὲ $|W_t| > k$. Ἀφοῦ $W_t \subseteq V(H) = C \cup X$ καὶ $|X| = \ell \leq k < |W_t|$, τὸ W_t τέμνει τὸ C. Ἐπίσης $|V_t| \geq |W_t| > k$, ὁπότε, ἐπειδὴ ἡ D εἶναι $\mathcal{B}'$-ἀποδεκτή, τὸ V_t δὲν καλύπτει τὸ $\mathcal{B}'$: ὑπάρχει στοιχεῖο τοῦ $\mathcal{B}'$ ξένο πρὸς τὸ V_t. Τὸ στοιχεῖο αὐτὸ δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι τὸ C, γιατὶ τότε θὰ εἴχαμε $W_t \cap C \subseteq (V_t \cap V(H)) \cap C = \emptyset$, ἐνῶ δείξαμε ὅτι τὸ W_t τέμνει τὸ C. Ἄρα ὑπάρχει $B \in \mathcal{B}$ μὲ $V_t \cap B = \emptyset$.

Θὰ δείξουμε ὅτι καὶ $W_t \cap B = \emptyset$, ὁπότε τὸ W_t δὲν καλύπτει τὸ $\mathcal{B}$ καὶ τελειώσαμε. Ἔστω, πρὸς ἄτοπο, $y \in W_t \cap B$. Ἀφοῦ $V_t \cap B = \emptyset$, ἔχουμε $y \notin V_t$, δηλαδὴ $y \in W_t \backslash V_t$, ὁπότε $y = x$ γιὰ κάποιο $x \in X$ μὲ $t \in V(t_x\, T\, s)$. Παρατηροῦμε ὅτι $t \neq t_x$, ἀφοῦ $x \in V_{t_x}$ ἐνῶ $x \notin V_t$, καὶ ὅτι $t \neq s$, ἀφοῦ $|W_s| = \ell \leq k < |W_t|$. Τὸ B εἶναι συνεκτικὸ καὶ τέμνει τὸ V_{t_x} (στὴν x) καθὼς καὶ τὸ V_s (ἀφοῦ τὸ V_s καλύπτει τὸ $\mathcal{B}$). Ἀπὸ τὸ Πόρισμα 17.6, τὸ B τέμνει καὶ τὸ V_t, ποὺ ἀντιβαίνει στὸ $V_t \cap B = \emptyset$. □

Διατυπωμένο μὲ ὅρους τοῦ ἀριθμοῦ βάτου, τὸ θεώρημα παίρνει τὴν ἀκόλουθη συμπαγῆ μορφή.

Πόρισμα 17.22. Γιὰ κάθε γράφημα G, τὸ δεντροπλάτος τοῦ G εἶναι κατὰ ἕνα μικρότερο ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ βάτου του.

Ἀπόδειξη. Ἔστω β ὁ ἀριθμὸς βάτου τοῦ G. Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 17.20 μὲ $k = \beta - 1$, τὸ G ἔχει βάτο τάξης $\beta > \beta - 1$, ἄρα $\textbf{δεντροπλάτος}(G) \geq \beta - 1$. Ἀπὸ τὸ ἴδιο θεώρημα μὲ $k = \beta$, τὸ G δὲν ἔχει βάτο τάξης μεγαλύτερης τοῦ β, ἄρα $\textbf{δεντροπλάτος}(G) < \beta$. Συνδυάζοντας, $\textbf{δεντροπλάτος}(G) = \beta - 1$. □

Πόρισμα 17.23. Γιὰ κάθε $n \geq 1$ ἰσχύει ὅτι $\textbf{δεντροπλάτος}(K_n) = n - 1$.

Ἀπόδειξη. Τὸ Παράδειγμα 17.16 δίνει βάτο τάξης n στὸ K_n, ὁπότε ἀπὸ τὸ Πόρισμα 17.22 ἔχουμε $\textbf{δεντροπλάτος}(K_n) \geq n - 1$. Ἡ ἀντίστροφη ἀνισότητα δόθηκε στὸ πρῶτο παράδειγμα τῆς ἑνότητας. □

Τὸ θεώρημα δυϊσμοῦ εἶναι ἕνα ἀκόμη παράδειγμα μεγιστοελάχιστου θεωρήματος, στὸ πνεῦμα ἐκείνων τῶν Menger, Kőnig, καὶ Ford καὶ Fulkerson ποὺ εἴδαμε σὲ προηγούμενα κεφάλαια. Ἡ ἀρχική του ἀπόδειξη δόθηκε ἀπὸ τοὺς Seymour καὶ Thomas [95] μὲ τὴ γλῶσσα τῶν παιχνιδιῶν καταδίωξης σὲ γραφήματα· ὁ ὅρος «βάτο» καθιερώθηκε ἀπὸ τὸν Reed [87]. Ἡ ἔννοια τοῦ δεντροπλάτους ἀνάγεται στοὺς Robertson καὶ Seymour [89, 91], ἐνῶ ἡ συγγενὴς τεχνικὴ τῶν «ἰσχνῶν» δεντρο-ἀποσυνθέσεων, ἡ ὁποία στηρίζεται στὸ ἴδιο Λῆμμα 17.19 τῆς ἀμαλγαμάτωσης, ὀφείλεται στὸν Thomas [99].

Παρατήρηση 17.24. Τὰ βάτα πιστοποιοῦν μεγάλο δεντροπλάτος, ἀλλὰ ὄχι πάντοτε οἰκονομικά: οἱ Grohe καὶ Marx [46] ἔδειξαν ὅτι ὑπάρχουν γραφήματα μὲ n κορυφὲς καὶ δεντροπλάτος $\Omega(n)$ στὰ ὁποία κάθε βάτο τάξης $\Omega(n^{1/2+\varepsilon})$ ἔχει ἐκθετικὰ πολλὰ στοιχεῖα.

17.4 Διαχωριστὲς σὲ ἐπίπεδα γραφήματα

Ἕνα γράφημα μικροῦ δεντροπλάτους μπορεῖ νὰ κοπεῖ στὰ δύο ἀφαιρώντας λίγες κορυφές. Τὸ ἐρώτημα ἂν καὶ πόσο καλὰ κόβεται ἕνα γράφημα μὲ αὐτὸν τὸν τρόπο εἶναι παλαιότερο ἀπὸ τὴν ἔννοια τοῦ δεντροπλάτους καὶ ἔχει τὴ δική του αὐτοτελῆ σημασία: κάθε τέτοια κοπὴ ἐπιτρέπει ἀλγορίθμους «διαίρει καὶ βασίλευε», ἀφοῦ ἀνάγει τὸ πρόβλημα σὲ δύο οὐσιαστικὰ μικρότερα.

Ὁρισμός 17.25. Ἕνας $\frac{2}{3}$-*διαχωριστής* ἑνὸς γραφήματος G μὲ n κορυφὲς εἶναι μιὰ διαμέριση (A, B, C) τοῦ $V(G)$ τέτοια ὥστε

$$|A|, |B| \leq \frac{2}{3}n$$

καὶ καμία κορυφὴ τοῦ A νὰ μὴν εἶναι γειτονικὴ μὲ κορυφὴ τοῦ B. Ἡ *τάξη* τοῦ (A, B, C) εἶναι ὁ πληθάριθμος $|C|$.

Τὰ σύνολα A καὶ B ἐπιτρέπεται νὰ εἶναι κενά· εἰδικότερα, ἡ τριάδα $(\emptyset, \emptyset, V(G))$ εἶναι πάντοτε $\frac{2}{3}$-διαχωριστής, τάξης ὅμως n. Τὸ ἐνδιαφέρον βρίσκεται στὸ πόσο μικρὴ μπορεῖ νὰ γίνει ἡ τάξη.

Γιὰ γενικὰ γραφήματα δὲν ὑπάρχει κανένα καλὸ φράγμα: στὸ K_n κάθε $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴς ἔχει τάξη τουλάχιστον $\frac{n}{3}$, ἀφοῦ ἀπὸ τὰ A καὶ B τὸ ἕνα τουλάχιστον πρέπει νὰ εἶναι κενό. Γιὰ τὰ ἐπίπεδα γραφήματα ὅμως ἰσχύει τὸ ἀκόλουθο θεμελιῶδες ἀποτέλεσμα τῶν Lipton καὶ Tarjan. Ἡ ἀπόδειξη ποὺ δίνουμε εἶναι ἡ σύντομη ἀπόδειξη τῶν Alon, Seymour, καὶ Thomas [4].

Θεώρημα 17.26 (Lipton & Tarjan, 1979 [66])**.** Κάθε ἐπίπεδο γράφημα G μὲ $n \geq 1$ κορυφὲς ἔχει $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴ τάξης τὸ πολὺ $2\sqrt{2n}$.

Χρειαζόμαστε μιὰ κλασικὴ μορφὴ τοῦ Θεωρήματος τοῦ Menger γιὰ τριγωνοποιημένους δίσκους. Καλοῦμε *τριγωνοποιημένο δίσκο* ἕνα ἐνεπίπεδο γράφημα D τοῦ ὁποίου ἡ μὴ φραγμένη ὄψη φράσσεται ἀπὸ κύκλο C καὶ κάθε ἄλλη ὄψη εἶναι τρίγωνο. Δύο κορυφὲς u, v τοῦ C τὸν χωρίζουν σὲ δύο *τόξα*, δηλαδὴ σὲ δύο (u, v)-μονοπάτια μὲ ἕνωση τὸν C.

Λῆμμα 17.27. Ἔστω D τριγωνοποιημένος δίσκος μὲ συνοριακὸ κύκλο C, ἔστω $u, v \in V(C)$, καὶ ἔστω Q_1, Q_2 τὰ δύο τόξα στὰ ὁποία χωρίζουν οἱ u, v τὸν C. Τὸ μέγιστο πλῆθος ἀνὰ δύο κορυφοξένων μονοπατιῶν τοῦ D μεταξὺ τοῦ $V(Q_1)$ καὶ τοῦ $V(Q_2)$ ἰσοῦται μὲ $\textbf{ἀπόσταση}_D(u, v) + 1$.

Ἡ μία κατεύθυνση εἶναι εὔκολη: ἕνα (u, v)-μονοπάτι P τοῦ D ἐλάχιστου μήκους ἔχει $\textbf{ἀπόσταση}_D(u, v) + 1$ κορυφὲς καὶ τέμνει κάθε $(V(Q_1), V(Q_2))$-μονοπάτι, ἀφοῦ ἕνα τέτοιο μονοπάτι θὰ ἔπρεπε νὰ περάσει ἀπὸ τὴ μία πλευρὰ τοῦ P στὴν ἄλλη μέσα στὸν δίσκο· ἄρα τὸ πλῆθος τῶν κορυφοξένων μονοπατιῶν δὲν ὑπερβαίνει τὸ $\textbf{ἀπόσταση}_D(u, v) + 1$. Ἡ ἀντίστροφη κατεύθυνση εἶναι ἡ ἐπίπεδη μορφὴ τοῦ Θεωρήματος τοῦ Menger καὶ τὴν παραθέτουμε χωρὶς ἀπόδειξη· ἡ οὐσία της εἶναι ὅτι σὲ ἕναν τριγωνοποιημένο δίσκο κάθε σύνολο κορυφῶν ποὺ διαχωρίζει τὰ δύο τόξα περιέχει (u, v)-μονοπάτι.

Ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 17.26. Ἂν $n \leq 2$, ἡ τριάδα $(\emptyset, \emptyset, V(G))$ ἔχει τάξη $n \leq 2 \leq 2\sqrt{2n}$ καὶ τὸ ζητούμενο ἰσχύει. Ἔστω λοιπὸν $n \geq 3$.
Ἀναγωγὴ σὲ τριγωνοποίηση. Ἂν προσθέσουμε ἀκμὲς στὸ G, κάθε $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴς τοῦ μεγαλύτερου γραφήματος εἶναι καὶ $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴς τοῦ G, ἀφοῦ ἡ συνθήκη «καμία ἀκμὴ ἀνάμεσα στὰ A καὶ B» γίνεται μόνο πιὸ ἀπαιτητική. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 7.45 μποροῦμε λοιπὸν νὰ ὑποθέσουμε ὅτι τὸ G εἶναι ἁπλὸ καὶ ὅτι εἶναι σχεδιασμένο στὸ ἐπίπεδο ἔτσι ὥστε κάθε ὄψη του, μαζὶ μὲ τὴ μὴ φραγμένη, νὰ φράσσεται ἀπὸ κύκλο μήκους 3.

Θέτουμε $k := \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$· ἀπὸ $n \geq 3$ ἔχουμε $k \geq 2$.

Γιὰ κάθε κύκλο C τοῦ G συμβολίζουμε μὲ $A(C)$ καὶ $B(C)$ τὰ σύνολα τῶν κορυφῶν ποὺ εἶναι σχεδιασμένες μέσα καὶ ἔξω ἀπὸ τὸν C ἀντίστοιχα. Τότε ἡ $(A(C), B(C), V(C))$ εἶναι διαμέριση τοῦ $V(G)$ καὶ καμία κορυφὴ τοῦ $A(C)$ δὲν εἶναι γειτονικὴ μὲ κορυφὴ τοῦ $B(C)$, ἀφοῦ κάθε τέτοια ἀκμὴ θὰ ἔτεμνε τὸν C.

Ἐπιλέγουμε ἕναν κύκλο C τοῦ G ὥστε

(i) $|V(C)| \leq 2k$,

(ii) $|B(C)| \leq \frac{2}{3}n$,

(iii) ὑπό τους (i) καὶ (ii), ἡ διαφορὰ $|A(C)| - |B(C)|$ νὰ εἶναι ἐλάχιστη.

Τέτοιος κύκλος ὑπάρχει: ὁ κύκλος ποὺ φράσσει τὴ μὴ φραγμένη ὄψη ἔχει τρεῖς κορυφές, ἄρα ἱκανοποιεῖ τὸν (i) ἀφοῦ $2k \geq 4$, καὶ ἔχει $B(C) = \emptyset$, ἄρα ἱκανοποιεῖ καὶ τὸν (ii).

Θὰ δείξουμε ὅτι $|A(C)| \leq \frac{2}{3}n\cdot$ τότε ἡ $(A(C), B(C), V(C))$ εἶναι $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴς τάξης $|V(C)| \leq 2k \leq 2\sqrt{2n}$ καὶ ἡ ἀπόδειξη τελειώνει. Ὑποθέτουμε λοιπόν, πρὸς ἄτοπο, ὅτι $|A(C)| > \frac{2}{3}n$.

Ἔστω D τὸ ὑπογράφημα τοῦ G ποὺ εἶναι σχεδιασμένο στὸν κλειστὸ δίσκο τὸν ὁποῖο φράσσει ὁ $C\cdot$ δηλαδὴ $V(D) = A(C) \cup V(C)$. Τὸ D εἶναι τριγωνοποιημένος δίσκος μὲ συνοριακὸ κύκλο τὸν C.

Ἰσχυρισμός 17.28. **ἀπόσταση**$_D(u, v) =$ **ἀπόσταση**$_C(u, v)$ γιὰ κάθε $u, v \in V(C)$.

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ τὸ C εἶναι ὑπογράφημα τοῦ D, ἰσχύει πάντοτε ὅτι ἡ **ἀπόσταση**$_D(u, v)$ εἶναι μικρότερη ἢ ἴση ἀπὸ τὴν **ἀπόσταση**$_C(u, v)$. Ἔστω, πρὸς ἄτοπο, ὅτι γιὰ κάποιο ζεῦγος ἰσχύει γνήσια ἀνισότητα, καὶ ἀνάμεσα σὲ ὅλα τὰ τέτοια ζεύγη ἐπιλέγουμε ἕνα μὲ **ἀπόσταση**$_D(u, v)$ ἐλάχιστη. Ἔστω P ἕνα (u, v)-μονοπάτι τοῦ D μὲ **ἀπόσταση**$_D(u, v)$ ἀκμές.

Καμία ἐσωτερικὴ κορυφὴ τοῦ P δὲν ἀνήκει στὸ $V(C)$. Πράγματι, ἂν w ἦταν τέτοια, τότε:

$$\begin{aligned}\textbf{ἀπόσταση}_D(u, w) + \textbf{ἀπόσταση}_D(w, v) &= \textbf{ἀπόσταση}_D(u, v)\\ &< \textbf{ἀπόσταση}_C(u, v)\\ &\leq \textbf{ἀπόσταση}_C(u, w) + \textbf{ἀπόσταση}_C(w, v)\end{aligned}$$

ὁπότε **ἀπόσταση**$_D(u, w) <$ **ἀπόσταση**$_C(u, w)$ ἢ **ἀπόσταση**$_D(w, v) <$ **ἀπόσταση**$_C(w, v)\cdot$ καὶ στὶς δύο περιπτώσεις ἔχουμε ζεῦγος μὲ μικρότερη ἀπόσταση στὸ D ποὺ παραβιάζει τὴν ἰσότητα, ποὺ ἀντιβαίνει στὴν ἐπιλογὴ τῶν u, v.

Ἔστω Q_a καὶ Q_b τὰ δύο τόξα τοῦ C μεταξὺ τῶν u καὶ v, μὲ a καὶ b ἀκμὲς ἀντίστοιχα, ὅπου $a + b = |V(C)|$ καὶ **ἀπόσταση**$_C(u, v) = \min\{a, b\}$. Τὸ P ἔχει ὅλες τὶς ἐσωτερικές του κορυφὲς στὸ $A(C)$, ὁπότε χωρίζει τὸ ἐσωτερικὸ τοῦ C σὲ δύο μέρη καὶ τὰ $C_1 := P \cup Q_a$ καὶ $C_2 := P \cup Q_b$ εἶναι κύκλοι. Χωρὶς βλάβη τῆς γενικότητας ὑποθέτουμε ὅτι $|A(C_1)| \geq |A(C_2)|$.

Ὁ C_1 ἱκανοποιεῖ τὸν (i): ἔχει $|E(P)| + a$ ἀκμές, καὶ ἀφοῦ $|E(P)| =$ **ἀπόσταση**$_D(u, v) <$ **ἀπόσταση**$_C(u, v) \leq b$ παίρνουμε

$$|V(C_1)| = |E(P)| + a < a + b = |V(C)| \leq 2k.$$

Ὁ C_1 ἱκανοποιεῖ καὶ τὸν (ii). Τὸ ἐσωτερικὸ τοῦ C ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ ἐσωτερικὰ τῶν C_1 καὶ C_2 καὶ ἀπὸ τὶς ἐσωτερικὲς κορυφὲς τοῦ P, οἱ ὁποῖες εἶναι

$|V(P)|-2$ τὸ πλῆθος· ἄρα $|A(C)| = |A(C_1)| + |A(C_2)| + |V(P)| - 2$. Χρησιμοποιώντας ὅτι $|A(C_1)| \geq |A(C_2)|$ καὶ ὅτι $V(P) \subseteq V(C_1)$,

$$\begin{aligned} n - |B(C_1)| &= |A(C_1)| + |V(C_1)| \\ &\geq \frac{1}{2}\Big(|A(C_1)| + |A(C_2)| + |V(P)| - 2\Big) \\ &= \frac{1}{2}|A(C)| > \frac{1}{3}n, \end{aligned}$$

δηλαδὴ $|B(C_1)| < \frac{2}{3}n$.

Ἐφαρμόζουμε τώρα τὸν (iii). Ἰσχύει $A(C_1) \subseteq A(C)$ καὶ $B(C) \subseteq B(C_1)$, ὁπότε $|A(C_1)| - |B(C_1)| \leq |A(C)| - |B(C)|$. Ἀπὸ τὴν ἐλαχιστότητα τοῦ C ἡ ἀνισότητα εἶναι ἰσότητα, ἄρα $B(C_1) = B(C)$. Ὅμως

$$B(C_1) = B(C) \cup A(C_2) \cup \{\text{ἐσωτερικὲς κορυφὲς τοῦ } Q_b\},$$

ὁπότε τὸ Q_b δὲν ἔχει ἐσωτερικὲς κορυφές, δηλαδὴ $b = 1$. Τότε $\textbf{ἀπόσταση}_C(u, v) = \min\{a, b\} = 1$ καὶ $\textbf{ἀπόσταση}_D(u, v) < 1$, ἄτοπο. □

Ἰσχυρισμός 17.29. $|V(C)| = 2k$.

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὸν (i) ἀρκεῖ νὰ ἀποκλείσουμε τὴν περίπτωση $|V(C)| < 2k$. Ἔστω λοιπὸν ὅτι $|V(C)| < 2k$ καὶ ἔστω $e = \{x, y\}$ ἀκμὴ τοῦ C. Ἡ ὄψη τοῦ G ποὺ προσπίπτει στὴν e ἀπὸ τὴ μεριὰ τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ C εἶναι τρίγωνο μὲ κορυφὲς x, y, καὶ μία τρίτη κορυφὴ w.

Ἰσχυριζόμαστε ὅτι $w \notin V(C)$. Πράγματι, ἂν $w \in V(C)$, τότε ἀπὸ τὸν Ἰσχυρισμὸ 17.28 ἔχουμε $\textbf{ἀπόσταση}_C(x, w) = \textbf{ἀπόσταση}_D(x, w) = 1$ καὶ $\textbf{ἀπόσταση}_C(y, w) = \textbf{ἀπόσταση}_D(y, w) = 1$, ὁπότε οἱ x, y, w εἶναι ἀνὰ δύο διαδοχικὲς πάνω στὸν C καὶ ἄρα ὁ C εἶναι τὸ τρίγωνο xyw. Τότε ὅμως τὸ ἐσωτερικὸ τοῦ C εἶναι ἀκριβῶς ἡ παραπάνω ὄψη καὶ $A(C) = \emptyset$, ποὺ ἀντιβαίνει στὴν ὑπόθεση $|A(C)| > \frac{2}{3}n > 0$.

Θεωροῦμε τὸν κύκλο C' ποὺ προκύπτει ἂν ἀντικαταστήσουμε στὸν C τὴν ἀκμὴ e μὲ τὸ μονοπάτι $[x, w, y]$. Ἰσχύει $V(C') = V(C) \cup \{w\}$, ὁπότε $|V(C')| = |V(C)| + 1 \leq 2k$ καὶ ὁ (i) ἱκανοποιεῖται. Τὸ ἐξωτερικὸ δὲν ἄλλαξε, δηλαδὴ $B(C') = B(C)$, ὁπότε ἱκανοποιεῖται καὶ ὁ (ii). Τέλος $A(C') = A(C) \backslash \{w\}$, ἄρα

$$|A(C')| - |B(C')| = |A(C)| - |B(C)| - 1,$$

ποὺ ἀντιβαίνει στὸν (iii). □

Γράφουμε τώρα τὶς κορυφὲς τοῦ C ὡς $v_0, v_1, \ldots, v_{2k-1}$ κατὰ τὴ σειρά τους πάνω στὸν κύκλο, καὶ θέτουμε $v_{2k} := v_0$. Οἱ v_0 καὶ v_k χωρίζουν τὸν C στὰ τόξα Q_1 μὲ κορυφὲς $v_0, v_1, \ldots, v_k$ καὶ Q_2 μὲ κορυφὲς $v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{2k}$. Ἀπὸ τὸν Ἰσχυρισμὸ 17.28,

$$\textbf{ἀπόσταση}_D(v_0, v_k) = \textbf{ἀπόσταση}_C(v_0, v_k) = k,$$

ὁπότε τὸ Λῆμμα 17.27 δίνει $k+1$ ἀνὰ δύο κορυφοξένα μονοπάτια τοῦ D μεταξὺ τοῦ $V(Q_1)$ καὶ τοῦ $V(Q_2)$. Κάθε τόξο ἔχει ἀκριβῶς $k+1$ κορυφές, ἄρα κάθε κορυφὴ κάθε τόξου εἶναι ἄκρο ἀκριβῶς ἑνὸς ἀπὸ τὰ μονοπάτια αὐτά· καὶ ἐπειδὴ τὰ μονοπάτια εἶναι σχεδιασμένα μέσα στὸν δίσκο καὶ δὲν τέμνονται, δὲν μποροῦν νὰ «διασταυρωθοῦν». Ἑπομένως μποροῦμε νὰ τὰ γράψουμε ὡς $P_0, P_1, \ldots, P_k$, ὅπου τὸ P_i ἔχει ἄκρα τὶς v_i καὶ v_{2k-i}.

Ἀπὸ τὸν Ἰσχυρισμὸ 17.28 πάλι,

$$\begin{aligned} |V(P_i)| &\geq \textbf{ἀπόσταση}_D(v_i, v_{2k-i}) + 1 \\ &= \textbf{ἀπόσταση}_C(v_i, v_{2k-i}) + 1 \\ &= \min\{2i, 2(k-i)\} + 1 \\ &= \min\{2i+1, 2(k-i)+1\}. \end{aligned}$$

Τὰ $P_0, \ldots, P_k$ εἶναι ἀνὰ δύο κορυφοξένα, ὁπότε

$$n = n(G) \geq \sum_{i=0}^{k} |V(P_i)| \geq \sum_{i=0}^{k} \min\{2i+1, 2(k-i)+1\}.$$

Χρησιμοποιώντας τὴν ταυτότητα $\min\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$ μὲ $x = 2i+1$ καὶ $y = 2(k-i)+1$, ὁ κάθε ὅρος γράφεται $k+1-|2i-k|$, ὁπότε

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k} \min\{2i+1, 2(k-i)+1\} &= (k+1)^2 - \sum_{i=0}^{k} |2i-k| \\ &= \begin{cases} 2m^2+2m+1, & k = 2m, \\ 2(m+1)^2, & k = 2m+1, \end{cases} \end{aligned}$$

καὶ σὲ ἀμφότερες τὶς περιπτώσεις τὸ ἄθροισμα εἶναι τουλάχιστον $\frac{1}{2}(k+1)^2$. Ἄρα $n \geq \frac{1}{2}(k+1)^2$, δηλαδὴ $k+1 \leq \sqrt{2n}$. Αὐτὸ ὅμως ἀντιβαίνει στὸν ὁρισμὸ $k = \lfloor\sqrt{2n}\rfloor$, ὁ ὁποῖος δίνει $k+1 > \sqrt{2n}$.

Ἡ ὑπόθεση $|A(C)| > \frac{2}{3}n$ ἦταν λοιπὸν ἐσφαλμένη καὶ ἡ ἀπόδειξη ὁλοκληρώθηκε. □

Ἡ σταθερὰ $2\sqrt{2} \approx 2.828$ δὲν εἶναι ἡ βέλτιστη. Ἂν συμβολίσουμε μὲ λ τὴν ἐλάχιστη σταθερὰ γιὰ τὴν ὁποία κάθε ἐπίπεδο γράφημα μὲ n κορυφὲς ἔχει $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴ τάξης τὸ πολὺ $\lambda\sqrt{n}$, τότε τὸ Θεώρημα 17.26 λέει ὅτι $\lambda \leq 2\sqrt{2}$. Ὁ Gazit βελτίωσε τὸ φράγμα σὲ $\frac{7}{3} \approx 2.333$, καὶ οἱ Alon, Seymour, καὶ Thomas [4] σὲ $\sqrt{4.5} \approx 2.121$, ἐφαρμόζοντας τὴν ἴδια τεχνικὴ μὲ μεγαλύτερη προσοχή. Τὸ καλύτερο γνωστὸ κάτω φράγμα ὀφείλεται στὸν Djidjev καὶ εἶναι $\lambda \geq 1.555$.

Παρατήρηση 17.30. Τὸ θεώρημα ἐπεκτείνεται πολὺ πέρα ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα γραφήματα: οἱ Alon, Seymour, καὶ Thomas [3] ἀπέδειξαν ὅτι κάθε γράφημα μὲ n κορυφὲς ποὺ δὲν περιέχει τὸ K_h ὡς ἔλασσον ἔχει $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴ τάξης τὸ πολὺ $h^{3/2}\sqrt{n}$.

Ὁ δεσμὸς μὲ τὸ δεντροπλάτος εἶναι στενὸς καὶ πρὸς τὶς δύο κατευθύνσεις. Ἀπὸ τὴ μία, ἂν **δεντροπλάτος**$(G) \leq k$ τότε κάποιο μέρος μιᾶς βέλτιστης δεντροἀποσύνθεσης δίνει $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴ τάξης τὸ πολὺ $k+1$: ἀρκεῖ νὰ ἐπιλέξει κανεὶς ὡς κόμβο τοῦ δέντρου ἕνα «κέντρο βάρους» του, δηλαδὴ ἕναν κόμβο γιὰ τὸν ὁποῖο καμία συνιστῶσα τοῦ $T - t$ δὲν καλύπτει πάνω ἀπὸ τὰ δύο τρίτα τῶν κορυφῶν. Ἀπὸ τὴν ἄλλη, ἡ ἐπαναληπτικὴ ἐφαρμογὴ τοῦ Θεωρήματος 17.26 δείχνει ὅτι κάθε ἐπίπεδο γράφημα μὲ n κορυφὲς ἔχει δεντροπλάτος $O(\sqrt{n})$ — φράγμα πού, ὅπως δείχνει ἡ $(\sqrt{n}, \sqrt{n})$-σχάρα, εἶναι βέλτιστο κατὰ τάξη μεγέθους. Καὶ τὶς δύο κατευθύνσεις τὶς ἀποδεικνύουμε στὴν ἑπόμενη ἑνότητα.

17.5 Ἰσορροπημένοι διαχωριστὲς καὶ δεντροπλάτος

Οἱ δύο ἔννοιες τῶν προηγούμενων ἑνοτήτων — τὸ δεντροπλάτος καὶ ὁ ἰσορροπημένος διαχωριστής — μοιάζουν συγγενικές, καὶ εἶναι. Στὴν ἑνότητα αὐτὴ ἀποδεικνύουμε ὅτι εἶναι οὐσιαστικὰ ἰσοδύναμες, μὲ μία σημαντικὴ λεπτομέρεια: ἡ μία κατεύθυνση ἀπαιτεῖ μικροὺς διαχωριστὲς ὄχι μόνο γιὰ τὸ ἴδιο τὸ γράφημα ἀλλὰ γιὰ κάθε ἐναγόμενο ὑπογράφημά του. Θὰ δοῦμε στὸ τέλος ὅτι ἡ λεπτομέρεια αὐτὴ δὲν ἀφαιρεῖται.

Θυμίζουμε ἀπὸ τὸν Ὁρισμὸ 17.25 ὅτι $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴς ἑνὸς γραφήματος G μὲ n κορυφὲς εἶναι μιὰ διαμέριση (A, B, C) τοῦ $V(G)$ μὲ $|A|, |B| \leq \frac{2}{3}n$ καὶ χωρὶς ἀκμὲς ἀνάμεσα στὰ A καὶ B, καὶ ὅτι ἡ τάξη του εἶναι ὁ πληθάριθμος $|C|$.

Ἀπὸ τοὺς διαχωριστὲς στὸ δεντροπλάτος

Τὸ ἐργαλεῖο εἶναι τὸ ἀκόλουθο λῆμμα συγκόλλησης, τὸ ὁποῖο λέει ὅτι ἕνας διαχωριστὴς ἐπιτρέπει νὰ συνενώσουμε δεντρο-ἀποσυνθέσεις τῶν δύο πλευρῶν πληρώνοντας μόνο τὸ μέγεθός του.

Λῆμμα 17.31. Ἔστω G γράφημα καὶ (A, B, C) διαμέριση τοῦ $V(G)$ χωρὶς ἀκμὲς ἀνάμεσα στὰ A καὶ B. Ἂν τὰ $G[A]$ καὶ $G[B]$ ἔχουν δεντρο-ἀποσυνθέσεις μὲ ὅλα τὰ μέρη τους τὸ πολὺ w κορυφῶν, τότε τὸ G ἔχει δεντρο-ἀποσύνθεση μὲ ὅλα τὰ μέρη της τὸ πολὺ $w + |C|$ κορυφές.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $(T_A, (V_t)_{t\in V(T_A)})$ καὶ $(T_B, (W_t)_{t\in V(T_B)})$ οἱ δύο δεντρο-ἀποσυνθέσεις· ἂν κάποιο ἀπὸ τὰ A, B εἶναι κενό, παίρνουμε ὡς ἀποσύνθεσή του τὸ δέντρο μὲ ἕναν κόμβο καὶ μέρος τὸ $\emptyset$. Θεωροῦμε τὰ T_A καὶ T_B ξένα, διαλέγουμε κόμβους $a \in V(T_A)$ καὶ $b \in V(T_B)$, καὶ ὁρίζουμε τὸ δέντρο $T = T_A \cup T_B + \{a, b\}$. Ὡς μέρη παίρνουμε

$$U_t = \begin{cases} V_t \cup C, & t \in V(T_A), \\ W_t \cup C, & t \in V(T_B). \end{cases}$$

Ἐλέγχουμε τὰ τρία ἀξιώματα τοῦ Ὁρισμοῦ 17.1.

Γιὰ τὸ $(\Delta 1)$: ἡ ἕνωση τῶν μερῶν περιέχει τὸ A (ἀπὸ τὰ V_t), τὸ B (ἀπὸ τὰ W_t), καὶ τὸ C, δηλαδὴ ὁλόκληρο τὸ $V(G)$.

Γιὰ τὸ $(\Delta 2)$: ἔστω $\{u, v\} \in E(G)$. Δὲν ὑπάρχει ἀκμὴ ἀνάμεσα στὰ A καὶ B, ὁπότε ἀπομένουν οἱ περιπτώσεις ὅπου κάθε ἄκρο ἀνήκει στὸ $A \cup C$ ἢ κάθε ἄκρο ἀνήκει στὸ $B \cup C$· ἐξετάζουμε τὴν πρώτη, ἡ δεύτερη εἶναι συμμετρική. Ἂν $u, v \in C$, τότε ὁποιοδήποτε μέρος τὰ περιέχει. Ἂν $u \in A$ καὶ $v \in C$, τότε ὑπάρχει $t \in V(T_A)$ μὲ $u \in V_t$, ὁπότε $u, v \in V_t \cup C = U_t$. Ἂν τέλος $u, v \in A$, τότε τὸ $\{u, v\}$ εἶναι ἀκμὴ τοῦ $G[A]$ καὶ ὑπάρχει t μὲ $u, v \in V_t \subseteq U_t$.

Γιὰ τὸ $(\Delta 3)$: ἂν $v \in C$, τότε ἡ v ἀνήκει σὲ *κάθε* μέρος, καὶ τὸ T εἶναι ὑποδέντρο τοῦ ἑαυτοῦ του. Ἂν $v \in A$, τότε $v \notin W_t \cup C$ γιὰ κάθε $t \in V(T_B)$, ὁπότε τὸ σύνολο τῶν κόμβων ποὺ τὴν περιέχουν εἶναι ἀκριβῶς τὸ $\{t \in V(T_A) \mid v \in V_t\}$, ὑποδέντρο τοῦ T_A καὶ ἄρα τοῦ T. Ὁμοίως γιὰ $v \in B$.

Τέλος $|U_t| \le w + |C|$ γιὰ κάθε t. □

Θεώρημα 17.32. Ἔστω $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\ge 0}$ αὔξουσα συνάρτηση μὲ $s(0) = 0$ καὶ ἔστω G γράφημα μὲ n κορυφές. Ἂν κάθε ἐναγόμενο ὑπογράφημα H τοῦ G ἔχει $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴ τάξης τὸ πολὺ $s(n(H))$, τότε τὸ G ἔχει δεντρο-ἀποσύνθεση μὲ ὅλα τὰ μέρη της τὸ πολὺ

$$\sum_{i\ge 0} s\Big(\big\lfloor (2/3)^i n \big\rfloor\Big)$$

κορυφές. Τὸ ἄθροισμα εἶναι πεπερασμένο, ἀφοῦ $s(0) = 0$ καὶ $\lfloor (2/3)^i n \rfloor = 0$ γιὰ κάθε ἀρκετὰ μεγάλο i.

Ἀπόδειξη. Ἐπαγωγὴ στὸ n. Ἂν $n = 0$, ἡ ἀποσύνθεση μὲ ἕναν κόμβο καὶ μέρος τὸ $\emptyset$ ἔχει μέρη μεγέθους 0.

Ἔστω $n \geq 1$ καὶ ἔστω (A, B, C) ἕνας $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴς τοῦ G μὲ $|C| \leq s(n)$. Θέτουμε $n_A = |A|$ καὶ $n_B = |B|$, ὁπότε $n_A, n_B \leq \lfloor \frac{2}{3} n \rfloor$.

Κάθε ἐναγόμενο ὑπογράφημα τοῦ $G[A]$ εἶναι καὶ ἐναγόμενο ὑπογράφημα τοῦ G, ὁπότε ἡ ὑπόθεση τοῦ θεωρήματος ἰσχύει γιὰ τὸ $G[A]$ μὲ τὴν ἴδια συνάρτηση s. Ἀφοῦ $n_A < n$, ἡ ἐπαγωγικὴ ὑπόθεση δίνει δεντρο-ἀποσύνθεση τοῦ $G[A]$ μὲ μέρη τὸ πολὺ

$$\sum_{i \geq 0} s\Big(\lfloor (2/3)^i n_A \rfloor\Big) \leq \sum_{i \geq 0} s\Big(\lfloor (2/3)^{i+1} n \rfloor\Big) = \sum_{i \geq 1} s\Big(\lfloor (2/3)^i n \rfloor\Big) =: S_1,$$

ὅπου ἡ ἀνισότητα προκύπτει ἀπὸ τὸ ὅτι $n_A \leq \lfloor \frac{2}{3} n \rfloor \leq \frac{2}{3} n$, ἀπὸ τὴ μονοτονία τῆς ἀκέραιας τιμῆς, καὶ ἀπὸ τὴ μονοτονία τῆς s. Τὸ ἴδιο ἰσχύει γιὰ τὸ $G[B]$.

Ἀπὸ τὸ Λῆμμα 17.31, τὸ G ἔχει δεντρο-ἀποσύνθεση μὲ μέρη τὸ πολὺ

$$S_1 + |C| \leq S_1 + s(n) = \sum_{i \geq 0} s\Big(\lfloor (2/3)^i n \rfloor\Big).$$

□

Οἱ δύο περιπτώσεις ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρουν εἶναι ἡ ριζικὴ καὶ ἡ σταθερή.

Πόρισμα 17.33. Ἔστω $\lambda > 0$ καὶ ἔστω G γράφημα μὲ $n \geq 1$ κορυφὲς τοῦ ὁποίου κάθε ἐναγόμενο ὑπογράφημα H ἔχει $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴ τάξης τὸ πολὺ $\lambda\sqrt{n(H)}$. Τότε

$$\textbf{δεντροπλάτος}(G) < \frac{\lambda}{1 - \sqrt{2/3}} \sqrt{n} < 5.45\, \lambda \sqrt{n}.$$

Ἀπόδειξη. Ἐφαρμόζουμε τὸ Θεώρημα 17.32 μὲ $s(m) = \lambda\sqrt{m}$, ἡ ὁποία εἶναι αὔξουσα μὲ $s(0) = 0$. Ἀφοῦ $\lfloor (2/3)^i n \rfloor \leq (2/3)^i n$,

$$\sum_{i \geq 0} s\Big(\lfloor (2/3)^i n \rfloor\Big) \leq \lambda\sqrt{n} \sum_{i \geq 0} \Big(\sqrt{2/3}\Big)^i = \frac{\lambda\sqrt{n}}{1 - \sqrt{2/3}},$$

ὅπου ἡ γεωμετρικὴ σειρὰ συγκλίνει ἐπειδὴ $\sqrt{2/3} < 1$. Τὸ δεντροπλάτος εἶναι κατὰ ἕνα μικρότερο ἀπὸ τὸ μέγιστο μέρος, καὶ $\frac{1}{1-\sqrt{2/3}} < 5.45$. □

Ἀξίζει νὰ προσεχθεῖ ποῦ ἀκριβῶς κερδίζουμε ἐδῶ. Ἡ ἀναδρομὴ ἔχει βάθος $\Theta(\log n)$, ὁπότε ἕνα πρόχειρο ἐπιχείρημα θὰ ἔδινε φράγμα $O(\sqrt{n} \log n)$. Αὐτὸ ποὺ

τὸ ἀποτρέπει εἶναι ὅτι τὸ κόστος κάθε ἐπιπέδου τῆς ἀναδρομῆς συρρικνώνεται γεωμετρικά: τὰ μεγέθη πέφτουν κατὰ ἕναν παράγοντα $\frac{2}{3}$, ἄρα οἱ ρίζες τους κατὰ $\sqrt{2/3}$, καὶ ἡ σειρὰ συγκλίνει. Ἂν ἀντίθετα τὸ φράγμα τῶν διαχωριστῶν εἶναι σταθερό, δὲν ὑπάρχει τέτοια συρρίκνωση καὶ ὁ λογαριθμικὸς παράγοντας ἐμφανίζεται.

Πόρισμα 17.34. Ἂν κάθε ἐναγόμενο ὑπογράφημα ἑνὸς γραφήματος G μὲ $n \geq 1$ κορυφὲς ἔχει $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴ τάξης τὸ πολὺ s, τότε

$$\textbf{δεντροπλάτος}(G) \leq s \cdot \big(\log_{3/2} n + 1\big) - 1.$$

Ἀπόδειξη. Στὸ ἄθροισμα τοῦ Θεωρήματος 17.32 μὲ σταθερὴ s, ὁ i-ὸστὸς ὅρος εἶναι μηδὲν μόλις $\lfloor (2/3)^i n \rfloor = 0$, δηλαδὴ μόλις $(2/3)^i n < 1$, δηλαδὴ γιὰ $i > \log_{3/2} n$. Ἀπομένουν τὸ πολὺ $\lfloor \log_{3/2} n \rfloor + 1$ μὴ μηδενικοὶ ὅροι, καθένας τὸ πολὺ s. □

Ἀπὸ τὸ δεντροπλάτος στοὺς διαχωριστές

Ἡ ἀντίστροφη κατεύθυνση εἶναι πιὸ ἄμεση καὶ χρησιμοποιεῖ τὸ ἴδιο ἐπιχείρημα προσανατολισμοῦ μὲ τὴν ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος 17.20.

Θεώρημα 17.35. Ἔστω G γράφημα μὲ $n \geq 1$ κορυφὲς καὶ $\textbf{δεντροπλάτος}(G) \leq k$. Τότε ὑπάρχει $X \subseteq V(G)$ μὲ $|X| \leq k+1$ τέτοιο ὥστε κάθε συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ $G - X$ νὰ ἔχει τὸ πολὺ $\frac{n}{2}$ κορυφές.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $(T, (V_t)_{t \in V(T)})$ δεντρο-ἀποσύνθεση τοῦ G πλάτους τὸ πολὺ k, ὁπότε $|V_t| \leq k+1$ γιὰ κάθε t. Ἀπὸ τὸ $(\Delta 1)$ μποροῦμε νὰ ἀναθέσουμε σὲ κάθε κορυφὴ v ἕναν κόμβο $f(v) \in V(T)$ μὲ $v \in V_{f(v)}$ (ἐπιλέγοντας ἕναν αὐθαίρετα ὅταν ὑπάρχουν πολλοί). Γιὰ $S \subseteq V(T)$ θέτουμε

$$\beta(S) = \big|\{v \in V(G) \mid f(v) \in S\}\big|,$$

ὁπότε $\beta(V(T)) = n$ καὶ ἡ β εἶναι προσθετικὴ σὲ ξένα σύνολα κόμβων.
Εὕρεση κατάλληλου κόμβου. Γιὰ κάθε ἀκμὴ $e = \{t, t'\}$ τοῦ T, οἱ δύο συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ $T - e$ ἔχουν βάρη μὲ ἄθροισμα n, ὁπότε τὸ πολὺ μία ἀπὸ αὐτὲς ἔχει βάρος γνησίως μεγαλύτερο τοῦ $\frac{n}{2}$. Ἂν ὑπάρχει τέτοια, προσανατολίζουμε τὴν e πρὸς αὐτήν· ἀλλιῶς τὴν ἀφήνουμε ἀπροσανάτολιστη. Ξεκινώντας ἀπὸ ὁποιονδήποτε κόμβο καὶ ἀκολουθώντας τοὺς προσανατολισμοὺς παίρνουμε διαδρομὴ ποὺ δὲν ἐπαναλαμβάνει κόμβο, ἀφοῦ τὸ T εἶναι ἄκυκλο· ἐπειδὴ τὸ T εἶναι πεπερασμένο, ἡ διαδρομὴ τερματίζει σὲ κόμβο t ἀπὸ τὸν ὁποῖο δὲν φεύγει καμία προσανατολισμένη ἀκμή. Γιὰ κάθε γειτονικὸ κόμβο t' τῆς t, ἡ συνιστῶσα τοῦ $T - \{t, t'\}$

ποὺ περιέχει τὴν t' ἔχει βάρος τὸ πολὺ $\frac{n}{2}$· οἱ συνιστῶσες αὐτὲς εἶναι ἀκριβῶς οἱ συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ $T-t$, ἄρα κάθε συνιστῶσα τοῦ $T-t$ ἔχει βάρος τὸ πολὺ $\frac{n}{2}$.

Ὁ διαχωριστής. Θέτουμε $X = V_t$, ὁπότε $|X| \leq k+1$. Ἔστω D συνεκτικὴ συνιστῶσα τοῦ $G-X$. Θὰ δείξουμε ὅτι ὅλες οἱ κορυφὲς τῆς D ἀνατίθενται σὲ κόμβους τῆς ἴδιας συνιστώσας τοῦ $T-t$.

Πρῶτα, γιὰ κάθε $v \in V(D)$ ἰσχύει $v \notin V_t$, ἄρα $f(v) \neq t$ καὶ ὁ $f(v)$ ἀνήκει σὲ κάποια συνιστῶσα τοῦ $T-t$.

Ἔστω τώρα $\{u, v\}$ ἀκμὴ τοῦ D. Ἀπὸ τὸ $(\Delta 2)$ ὑπάρχει κόμβος r μὲ $u, v \in V_r$, καὶ $r \neq t$ ἀφοῦ $u \notin V_t$· ἔστω T'' ἡ συνιστῶσα τοῦ $T-t$ ποὺ περιέχει τὸν r. Ἂν ὁ $f(u)$ ἀνῆκε σὲ ἄλλη συνιστῶσα, τότε ὁ t θὰ βρισκόταν πάνω στὸ μονοπάτι τοῦ T ἀπὸ τὸν $f(u)$ στὸν r, ὁπότε ἀπὸ τὸ $(\Delta 3)$ θὰ εἴχαμε $u \in V_t = X$, ἄτοπο. Ἄρα $f(u) \in V(T'')$, καὶ ὁμοίως $f(v) \in V(T'')$.

Ἀφοῦ ἡ D εἶναι συνεκτική, ὅλες οἱ κορυφές της ἀνατίθενται σὲ κόμβους τῆς ἴδιας συνιστώσας T'' τοῦ $T-t$, καὶ ἑπομένως $|V(D)| \leq \beta(V(T'')) \leq \frac{n}{2}$. □

Πόρισμα 17.36. Κάθε γράφημα G μὲ $n \geq 1$ κορυφὲς ἔχει $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴ τάξης τὸ πολὺ **δεντροπλάτος**$(G)+1$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω X ὅπως στὸ Θεώρημα 17.35 καὶ ἔστω $D_1, \ldots, D_r$ οἱ συνεκτικὲς συνιστῶσες τοῦ $G-X$, μὲ $|V(D_i)| \leq \frac{n}{2}$ γιὰ κάθε i. Ἀρκεῖ νὰ μοιράσουμε τὶς συνιστῶσες σὲ δύο σύνολα A καὶ B μὲ $|A|, |B| \leq \frac{2}{3}n$.

Ἂν κάποια συνιστῶσα, ἔστω ἡ D_1, ἔχει τουλάχιστον $\frac{n}{3}$ κορυφές, θέτουμε $A = V(D_1)$ καὶ $B = V(D_2) \cup \cdots \cup V(D_r)$. Τότε $|A| \leq \frac{n}{2} \leq \frac{2}{3}n$ καὶ $|B| \leq n - |A| \leq n - \frac{n}{3} = \frac{2}{3}n$.

Ἀλλιῶς κάθε συνιστῶσα ἔχει λιγότερες ἀπὸ $\frac{n}{3}$ κορυφές. Προσθέτουμε συνιστῶσες στὸ A μία πρὸς μία, ὅσο ὁ πληθάριθμός του παραμένει μικρότερος τοῦ $\frac{n}{3}$, καὶ βάζουμε τὶς ὑπόλοιπες στὸ B. Ἂν ἐξαντληθοῦν ὅλες οἱ συνιστῶσες, τότε $B = \emptyset$ καὶ δὲν ἔχουμε τίποτα νὰ δείξουμε. Διαφορετικά, τὴ στιγμὴ ποὺ σταματᾶμε τὸ A εἶχε πρὶν ἀπὸ τὴν τελευταία προσθήκη λιγότερες ἀπὸ $\frac{n}{3}$ κορυφές, καὶ ἡ συνιστῶσα ποὺ προστέθηκε ἐπίσης· ἄρα $|A| < \frac{2}{3}n$. Ἐπιπλέον $|A| \geq \frac{n}{3}$, ὁπότε $|B| \leq n - \frac{n}{3} = \frac{2}{3}n$. □

Συνδυάζοντας τὸ Πόρισμα 17.33 μὲ τὸ Πόρισμα 17.36 παίρνουμε τὴν ἰσοδυναμία ποὺ ὑποσχεθήκαμε, γιὰ κλάσεις γραφημάτων $\mathcal{C}$ κλειστὲς ὡς πρὸς ἐναγόμενα ὑπογραφήματα: κάθε γράφημα τῆς $\mathcal{C}$ μὲ n κορυφὲς ἔχει δεντροπλάτος $O(\sqrt{n})$ ἂν καὶ μόνο ἂν κάθε γράφημα τῆς $\mathcal{C}$ μὲ m κορυφὲς ἔχει $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴ τάξης $O(\sqrt{m})$.

Πράγματι, ἂν κάθε γράφημα τῆς $\mathcal{C}$ ἔχει τέτοιο διαχωριστή, τότε γιὰ κάθε $G \in \mathcal{C}$ τὸ ἴδιο ἰσχύει γιὰ κάθε ἐναγόμενο ὑπογράφημα τοῦ G (ἀφοῦ ἀνήκει καὶ αὐτὸ στὴν $\mathcal{C}$), καὶ τὸ Πόρισμα 17.33 δίνει **δεντροπλάτος**$(G) = O(\sqrt{n})\cdot$ ἀντίστροφα, ἂν κάθε $H \in \mathcal{C}$ μὲ m κορυφὲς ἔχει δεντροπλάτος $O(\sqrt{m})$, τὸ Πόρισμα 17.36 τοῦ δίνει $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴ τάξης $O(\sqrt{m})$. Σημειώνουμε ὅτι ἡ ὑπόθεση τῆς κλειστότητας δὲν μπορεῖ νὰ παραλειφθεῖ: τὸ γράφημα ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ μιὰ κλίκα μὲ $\sqrt{n}$ κορυφὲς καὶ $n-\sqrt{n}$ ἀπομονωμένες κορυφὲς ἔχει δεντροπλάτος $O(\sqrt{n})$, ἀλλὰ τὸ ἐναγόμενο ὑπογράφημά του K_m, $m=\sqrt{n}$, δὲν ἔχει $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴ τάξης $O(\sqrt{m})$.

Τὸ δεντροπλάτος τῶν ἐπίπεδων γραφημάτων

Πόρισμα 17.37. Κάθε ἐπίπεδο γράφημα G μὲ $n \geq 1$ κορυφὲς ἱκανοποιεῖ

$$\textbf{δεντροπλάτος}(G) < 16\sqrt{n}.$$

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὴν Παρατήρηση 7.13 ἡ κλάση τῶν ἐπίπεδων γραφημάτων εἶναι κλειστὴ ὡς πρὸς τὰ ὑπογραφήματα, ὁπότε κάθε ἐναγόμενο ὑπογράφημα H τοῦ G εἶναι ἐπίπεδο καὶ τὸ Θεώρημα 17.26 τοῦ δίνει $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴ τάξης τὸ πολὺ $2\sqrt{2\,n(H)} = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{n(H)}$. Ἐφαρμόζουμε τὸ Πόρισμα 17.33 μὲ $\lambda = 2\sqrt{2}$:

$$\textbf{δεντροπλάτος}(G) < 5.45\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{n} < 15.42\sqrt{n} < 16\sqrt{n}. \qquad \square$$

Τὸ φράγμα εἶναι βέλτιστο κατὰ τάξη μεγέθους: ἡ (k,k)-σχάρα εἶναι ἐπίπεδη μὲ $n = k^2$ κορυφὲς καί, σύμφωνα μὲ τὸ Παράδειγμα 17.17, διαθέτει βάτο τάξης $k+1$, ὁπότε ἀπὸ τὸ Θεώρημα 17.20 **δεντροπλάτος** $\geq k = \sqrt{n}$.

Παρατήρηση 17.38. Ἡ ὑπόθεση τοῦ Θεωρήματος 17.32 ἀφορᾶ *κάθε* ἐναγόμενο ὑπογράφημα καὶ δὲν μπορεῖ νὰ ἀντικατασταθεῖ ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχη ὑπόθεση γιὰ τὸ ἴδιο μόνο τὸ G. Πράγματι, ἔστω H ἡ (k,k)-σχάρα, ἔστω $h = k^2$, καὶ ἔστω G τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει ἂν προσαρτήσουμε σὲ μιὰ κορυφὴ τοῦ H ἕνα μονοπάτι $[p_1,\ldots,p_{2h}]$. Τὸ G εἶναι ἐπίπεδο μὲ $n = 3h$ κορυφές.

Ἀφαιρώντας τὴ μοναδικὴ κορυφὴ p_h παίρνουμε δύο συνεκτικὲς συνιστῶσες, μὲ $2h-1$ καὶ h κορυφὲς ἀντίστοιχα, καὶ οἱ δύο μικρότερες ἢ ἴσες τοῦ $\frac{2}{3}n = 2h$. Ἄρα τὸ G ἔχει $\frac{2}{3}$-διαχωριστὴ τάξης 1. Ταυτόχρονα ὅμως τὸ βάτο τῆς σχάρας παραμένει βάτο τοῦ G — ἡ συνεκτικότητα καὶ ἡ ἐφαπτομενικότητα τῶν συνόλων του δὲν ἐπηρεάζονται ἀπὸ τὴν προσθήκη κορυφῶν — ὁπότε **δεντροπλάτος**$(G) \geq k = \sqrt{n/3}$.

Ἕνας διαχωριστὴς τάξης 1 συνυπάρχει λοιπὸν μὲ δεντροπλάτος $\Omega(\sqrt{n})$: τὸ ἕνα καὶ μόνο κόψιμο βρῆκε τὸ λεπτὸ σημεῖο τοῦ γραφήματος καὶ ἄφησε τὸ δύσκολο

κομμάτι του ἀνέγγιχτο. Ἐκεῖνο ποὺ πιστοποιεῖ μεγάλο δεντροπλάτος δὲν εἶναι ἡ ἀδυναμία νὰ κόψουμε τὸ G, ἀλλὰ ἡ ἀδυναμία νὰ κόψουμε κάποιο ὑπογράφημά του.

Παρατήρηση 17.39. Ἡ ἰσοδυναμία διαχωριστῶν καὶ δεντροπλάτους ἀνάγεται στοὺς Robertson καὶ Seymour [89] καὶ εἶναι τὸ ἐργαλεῖο ποὺ μεταφράζει τὰ θεωρήματα διαχωρισμοῦ σὲ ἀλγοριθμικὰ ἀποτελέσματα: μαζὶ μὲ τὸ Πόρισμα 17.37, ὁ δυναμικὸς προγραμματισμὸς πάνω σὲ δεντρο-ἀποσύνθεση δίνει ἀλγορίθμους χρόνου $2^{O(\sqrt{n})}$ γιὰ πλῆθος NP-δύσκολων προβλημάτων σὲ ἐπίπεδα γραφήματα. Τὸ θεώρημα διαχωρισμοῦ γιὰ τὰ ἐπίπεδα γραφήματα, τὸ ὁποῖο τροφοδοτεῖ τὸ Πόρισμα 17.37, ὀφείλεται στοὺς Lipton καὶ Tarjan [66] μὲ τὴ σύντομη ἀπόδειξη τῶν Alon, Seymour, καὶ Thomas [4], ἐνῶ οἱ ἴδιοι συγγραφεῖς [3] ἐπεκτείνουν τὸ φράγμα σὲ κάθε γράφημα χωρὶς ἔλασσον τὸ K_h, δίνοντας μέσῳ τοῦ Πορίσματος 17.33 δεντροπλάτος $O(h^{3/2}\sqrt{n})$ γιὰ τὴν κλάση αὐτή.

Ἀσκήσεις Κεφαλαίου

17.1 (★☆☆)**.** Δεῖξτε ὅτι ἂν G εἶναι γράφημα μὲ τουλάχιστον μία κορυφὴ καὶ **δεντροπλάτος**$(G) \leq k$, τότε $\delta(G) \leq k$.

ΌΔΗΓΟΣ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗΣ

Οἱ σημειώσεις αὐτὲς καλύπτουν τὸν πυρῆνα τῆς θεωρίας γραφημάτων, ἀφήνοντας ἀπ᾽ ἔξω ἀρκετὰ μεγάλα κεφάλαια. Γιὰ ὅποιον θέλει νὰ συνεχίσει, τρία βιβλία ἀποτελοῦν φυσικὴ συνέχεια.

Τὸ βιβλίο τοῦ Diestel [25] εἶναι ἡ πληρέστερη σύγχρονη παρουσίαση τῆς δομικῆς θεωρίας γραφημάτων· εἰδικότερα ἀναπτύσσει διεξοδικὰ τὴ θεωρία τῶν ἐλασσόνων γραφημάτων καὶ τὸ πρόγραμμα τῶν Robertson καὶ Seymour, τὸ ὁποῖο ἐδῶ μόλις ποὺ θίγεται. Τὸ βιβλίο τῶν Bondy καὶ Murty [14] καλύπτει τὴν ἴδια ὕλη μὲ περισσότερη ἔμφαση στοὺς ἀλγορίθμους καὶ στὶς ἐφαρμογές, ἐνῶ τὸ βιβλίο τοῦ West [107] εἶναι τὸ πιὸ κοντινὸ σὲ ὕφος μὲ τὶς παροῦσες σημειώσεις καὶ περιέχει πολὺ μεγάλο πλῆθος ἀσκήσεων.

Γιὰ τὸ Κεφάλαιο 14, ἡ συστηματικὴ ἀναφορὰ εἶναι τὸ βιβλίο τῶν Haynes, Hedetniemi, καὶ Slater [53], τὸ ὁποῖο πραγματεύεται τὶς δεκάδες παραλλαγὲς τῆς κυριαρχίας καὶ τὰ φράγματα ποὺ τὶς συνδέουν.

Γιὰ τὸ Κεφάλαιο 12, ἡ κλασικὴ ἀναφορὰ εἶναι τὸ βιβλίο τοῦ Golumbic [45], τὸ ὁποῖο πραγματεύεται συστηματικὰ τὶς κλάσεις τέλειων γραφημάτων καὶ τοὺς ἀλγορίθμους ἀναγνώρισής τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Jochen Alber, Michael R. Fellows, and Rolf Niedermeier. Polynomial-time data reduction for dominating set. *Journal of the ACM*, 51(3):363–384, 2004.

[2] Noga Alon. Transversal numbers of uniform hypergraphs. *Graphs and Combinatorics*, 6(1):1–4, 1990.

[3] Noga Alon, Paul D. Seymour, and Robin Thomas. A separator theorem for nonplanar graphs. *Journal of the American Mathematical Society*, 3(4):801–808, 1990.

[4] Noga Alon, Paul D. Seymour, and Robin Thomas. Planar separators. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 7(2):184–193, 1994.

[5] Kenneth Appel and Wolfgang Haken. The solution of the four-color-map problem. *Sci. Amer.*, 237(4):108–121, 152, 1977.

[6] Vladimir I. Arnautov. Estimation of the exterior stability number of a graph by means of the minimal degree of the vertices. *Prikladnaja Matematika i Programmirovanie*, 11:3–8, 1974.

[7] Stefan Arnborg, Andrzej Proskurowski, and Derek G. Corneil. Forbidden minors characterization of partial 3-trees. *Discrete Mathematics*, 80(1):1–19, 1990.

[8] Brenda S. Baker. Approximation algorithms for NP-complete problems on planar graphs. *Journal of the ACM*, 41(1):153–180, 1994.

[9] Patrick Bellenbaum and Reinhard Diestel. Two short proofs concerning tree-decompositions. *Combinatorics, Probability and Computing*, 11(6):541–547, 2002.

[10] Claude Berge. Two theorems in graph theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 43(9):842–844, 1957.

[11] Claude Berge. *Théorie des graphes et ses applications*. Dunod, 1958.

[12] Claude Berge. Perfect graphs. In *Six Papers on Graph Theory*, pages 1–21. Indian Statistical Institute, Calcutta, 1963.

[13] Marthe Bonamy, François Dross, Tomáš Masařík, Wojciech Nadara, Marcin Pilipczuk, and MichałPilipczuk. Jones' Conjecture in subcubic graphs. *Electronic Journal of Combinatorics*, 2021.

[14] J. Adrian Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory*, volume 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2008.

[15] R.L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Proceedings Cambridge Phil. Soc.*, 37(37):194–197, 1941.

[16] Arthur Cayley. On the theory of the analytical forms called trees. *Philosophical Magazine, Series 4*, 13:172–176, 1857.

[17] Arthur Cayley. On the mathematical theory of isomers. *Philosophical Magazine, Series 4*, 47:444–447, 1874.

[18] Arthur Cayley. A theorem on trees. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 23:376–378, 1889.

[19] Glenn G. Chappell, John Gimbel, and Chris Hartman. On cycle packings and feedback vertex sets. *Contributions to Discrete Mathematics*, 9(2):17–34, 2014.

[20] Hong-Bin Chen, Hung-Lin Fu, and Chie-Huai Shih. Feedback vertex set on planar graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 16(6):2077–2082, 2012.

[21] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul D. Seymour, and Robin Thomas. The strong perfect graph theorem. *Ann. of Math. (2)*, 164(1):51–229, 2006.

[22] Vašek Chvátal. A greedy heuristic for the set-covering problem. *Mathematics of Operations Research*, 4(3):233–235, 1979.

[23] Vašek Chvátal and Paul Erdős. A note on Hamiltonian circuits. *Discrete Math.*, 2:111–113, 1972.

[24] Ernest J. Cockayne, Sue E. Goodman, and Stephen T. Hedetniemi. A linear algorithm for the domination number of a tree. *Information Processing Letters*, 4(2):41–44, 1975.

[25] Reinhard Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 5 edition, 2017.

[26] Robert P. Dilworth. A decomposition theorem for partially ordered sets. *Annals of Mathematics*, 51(1):161–166, 1950.

[27] Irit Dinur and David Steurer. Analytical approach to parallel repetition. In *Proceedings of the 46th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 624–633, 2014.

[28] Gabriel A. Dirac. In abstrakten Graphen vorhandene vollständige 4-Graphen und ihre Unterteilungen. *Math. Nachr.*, 22:61–85, 1960.

[29] Gabriel A. Dirac. Short proof of Menger's graph theorem. *Mathematika*, 13:42–44, 1966.

[30] Paul Erdős and Tibor Gallai. Graphs with prescribed degrees of vertices. *Mat. Lapok.*, 11:264–274, 1960.

[31] P. Erdős. Graph theory and probability. *Canad. J. Math.*, 11:34–38, 1959.

[32] Paul Erdős. Some remarks on the theory of graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53:292–294, 1947.

[33] Paul Erdős. On the structure of linear graphs. *Israel J. Math.*, 1:156–160, 1963.

[34] Paul Erdős and András Hajnal. On chromatic number of graphs and set-systems. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 1:61–99, 1966.

[35] Paul Erdős and Lajos Pósa. On independent circuits contained in a graph. *Canad. J. Math.*, 17:347–352, 1965.

[36] Paul Erdős and Alfréd Rényi. On a problem in the theory of graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 7:623–641, 1962.

[37] Paul Erdős and George Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.*, 2:463–470, 1935.

[38] Leonhard Euler. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 8:128–140, 1741.

[39] Leonhard Euler. Elementa doctrinae solidorum. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 4:109–140, 1758.

[40] Uriel Feige. A threshold of $\ln n$ for approximating set cover. *Journal of the ACM*, 45(4):634–652, 1998.

[41] L. R. Ford and D. R. Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canad. J. Math.*, 8:399–404, 1956.

[42] Tibor Gallai. Maximum-minimum sätze über graphen. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 9:395–434, 1958.

[43] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, New York, 1979.

[44] G. S. Gasparian. Minimal imperfect graphs: a simple approach. *Combinatorica*, 16(2):209–212, 1996.

[45] Martin Charles Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, volume 57 of *Annals of Discrete Mathematics*. Elsevier, 2 edition, 2004.

[46] Martin Grohe and Dániel Marx. On tree width, bramble size, and expansion. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 99(1):218–228, 2009.

[47] Branko Grünbaum. *Convex polytopes*, volume 221 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2003. Prepared and with a preface by Volker Kaibel, Victor Klee and Günter M. Ziegler.

[48] Hugo Hadwiger. über eine Klassifikation der Streckenkomplexe. *Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich*, 88:133–142, 1943.

[49] S. Louis Hakimi. On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph. I. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 10(3):496–506, 1962.

[50] Rudolf Halin. On the structure of n-connected graphs. In *Recent Progress in Combinatorics (Proc. Third Waterloo Conf. on Combinatorics, 1968)*, pages 91–102. Academic Press, New York, 1969.

[51] Philip Hall. On representatives of subsets. *J. London Math. Soc.*, 10:26–30, 1935.

[52] Václav Havel. A remark on the existence of finite graphs. *Časopis pro pěstování matematiky*, 80:477–480, 1955.

[53] Teresa W. Haynes, Stephen T. Hedetniemi, and Peter J. Slater. *Fundamentals of Domination in Graphs*. Marcel Dekker, New York, 1998.

[54] Percy J. Heawood. Map colour theorem. *Quart. J. Pure Appl. Math.*, 24:332–338, 1830.

[55] Carl Hierholzer. über die möglichkeit, einen linienzug ohne wiederholung und ohne unterbrechung zu umfahren. *Mathematische Annalen*, 6(1):30–32, 1873.

[56] Alan J. Hoffman and Robert R. Singleton. On Moore graphs with diameters 2 and 3. *IBM J. Res. Develop.*, 4:497–504, 1960.

[57] David S. Johnson. Approximation algorithms for combinatorial problems. *Journal of Computer and System Sciences*, 9(3):256–278, 1974.

[58] Gustav Kirchhoff. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird. *Annalen der Physik und Chemie*, 72:497–508, 1847.

[59] Lefteris M. Kirousis, Maria Serna, and Paul Spirakis. Parallel complexity of the connected subgraph problem. *SIAM J. Comput.*, 22(3):573–586, 1993.

[60] Ton Kloks, Chuan-Min Lee, and Jiping Liu. New algorithms for k-face cover, k-feedback vertex set, and k-disjoint cycles on plane and planar graphs. In *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2002)*, volume 2573 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 282–295. Springer, 2002.

[61] Dénes Kőnig. Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. *Math. Ann.*, 77:453–465, 1916.

[62] Dénes Kőnig. Gráfok és mátrixok. *Mat. Fiz. Lapok*, 38:116–119, 1931. In Hungarian.

[63] Dénes Kőnig. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936.

[64] Casimir Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15:271–283, 1930.

[65] Don R. Lick and Arthur T. White. k-degenerate graphs. *Canad. J. Math.*, 22:1082–1096, 1970.

[66] Richard J. Lipton and Robert E. Tarjan. A separator theorem for planar graphs. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 36(2):177–189, 1979.

[67] L. Lovász. On chromatic number of finite set-systems. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 19:59–67, 1968.

[68] László Lovász. Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discrete Math.*, 2:253–267, 1972.

[69] László Lovász. On the ratio of optimal integral and fractional covers. *Discrete Mathematics*, 13(4):383–390, 1975.

[70] Jie Ma, Xingxing Yu, and Wenan Zang. Approximate min-max relations on plane graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 26(1):127–134, 2013.

[71] Wolfgang Mader. Existenz n-fach zusammenhängender Teilgraphen in Graphen genügend großer Kantendichte. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 37:86–97, 1972.

[72] Wolfgang K.W. Mader. Homomorphieeigenschaften und mittlere Kantendichte von Graphen. *Math. Ann.*, 174:265–268, 1967.

[73] Willem Mantel. Problem 28. *Wiskundige Opgaven*, 10:60–61, 1907.

[74] Simon Marshall. A new proof of the girth-chromatic number theorem. Technical Report 2004-531, University of Auckland Department of Mathematics, Auckland, 2004.

[75] David W. Matula. A min–max theorem for graphs with application to graph coloring. *SIAM Reviews*, 10:481–482, 1968.

[76] David W. Matula, George Marble, and Joel D. Isaacson. Graph coloring algorithms. In *Graph theory and computing*, pages 109–122. Academic Press, New York, 1972.

[77] Karl Menger. über reguläre Baumkurven. *Math. Ann.*, 96(1):572–582, 1927.

[78] C. St. J. A. Nash-Williams. Edge-disjoint spanning trees of finite graphs. *J. London Math. Soc.*, 36:445–450, 1961.

[79] C. St. J. A. Nash-Williams. Decomposition of finite graphs into forests. *J. London Math. Soc.*, 39:12, 1964.

[80] Oystein Ore. Note on Hamilton circuits. *Amer. Math. Monthly*, 67:55, 1960.

[81] Oystein Ore. *Theory of Graphs*, volume 38 of *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1962.

[82] Charles Payan. Sur le nombre d'absorption d'un graphe simple. *Cahiers du Centre d'Études de Recherche Opérationnelle*, 17:307–317, 1975.

[83] Charles Payan and Nguyen Huy Xuong. Domination-balanced graphs. *Journal of Graph Theory*, 6(1):23–32, 1982.

[84] Heinz Prüfer. Neuer beweis eines satzes über permutationen. *Arch. Math. Phys.*, 96(27):742–744, 1918.

[85] S. Radziszowski. Small ramsey numbers, electronic journal of combinatorics, dynamic survey ds1, 1994, 28pp., 1994.

[86] Frank P. Ramsey. On a problem of formal logic. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 30:264–286, 1930.

[87] Bruce A. Reed. Tree-width and tangles: a new connectivity measure and some applications. In R. A. Bailey, editor, *Surveys in Combinatorics 1997*, pages 87–162. Cambridge University Press, 1997.

[88] Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul D. Seymour, and Robin Thomas. The four-colour theorem. *J. Combin. Theory Ser. B*, 70(1):2–44, 1997.

[89] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width. *Journal of Algorithms*, 7(3):309–322, 1986.

[90] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. V. Excluding a planar graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 41(1):92–114, 1986.

[91] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. IV. Tree-width and well-quasi-ordering. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 48(2):227–254, 1990.

[92] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph Minors. XX. Wagner's conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B*, 92(2):325–357, 2004.

[93] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph Minors XXIII. Nash-Williams' immersion conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B*, 100(2):181–205, 2010.

[94] Paul D. Seymour. How the proof of the strong perfect graph conjecture was found, manuscript, 2006.

[95] Paul D. Seymour and Robin Thomas. Graph searching and a min-max theorem for tree-width. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 58(1):22–33, 1993.

[96] Petr Slavík. A tight analysis of the greedy algorithm for set cover. *Journal of Algorithms*, 25(2):237–254, 1997.

[97] James Joseph Sylvester. Chemistry and algebra. *Nature*, 17:284, 1878.

[98] George Szekeres and Herbert S. Wilf. An inequality for the chromatic number of a graph. *J. Combinatorial Theory*, 4:1–3, 1968.

[99] Robin Thomas. A Menger-like property of tree-width: the finite case. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 48(1):67–76, 1990.

[100] Andrew Thomason. The extremal function for complete minors. *J. Combin. Theory Ser. B*, 81(2):318–338, 2001.

[101] Paul Turán. Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról. *Mat. Fiz. Lapok*, 48:436–452, 1941. In Hungarian.

[102] William T. Tutte. The factorization of linear graphs. *J. London Math. Soc.*, 22:107–111, 1947.

[103] William T. Tutte. On the problem of decomposing a graph into n connected factors. *J. London Math. Soc.*, 36:221–230, 1961.

[104] William T. Tutte. A theory of 3-connected graphs. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 64 = Indag. Math.*, 23:441–455, 1961.

[105] Vadim G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz*, 3:25–30, 1964. In Russian.

[106] Klaus Wagner. über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. *Math. Ann.*, 114(1):570–590, 1937.

[107] Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, 2 edition, 2001.

[108] Hassler Whitney. Non-separable and planar graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 34(2):339–362, 1932.

ΛΙΣΤΑ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

$\mathrm{Aut}(G)$	*Ὁμάδα αὐτομορφισμῶν τοῦ* G	11
$\mathbf{width}(\mathcal{P})$	*Τὸ πλάτος τῆς μερικῆς διάταξης* $\mathcal{P}$	184
C_r	*Κύκλος μήκους* r	10
D_f	*Τὸ ὑπολειπόμενο γράφημα τῆς ῥοῆς* f	222
$E_G(v)$	*Τὸ σύνολο ἀκμῶν τοῦ* G *ποὺ πρόσκεινται στὴ* v	20
$F(\Gamma)$	*Τὸ σύνολο τῶν ὄψεων τοῦ* Γ	98
$G * H$	*Ἡ διακεκριμένη σύνδεση τῶν* G *καὶ* H	18
$G + H$	*Ἡ διακεκριμένη ἕνωση τῶν* G *καὶ* H	18
$G - E$	*Ἡ ἀφαίρεση τῶν ἀκμῶν τοῦ* E *ἀπὸ τὸ* G	20
$G - S$	*Ἡ ἀφαίρεση τῶν κορυφῶν τοῦ* S *ἀπὸ τὸ* G	20
$G - e$	*Ἡ ἀφαίρεση τῆς ἀκμῆς* $e \in E(G)$ *ἀπὸ τὸ* G	20
$G - v$	*Ἡ ἀφαίρεση τῆς κορυφῆς* $v \in V(G)$ *ἀπὸ τὸ* G	20
$G[F]$	*Τὸ ὑπογράφημα ποὺ ἐνάγεται ἀπὸ τὸ* $F \subseteq E(G)$	23
$G[S]$	*Τὸ ὑπογράφημα ποὺ ἐνάγεται ἀπὸ τὸ* $S \subseteq V(G)$	23
$G \cap H$	*Ἡ τομὴ τῶν* G *καὶ* H	18
$G \cup H$	*Ἡ ἕνωση τῶν* G *καὶ* H	18
$G \oplus H$	*Τὸ ἄθροισμα κλικῶν τῶν* G *καὶ* H	19
G/v	*Ἡ διάλυση τῆς κορυφῆς* $v \in V(G)$ *στὸ* G	21
G/e	*Ἡ σύνθλιψη τῆς ἀκμῆς* $e \in E(G)$ *στὸ* G	22
$G \square H$	*Τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο τῶν* G *καὶ* H	18
$G \uparrow (e_1, e_2)$	*Ἡ ἀνύψωση τοῦ ζεύγους ἀκμῶν* (e_1, e_2)	24
$G^{[k]}$	*Τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο* k *ἀντιτύπων τοῦ* G	19

$G^{\langle k \rangle}$	*Ἡ διακεκριμένη σύνδεση k ἀντιτύπων τοῦ G*	19
$H(d)$	*Ὁ d-ὁστὸς ἁρμονικὸς ἀριθμός*	212
$K_{1,r}$	*r-ἄστρο*	9
$K_{l_1,\ldots,l_k}$	*Πλήρως k-μερὲς γράφημα*	122
K_r	*r-κλίκα*	8
$L(G)$	*Τὸ γραμμικὸ γράφημα τοῦ G*	17
$N_G(S)$	*Ἡ γειτονιὰ τοῦ συνόλου κορυφῶν S στὸ G*	20
$N_G[v]$	*Ἡ κλειστὴ γειτονιὰ τῆς κορυφῆς v στὸ G*	201
P_r	*Μονοπάτι μὲ r-κορυφές*	9
Q_r	*r-διάστατος κύβος*	10
S_M	*Τὸ σύνολο τῶν ἐλεύθερων κορυφῶν ὡς πρὸς τὸ ταίριασμα M*	152
$T_p(n)$	*Τὸ γράφημα Turán*	142
$V(F)$	*Τὸ σύνολο κορυφῶν ποὺ εἶναι ἄκρα ἀκμῶν στὸ F*	20
W_r	*Τροχὸς μὲ r ἀκτῖνες*	76
$\Delta(G)$	*Ὁ μέγιστος βαθμὸς τοῦ G*	29
$\alpha(G)$	*Ὁ ἀριθμὸς ἀνεξαρτησίας τοῦ G*	144
$\chi(G)$	*Ὁ χρωματικὸς ἀριθμὸς τοῦ G*	121
$\cong$	*Ἰσομορφισμὸς ὁμάδων*	11
$\deg_G(v)$	*Ὁ βαθμὸς τῆς κορυφῆς v στὸ G*	29
$\delta(G)$	*Ὁ ἐλάχιστος βαθμὸς τοῦ G*	29
$\delta^*(G)$	*Ὁ ἐκφυλισμὸς τοῦ G*	31, 34
$\epsilon(G)$	*Ἡ πυκνότητα τοῦ G*	30
$\kappa(G)$	*Ἡ συνεκτικότητα τοῦ G*	67
$\kappa_G(x, y)$	*Ἡ τοπικὴ συνεκτικότητα τῶν κορυφῶν x καὶ y*	70
$\lambda(G)$	*Ἡ συνεκτικότητα ἀκμῶν τοῦ G*	86
$\leq_{\epsilon\lambda}$	*Ἡ σχέση ἐλλάσονος*	23
$\leq_{\epsilon\mu}$	*Ἡ σχέση ἐμβύθισης*	25
$\leq_{\tau\pi}$	*Ἡ σχέση τοπολογικοῦ ἐλάσσονος*	23
$\mathbf{ds}(G)$	*Ὁ ἀριθμὸς κυριαρχίας τοῦ G*	201
$\mathbf{τιμὴ}(f)$	*Ἡ τιμὴ τῆς ῥοῆς f*	220
$\omega(G)$	*Ὁ ἀριθμὸς κλίκας τοῦ G*	141
$\overline{G}$	*Τὸ συμπλήρωμα τοῦ G*	17
$\overleftarrow{\delta}(L)$	*Τὸ πλάτος τῆς γραμμικῆς διάταξης L*	34
$\overleftarrow{\delta}_L(v)$	*Ὁ ὀπισθόβαθμος τῆς v ὡς πρὸς τὴ γραμμικὴ διάταξη L*	34

$\sim$	*Σχέση ὁμοιότητας μεταξὺ δύο κορυφῶν*	12
$\simeq$	*Ἰσομορφισμὸς γραφημάτων*	7
$\subseteq_{\epsilon\nu}$	*Ἡ σχέση ἐναγόμενου ὑπογραφήματος*	23
$\subseteq_{\pi\alpha}$	*Ἡ σχέση παραγόμενου ὑπογραφήματος*	23
$\subseteq_{\upsilon\pi}$	*Ἡ σχέση ὑπογραφήματος*	23
$\triangle$	*Ἡ συμμετρικὴ διαφορὰ δύο συνόλων*	152
$c(A, B)$	*Ἡ χωρητικότητα τῆς (s, t)-τομῆς (A, B)*	221
$d(G)$	*Ὁ μέσος βαθμὸς τοῦ G*	29
$k \cdot G$	*Ἡ διακεκριμένη ἕνωση k ἀντιτύπων τοῦ G*	19
$m(G)$	*Τὸ πλῆθος ἀκμῶν τοῦ G*	5
$n(G)$	*Τὸ πλῆθος κορυφῶν τοῦ G*	5
$r(k, l)$	*Ὁ ἀριθμὸς Ramsey*	145
νc(G)	*Ὁ ἀριθμὸς καλύμματος κορυφῶν τοῦ G*	149
$\mathcal{L}(G)$	*Τὸ σύνολο τῶν γραμμικῶν διατάξεων τοῦ G*	33
διάμετρος(G)	*Ἡ διάμετρος τοῦ G*	44
κέντρο(G)	*Τὸ σύνολο τῶν κεντρικῶν κορυφῶν τοῦ G*	44
πα(G)	*Τὸ πλάτος ἀπόστασης τοῦ G*	50
περίμετρος(G)	*Ἡ περίμετρος τοῦ G*	51
περιφέρεια(G)	*Ἡ περιφέρεια τοῦ G*	52
χορδικότητα(G)	*Ἡ χορδικότητα τοῦ G*	52
ἀκτῖνα(G)	*Ἡ ἀκτῖνα τοῦ G*	44
ἀπόκεντρο(G)	*Τὸ σύνολο τῶν ἀπόκεντρων κορυφῶν τοῦ G*	44
ἀπόσταση$_G(x, y)$	*Ἡ ἀπόσταση τῶν κορυφῶν x καὶ y στὸ G*	44
ἐκκεντρότητα$_G(x)$	*Ἡ ἐκκεντρότητα τῆς κορυφῆς x στὸ G*	44

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΌΡΩΝ

Ἄθροισμα
  Κλικῶν 19
Ἀκμή 5
  Ἄκρα 5
  Γέφυρα 59
  Κέντρο (τοῦ $K^+_{2,r}$) 73
  Κρίσιμη 71
  Ὁμοτοπικὲς (ἀκμές) 99
  Ὀπίσθιες (ἀκμές) 169
  Πολυακμή 13
  Προσκείμενη (σὲ κορυφή) 20
  Σύνθλιψη 22
  Ὑποδιαίρεση 21
Ἀκολουθία
  Prüfer 93
  Γραφική 35
  Κακή 235
Ἄλυσίδα 182
  Ἀντιαλυσίδα 182
Ἀμαλγαμάτωση 255
Ἀνύψωση 25
Ἄπληστος ἀλγόριθμος 210
Ἀποσύνθεση
  Ἀπόστασης 47
Ἀριθμός
  Ramsey 145
  Ἀνάδρασης κορυφῶν 161
  Ἀνεξαρτησίας 144
  Καλύμματος κορυφῶν 149
  Κλίκας 141
  Πακεταρίσματος κύκλων 162
  Χρωματικός 121
  Χρωματικὸς ἀκμῶν 136
Ἁρμονικὸς ἀριθμός 213
Ἄστρο 9
Αὐτομορφισμός
  Γραφήματος 11
  Ὁμάδα 11
Βαθμός
  Ἐλάχιστος (γραφήματος) 29
  Κορυφῆς 29
  Μέγιστος (γραφήματος) 29
  Μέσος (γραφήματος) 30
  Ὀπισθόβαθμος 34

Βάτο 254
Ἀριθμὸς βάτου 254
Κάλυμμα 254
Τάξη 254
Βεντάλια 67
Χρωματισμοῦ ἀκμῶν 138
Γινόμενο
Καρτεσιανό, γραφημάτων 18
Γράφημα 5
Berge 174
k-μερές 122
k-συνεκτικό 66
k-χρωματίσιμο 121
k-χρωματίσιμο ὡς πρὸς τὶς ἀκμές 136
(k)-ω-ἀκραῖο 142
Petersen 8
Turán 141
Ἀκτῖνα 44
Ἄκυκλο 89
Ἀναπαράσταση 5
Ἀντίστοιχο (σὲ ἐνεπίπεδο) 99
Ἀπαγορευμένα 234
Ἄπειρο 13
Αὐτομορφισμός 11
Βάρος 13
Βεβαρημένο 13
Γειτονιά 20
Γραμμικό 17
Διακεκριμένα (γραφήματα) 18
Διάμετρος 44
Διαστημάτων 177
Διατεταγμένο 13
Διαχωρισμοῦ 177
Διμερές 124
Δισυνεκτικό 60
Εἰκοσάεδρο 122
Ἐκκεντρότητα 44
Ἐκφυλισμός 31
Ἐνεπίπεδο 98
Ἐξωεπίπεδο 116
Ἰσομορφισμός 7
Κανονικό 30
Κενό 19
Κλειστὴ γειτονιά 201
Μέγεθος 5
Μέρη 122, 124
Μεταβατικό 12
Περίμετρος 51
Περιφέρεια 52
Πλατωνικό 109
Πλῆρες 9
Πλήρως k-μερές 122
Πλήρως πολυμερές 122
Πυκνότητα 30
Συγκρισιμότητας 182
Συμπλήρωμα 17
Συνδιμερές 174
Συνεκτικό 57
Συνσυγκρισιμότητας 186
Τάξη 5
Τέλειο 173
Τομῶν 177
Τροχιά 12
Ὑποδιαίρεση 21
Ὑπολειπόμενο 222
Χορδικό 175
Χορδικότητα 52
Δάσος 89
Δενδρικότητα 168
Δέντρο 89
Μὲ ἐτικέτες 93
Παραγόμενο 91

Δεντρο-ἀποσύνθεση 246
  $\mathcal{B}$-ἀποδεκτή 258
  Μέρος 246
  Πλάτος 246
Δεντροπλάτος 246
Διάλυση
  Κορυφῆς 21
Διάταξη
  Γραμμική 33
  Καλὴ μερική 235
  Καλῶς-μερικὰ-διατεταγμένο (σύνολο) 235
  Μερική 23
Διαχωριστής 59
  (a, b)-διαχωριστής 59
  (S, T)-ἀκμοδιαχωριστής 231
  (s, t)-ἀκμοδιαχωριστής 226
  $\frac{2}{3}$-διαχωριστής 261
  Ἐλαχιστικός 59
  Ἐλάχιστος 59
  Τάξη διαχωριστή 261
Δίκτυο 219
  Καταβόθρα 219
  Πηγή 219
Δίσκος 99
  Τριγωνοποιημένος 261
Εἰκασία
  Hadwiger 135
  Jones, Kloks, Lee & Liu 168
  Wagner 236
  Ἐμβυθίσεων (Nash-Williams) 238
  Τέλειων γραφημάτων 173
  Τέλειων γραφημάτων (Ἰσχυρή) 173
  Τεσσάρων χρωμάτων 127
Ἐκφυλισμός 31
Ἔλασσον 23
  Τοπολογικό 23
Ἐμβάπτιση
  Ἐξωεπίπεδη 116
  Ἐπίπεδη 100
Ἐμβύθιση 25
Ἕνωση
  Γραφημάτων 18
  Διακεκριμένη (γραφημάτων) 18
Ἐφαπτόμενα σύνολα 254
Ἡμιακέραιος 230
Θεώρημα
  Berge 153
  Brooks 131
  Dilworth 184
  Dirac 84
  Erdős 147
  Erdős, Gallai 37
  Erdős & Pósa 165
  Erdős & Szekeres 146
  Euler 190
  Ford & Fulkerson 223
  Gallai 174
  Hall 156
  Heawood 127
  Kloks, Lee & Liu 167
  Kőnig (κανονικὴ ἐπέκταση) 30
  Kőnig (χρωματισμὸς ἀκμῶν) 136
  Kőnig (καλύμματα καὶ ταιριάσματα) 154
  Kuratowski-Понтрягин 115
  Lipton & Tarjan 261
  Menger (κορυφικὴ μορφή) 67
  Menger (ἀκμικὴ μορφή) 226
  Nash-Williams 169
  Ore 197
  Ore (κυριαρχία) 206

Robertson & Seymour 253
Seymour & Thomas 257
Thomason 136
Turán 144
Tutte (τέλεια ταιριάσματα) 158
Tutte (3-συνεκτικὰ γραφήματα) 82
Vizing 138
Wagner 114
Whitney 103
Ἐλασσόνων Γραφημάτων 236
Μέγιστης ῥοῆς–ἐλάχιστης τομῆς 224
Τέλειων γραφημάτων 178
Τέλειων γραφημάτων (Ἰσχυρό) 186
Τεσσάρων χρωμάτων 128
Θηλιά 13
Ἰσομορφισμός
Γραφημάτων 7
Καλὸ ζευγάρι 235
Κάλυψη συνόλου 210
Σύμπαν 210
Κλάδεμα 208
Κλάση γραφημάτων 24
Κλειστότητα 24
Κληρονομικότητα 24
Μονοτονία 24
Κλίκα 9
Κόμβος-έστία 255
Κορυφή 5
Ἀντιδιαμετρικὲς (κορυφές) 44
Ἁπλοειδής 74
Ἀπόκεντρη 44
Ἀπομονωμένη 20
Ἀπόσταση 44
Ἀρθρική 59
Βαθμός 29
Διάλυση 21
Διπλασιασμός 142
Ἐλεύθερη (ὡς πρὸς ταίριασμα) 152
Ἐσωτερική 9
Ἰσχυρὰ στηρικτική 207
Κάλυμμα (κορυφῶν) 149
Κεντρική 44
Κῦρος 96
Ὅμοιες (κορυφές) 12
Στηρικτική 207
Συνδεδεμένες (κορυφές) 5
Κύβος 10
Τρισδιάστατος 8
Κυκλικὴ παράθεση 101
Κύκλος 10
Hamilton 196
Ἄχορδος 52
Μῆκος 10
Τόξα 261
Χορδή 52
Λῆμμα
Χειραψίας 30
Μέθοδος ἐπαύξησης 224
Μετα-ἀλγόριθμος 237
Μονοπάτι 9
Hamilton 196
(S, T)-μονοπάτι 231
(x, y)-μονοπάτι 9
Ἀκμοξένα (μονοπάτια) 226
Ἄκρα 9
Αὐξητικό 152
Ἐναλλασσόμενο 152
Ἐπαύξησης 222
Ἐσωτερικῶς διακεκριμένα (μονοπάτια) 60
Μῆκος 9
Ὄψη 98

Ἐξωτερική 99
Ἐσωτερική 99
Τριγωνική 99
Πακετάρισμα
Κύκλων 161
Παραμετρικὴ Πολυπλοκότητα 245
Περιήγηση 41
Euler 189
Συμμετρικὲς (περιηγήσεις) 101
Περίπατος 41
Euler 191
Ἄκρα 41
Πίνακας ἀναπαράστασης 7
Πλάτος
Ἀπόστασης 50
Γραμμικῆς διάταξης 34
Μερικῆς διάταξης 184
Πολυγράφημα 13
Αὐτοδυϊκό 106
Δυϊκό 105
Ἐνεπίπεδο 97
Ἐπίπεδο 99
Τοπολογικῶς ἰσόμορφα (πολυγραφήματα) 101
Πολύεδρο
Κανονικό 109
Κυρτό 108
Πλατωνικό 109
Προσεγγιστικὸς ἀλγόριθμος 210
Λόγος προσέγγισης 210
Πυκνότητα 30
Ῥοή 219
Μέγιστη 220
Τιμή 220
Σταυροειδὲς σύνολο 254
Κέντρο 254
Στένωση 222
Στερεογραφικὴ προβολή 103
Στεφάνι 207
Συμμετρικὴ διαφορά 152
Σύνδεση
Διακεκριμένη (γραφημάτων) 18
Συνεκτικότητα 66
Ἀκμῶν 86
Τοπική 70
Σύνθλιψη
Ἀκμῆς 22
Συνιστῶσα
Δισυνεκτική 64
Συνεκτική 58
Σύνολο
Ἀνεξάρτητο 144
Σύνολο ἀνάδρασης κορυφῶν 161
Σύνολο κυριαρχίας 201
Ἀριθμός 201
Ἐλαχιστικό 202
Ἐλάχιστο 202
Τέλειο 216
Σύνολο παρεμπόδισης 234
Σχάρα 10
Ταίριασμα 151
Μεγιστικό 157
Τέλειο 151
Τέλειοι κώδικες 217
Τεμάχιο 64
Τομή
Γραφημάτων 18
Δικτύου 221
Ἐλάχιστη (δικτύου) 221
Τρίγωνο 10
Τριγωνοποίηση
Ἐπίπεδη 107

Τροχός 76
Τροχιά 12
Τρύπα 52
Τύπος
  Cayley 93
  Euler 107
Ὑπεργράφημα 13
Ὑπογράφημα 23
  Ἐναγόμενο 23
  Ἐνεπίπεδο 98
  Παραγόμενο 23
Ὑποδιαίρεση
  Ἀκμῆς 21
  Γραφήματος 21
Φύλλο 89
Χαρακτηρισμὸς Kuratowski 234
Χρωματισμός
  k-χρωματισμὸς ἀκμῶν 136
  k-χρωματισμὸς κορυφῶν 121
  Πάνχρωμο σύνολο κορυφῶν 125
  Χρωματικὴ κλάση 121
Χωρητικότητα 219
  Τομῆς 221
  Ὑπολειπόμενη 222